تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net

دفترچه پاسخ

آزمون ۲۰ آبان ۱۴۰۱

اختصاصی دوازدهم ریاضی (دفترچه مشترک)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-وحید امیرکیایی- مهدی بیرانوند-شاهین پروازی-عادل حسینی-افشین خاصه‌خان-بابک سادات میلاد سجادی‌لاریجانی-علی سرآبادانی-علی سلامت-سامان سلامیان-محمدجواد محسنی-میلاد منصوری-سروش موئینی جهانبخش نیکنام-امیر وفائی-سهند ولی‌زاده-فهیمه ولی‌زاده
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-عادل حسینی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-مسعود درویشی-سوگند روشنی محمد صحت‌کار-رضا عباسی‌اصل-احمدرضا فلاح-محمد کریمی-امیر وفائی
	ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-عادل حسینی-مسعود درویشی-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی-علی صادقی محمد صحت‌کار-عزیزاله علی‌اصغری-احمدرضا فلاح-نیلوفر مهدوی-مجید نیکنام
	فیزیک	شهرام احمدی‌دارانی-خسرو ارغوانی‌فرد-بابک اسلامی-مهدی آذرنسب-زهره آقامحمدی-مهدی براتی-بیتا خورشید-میثم دشتیان محمدعلی راست‌پیمان-فرشید رسولی-سیوان سعیدی-امیررضا صدریکتا-سعید طاهری‌بروجنی-یاسر علیلو-علی قائمی مسعود قره خانی-محسن قندچلر-مصطفی کیانی-علیرضا گونه-محمدصادق مام‌سیده-غلامرضا محبی-احسان محمدی حسین مخدومی-محمود منصوری-سعید نصیری-شادمان ویسی
	شیمی	بیژن باغبان‌زاده-علی بیرفتی-محمدرضا پورجاوید-حامد پویان‌نظر-بهزاد تقی‌زاده-کامران جعفری-امیر حاتمیان پیمان خواجوی‌مجد-موسی خیاط‌علیمحمدی-صادق درتومیان-حمید ذبحی-فرزاد رضایی-روزبه رضوانی-امیرحسین طیبی رسول عابدینی زواره-محمدپارسا فراهانی-محمد فلاح‌نژاد-فاضل قهرمانی‌فرد-علیرضا کیانی‌دوست

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	بابک اسلامی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی علی ارجمند علی سرآبادانی	علی محمدزاده شبستری	علی محمدزاده شبستری	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	یاسر راش محمدحسن محمدزاده مقدم
	ویراستار استاد: فرشاد حسن‌زاده	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: سیدعلی میرنوری	بازبینی نهایی: امیرحسین عزیزی
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	مجتبی خلیل‌ارجمندی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مازیار شیروانی مقدم — مسئول دفترچه: محمدرضا اصفهانی
حروف‌نگار	میلاد سیاوشی
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{۳}-ax+b=(x-۱)(x+۱)q(x)+r$$

$x=۱$ و $x=-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

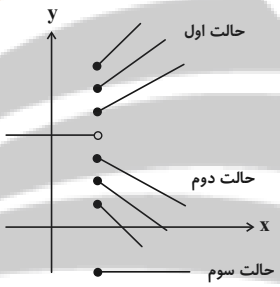
$$\begin{cases}-۱+a+b=۰+r\Rightarrow b+a=r+۱\\ ۱-a+b=۰+r\Rightarrow b-a=r-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow b=r, a=۱$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

برای این‌که این تابع روی دامنه‌اش یکنوا باشد، باید یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:



حالت اول: تابع روی بازهٔ $(-\infty , ۱]$ اکیداً صعودی باشد:

$$\begin{cases}m-۲>۰\Rightarrow m>۲\\ f(۱)\geq ۲\Rightarrow m-۲-۲m\geq ۲\Rightarrow m\leq -۴\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$$

این حالت برای تابع غیرممکن است.

حالت دوم: تابع روی بازهٔ $(-\infty , ۱]$ اکیداً نزولی باشد:

$$\begin{cases}m-۲<۰\Rightarrow m<۲\\ f(۱)\leq ۲\Rightarrow m-۲-۲m\leq ۲\Rightarrow m\geq -۴\end{cases}\Rightarrow m\in[-۴ , ۲)$$

حالت سوم: تابع روی بازهٔ $(-\infty , ۱]$ ثابت باشد:

$$m-۲=۰\Rightarrow m=۲\Rightarrow f(۱)=-۴\Rightarrow f(x)=-۴$$

بنابراین با توجه به حالت‌های فوق $m\in[-۴ , ۲]$ و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۶ است.

(حسابان ۲: تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

تابع f با دامنهٔ $(-\infty , ۱]$ اکیداً نزولی است، پس داریم:

$$f(f(x))>f(x+۲)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}}f(x)<x+۲$$

با در نظر گرفتن شرط دامنه باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$x+۲>۲-\sqrt{x-۱}\geq ۱$$

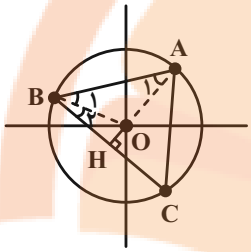
$$\Rightarrow\begin{cases}x+۲>۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow x>-\sqrt{x-۱}\Rightarrow x\geq ۱\\ ۲-\sqrt{x-۱}\geq ۱\Rightarrow \sqrt{x-۱}\leq ۱\Rightarrow ۱\leq x\leq ۲\end{cases}$$

اشتراک مجموعه‌های بالا بازهٔ $[۲ , ۱]$ است.

(حسابان ۲: تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

عرض نقطهٔ B با طول نقطهٔ A برابر است، پس با توجه به شکل، نقطهٔ B دوران یافته نقطهٔ A با زاویهٔ دوران ۹۰° است، این یعنی در شکل زیر $A\hat{O}B=۹۰^\circ$.



پس مثلث AOB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۴۵^\circ$.

از طرفی زاویهٔ C، محاطی رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ است و داریم:

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{A\hat{O}B}{۲}=۴۵^\circ$$

روش اول: از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\hat{A}}{BC}\quad\frac{\sin\hat{C}}{AB}\xrightarrow[\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}]{}\frac{\sin\hat{A}}{\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ$$

روش دوم: در مثلث BOC، ارتفاع OH را رسم می‌کنیم و می‌دانیم این ارتفاع عمودمنصف BC است، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{OBH}: OB=۱\ ,\quad BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\cos\hat{B}_۲=\frac{BH}{OB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos۳۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۲=۳۰^\circ$$

پس زاویهٔ B برابر $\hat{B}=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۷۵^\circ$ است. در نهایت زاویهٔ A نیز به دست می‌آید:

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۷۵^\circ+۴۵^\circ)=۶۰^\circ$$

(ریاضی ۱: مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۳)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

عبارت مخرج در صورت تعریف‌پذیری همواره مثبت است. پس برای این‌که کل عبارت منفی شود، صورت یعنی $\cos\theta$ نیز باید منفی باشد، یعنی θ باید در ربع‌های دوم و سوم قرار بگیرد. حال برای این‌که عبارت مخرج تعریف‌پذیر باشد، لازم است $\theta\sin\theta>۰$ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases}\theta<۰\ ,\ \sin\theta<۰\Rightarrow\ \theta\text{ در ربع‌های سوم و چهارم است.}\\ \theta>۰\ ,\ \sin\theta>۰\Rightarrow\ \theta\text{ در ربع‌های اول و دوم است.}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن شرط $\cos\theta < 0$ نیز نتیجه می‌گیریم، اگر $\theta > 0$ باشد، انتهای کمان آن باید در ربع دوم و اگر $\theta < 0$ باشد، انتهای کمان آن باید در ربع سوم باشد. در بین گزینه‌های داده شده فقط $\theta = 485^\circ$ است که در شرایط گفته شده صدق می‌کند؛ زیرا مثبت است و انتهای آن نیز در ربع دوم قرار می‌گیرد.

(ریاضی ۱: مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

$$3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 2 = 0$$

طرفین تساوی بالا را بر $\cos^2\alpha \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 3\tan^2\alpha - 1 - \tan\alpha - 2(1+\tan^2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha - \tan\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2\alpha - 3 = \tan\alpha \quad (*)$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$\Rightarrow \tan\alpha - 3\cot\alpha = \tan\alpha - \frac{3}{\tan\alpha}$$

$$\frac{\tan^2\alpha - 3}{\tan\alpha} \overset{(*)}{=} \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha} \quad 1$$

(ریاضی ۱: مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(میلاد منصوری)*

$$\tan 200^\circ \quad \tan(180^\circ + 20^\circ) = \tan 20^\circ$$

$$\cos 250^\circ \quad \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\cos 650^\circ \quad \cos(630^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\sin 700^\circ \quad \sin(720^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{\tan 20^\circ - \sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ} \quad \frac{1}{2\cos 20^\circ} - \frac{1}{2}$$

باید از اتحاد $\tan^2 20^\circ \quad \frac{1}{\cos^2 20^\circ} - 1$ استفاده کنیم. در نتیجه از رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{1}{\cos 20^\circ} \quad 2A + 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 20^\circ} = 4A^2 + 4A + 1$$

$$\Rightarrow \tan^2 20^\circ = 4A^2 + 4A = 4A(A+1)$$

$$\xrightarrow{\tan 20^\circ > 0} \tan 20^\circ = \sqrt{4A(A+1)} = 2\sqrt{A(A+1)}$$

(حسابان ۱: مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی سرآبادانی)*

قاعدهٔ مثلث هاشورخورده برابر فاصلهٔ دو مینیمم متوالی است که برابر دورهٔ تناوب تابع است:

$$8 \quad T \quad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \quad \text{قاعدهٔ مثلث}$$

ارتفاع مثلث نیز برابر اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع است که دو برابر قدر مطلق ضریب $\sin$ خواهد شد:

$$y_{max} - y_{min} = 2\times 3 = 6 \quad \text{ارتفاع مثلث}$$

پس مساحت برابر است با:

$$S \quad \frac{1}{2}(8)(6) = 24$$

(حسابان ۲: مثلثات؛ صفحهٔ ۲۷)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد سبادی‌لاریجانی)*

نقاط اکسترمم (مینیمم یا ماکزیمم) این تابع در جاهایی رخ می‌دهند که $\cos(\ )$ برابر ± 1 باشد. برای رسم تابع داده شده ابتدا باید نمودار $y \quad \cos x$ را $\frac{\pi}{5}$ واحد به راست انتقال دهیم، در نتیجه اولین اکسترمم جایی رخ می‌دهد که $bx - \frac{\pi}{5}$ برابر صفر شود و دومین نقطه (که طول آن برابر $\frac{2\pi}{5}$ است) هنگامی که $bx - \frac{\pi}{5}$ برابر π شود.

$$\Rightarrow b(\frac{2\pi}{5}) - \frac{\pi}{5} = (2b-1)\frac{\pi}{5} = \pi \Rightarrow 2b - 1 = 5 \Rightarrow b = 3$$

مقدار مینیمم تابع برابر -1 شده است و داریم:

$$y_{min} \quad a - 3 = -1 \Rightarrow a = 2$$

(حسابان ۲: مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(وحید امیرکیایی)*

مجانب‌های نمودار تانژانت، جایی رخ می‌دهد که ورودی تابع تانژانت، مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ شود، پس به ازای $x = \frac{5}{4}$ (که دومین مجانب مثبت است) ورودی تابع تانژانت باید برابر $\frac{3\pi}{2}$ (دومین مضرب مثبت فرد $\frac{\pi}{2}$) شود:

$$\Rightarrow \pi(b(\frac{5}{4}) + \frac{1}{4}) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{5b+1}{4} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow b = 1$$

پس تا اینجا ضابطهٔ تابع $y \quad 1 - a\tan^2\pi(x + \frac{1}{4})$ است. از طرفی مقدار تابع در $x = -\frac{1}{12}$ برابر صفر شده است.

$$\Rightarrow 0 = 1 - a\tan^2\pi(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) = 1 - a\tan^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 4$$

(حسابان ۲: مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

ریاضیات پایه

۱۱- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

در ابتدا باید مجموعه‌های A و B بازه باشند، یعنی $۲a > -a$ و $a-۲ > -۳$ باشد:

$$\begin{cases} ۲a > -a \Rightarrow a > ۰ \\ a-۲ > -۳ \Rightarrow a > -۱ \end{cases} \Rightarrow a > ۰ \qquad (I)$$

برای این‌که اجتماع دو بازه، یک بازه شود، لازم است که جدا از هم نباشند، پس ابتدا فرض می‌کنیم دو بازه جدا از هم‌اند، سپس جواب‌های به دست آمده را از (I) کم می‌کنیم.

دو حالت داریم که A و B جدا از هم باشند:

$$\begin{cases} ۲a \le -۳ \Rightarrow a \le -\frac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ a-۲ \le -a \Rightarrow a \le ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a \le ۱$$

این یعنی به ازای $a \le ۱$ ، بازه‌های A و B جدا هستند، در نتیجه با توجه به (I) به ازای $a > ۱$ ، اجتماع بازه‌های A و B یک بازه می‌شود.

(ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** (میلاد منصوری)

عبارت را باید برحسب توان ۲ و ۳ بنویسیم:

$$\frac{۲۷^n \times (\frac{۱}{۶})^{\frac{۵}{۳}}}{۱۲^m \times (\frac{۲}{۳})^{\frac{۷}{۶}}} \quad \frac{۳^{-\frac{۵}{۳}}}{۳^{-\frac{۷}{۶}}} \times \frac{۳^{۳n} \times ۲^{-\frac{۵}{۳}}}{۲^{۲m} \times ۳^m \times ۲^{\frac{۷}{۶}}}$$

$$= ۲^{(-\frac{۵}{۳}-۲m-\frac{۷}{۶})} \times ۳^{(۳n-\frac{۵}{۳}-m+\frac{۷}{۶})} = ۲^{\frac{۳}{۲}}$$

توان عدد ۲ باید برابر $\frac{۳}{۲}$ و توان عدد ۳ باید برابر صفر شود:

$$-\frac{۵}{۳}-۲m-\frac{۷}{۶} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow m = -\frac{۱۳}{۶}$$

$$۳n-\frac{۵}{۳}-m+\frac{۷}{۶} = ۰ \Rightarrow ۳n = \frac{۵}{۳}-\frac{۱۳}{۶}-\frac{۷}{۶}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{۵}{۹}$$

(ریاضی ۱: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** (سامان سلامیان)

از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{x \pm \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^۲-y}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^۲-y}}{۲}}$$

پس داریم:

$$\sqrt{۸-۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۸-\sqrt{۸}} = \sqrt{\frac{۸+\sqrt{۵۶}}{۲}} - \sqrt{\frac{۸-\sqrt{۵۶}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۸-۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۴+\sqrt{۱۴}} - \sqrt{۴-\sqrt{۱۴}}$$

از طرفی عبارت $\sqrt{۹-۴\sqrt{۲}}$ نیز برابر $۲\sqrt{۲}-۱$ است. زیرا داریم:

$$(۲\sqrt{۲}-۱)^۲ = ۸+۱-۴\sqrt{۲} = ۹-۴\sqrt{۲}$$

پس عبارت صورت سؤال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{-\sqrt{۴-\sqrt{۱۴}}+\sqrt{۴+\sqrt{۱۴}}}{\sqrt{۴-\sqrt{۱۴}}} - ۲\sqrt{۲}+۱$$

$$-۱+\frac{\sqrt{۴+\sqrt{۱۴}}}{\sqrt{۴-\sqrt{۱۴}}} - ۲\sqrt{۲}+۱$$

$$-۲\sqrt{۲}+\frac{\sqrt{۴+\sqrt{۱۴}} \times \sqrt{۴+\sqrt{۱۴}}}{\sqrt{۴-\sqrt{۱۴}} \times \sqrt{۴+\sqrt{۱۴}}}$$

$$-۲\sqrt{۲}+\frac{۴+\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۲}} = -۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}+\sqrt{۷} = \sqrt{۷}$$

(ریاضی ۱: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (وحید امیرکیایی)

هر کدام از عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-۶۴ = x^۳-۴^۳ = (x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)$$

$$x^۴+۶۴ = x^۴+۱۶x^۲+۶۴-۱۶x^۲ = (x^۲+۸)^۲-(۴x)^۲$$

$$(x^۲+۴x+۸)(x^۲-۴x+۸)$$

$$x^۳+۶۴ = x^۳+۴^۳ = (x+۴)(x^۲-۴x+۱۶)$$

$$x^۴-۶۴ = (x^۲)^۲-۸^۲ = (x^۲+۸)(x^۲-۸)$$

$$(x^۲+۸)(x+۲\sqrt{۲})(x-۲\sqrt{۲})$$

(ریاضی ۱: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

ابتدا $a^۴-b^۴$ را باز می‌کنیم:

$$a^۴-b^۴ = (a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲) = (a+b)(a-b)(a^۲+b^۲)$$

پس برای محاسبهٔ $a^۴-b^۴$ به $a^۲+b^۲$ و $a+b$ نیاز داریم.

می‌دانیم اتحاد مقابل برقرار است: $a^۳-b^۳ = (a-b)^۳+۳ab(a-b)$

پس داریم:

$$۲ \quad (۱)^۳+۳ab(۱) \Rightarrow ab = \frac{۱}{۳}$$

اتحاد بالا را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$a^۳-b^۳ = (a-b)(a^۲+ab+b^۲) = ۲$$

$$\xrightarrow{a-b=۱} a^۲+ab+b^۲ = ۲$$

$$\xrightarrow{ab=\frac{۱}{۳}} a^۲+b^۲ = ۲-\frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

هم‌چنین داریم:

$$a^۲+ab+b^۲+ab = (a+b)^۲ = ۲+\frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow a+b = \pm\sqrt{\frac{۷}{۳}} = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

در نتیجه حاصل $a^۴-b^۴$ برابر می‌شود با:

$$a^۴-b^۴ = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۳} \times \frac{۵}{۳} = \pm\frac{۵}{۹}\sqrt{۲۱}$$

(ریاضی ۱: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

تلاشی درمسیر موفقیت

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

شکل nاُم از $n+1$ ستون دایره تشکیل شده است که ستون‌های فرد را دایره‌های سفید و ستون‌های زوج را دایره‌های سیاه می‌سازند.

با توجه به رابطهٔ $1+3+5+\ldots+2k-1=k^2$، می‌توانیم دنبالهٔ دایره‌های سفید را به صورت زیر بنویسیم:

$$w_n \begin{cases} (\frac{n+1}{2})^2 & ; \ n \text{ فرد} \\ (\frac{n+2}{2})^2 & ; \ n \text{ زوج} \end{cases}$$

پس داریم: $w_{10} \quad (\frac{10+2}{2})^2 = 36$

(ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(سامان سلامیان)*

قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r = \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$t_n \quad \frac{1}{8}(\sqrt{2})^{n-1} = \frac{1}{2^3}\left(2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\right) = 2^{\frac{1}{2}n-\frac{7}{2}}$$

حال باید $t_n < 4$ باشد:

$$\Rightarrow 2^{\frac{n-7}{2}} < 4 = 2^2 \Rightarrow \frac{n-7}{2} < 2 \Rightarrow n < 11$$

۱۰ جملهٔ این دنباله کمتر از ۴ است.

(ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $t_n \quad t_1+(n-1)d$ است:

$$t_3 \quad -t_8 \Rightarrow t_3+t_8=0$$

$$\Rightarrow t_1+2d+t_1+7d=0 \Rightarrow 2t_1+9d=0 \Rightarrow d=-\frac{2}{9}t_1$$

از طرفی رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n \quad \frac{n}{2}[2t_1+(n-1)d]$ است. با جای‌گذاری d داریم:

$$S_n \quad \frac{n}{2}[2t_1+(n-1)(-\frac{2}{9}t_1)]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left(-\frac{2}{9}t_1 n+\frac{20}{9}t_1\right) = -\frac{t_1}{9}n(n-10)$$

پس مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله صفر است.

(حسابان ۱: جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی $a_1=\frac{1}{2}$ و قدرنسبت آن $d=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ است. رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی نیز به صورت $S_n \quad \frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ است:

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{6}n^2+\frac{1}{3}n$$

باید $S_n > 1700$ باشد، پس داریم:

$$\frac{1}{6}n^2+\frac{1}{3}n > 1700 \Rightarrow n^2+2n-10200>0$$

حل این نامعادله ساده نیست، راه ساده‌تر این است که از مقدار n در گزینه‌ها استفاده کنیم.

S_{100} برابر است با:

$$S_{100} \quad \frac{n(n+2)}{6}\Big|_{n\ 100} \quad \frac{100\times102}{6} = 50\times34 = 1700$$

چون $d>0$، $S_{101}>1700$ است و ما باید حداقل ۱۰۱ جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم.

(حسابان ۱: جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

جمله‌های دوم، سوم و دو برابر چهارم دنبالهٔ حسابی به ترتیب a_1+d، a_1+2d و $2(a_1+3d)$ هستند. برای این حالت، جملات متوالی دنبالهٔ هندسی نیز شوند، باید رابطهٔ $a_3^2 = 2a_2a_4$ برقرار شود:

$$2(a_1+d)(a_1+3d) = (a_1+2d)^2$$

$$\Rightarrow 2a_1^2+8a_1d+6d^2 = a_1^2+4a_1d+4d^2$$

$$\Rightarrow 2d^2+4a_1d+a_1^2=0$$

در معادلهٔ بالا، دو جواب برای d به دست می‌آید که داریم:

$$S \quad d_1+d_2=-2a_1$$

حال قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $r \quad \frac{a_1+2d}{a_1+d}$ است.

$$r \quad 2-\frac{a_1}{a_1+d}$$

پس برحسب مقادیر متفاوت d_1 و d_2، مقادیر متفاوت r_1 و r_2 به دست می‌آید.

$$r_1 \quad 2-\frac{a_1}{a_1+d_1} \ , \ r_2 \quad 2-\frac{a_1}{a_1+d_2}$$

پس داریم:

$$r_1+r_2 = 4-a_1(\frac{1}{a_1+d_1}+\frac{1}{a_1+d_2})$$

$$4-a_1(\frac{2a_1+(d_1+d_2)}{a_1^2+(d_1+d_2)a_1+d_1d_2})$$

چون $d_1+d_2=-2a_1$ است، داریم:

$$r_1+r_2=4$$

(ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

$$\begin{cases} ۲mx+۲y=n+۱ \\ ۲x+۲my=n+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{فاقد جواب}} \frac{۲m}{۲}=\frac{۲}{۲m}\neq\frac{n+۱}{n+۱}$$

از تساوی سمت چپ داریم:

$$\frac{۲m}{۲}\quad\frac{۲}{۲m} \Rightarrow ۴m^۲=۴$$

$$\Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$$

مقدار $m=۱$ غیرقابل قبول است، چون حاصل هر سه کسر در این صورت برابر یک خواهد بود و در شرط فاقد جواب صدق نمی‌کند، پس تنها جواب $m=-۱$ است. در این صورت برای دستگاه دوم داریم:

$$\begin{cases} ۳x+my=۰ \\ ۳x+y=۳ \end{cases} \xrightarrow{m\ -۱} \begin{cases} ۳x-y=۰ \\ ۳x+y=۳ \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\frac{۳}{۳}\neq\frac{-۱}{۱}$، پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحهٔ ۲۶)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$I+A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -۲ \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} ۱ & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -۱ \end{bmatrix}$$

$$|I+A|=-۱+\cos^۲\alpha=-(۱-\cos^۲\alpha)=-\sin^۲\alpha$$

$$(I+A)^{-۱}A=\frac{۱}{-\sin^۲\alpha}\begin{bmatrix} -۱ & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\frac{۱}{-\sin^۲\alpha}\begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \cos^۲\alpha-۲ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

$$\frac{۱}{-\sin^۲\alpha}(\cos^۲\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha+\cos^۲\alpha-۲)=\frac{۲\cos^۲\alpha-۲}{-\sin^۲\alpha}$$

$$=\frac{-۲(۱-\cos^۲\alpha)}{-\sin^۲\alpha}\quad\frac{-۲\sin^۲\alpha}{-\sin^۲\alpha}\quad ۲$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به دستگاه معادلات داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

طبق رابطهٔ کیلی – همیلتون برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^۲-(a+d)A+(ad-c)I=\overline{O}$$

بنابراین برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ می‌توان نوشت:

$$A^۲-۶A+۱۱I=\overline{O} \xrightarrow{\times A^{-۱}} A-۶I+۱۱A^{-۱}=\overline{O}$$

$$\Rightarrow ۱۱A^{-۱}=۶I-A \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۶}{۱۱}I-\frac{۱}{۱۱}A$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

با توجه به دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} x & -۱ & ۱ \\ x^۲ & ۱ & -۱ \\ x & x^۲ & x \end{vmatrix} \quad (x^۲+x+x^۴)-(x-x^۳-x^۳)=۰$$

$$\Rightarrow x^۴+۲x^۳+x^۲=۰ \Rightarrow x^۲(x^۲+۲x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow x^۲(x+۱)^۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \\ (x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

شرط وجود بی‌شمار جواب برای دستگاه معادلات $\begin{cases} kx+(۱-۲k)y=a \\ -(k+۲)x+۳ky=b \end{cases}$ آن است که:

$$\frac{k}{-k-۲}\quad\frac{۱-۲k}{۳k}=\frac{a}{b}$$

با حل معادلهٔ شامل دو کسر سمت چپ داریم:

$$\frac{k}{-k-۲}\quad\frac{۱-۲k}{۳k} \Rightarrow ۳k^۲=-k+۲k^۲-۲+۴k$$

$$\Rightarrow k^۲-۳k+۲=۰ \Rightarrow \begin{matrix} k & ۱ \\ k & ۲ \end{matrix}$$

$$k\quad ۱ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱-۲k}{۳k}=-\frac{۱}{۳}$$

$$k\quad ۲ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱-۲k}{۳k}=-\frac{۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار $\frac{a}{b}$، برابر $-\frac{۱}{۳}$ است.

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحهٔ ۲۶)

تلاشی درمسیر موفقیت

۲۶- **گزینهٔ «۳»** (محمد کریمی)

$$|A| \quad ۳\times۲-(-۱)\times۲=۸$$

بنابراین رابطهٔ ماتریسی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix} X \begin{bmatrix}۸ & -۸\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

کافی است وارون ماتریس $\begin{bmatrix}۸ & -۸\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ را از سمت راست در طرفین رابطه ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix}۸ & -۸\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}^{-۱} \quad \frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ ۰ & ۸\end{bmatrix} \quad X \Rightarrow X=\frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix}۲ & ۸\\ ۰ & ۲۴\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های X برابر است با:

$$\frac{۱}{۱۶}(۲+۸+۲۴)=\frac{۳۴}{۱۶}=\frac{۱۷}{۸}$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۲۷- **گزینهٔ «۴»** (محمد کریمی)

از طرفین رابطهٔ داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}|A| & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow |۲A^{-۱}|=\begin{vmatrix}|A| & ۳\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲^{۲}\times|A^{-۱}|=|A|+۳ \xrightarrow{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}} |A|^{۲}+۳|A|-۴=۰$$

$$\Rightarrow (|A|+۴)(|A|-۱)=۰$$

$$\xrightarrow{|A|<۰} |A|=-۴$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}-۲ & \frac{۳}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -۲\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۲ & ۶\\ -۲ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+I=\begin{bmatrix}-۲ & ۶\\ -۲ & ۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۶\\ -۲ & ۹\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=-۹+۱۲=۳$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۳۱)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** (امیر وفائی)

$$\frac{۳}{۲}A \quad ۳I-۶A^{-۱} \xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}} A=۲I-۴A^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\times A} A^{۲}=۲A-۴I=۲(۲I-۴A^{-۱})-۴I$$

$$۴I-۸A^{-۱}-۴I$$

$$\Rightarrow A^{۲}=-۸A^{-۱} \xrightarrow{\times A} A^{۳}=-۸I \Rightarrow |A^{۳}|=|-۸I|$$

$$\Rightarrow |A|^{۳}=(-۸)^{۳}|I|=(-۸)^{۳}\times۱=(-۸)^{۳} \Rightarrow |A|=-۸$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۷ تا ۳۱)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** (احمدرضا فلاح)

$$A^{۲} \quad ۵I \Rightarrow A^{۲}-۴I=I \Rightarrow A^{۲}-(۲I)^{۲}=I$$

$$\Rightarrow (A-۲I)(A+۲I)=I \Rightarrow (A-۲I)^{-۱}=A+۲I$$

$$A(A-۲I)^{-۱}=A(A+۲I)=A^{۲}+۲A=۵I+۲A$$

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ -۱۰ & -۴\end{bmatrix}$ باشد. برای حل معادلهٔ ماتریسی $BAC \quad D$ ،

کافی است طرفین رابطه را از سمت چپ در وارون ماتریس B و از سمت راست در وارون ماتریس C ضرب کنیم. در این صورت داریم:

$$B^{-۱}(BAC)C^{-۱} \quad B^{-۱}DC^{-۱} \Rightarrow \underbrace{(BB^{-۱})}_{I}A\underbrace{(CC^{-۱})}_{I}$$

$$B^{-۱}DC^{-۱} \Rightarrow A=B^{-۱}DC^{-۱}$$

پس ابتدا وارون ماتریس‌های B و C را به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۵ & -۲\end{bmatrix} \Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$$

$$A \quad B^{-۱}DC^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ -۱۰ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳۵ & ۱۵\\ -۱۵ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix} \quad \frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵ & -۵\\ ۵ & ۵\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A، برابر ۲ است.

(هندسه ۳، ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۵)

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

به بررسی گزاره‌ها می‌پردازیم:

* گزاره اول نادرست است. زیرا در صورتی می‌توان از $a \mid b$ نتیجه گرفت $a^m \mid b^n$ که $m \le n$ باشد.

گزاره دوم درست است زیرا:

$$\begin{cases} a-b \mid a \\ a-b \mid a-b \end{cases} \Rightarrow a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid b^2 \qquad (1)$$

$a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid a^3$ (۲) فرض سؤال

با ضرب طرفین در رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(a-b)^2 \mid a^3b^2$$

* گزاره سوم درست است زیرا:

اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ زوج باشد یعنی $\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)^2$ زوج است و در نتیجه $\frac{n(n+1)}{3}$ زوج است. $n(n+1)$ حاصلضرب دو عدد متوالی و زوج است،

بنابراین کافی است n یا $n+1$ مضرب ۳ باشد.

$$\begin{cases} n \quad 3k \\ n+1=3k \Rightarrow n=3k-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10 \le 3k \le 99 \Rightarrow 4 \le k \le 33 \Rightarrow \text{۳۰ عدد}$$

$$10 \le 3k-1 \le 99 \Rightarrow 11 \le 3k \le 100 \Rightarrow 4 \le k \le 33 \Rightarrow \text{۳۰ عدد}$$

بنابراین ۶۰ مقدار طبیعی برای n است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۵ و ۹ تا ۱۲)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق قضیه تقسیم $a \quad bq+r$ و $0 \le r < b$ و فرض $a-b=142$ خواهیم داشت:

$$a \quad b+142 \,,\, r=12$$

بنابراین: $b+142 = bq+12 \Rightarrow 130 = bq-b = b(q-1)$

$$130 \quad 1\times130 = 2\times65 = 5\times26 = 10\times13 = b(q-1)$$

چون b باید بزرگ‌تر از ۱۲ باشد، پس:

$$q-1 = 10 \text{ یا } 5 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1$$

در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix} q_{min}-1=1 \Rightarrow q_{min} \quad 2 \\ q_{max}-1=10 \Rightarrow q_{max} \quad 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q_{max}-q_{min}=9$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

ابتدا ب.م.م دو عدد $5n+2$ و $7n+3$ را می‌یابیم.

$$(5n+2, 7n+3) = d \Rightarrow \begin{matrix} d \mid 5n+2 \xrightarrow{\times 7} d \mid 35n+14 \\ d \mid 7n+3 \xrightarrow{\times 5} d \mid 35n+15 \end{matrix} \Rightarrow d=1$$

بنابراین دو عدد نسبت به هم اولند پس ک‌م‌م آن‌ها با حاصلضرب آن‌ها برابر است:

$$[5n+2, 7n+3] = (5n+2)(7n+3) = 35n^2+29n+6$$

مطابق فرض سؤال، باقی‌مانده این عدد در تقسیم بر ۷ برابر ۳ می‌باشد، پس:

$$35n^2+29n+6 \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow 0+n-1 \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow n \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow n = 7k+4$$

$$\xrightarrow{n \text{ دورقمی است}} 10 \le 7k+4 \le 99 \rightarrow 6 \le 7k \le 95 \Rightarrow 1 \le k \le 13$$

بنابراین تعداد ۱۳ عدد دو رقمی برای n وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۲۵)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

$$200 \overset{m}{\equiv} 98 \Rightarrow m \mid 200-98 \Rightarrow m \mid 102$$

$$102 \quad 2\times3\times17 \Rightarrow m = 17$$

طبق فرض:

$$x \overset{17}{\equiv} 28 \overset{17}{\equiv} 11 \Rightarrow x = 17q+11$$

$$\xrightarrow[q \quad 6]{\text{کوچک‌ترین عدد سه رقمی}} x = 17\times6+11 = 113$$

مجموع ارقام: $1+1+3=5$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

ابتدا مشخص می‌کنیم که ۲۰ مرداد چندمین روز سال است و سپس باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۷ را به دست می‌آوریم:

$$(4\times31)+20 \overset{7}{\equiv} (4\times3)+6 \overset{7}{\equiv} 18 \overset{7}{\equiv} 4$$

بنابراین پنج‌شنبه مترادف با باقیمانده ۴ به پیمانه ۷ است.

سپس معلوم می‌کنیم که اول خرداد چه روزی از هفته است:

$$(2\times31)+1 \overset{7}{\equiv} (2\times3)+1 \overset{7}{\equiv} 7 \overset{7}{\equiv} 0$$

$$\underset{\text{یکشنبه}}{0} \longrightarrow \underset{\text{شنبه}}{6} \longrightarrow \underset{\text{جمعه}}{5} \longrightarrow \underset{\text{پنج‌شنبه}}{4}$$

بنابراین اول خرداد، یکشنبه است. بنابراین اولین پنجشنبه خرداد را می‌یابیم.

پنجم خرداد	چهارم خرداد	سوم خرداد	دوم خرداد	اول خرداد
پنج‌شنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه

تلاشی درمسیر موفقیت

هم‌اکنون می‌توانیم تاریخ سومین پنج‌شنبه خرداد ماه را مشخص کنیم:

$$\underset{\text{سومین پنج‌شنبه}}{\text{۱۹ خرداد}} \xrightarrow{+۷} \underset{\text{دومین پنج‌شنبه}}{\text{۱۲ خرداد}} \xrightarrow{+۷} \underset{\text{اولین پنج‌شنبه}}{\text{۵ خرداد}}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

$$۶x^۲-۱۷x-۱۴=(۳x+۲)(۲x-۷)$$

$$۶x^۲-۱۷x-۱۴\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow(۳x+۲)(۲x-۷)\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ ۳x+۲\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow ۳x\overset{۱۱}{\equiv}-۲\overset{۱۱}{\equiv}۹\xrightarrow[(۳,۱۱)\ ۱]{\div ۳}x\overset{۱۱}{\equiv}۳\Rightarrow x=۱۱k+۳\\ \begin{cases}k & ۸\\ x_{max} & ۹۱\end{cases}\\ ۲)\ ۲x-۷\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow ۲x\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow ۲x\overset{۱۱}{\equiv}-۴\xrightarrow[(۲,۱۱)\ ۱]{+۲}x\overset{۱۱}{\equiv}-۲\Rightarrow x=۱۱k-۲\\ \begin{cases}k=۹\\ x_{max}=۹۷\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد دو رقمی x، عدد ۹۷ و جمع ارقام آن ۱۶ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(مجید نیکنام)*

می‌دانیم در معادلات هم‌نهشتی به صورت $m^x\overset{t}{\equiv}۱$، جواب‌های طبیعی x همگی مضارب کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n هستند که در همین معادله صدق می‌کند، یعنی کوچک‌ترین n طبیعی که $m^n\overset{t}{\equiv}۱$؛ همچنین اگر در معادله $m^x\overset{t}{\equiv}۱$، t یک عدد اول باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n که در این معادله صدق می‌کند، حتماً یک مقسوم علیه $(t-۱)$ است، یعنی:

$$n\ \text{کوچک‌ترین}\ |\ t-۱$$

در اینجا با امتحان، کوچک‌ترین n طبیعی را می‌یابیم:

$$\begin{cases}۲۷^۱\overset{۱۹}{\equiv}۸\\ ۲۷^۲\overset{۱۹}{\equiv}۸^۲\overset{۱۹}{\equiv}۷\\ ۲۷^۳\overset{۱۹}{\equiv}۸^۳\overset{۱۹}{\equiv}۸\times۷\overset{۱۹}{\equiv}۵۶\overset{۱۹}{\equiv}-۱\Rightarrow(۲۷^۳)^۲\overset{۱۹}{\equiv}(-۱)^۲\Rightarrow ۲۷^۶\overset{۱۹}{\equiv}۱\end{cases}$$

$$\text{کوچک ترین}\ n\quad ۶\Rightarrow a=۶k$$

$$\xrightarrow{a\ \text{دو رقمی است}}۱۰\le ۶k\le ۹۹\Rightarrow ۲\le k\le ۱۶$$

تعداد: $۱۶-۲+۱=۱۵$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(علی صادقی)*

می‌دانیم اگر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ در این صورت $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$.

حال با فرض $a=۱۳$، $b=۱۴$ و $n=۳۱$ خواهیم داشت.

$$(۱۳+۱۴)^{۳۱}\overset{۱۳\times۱۴}{\equiv}۱۳^{۳۱}+۱۴^{۳۱}$$

$$۲۷^{۳۱}\overset{۱۸۲}{\equiv}۱۳^{۳۱}+۱۴^{۳۱}\Rightarrow ۲۷^{۳۱}-۱۳^{۳۱}-۱۴^{۳۱}\overset{۱۸۲}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow x\overset{۱۸۲}{\equiv}۰\Rightarrow x^۲\overset{۱۸۲}{\equiv}۰\Rightarrow x^۲-۱\overset{۱۸۲}{\equiv}-۱\overset{۱۸۲}{\equiv}۱۸۱$$

در نتیجه باقی‌مانده موردنظر ۱۸۱ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

$$(۱):۲۰a\overset{۱۲}{\equiv}۲۴b\xrightarrow{۶|۱۲}۲۰a\overset{۶}{\equiv}۲۴b\overset{۶}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow ۲a\overset{۶}{\equiv}۰\xrightarrow[(۲,۶)\ ۲]{\div ۲}a\overset{۳}{\equiv}۰\Rightarrow a^۲\overset{۳}{\equiv}۰$$

$$(۲):۲۰a\overset{۱۲}{\equiv}۲۴b\xrightarrow[(۴,۱۲)\ ۴]{\div ۴}۵a\equiv ۶b$$

$$(۳):۲۰a\overset{۱۲}{\equiv}۲۴b\Rightarrow ۲۰a\overset{۱۲}{\equiv}۰\xrightarrow{۲۰\overset{۱۲}{\equiv}۸}۸a\overset{۱۲}{\equiv}۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحهٔ ۲۲)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

برای محاسبه رقم یکان عدد توانداز، کافی است عدد پایه را به پیمانه ۱۰ و توان را به پیمانه ۴ ببریم.

$$\begin{cases}A\overset{۱۰}{\equiv}۲+۲۴+۰\overset{۱۰}{\equiv}۶\Rightarrow A^۲\overset{۱۰}{\equiv}۳۶\overset{۱۰}{\equiv}۶\\ B\overset{۱۰}{\equiv}۱+۲+۶+۲۴+۰\overset{۱۰}{\equiv}۳\Rightarrow B^۲\overset{۱۰}{\equiv}۹\\ AB\overset{۱۰}{\equiv}۶\times۳\overset{۱۰}{\equiv}۸\end{cases}$$

از طرفی:

$$A-B\overset{۴}{\equiv}۲!-(۱!+۲!+۳!)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(A^۲+AB+B^۲)^{A-B}\overset{۱۰}{\equiv}(۶+۸+۹)^۱\overset{۱۰}{\equiv}۲۳\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

تلاشگران برتر موفقیت

هندسه ۱

۴۱- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

مجموع زوایای هر nضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است، بنابراین داریم:

$$۲\times ۱۲۰^\circ + (n-۲)\times ۱۵۰^\circ = (n-۲)\times ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲\times ۱۲۰^\circ = (n-۲)\times (۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ)$$
$$\Rightarrow (n-۲)\times ۳۰^\circ = ۲۴۰^\circ \Rightarrow n-۲ = ۸ \Rightarrow n = ۱۰$$

از هر رأس یک nضلعی محدب، $n-۳$ قطر می‌گذرد، پس از هر رأس یک ده‌ضلعی محدب ۷ قطر عبور می‌کند.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۵۵)

۴۲- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

اگر طول ضلع مثلث را با a و مساحت آن را با S نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \quad ۲۷\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۴\times ۲۷ = ۱۰۸ \Rightarrow a = ۶\sqrt{۳}$$

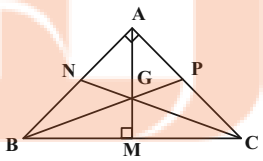
ارتفاع مثلث: $h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۶\sqrt{۳} = ۹$

مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر طول ارتفاع مثلث است، بنابراین در صورتی که فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع سوم مثلث را با x نمایش دهیم، داریم: $۳ + x = ۹ \Rightarrow x = ۶$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۸)

۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم از وصل کردن نقطهٔ همرسی میانه‌های یک مثلث به سه رأس آن مثلث، سه مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین داریم:



$$S_{ABC} = ۳S_{GAB} \quad ۳\times ۶ = ۱۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC = ۱۸$$
$$\xrightarrow{AB = AC} \frac{۱}{۲}AB^۲ = ۱۸ \Rightarrow AB^۲ = ۳۶$$

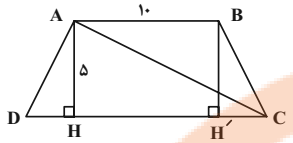
$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^۲ \quad AB^۲ + AC^۲ = ۲AB^۲ = ۲\times ۳۶ = ۷۲$$
$$\Rightarrow BC = ۶\sqrt{۲}$$

طول میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است، پس داریم:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = ۳\sqrt{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۰ و ۶۷)

۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*



مطابق شکل فرض کنید $AB = ۱۰$ و $AH = ۵$ باشد. در این صورت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH(AB + CD)$$
$$\Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲}\times ۵(۱۰ + CD)$$
$$\Rightarrow ۱۰ + CD = ۲۴ \Rightarrow CD = ۱۴$$

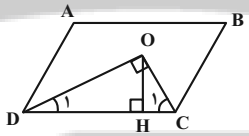
دو مثلث AHD و $BH'C$ هم‌نهشت هستند، بنابراین داریم:

$$DH = CH' = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۱۴ - ۱۰}{۲} = ۲$$
$$\Rightarrow CH = CH' + HH' = ۲ + ۱۰ = ۱۲$$
$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^۲ \quad AH^۲ + CH^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند، بنابراین داریم:



$$\hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{O} = ۹۰^\circ$$

همچنین در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مقابل با هم برابرند، پس داریم:

$$\hat{D}_۱ = \frac{\hat{D}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۲} = ۱۵^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ COD، یکی از زوایای حاده برابر ۱۵° است، پس طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است و در نتیجه داریم:

$$S_{COD} = \frac{۱}{۲}OH\times CD = \frac{۱}{۲}\times \frac{۱}{۴}CD\times CD = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۱۲ = ۱۸$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹ و ۶۴)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

طبق فرمول پیک برای مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۵ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۶$$

مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی در صورتی حداکثر خواهد بود که b بیش‌ترین و i کم‌ترین مقدار ممکن را دارا باشند. با توجه به اینکه کم‌ترین مقدار i برابر صفر است، داریم:

$i \quad 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = 6 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow \max(b+i) = 12$

از طرفی در صورتی مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی حداقل خواهد بود که b کمترین و i بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا باشند. کم‌ترین مقدار b برابر ۳ است، ولی چون i همواره عددی حسابی است، پس b باید زوج باشد و در نتیجه داریم:

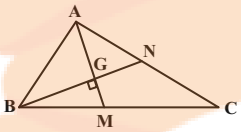
$b \quad 4 \Rightarrow \frac{4}{2} + i = 6 \Rightarrow i = 4 \Rightarrow \min(b+i) = 8$

$\max(b+i) - \min(b+i) = 12 - 8 = 4$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم میانه‌های هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس $GM \quad \frac{1}{3}AM = 3$ است.



از طرفی از برخورد میانه‌های یک مثلث، ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین داریم:

$S_{BMG} \quad \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6} \times 36 = 6$

$\Rightarrow \frac{1}{2}GM \times BG = 6 \xrightarrow{GM\ 3} BG = 4$

$\overset{\Delta}{BMG} : BM^2 \quad BG^2 + GM^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BM = 5$

$\Rightarrow BC = 2BM = 10$

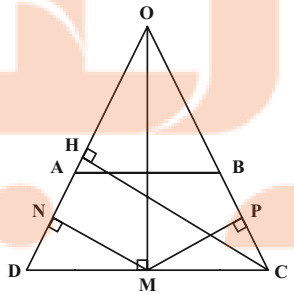
اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه داریم:

$S_{ABC} \quad \frac{1}{2}AH \times BC \Rightarrow 36 = \frac{1}{2}AH \times 10 \Rightarrow AH = 7/2$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد غندان)*

دو ساق AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. چون $\hat{D} \quad \hat{C}$ ، پس مثلث OCD متساوی‌الساقین است.



طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث OCD داریم:

$\overset{\Delta}{OCD} : AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OD-5}{OD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3OD - 15 = 2OD \Rightarrow OD = 15$

می‌دانیم مجموع طول عمودهای رسم شده از یک نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین بر دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس داریم:

$\overset{\Delta}{OCD} : CH \times OD = OM \times CD$

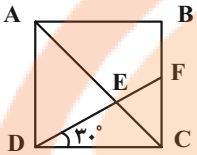
$\Rightarrow CH \times 15 = 9 \times 24 \Rightarrow CH = 14/4$

توجه: طول ارتفاع OM از نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OCM بدست می‌آید.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۸)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

پاره خط DE را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطهٔ F قطع کند.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ DCF، ضلع FC روبه‌رو به زاویهٔ 30° و در نتیجه نصف ضلع DF است. اگر طول ضلع مربع را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$DF^2 \quad FC^2 + DC^2 \Rightarrow (2FC)^2 = FC^2 + a^2 \Rightarrow 3FC^2 = a^2$

$\Rightarrow FC^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow FC = \frac{a}{\sqrt{3}}$

دو مثلث ADE و CFE به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

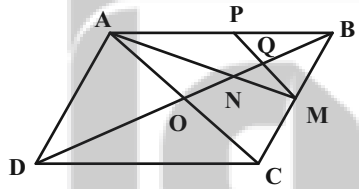
$\frac{FC}{AD} \quad \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{CE}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۴)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

در مثلث ABC، نقاط M و P به‌ترتیب وسط اضلاع BC و AB قرار دارند، پس طبق عکس قضیهٔ تالس، $MP \parallel AC$ است و در نتیجه دو مثلث MNQ و AON با هم متشابه‌اند.



از طرفی AM و BO میانه‌های مثلث ABC هستند که یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس نسبت تشابه دو مثلث MNQ و AON برابر است با:

$k \quad \frac{MN}{AN} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{MNQ}}{S_{AON}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{MNQ} = \frac{1}{4}S_{AON} \qquad (1)$

همچنین می‌دانیم از برخورد میانه‌های هر مثلث، ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، پس داریم:

$S_{AON} \quad \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}S_{ABCD}\right) = \frac{1}{12}S_{ABCD} \qquad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow S_{MNQ} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}S_{ABCD} = \frac{1}{48}S_{ABCD}$

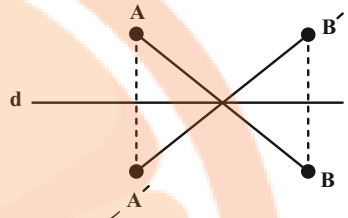
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

هندسه ۲

۵۱- گزینهٔ «۲» (افشین خاصه‌خان)

در حالت‌های «الف» و «ب» شیب پاره‌خط AB الزاماً حفظ می‌شود.

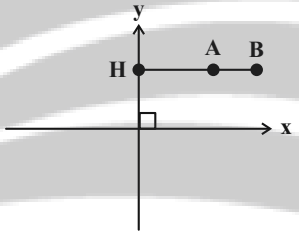
در حالت «پ» اگر نقاط A و B در طرفین خط d قرار داشته باشند، شیب پاره‌خط AB الزاماً حفظ نمی‌شود. (شکل زیر)



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۵۲- گزینهٔ «۴» (سوگند روشنی)

تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از همان صفحه است.



در گزینهٔ «۴» نقاط واقع بر محور yها تصویر منحصر به‌فرد یک نقطه از صفحه نیستند. به عنوان مثال در شکل، تصویر نقاط A و B تحت این تابع بر نقطهٔ H منطبق می‌گردد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۳۶)

۵۳- گزینهٔ «۲» (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید از مرکز تقارن هرکدام از این چندضلعی‌ها به تمام رئوس آن چندضلعی وصل کنیم.

زاویهٔ بین هر دو پاره‌خط متوالی در هرکدام از این چندضلعی‌ها به صورت زیر است:

گزینهٔ «۱»: $\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

گزینهٔ «۲»: $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

گزینهٔ «۳»: $\theta = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

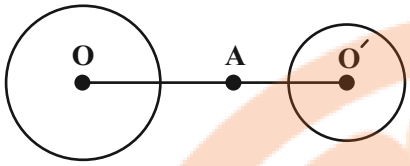
گزینهٔ «۴»: $\theta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در شش‌ضلعی منتظم، 90° مضربی از زاویهٔ بین هر دو پاره‌خط متوالی که از مرکز تقارن به رأس‌ها وصل می‌شود، نیست و در نتیجه تحت دوران 90° حول مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم، این چندضلعی برخودش منطبق نمی‌شود.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۵۴- گزینهٔ «۱» (فرزانه خاکپاش)

با توجه به نسبت تجانس منفی، دو دایره مجانس معکوس یکدیگرند و داریم:



$$\frac{R'}{R} \quad |k| \Rightarrow \frac{R'}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow R' = 4$$

$$\frac{O'A}{OA} \quad |k| \Rightarrow \frac{O'A}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow O'A = 5$$

$$OO' \quad OA + O'A = 10 + 5 = 15$$

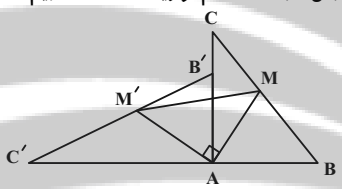
طول مماس مشترک داخلی $\sqrt{OO'^2 - (R+R')^2}$

$$\sqrt{15^2 - (8+4)^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۵۵- گزینهٔ «۳» (امیرحسین ابومحبوب)

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$BC^2 \quad AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{7})^2$$

$$8 + 28 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

AM میانهٔ وارد بر وتر در مثلث ABC است و اندازهٔ آن برابر نصف اندازهٔ وتر یعنی برابر ۳ می‌باشد که با توجه به طولپا بودن دوران، اندازهٔ AM' نیز برابر ۳ است.

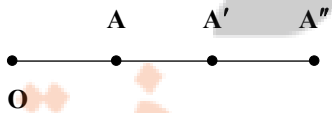
زاویهٔ بین AM و AM' برابر زاویهٔ دوران یعنی 90° است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMM' داریم:

$$MM'^2 \quad AM^2 + AM'^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow MM' = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۵۶- گزینهٔ «۱» (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید نقاط O، A، A' و A'' مطابق شکل قرار داشته باشند. در این صورت داریم:



$$\frac{OA'}{OA} \quad k_1 \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{k_1 - 1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{OA} = k_1 - 1 \qquad (1)$$

$$\frac{OA''}{OA} \quad k_2 \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{OA'' - OA}{OA} = \frac{k_2 - 1}{1}$$

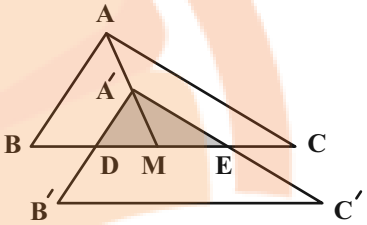
$$\Rightarrow \frac{AA''}{OA} = k_2 - 1 \qquad (2)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\frac{AA''}{OA}}{\frac{AA'}{OA}} = \frac{k_۲ - ۱}{k_۱ - ۱} \Rightarrow \frac{AA''}{AA'} = \frac{k_۲ - ۱}{k_۱ - ۱}$$

بنابراین A'' مجانس A' به مرکز A و نسبت $\frac{k_۲ - ۱}{k_۱ - ۱}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*



مطابق شکل تصویر مثلث ABC در انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ (A' محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است)، مثلث $A'B'C'$ است. ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث، مثلث $A'DE$ است. تصویر یک پاره‌خط در یک انتقال با آن پاره‌خط موازی است، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} A'B' \parallel AB \Rightarrow A'D \parallel AB \\ A'C' \parallel AC \Rightarrow A'E \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه است. از طرفی میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس داریم:

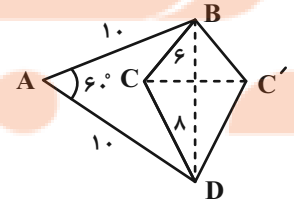
$$\frac{S_{A'DE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'M}{AM}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{A'DE}}{۵۴} = \frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{A'DE} = ۶$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

مثلث ABD با داشتن دو ضلع برابر و زاویهٔ رأس ۶۰°، قطعاً متساوی‌الاضلاع است، پس $BD = ۱۰$ بوده و که از آنجا اضلاع مثلث BCD در قضیهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند.



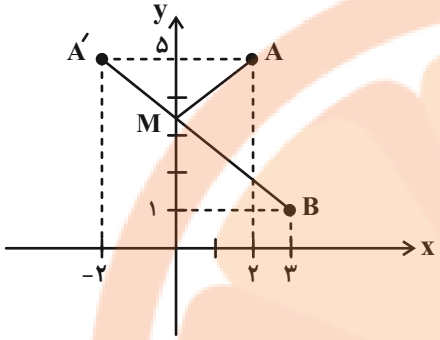
بنابراین $\widehat{BCD} = ۹۰^\circ$ و مثلث BCD قائم‌الزاویه است. برای افزایش مساحت چهارضلعی $ABCD$ بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط آن کافی است بازتاب نقطهٔ C را نسبت به BD به دست آوریم. میزان این افزایش مساحت برابر است با:

$$S_{BCDC'} = ۲S_{BCD} = ۲ \times \frac{۱}{۲} BC \times CD = ۶ \times ۸ = ۴۸$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(سوکند روشنی)*

طبق روش هرون کافی است قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور yها یعنی نقطهٔ $A'(-۲,۵)$ را مشخص کرده و A' را به B وصل کنیم.



محل برخورد $A'B$ با محور yها همان نقطهٔ M است و مطابق شکل داریم:

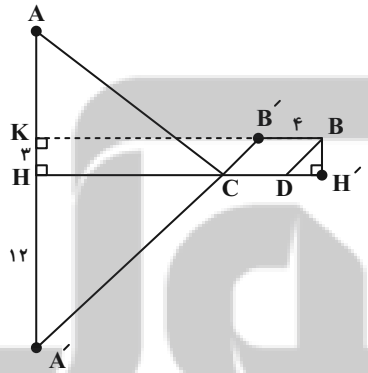
$$MA + MB = MA' + MB = A'B$$

$$\sqrt{(۳+۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۴۱}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۴)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

با توجه به اینکه ۴ کیلومتر از جاده در کنار ساحل دریا ساخته می‌شود، ابتدا نقطهٔ B را مطابق شکل ۴ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ B' حاصل شود.



همچنین بازتاب نقطهٔ A نسبت به ساحل دریا را A' می‌نامیم. از B' عمود $B'K$ را بر امتداد AA' رسم می‌کنیم. داریم:

$$B'K \quad BK - BB' = ۲۴ - ۴ = ۲۰$$

$$A'K \quad A'H + HK = ۱۲ + ۳ = ۱۵$$

$$\overset{\Delta}{A'B'}K : A'B'^۲ \quad A'K^۲ + B'K^۲ = ۲۲۵ + ۴۰۰ = ۶۲۵$$

$$\Rightarrow A'B' = ۲۵$$

مسیر $ACDB$ در شکل، کوتاه‌ترین مسیر ممکن تحت شرایط مسئله است. طول این مسیر برابر است با:

$$AC + CD + DB = A'C + BB' + CB'$$

$$(A'C + CB') + BB'$$

$$A'B' + BB' = ۲۵ + ۴ = ۲۹$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۵)

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

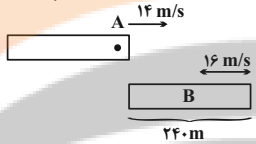
برای محاسبهٔ بردار شتاب متوسط بین دو لحظهٔ t_1 $4s$ تا t_3 $14s$، بردار سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 $10s$ در محاسبات لحاظ نمی‌شود. با توجه به تعریف شتاب متوسط داریم:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Rightarrow \vec{a}_{av}=\frac{8\vec{i}-(-8\vec{i})}{14-4}=\frac{16\vec{i}}{10}=1/6\vec{i}$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

از لحظه‌ای که ابتدای دو قطار در کنار هم قرار می‌گیرد تا لحظه‌ای که انتهای قطار B به ابتدای قطار A می‌رسد، لوکوموتیوران قطار A، قطار B را در کنار خود می‌بیند بنابراین مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌های قطارهای A و B باید برابر با طول قطار B شود. داریم:

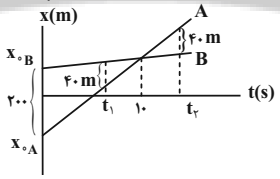


$$|\Delta x_A|+|\Delta x_B|=240\Rightarrow 14t+16t=240\Rightarrow t=8s$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به نمودار، دو متحرک در لحظهٔ $10s$ به هم می‌رسند. پس داریم:



$$\xrightarrow{t=10s} x_A=x_B$$

با توجه به اینکه حرکت دو متحرک با سرعت ثابت صورت گرفته است، داریم:

$$x=vt+x_0\xrightarrow[x_A\ \ x_B]{t\ 10s}10v_A+x_{0A}=10v_B+x_{0B}$$

$$\Rightarrow 10(v_A-v_B)=x_{0B}-x_{0A}$$

$$\xrightarrow{x_{0B}-x_{0A}=200m} v_A-v_B=20\frac{m}{s}\quad (1)$$

در لحظه t_1 داریم:

$$x_B-x_A=40m\Rightarrow (v_B-v_A)t_1+(x_{0B}-x_{0A})=40$$

$$\xrightarrow{(1)}-20t_1+200=40\Rightarrow 20t_1=160\Rightarrow t_1=8s$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها، t_2 $12s$ خواهد شد. پس در بازهٔ زمانی t_2-t_1، فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر و یا مساوی با ۴۰ متر است و داریم:

$$t_2-t_1=12-8=4s$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

مکان اولیه، فاصلهٔ متحرک در $t=0$ از مبدأ مکان می‌باشد (یا مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$). برای محاسبهٔ مکان اولیه داریم:

$$x=2t^2-4t+2\xrightarrow{t\ 0}\Rightarrow x=2m$$

حال می‌بینیم که در چه لحظه‌ای متحرک از این مکان عبور می‌کند:

$$x=2t^2-4t+2\xrightarrow{x\ 2m}2=2t_1^2-4t_1+2\Rightarrow t_1=2s$$

در لحظهٔ t_2 متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند. پس:

$$x=2t^2-4t+2\xrightarrow{x\ 0}0=2t_2^2-4t_2+2\Rightarrow t_2=1s$$

بنابراین داریم:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

زمانی که متحرک پس از شروع حرکت به نقاط A و B می‌رسد را محاسبه و به ترتیب t و $(t+6)s$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow[v_0\ 0\ x_0\ 0]{a\ 3m/s^2}x=\frac{3}{2}t^2$$

$$x_B-x_A=\frac{3}{2}(t+6)^2-\frac{3}{2}t^2$$

$$\xrightarrow{x_B-x_A=90m}90=\frac{3}{2}\times 12\times(t+3)\Rightarrow t=2s$$

بنابراین فاصلهٔ OA برابر است با:

$$x_A=\frac{1}{2}at^2\xrightarrow{t\ 2s}x_A=\frac{1}{2}\times 3\times 2^2=6m$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است. در لحظهٔ $t=0$، چون خط مماس بر نمودار افقی است، سرعت برابر با صفر می‌باشد. طبق نمودار، مکان اولیهٔ متحرک برابر با x_0 $6m$ و در لحظهٔ t $1s$ برابر با x $4m$ می‌باشد. داریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow[v_0\ 0]{x_0\ 6m}x=\frac{1}{2}at^2+6$$

$$\xrightarrow[x\ 4m]{t\ 1s}4=\frac{1}{2}a\times 1^2+6\Rightarrow a=-4\frac{m}{s^2}$$

تندی متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان برابر است با:

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

$$\Rightarrow v^2-0=2(-4)(0-6)\Rightarrow v=4\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

تندی متحرک در لحظهٔ t $1s$ برابر است با:

$$v'=at+v_0=(-4)\times 1+0\Rightarrow v'=-4m/s\Rightarrow |v'|=4m/s$$

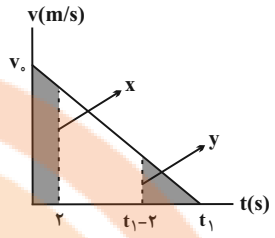
بنابراین:

$$\frac{v}{|v'|}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

با توجه به اینکه مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک می‌باشد، ابتدا مساحت زیر نمودار در دو ثانیه اول و دو ثانیهٔ آخر را به‌دست می‌آوریم. برای این کار با استفاده از تشابه مثلث‌ها در شکل زیر، سرعت را در t $2s$ و $t'=(t_1-2)s$ محاسبه می‌کنیم. داریم:



$$\frac{v_0}{t_1}\quad\frac{y}{2}\Rightarrow y=\frac{2}{t_1}v_0 \qquad (1)$$

$$\frac{v_0}{t_1}\quad\frac{x}{t_1-2}\Rightarrow x=\frac{(t_1-2)}{t_1}v_0 \qquad (2)$$

حال مساحت بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان را در دو ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ آخر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{y\times 2}{2}=6\xrightarrow{(1)}\frac{2}{t_1}v_0=6\Rightarrow v_0=3t_1 \qquad (3)$$

$$\Delta x'=\frac{(v_0+x)\times 2}{2}=54\xrightarrow{(2)}v_0+\frac{(t_1-2)}{t_1}v_0=54$$

$$\xrightarrow{(3)}6t_1=60\Rightarrow t_1=10s$$

روش دوم، متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند تا بایستد، در بازه‌های زمانی یکسان (مثلاً دو ثانیه در این سوال) از لحظهٔ توقف به قبل، مسافت‌هایی به نسبت‌های x ، $3x$ ، $5x$ ، $7x$ ، $9x$ و ... را طی می‌کند. بنابراین

$x \quad 6m \;,\; 3x \quad 18m \;,\; 5x \quad 30m \;,\; 7x \quad 42m \;,\; 9x \quad 54m$

پس زمان کل حرکت برابر با $5\times 2=10s$ بوده است.

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

ابتدا تندی اولیه را بر حسب متر بر ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$72\frac{km}{h}\quad 72\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}=20m/s$$

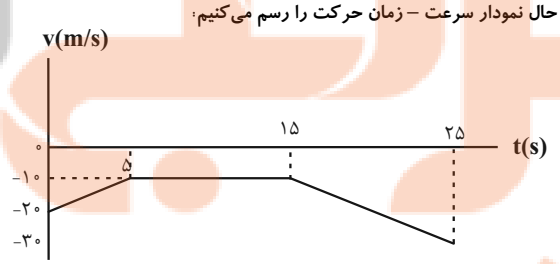
حال سرعت متحرک را در لحظه‌های $5s$ ،t_1 $15s$ ،t_2 و t_3 $25s$ محاسبه می‌کنیم:

$$v_5\quad a_1t+v_0=2\times 5+(-20)\Rightarrow v_5=-10m/s$$

$$\xrightarrow{a_2=0}v_{15}=v_5\Rightarrow v_{15}=-10m/s$$

$$v_{25}\quad a_3t+v_{15}=(-2)\times 10+(-10)\Rightarrow v_{25}=-30m/s$$

حال نمودار سرعت – زمان حرکت را رسم می‌کنیم:



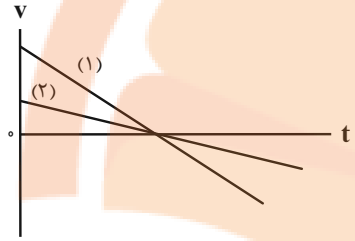
در نمودار سرعت – زمان، اگر نمودار به محور زمان نزدیک شود، یعنی اندازهٔ سرعت کاهش یابد، حرکت کندشونده و اگر نمودار از محور زمان دور شود، یعنی اندازهٔ سرعت افزایش یابد، حرکت تندشونده است. با این توضیحات، در ۲۵ ثانیهٔ اول حرکت، در بازهٔ زمانی $15s$ تا $25s$ نوع حرکت تندشونده است.

نکته: مساحت بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی معین برابر با تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی است.

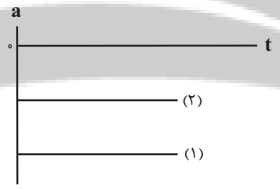
(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

با توجه به نمودار مکان – زمان داده شده و تقارن آن‌ها، سرعت دو متحرک در لحظهٔ یکسانی برابر با صفر می‌شود (خط مماس بر نمودار مکان – زمان افقی خواهد شد.) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در لحظهٔ $t=0$ برای نمودار (۱) بزرگ‌تر از نمودار (۲) است و در نتیجه سرعت اولیهٔ آن بزرگ‌تر است. بنابراین نمودار سرعت – زمان این دو متحرک مطابق شکل زیر خواهد بود:



در نتیجه چون شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان برابر با شتاب متحرک است، با توجه به نمودار سرعت – زمان داده شده، مشخص است که اندازهٔ شتاب متحرک (۱) بیش‌تر از اندازهٔ شتاب متحرک (۲) است و شتاب حرکت هر دو متحرک منفی است. بنابراین نمودار گزینهٔ (۴) بیانگر نمودار شتاب – زمان این دو متحرک خواهد بود.



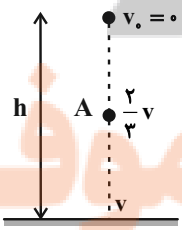
(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

برای سرعت متوسط گلوله بین دو لحظهٔ شروع حرکت تا رسیدن گلوله به نقطهٔ A که تندی آن برابر با $\frac{2}{3}v$ است، می‌توان نوشت:

$$v'_{av}=\frac{v_A+v_0}{2}\Rightarrow 20=\frac{\frac{2}{3}v+0}{2}\Rightarrow v=60\frac{m}{s}$$

تندی گلوله‌ای که در شرایط خلأ از حال سکون رها می‌شود، پس از طی مسافت h' از رابطهٔ $v^2=2gh'$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:



$$v^2=2gh\Rightarrow 60^2=2\times 10\times h\Rightarrow h=180m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

فیزیک ۱

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌قانی)*

با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K \quad \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{144K_1}{100K_1} = \left(\frac{v+5}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{v+5}{v} \Rightarrow 5v + 25 = 6v \Rightarrow v = 25 \Rightarrow v + 5 = 30\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۷۲- **گزینهٔ «۴»** *(حسین مفرومی)*

با استفاده از تعریف کار یک نیروی ثابت داریم:

$$W_1 \quad F_1 d_1 \cos\theta_1 = Fd\cos 0^\circ \Rightarrow W_1 = Fd$$
$$W_2 \quad F_2 d_2 \cos\theta_2 = 2Fd\cos 30^\circ \Rightarrow W_2 = \sqrt{3}Fd$$
$$W_3 \quad F_3 d_3 \cos\theta_3 = \sqrt{2}Fd\cos 60^\circ \Rightarrow W_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}Fd$$

بنابراین داریم: $\Rightarrow W_2 > W_1 > W_3$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

بر جسم دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود که در حرکت جسم به سمت پایین، کار نیروی وزن مثبت و کار نیروی مقاومت هوا منفی است. با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_t \quad \Delta K \Rightarrow W_f + W_{mg} = \Delta K \Rightarrow W_f + mgh = \Delta K$$
$$\Rightarrow -20 + 2\times 10\times 5 = \Delta K \Rightarrow \Delta K = 80J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** *(شارمان ویسی)*

مطابق قضیه کار - انرژی جنبشی، می‌دانیم طی یک جابه‌جایی معین، کار کل نیروهای وارد بر جسم با تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است. بنابراین:

$$W_t \quad \Delta K \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad (1)$$

همچنین طبق رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی (رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت) داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$$

$$\xrightarrow{(1)} W_t = \frac{1}{2}m(2a\Delta x) \Rightarrow W_t = ma\Delta x$$
$$\Rightarrow W_t = 2\times 3\times(11-7) \Rightarrow W_t = 24J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

طی یک جابه‌جایی معین، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی برابر با منفی کار نیروی وزن در آن جابه‌جایی است. بنابراین:

$$U_B - U_A = -W_{mg} \Rightarrow U_B - 50 = -(-45) \Rightarrow U_B = 95J$$

از طرفی چون طی جابه‌جایی جسم از B تا C، ارتفاع آن افزایش یافته است، پس انرژی پتانسیل آن افزایش یافته است و بنابراین داریم:

$$U_C - U_B = 55 \Rightarrow U_C - 95 = 55 \Rightarrow U_C = 150J$$

حال با توجه به قانون پایستگی انرژی، می‌توان نوشت:

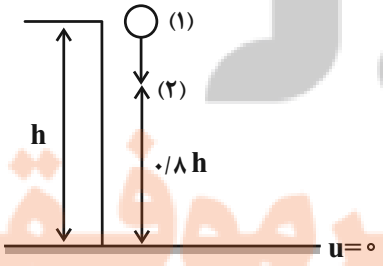
$$E_A - E_C = W_f \Rightarrow (U_A + K_A) - (U_C + K_C) = W_f$$
$$\Rightarrow (50 + 75) - (150 + 0) = W_f \Rightarrow W_f = -25J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی، داریم:

$$E_1 \quad E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$



چون اتلاف انرژی نداریم، پس از طی ۲۰ درصد مسیر، $U_2 > K_2$ است و نتیجه داریم:

$\xrightarrow{K_2\ (U_2-60)J} U_1 = U_2 + (U_2 - 60)$

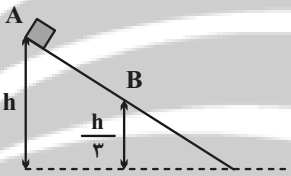
$\xrightarrow{h_2\ 0/8h} mgh = 2(mg \times 0/8h) - 60$

$\Rightarrow 0/6mgh = 60 \Rightarrow 0/6 \times 2/5 \times 10h = 60 \Rightarrow h = 4m$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

جسم در نقطهٔ A فقط انرژی پتانسیل گرانشی و در نقطهٔ B، هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل گرانشی دارد. چون در نقطهٔ B، ارتفاع از مبدأ پتانسیل گرانشی، $\frac{1}{3}$ ارتفاع در نقطهٔ A است، بنا به رابطهٔ $U = mgh$، باید $U_B = \frac{1}{3}U_A$ باشد.



$E_A = E_B \xrightarrow{E = U+K} U_A + K_A = U_B + K_B$

$\xrightarrow[K_A\ 0]{U_B\ \frac{1}{3}U_A} U_A + 0 = \frac{1}{3}U_A + \frac{1}{2}mv_B^2$

$\xrightarrow[v_B\ 10m/s]{m\ 4kg} \frac{2}{3}U_A = \frac{1}{2} \times 4 \times 100 \Rightarrow U_A = 300J$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(سعید طاهری‌بروجنی)*

با در نظر گرفتن سطح زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، گلوله در لحظهٔ پرتاب فقط انرژی جنبشی و در حالتی که در ارتفاع اوج خود قرار دارد، فقط انرژی پتانسیل گرانشی دارد. با استفاده از قانون پایستگی انرژی داریم:

$W_{\text{مقاومت}}\quad E_2 - E_1 \Rightarrow W_{\text{مقاومت}} = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$

$\Rightarrow W_{\text{مقاومت}} = (0 + mgh_2) - (\frac{1}{2}mv_1^2 + 0)$

$\Rightarrow W_{\text{مقاومت}} = m \times 10 \times 16 - \frac{1}{2}m \times 20^2 = -40m$

از آن جایی که طبق رابطهٔ کار $(W = Fd\cos\theta)$، کار نیروی مقاومت در مسیر رفت و برگشت برابر است، در نتیجه در مسیر برگشت نیز $40m$ از انرژی مکانیکی کاهش می‌یابد:

$E_3\quad E_2 - 40m = 120m$

در نتیجه داریم:

$E_3\quad K_3 + U_3 = \frac{1}{2}mv_3^2 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 = 120m$

$\Rightarrow v_3 = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}\frac{m}{s}$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیوان سعیری)*

گلوله به شرط داشتن تندی در نقطهٔ A که از یک مقداری معین بیشتر باشد، می‌تواند به نقطهٔ B برسد. این کار می‌تواند در حضور نیروهای اتلافی هم صورت بگیرد. این تندی معین بستگی به کار نیروهای اتلافی در حرکت از A به B دارد.

کار طناب صفر است چون در هر لحظه نیروی طناب بر مسیر حرکت عمود است.

شرط رسیدن گلوله به نقطهٔ B این است که تندی گلوله در نقطه A حتماً مخالف صفر باشد.

گلوله به شرط داشتن تندی در نقطه A که از یک مقداری معین بیشتر باشد می‌تواند از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود و تندی گلوله در نقطهٔ B مخالف صفر باشد.

در نتیجه گزاره‌های «ب» و «پ» الزاماً صحیح است.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۷۳)

۸۰- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌طانی)*

ابتدا توان خروجی آسانسور را به‌دست می‌آوریم:

$m\quad 800 + 400 = 1200kg$

$P_{\text{خروجی}}\quad \frac{W}{t} = \frac{mg\Delta h}{t} = \frac{1200 \times 10 \times 10}{6} = 20000W = 20kW$

حال می‌توان بازدهٔ آسانسور را به‌دست آورد:

بازده $\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{مصرفی}}} \times 100 = \frac{20}{50} \times 100 = 40\%$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

تلاشگر مسیر موفقیت

فیزیک ۲

۸۱- گزینهٔ «۴» *(بابک اسلامی)*

طبق رابطهٔ $\Delta q = I\Delta t$، اگر جریان بر حسب میلی‌آمپر و زمان بر حسب ساعت باشد، بار الکتریکی بر حسب mAh خواهد بود. داریم:

$$\Delta q = I\Delta t \Rightarrow ۴\times۱۰^{۳} = ۵\times۱۰^{۴}\times۱۰^{-۳}\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۸۰h$$

$$\Rightarrow \Delta t = ۸۰\times۶۰ = ۴۸۰۰min$$

بار الکتریکی شارش شده در مدار برابر با بار الکتریکی ذخیره شده در باتری است. داریم:

$$\Delta q = ۴۰۰۰mAh = ۴۰۰۰\times۱۰^{-۳}(A)\times۳۶۰۰(s) = ۱۴/۴\times۱۰^{۳}As$$

$$\Rightarrow \Delta q = ۱۴/۴\times۱۰^{۳}C \Rightarrow \Delta q = ۱۴/۴\times۱۰^{۹}\mu C$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۹)

۸۲- گزینهٔ «۳» *(یاسر علیلو)*

با توجه به نمودار به‌ازای ولتاژ V' جریان عبوری از دو مقاومت A و B برابر با $I_A = ۸A$ و $I_B = ۲۰A$ است، بنابراین با استفاده از رابطهٔ قانون اهم نسبت $\frac{R_A}{R_B}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R \quad \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{V_A}{V_B}\times\frac{I_B}{I_A} = ۱\times\frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۸۳- گزینهٔ «۱» *(خرشید رسولی)*

مطابق رابطهٔ قانون اُهم، چون جریان عبوری از سیم کاهش یافته است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر سیم نیز کاهش یافته است.

$$V \quad RI \xrightarrow{R_۱\ R_۲} \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\frac{V_۲ \quad (V_۱-۴)V}{I_۲ \quad \frac{I_۱}{۲}} \rightarrow \frac{V_۱-۴}{V_۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow V_۱ = ۸V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۸۴- گزینهٔ «۲» *(میثم رشتیان)*

چگالی: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A}$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{۳}{۲},\frac{m_A}{m_B}=۶ \rightarrow \frac{۳}{۲} = ۶\times\frac{V_B}{V_A}$$

$$\Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{V\ \ AL} \frac{A_BL_B}{A_AL_A} = \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{L_A\ \ L_B} \frac{A_B}{A_A} = \frac{۱}{۴}$$

مقاومت ویژه: $\rho, R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}$

$$\xrightarrow[\frac{A_B}{A_A}\ \ \frac{۱}{۴}]{L_A\ \ L_B,\ \frac{\rho_A}{\rho_B}=۲} \frac{R_A}{R_B} = ۲\times۱\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{V\ \ RI} \frac{V_A}{V_B} = \frac{R_AI_A}{R_BI_B}$$

$$\xrightarrow{V_A\ \ V_B} \frac{I_A}{I_B} = ۲$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۸۵- گزینهٔ «۲» *(سعید طاهری‌بروجنی)*

با استفاده از رابطهٔ بین مقاومت و تغییرات دمای یک رسانا، داریم:

$$R_۲ \quad R_۱(۱+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = ۱+\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳۰۰}\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۳۳/۳^{\circ}C$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

تلاشی دلپسند برای موفقیت

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(بابک اسلامی)*

چون مقاومت ترکیبی نوار چهارم را ندارد، بنابراین تلرانس آن ۲۰ درصد است. برای خواندن حلقه‌های رنگی، مقاومت را طوری در دست می‌گیریم که نوار چهارم و یا محل آن در سمت راست قرار گیرد. داریم:

$$R = \overline{ab} \times 10^{n} = 25 \times 10^{3}\Omega = 25k\Omega$$

تلرانس $0/2 \times 25 = 5k\Omega$

$$\Rightarrow 20k\Omega \le R \le 30k\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(غلامرضا محبی)*

عبارت‌های «الف» و «ب» نادرست هستند.

الف) دیود رسانایی اهمی نیست و نمودار تغییرات جریان بر حسب اختلاف پتانسیل آن به‌صورت غیرخطی است.

ب) قانون اهم در دمای ثابت برای بسیاری از رساناهای غیرفلزی برقرار است.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۶۱)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیررضا صدریکتا)*

جهت حرکت بار منفی در اثر جریان، خلاف جهت قراردادی جریان و از قطب منفی باتری به سوی قطب مثبت است یعنی از B به A. برای محاسبهٔ اندازهٔ کاری که باتری بر روی بار الکتریکی انجام می‌دهد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon = \frac{W}{|q|} \Rightarrow W = \varepsilon|q| = 8 \times 0/5 = 4J$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(شهرام امدی دارانی)*

جریان عبوری از مدار در یک مدار تک‌حلقه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow I = \frac{12}{4+2} = 2A$$

پس اختلاف پتانسیل دو سر باتری از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow V = 12 - 2 \times 2 = 8V$$

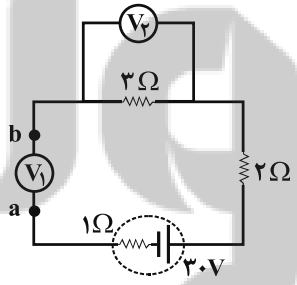
(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(بیتا خورشید)*

مقاومت درونی ولت‌سنج آرمانی بسیار بالا است و اجازهٔ عبور جریان را نمی‌دهد، پس جریان در مدار برقرار نیست.

ولت‌سنج V_2 با مقاومت 3Ω موازی است، پس ولتاژ دو سر آن باید با ولتاژ دو سر مقاومت 3Ω یکسان باشد. از طرفی چون جریان مدار صفر است، داریم:

$$V_2 = RI = 3 \times 0 = 0$$



اگر مجموع پتانسیل‌ها را در مدار بنویسیم، داریم:

$$V_a + 30 - 1 \times I - 2 \times I - 3 \times I = V_b$$

$$\xrightarrow{I=0} V_a + 30 = V_b \Rightarrow V_b - V_a = 30V \Rightarrow V_1 = 30V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

تلاشی درمسیر موفقیت

فیزیک ۱

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(سعید نصیری)*

با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{9K_0}{K_0} = \left(\frac{v+10}{v-10}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{v+10}{v-10} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} v = 20\frac{m}{s} & \text{ق.ق} \\ v = 5\frac{m}{s} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

دقت کنید چون تندی همواره کمیتی مثبت است و در نمودار مقدار $(v-10)\frac{m}{s}$ وجود دارد، بنابراین مقدار $v = 20\frac{m}{s}$ قابل قبول است.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۹۲- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا محبی)*

ابتدا با استفاده از نمودار شتاب - زمان و سرعت اولیهٔ متحرک، سرعت آن را در لحظه‌های $t_1 = 1s$، $t_2 = 3s$، $t_3 = 4s$ و $t_4 = 5s$ محاسبه می‌کنیم:

$$v_1 = a_1 t + v_0 = (-1)\times 1 + 3 \Rightarrow v_1 = 2m/s$$

$$v_3 = a_2 t + v_1 = 1\times 2 + 2 \Rightarrow v_3 = 4m/s$$

$$v_4 = a_2 t + v_1 = 1\times 3 + 2 \Rightarrow v_4 = 5m/s$$

$$v_5 = a_2 t + v_4 = (-3)\times 1 + 5 \Rightarrow v_5 = 2m/s$$

حال از قضیهٔ کار - انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$W_t = K_5 - K_3 = \frac{1}{2}mv_5^2 - \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2}\times 2\times(2^2 - 4^2) = -12J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(فسرو ارغوانی‌فرد)*

طبق قضیهٔ کار - انرژی جنبشی، می‌دانیم که کار نیروی خالص در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییرات انرژی جنبشی می‌باشد. پس تغییرات انرژی جنبشی را در بازه‌های داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$v = 6t - 6 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow v_0 = 6\times 0 - 6 \Rightarrow v_0 = -6m/s \\ t=1s \rightarrow v_1 = 6\times 1 - 6 \Rightarrow v_1 = 0 \\ t=2s \rightarrow v_2 = 6\times 2 - 6 \Rightarrow v_2 = 6m/s \\ t=3s \rightarrow v_3 = 6\times 3 - 6 \Rightarrow v_3 = 12m/s \end{cases}$$

حال با استفاده از قضیهٔ کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t \quad K' - K = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_{t,1} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}m(0^2 - (-6)^2) = -18m \\ W_{t,2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(6^2 - 0^2) = 18m \\ W_{t,3} = \frac{1}{2}m(v_3^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}m(12^2 - 6^2) = 54m \end{cases}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۹۴- **گزینهٔ «۲»** *(محسن قندچلر)*

ابتدا با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، ارتفاع h را به‌دست می‌آوریم:

$$E_A \quad E_B \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow 10h = \frac{1}{2}\times(10)^2 \Rightarrow h = 5m$$

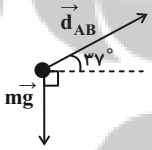
برای اینکه اندازهٔ انرژی پتانسیل گرانشی دو نقطه که هم ارتفاع نیستند، برابر باشد، باید مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی دقیقاً وسط آن دو نقطه باشد. در نتیجه، مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی باید ۲/۵ متر به سمت بالا منتقل شود تا هر دو نقطهٔ A و B از این مبدأ، فاصلهٔ یکسانی داشته باشند.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(شارمان ویسی)*

مسیر ABC را به دو مسیر AB و BC تبدیل کرده و کار نیروی وزن روی آن‌ها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$W_{AB} \quad mgd_{AB}\cos(90^\circ + 37^\circ) = -mgd_{AB}\sin(37^\circ)$$
$$\Rightarrow W_{AB} = -1\times 10\times 0/2\times 0/6 = -1/2J$$



$$W_{BC} = mgd_{BC}\cos(53^\circ)$$
$$\Rightarrow W_{BC} = 1\times 10\times 0/1\times 0/6 = 0/6J$$

بنابراین:

$$W_T = W_{AB} + W_{BC} = -1/2 + 0/6 = -0/6J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰ و ۶۴ تا ۶۸)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \quad (1)$$

در نقطه‌ای که تندی نصف شود، با توجه به رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$، انرژی جنبشی $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. پس داریم:

$$K_1 = 4K_2$$

$$\xrightarrow{(1)} 4K_2 = U_2 + K_2 \Rightarrow U_2 = 3K_2 \Rightarrow \frac{K_2}{U_2} = \frac{1}{3}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(میثم رستیان)*

برای گلولهٔ سنگین‌تر با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E_2 = E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(4m)v_2^2 + 4mgh_2 = \frac{1}{2}(4m)v_1^2 + (4m)gh_1$$

$$\xrightarrow[h_2 = 0]{h_1 = h} v_2^2 = v_1^2 + 2gh \quad (1)$$

هم‌چنین برای گلولهٔ سبک‌تر نیز می‌توان نوشت:

$$E'_2 = E'_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2'^2 + mgh'_2 = \frac{1}{2}m(2v'_1)^2 + mgh'_1$$

$$\xrightarrow[h'_2 = 0]{h'_1 = 4h} v_2'^2 = 4v_1^2 + 8gh \quad (2)$$

اگر رابطهٔ (1) را به (2) تقسیم کنیم:

$$\frac{v_2^2}{v_2'^2} = \frac{v_1^2 + 2gh}{4v_1^2 + 8gh} = \frac{v_1^2 + 2gh}{4(v_1^2 + 2gh)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v_2}{v'_2} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی قائمی)*

گزینهٔ «۱»: تندی جسم با $\sqrt{h}$ متناسب است، زیرا:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

گزینهٔ «۲»: انرژی جنبشی طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی با h متناسب است.

$$K = mgh$$

گزینهٔ «۳»: انرژی جنبشی هنگام برخورد متناسب با m است. $K = mgh$

گزینهٔ «۴»: تندی جسم هنگام برخورد به زمین از m مستقل است:

$$v = \sqrt{2gh}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

با استفاده از قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$W_f = E_2 - E_1 \xrightarrow{W_f = \bar{f}_k d\cos 180^\circ} -\bar{f}_k d = E_2 - E_1$$

$$\Rightarrow -\bar{f}_k h = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$$

$$\Rightarrow -\bar{f}_k h = (\frac{1}{2}mv_2^2 + 0) - (0 + mgh)$$

$$\Rightarrow -2\bar{f}_k = \frac{1}{2} \times 2 \times 16 - 2 \times 10 \times 2 \Rightarrow \bar{f}_k = 12N$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

ابتدا توان خروجی پمپ را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{t}$$

کار انجام شده، همان کار نیروی وزن آب است. پس داریم: (هر متر مکعب آب ۱۰۰۰ کیلوگرم است.)

$$|W| = mg\Delta h = 300 \times 10^3 \times 10 \times 18(J)$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{300 \times 10^4 \times 18}{3600} = 15000W$$

حال با توجه به بازده پمپ داریم:

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{1500}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow P_{\text{ورودی}} = 25000W = 25kW$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

تلاشی در مسیر موفقیت

شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

بررسی گزینه‌ها:

رسانایی الکتریکی به غلظت یون‌های موجود در محلول بستگی دارد:

۱)
$$HF \rightleftharpoons H^+ + F^-$$
$$\left.\begin{matrix}\%\alpha = \alpha \times 100\% \\ \alpha = \dfrac{[H^+]}{[HF]}\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{[H^+]}{۰/۰۵} \times ۱۰۰$$
$$\Rightarrow [H^+] = ۱۲ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow [H^+] = [F^-] = ۱۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

مجموع غلظت یون‌ها در این اسید $۲ \times (۱۲ \times ۱۰^{-۴}) = ۲۴ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

۲) $\alpha = \frac{[H^+]}{[HA]} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{[H^+]}{۶ \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow [H^+] = ۳ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$[H^+]$ $[A^-]$ $۳ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

مجموع غلظت یون‌ها در این اسید $۲ \times (۳ \times ۱۰^{-۴}) = ۶ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

۳) $m_{\text{جرم}}$ $۱۲/۶g \rightarrow n_{\text{مول}} = \frac{m}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱/۲۶}{۶۳} = ۰/۰۲mol$

M $\frac{n}{V}$ $\frac{۰/۰۲}{۰/۱}$ $۰/۲mol.L^{-۱}$

$[H^+]$ $M_{(HNO_۳)}$ $M\alpha = ۰/۲ \times ۱ = ۰/۲mol.L^{-۱}$

مجموع غلظت یون‌ها: $[H^+]$ $[NO_۳^-]$ $۰/۲ \Rightarrow ۲ \times (۰/۲) = ۰/۴mol.L^{-۱}$

۴) در محلول ۲×۱۰^{-۴} مولار هیدرکلریک اسید داریم:

$$HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$$

$[H^+]$ $[Cl^-]$ $۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

مجموع غلظت یون‌ها: $۲ \times (۲ \times ۱۰^{-۴}) = ۴ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۱۰۲- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا پورجاوید)

با توجه به صورت سؤال، محلول باقی‌مانده خاصیت اسیدی دارد (که با یک بار خنثی می‌شود). غلظت یون H^+ باقی‌مانده در آن برابر است با:

$Ca(OH)_۲$ محلول : pH $۱۰/۳$

$$\Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۰/۳} = ۱۰^{-۱۱} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۱۱} mol.L^{-۱}$$

$[OH^-]$ $\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}$ $\frac{۱۰^{-۱۴}}{۵ \times ۱۰^{-۱۱}} = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$

$$[H^+]_{\text{باقی‌مانده}} \quad \frac{\text{مول } H^+ \text{ اولیه} - \text{مول } OH^-}{\text{حجم کل محلول}}$$
$$= \frac{(۰/۱ \times ۳ \times ۱۰^{-۲}) - (۰/۵ \times ۲ \times ۱۰^{-۴})}{۱L}$$
$$۲/۹ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

برای خنثی شدن چنین محلولی می‌توان گفت:

$M_a V_a n_a$ $M_b V_b n_b$

$$۲/۹ \times ۱۰^{-۳} \times ۱ \times ۱ = ۵ \times ۱۰^{-۴} \times V_b \times ۲ \Rightarrow V_b = ۲/۹$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸ و ۳۰ تا ۳۲)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین طیبی)

ابتدا شمار مول‌های OH^- را در محلول $Ba(OH)_۲$ محاسبه می‌کنیم.

$[OH^-]$ $M.\alpha.n = ۰/۶ \times ۱ \times ۲ = ۱/۲ mol.L^{-۱}$

$$?mol\,OH^- \quad ۲L \text{ محلول} \times \frac{۱/۲ mol\,OH^-}{۱L \text{ محلول}} = ۲/۴ mol\,OH^-$$

سپس شمار مول‌های H^+ در محلول نیتریک اسید را محاسبه می‌کنیم.

M $\frac{۱۰ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow M = \frac{۱۰ \times ۲۱ \times ۱/۵}{۶۳} = ۵ mol.L^{-۱}$

$[H^+]$ $M.\alpha.n = ۵ \times ۱ \times ۱ = ۵ mol.L^{-۱}$

$$?mol\,H^+ \quad ۰/۵L \text{ محلول} \times \frac{۵ mol\,H^+}{۱L \text{ محلول}} = ۲/۵ mol\,H^+$$

متوجه شدیم که مول‌های H^+ از مول‌های OH^- بیشتر است، در نتیجه محلول نهایی اسیدی خواهد بود.

$[H^+]$ $\frac{mol\,H^+ - mol\,OH^-}{V_۱ + V_۲}$

$$\frac{۲/۵ - ۲/۴}{۲ + ۰/۵} = \frac{۰/۱}{۲/۵} = ۴ \times ۱۰^{-۲} mol.L^{-۱}$$

pH $-\log[H^+] = -\log(۴ \times ۱۰^{-۲}) = ۲ - \log ۴$

$$= ۲ - ۲\log ۲ = ۲ - ۲(۰/۳) = ۱/۴$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** (حمید زیبی)

عبارت اول نادرست است. مخلوط (آب، وازلین، صابون) یک کلوئید ناهمگن است.

عبارت دوم نادرست است. باز آرنیوس می‌تواند در ساختارش OH نداشته باشد.

عبارت سوم درست است.

pH $۱۱/۳ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۱/۳}$

$$\Rightarrow [H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۲/۷}$$
$$\Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳+۰/۳} = ۲ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

pH $۲/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳+۰/۳} = ۲ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$

عبارت چهارم نادرست است.

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq)$$
$$\rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$
$$NO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow HNO_۳(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_۳^-(aq)$$

رسانایی الکتریکی دو محلول نابرابر است.

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶، ۷، ۱۶ تا ۱۸ و ۱۴ تا ۲۸)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

باز ضعیف $AOH \rightleftharpoons A^+ + OH^-$

$$\%\alpha_{AOH} = \frac{[OH^-]}{[AOH]} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۵ = \frac{[OH^-]}{[AOH]} \times ۱۰۰$$
$$\Rightarrow [OH^-] = ۰/۲۵[AOH]$$

$K_{(AOH)}$ $\frac{[OH^-] \times [A^+]}{[AOH] - [OH^-]} \xrightarrow{[OH^-] = [A^+]}$

$K_{(AOH)}$ $\frac{۰/۲۵[AOH] \times ۰/۲۵[AOH]}{[AOH] - ۰/۲۵[AOH]} = \frac{۰/۲۵}{۳}[AOH]$

$$\frac{K_{(AOH)}}{[AOH]} = \frac{۰/۲۵}{۳} \Rightarrow (I)$$

باز ضعیف $BOH \rightleftharpoons B^+ + OH^-$

$$\%\alpha_{BOH}=\frac{[OH^-]}{[BOH]}\times 100 \Rightarrow 20=\frac{[OH^-]}{[BOH]}\times 100$$

$$\rightarrow [OH^-]=0/2[BOH] \quad K_{(BOH)} \quad \frac{[OH^-]\times[B^+]}{[BOH]-[OH^-]}$$

$$\xrightarrow{[OH^-]\ [B^+]} K_{BOH}=\frac{0/2[BOH]\times 0/2[BOH]}{[BOH]-0/2[BOH]}$$

$$0/05[BOH] \rightarrow \frac{K_{(BOH)}}{[BOH]}=0/05 \ (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)} \quad \frac{0/25}{0/05}=\frac{5}{3}\simeq 1/67$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** (امیر حاتمیان)

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول هر اسید را حساب می‌کنیم:

$$pH \quad 2/7 \rightarrow [H^+]_1=M_{HCl}=10^{-2/7}$$

$$=10^{-3}\times 10^{0/3}=2\times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$pH \quad 2/3 \rightarrow [H^+]_2=M_{HCl}=10^{-2/3}$$

$$=10^{-3}\times 10^{0/7}=5\times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

حال با استفاده از فرمول زیر، غلظت یون هیدرونیوم را در محلول نهایی، بدست می‌آوریم:

$$[H^+]_{\text{نهایی}}=\frac{[H^+]_1\times V_1+[H^+]_2\times V_2}{V_1+V_2}$$

$$=\frac{2\times 10^{-3}\times 30+5\times 10^{-3}\times 20}{30+20} \quad 3/2\times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

حال pH محلول نهایی را حساب می‌کنیم:

$$pH \quad -\log 32\times 10^{-4}=-(\log 2^5+\log 10^{-4})=-(5\log 2-4)=2/5$$

حال در اثر واکنش هیدروکلریک اسید با نقره نیترات داریم:

$$HCl(aq)+AgNO_3(aq)\rightarrow AgCl(s)+HNO_3(aq)$$

$$?\,mg\,AgCl \quad 10mL\,HCl\times\frac{1LHCl}{1000mL}\times\frac{3/2\times 10^{-3}\,mol\,HCl}{1LHCl}$$

$$\times\frac{1mol\,AgCl}{1mol\,HCl}\times\frac{143/5g\,AgCl}{1mol\,AgCl}\times\frac{1000mg\,AgCl}{1g\,AgCl} \quad 4/592mg\,AgCl$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** (پیمان خواجوی‌مجد)

اگر در دمای ثابت محلول دو اسید pH یکسانی داشته باشند، غلظت محلول اسید ضعیف‌تر بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

قدرت اسیدی HB از دو اسید دیگر بیشتر است.

با افزایش غلظت در دمای ثابت، K_a تغییر نمی‌کند و قدرت اسیدی ثابت می‌ماند. (خاصیت اسیدی بیشتر می‌شود.)

در محلول اسیدهای ضعیف غلظت اسید یونیده نشده بیشتر از غلظت یون‌های تولید شده است.

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین طیبی)

$$RCOOH \rightleftharpoons RCOO^- + H^+$$

	M	۰	۰
	$-x$	$+x$	$+x$
	$M-x$	x	x

$$\Rightarrow M-x=2(x+x) \Rightarrow M-x=4x$$

$$\Rightarrow M=5x \Rightarrow \alpha=\frac{x}{M}=\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}=0/2$$

$$K_a \quad \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow 3\times 10^{-5}=\frac{M\times 4\times 10^{-2}}{0/8}\Rightarrow M=6\times 10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

$$a \quad ppm\times 10^{-4} \Rightarrow a=36\times 10^{-4} \Rightarrow M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$$

$$\Rightarrow 6\times 10^{-4}=\frac{10\times 36\times 10^{-4}\times 1}{\text{جرم مولی}}\Rightarrow \text{جرم مولی}=60g.mol^{-1}$$

$$RCOOH \xrightarrow{R\ \text{زنجیری و سیرشده}} C_nH_{2n+1}COOH$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی}=60=14n+46 \Rightarrow n=1 \Rightarrow CH_3COOH$$

$$\Rightarrow \text{جفت الکترون پیوندی} \quad \frac{(4\times 2)+(4\times 1)+(2\times 2)}{2} \quad 8$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی)

معادله‌های موازنه شده:

$$NaHCO_3+HCl\rightarrow NaCl+CO_2+H_2O$$

$$Al(OH)_3+3HCl\rightarrow AlCl_3+3H_2O$$

ابتدا محاسبه می‌کنیم ۴ گرم از این شربت چند مول HCl را خنثی می‌کند.

$$?\,mol\,HCl:4g\,\text{شربت}\times\frac{2/1g\,NaHCO_3}{100g\,\text{شربت}}\times\frac{1mol\,NaHCO_3}{84g\,NaHCO_3}$$

$$\times\frac{1mol\,HCl}{1mol\,NaHCO_3} \quad 10^{-3}\ mol\,HCl$$

$$?\,mol\,HCl:4g\,\text{شربت}\times\frac{1/3g\,Al(OH)_3}{100g\,\text{شربت}}\times\frac{1mol\,Al(OH)_3}{78g\,Al(OH)_3}$$

$$\times\frac{3mol\,HCl}{1mol\,Al(OH)_3} \quad 2\times 10^{-3}\ mol\,HCl$$

حال محاسبه می‌کنیم این مقدار HCl در چند میلی‌لیتر شیرهٔ معده یافت می‌شود.

$$pH \quad 1/7 \Rightarrow [H^+]=10^{-1/7}=10^{-2}\times 10^{0/3}=2\times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [H^+]=M.\alpha.n \Rightarrow M=2\times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$?\,mL\ \text{شیرهٔ معده}:(1+2)\times 10^{-3}\,mol\,HCl\times\frac{1L\ \text{شیرهٔ معده}}{2\times 10^{-2}\,mol\,HCl}$$

$$\times\frac{10^3mL}{1L}=150mL\ \text{شیرهٔ معده}$$

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** (حمید زبحی)

عبارت اول درست است. چون در ابتدای واکنش HX به طور کامل یونیده شده است، پس غلظت یون هیدرونیوم در محلول HX بیشتر است و با شدت بیشتری با Mg واکنش می‌دهد.

عبارت دوم درست است. هر دو اسید پس از مدت زمان مشخص به طور کامل با منیزیم واکنش می‌دهند.

عبارت سوم نادرست است. سرعت واکنش HX با فلز منیزیم بیشتر است.

عبارت چهارم نادرست است. $Mg(s)+2HX(aq)\rightarrow MgX_2(aq)+H_2(g)$

مطابق معادلهٔ موازنه شده، به ازای مصرف ۲ مول HX، ۱ مول MgX_2 تولید می‌شود. پس به ازای مصرف ۱ مولار اسید HX، ۰/۵ مولار MgX_2 تولید می‌شود.

$(MgX_2(aq)\rightarrow Mg^{2+}(aq)+2X^-(aq))$ که غلظت یون‌های تولید شدهٔ آن ۱/۵ مولار می‌شود. (در حالی که غلظت یون‌های HCl، ۲ مولار بود.)

(شیمی ۳ ـ مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحهٔ ۲۴)

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی)

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: نادرست- رنگ شعلهٔ حاصل از سوختن گوگرد آبی اما رنگ شعلهٔ حاصل از سوختن ناقص گاز شهری زرد است.

مورد دوم: درست – آهک (CaO) یک اکسید فلزی است و با حل شدن در آب pH آن را افزایش می‌دهد.

اما گازی که عامل رنگ قهوه‌ای هوای آلودهٔ کلان‌شهرهاست NO_2 است که یک اکسید نافلزی است و با حل شدن در آب، pH آن را کاهش می‌دهد.

مورد سوم: نادرست- سبک‌ترین فلز دورهٔ چهارم، $_{19}K$ می‌باشد.

$$3H_2SO_4 + 2KMnO_4 + 5C_2H_2O_4 \rightarrow 8H_2O + 10CO_2 + 1K_2SO_4 + 2MnSO_4$$

مورد چهارم: نادرست - Pb نماد عنصر سرب می‌باشد (نه پالادیم!)

مورد پنجم: نادرست

$$2Ag + S \rightarrow Ag_2S$$

$$?\,g\,Ag_2S : 1mol\,Ag \times \frac{1mol\,Ag_2S}{2mol\,Ag} \times \frac{248g\,Ag_2S}{1mol\,Ag_2S} = 124g\,Ag_2S$$

(شیمی ۱ - ردِ پای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۴)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** (حمید زبحی)

گزینهٔ «۱»: اوزون مانع ورود بخش عمده‌ای از پرتوهای فرابنفش به سطح زمین می‌شود.

گزینهٔ «۲»: گاز اوزون زودتر مایع می‌شود، چون نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به اکسیژن دارد.

گزینهٔ «۳»: در شرایط یکسان هرچه جرم مولی گاز بیشتر باشد، چگالی آن $\rho = \frac{M_{مولی}}{V_{مولی}}$ بیشتر خواهد بود.

گزینهٔ «۴»:

$$?\,gO_3 \quad 11/2LO_3 \times \frac{1mol\,O_3}{22/4LO_3} \times \frac{48g\,O_3}{1mol\,O_3} = 24g\,O_3$$

$$?\,gHe \quad 22/4LHe \times \frac{1mol\,He}{22/4LHe} \times \frac{4g\,He}{1mol\,He} = 4gHe$$

(شیمی ۱ - ردِ پای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۸۱)

۱۱۳- **گزینهٔ «۳»** (حمید زبحی)

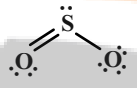
دقت کنیم، CaO یک ترکیب یونی است، پس فقط تعداد مولکول‌های CO_2 را محاسبه می‌کنیم:

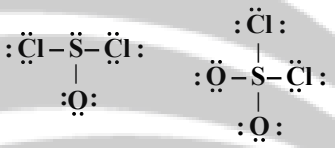
$$?\,\text{مولکول}\,CO_2 \quad 250g\,CaCO_3 \times \frac{1mol\,CaCO_3}{100g\,CaCO_3} \times \frac{1mol\,CO_2}{1mol\,CaCO_3} \times \frac{6/02\times10^{23}\,\text{مولکول}\,CO_2}{1mol\,CO_2}$$

$$1/505\times10^{24}\,\text{مولکول}\,CO_2$$

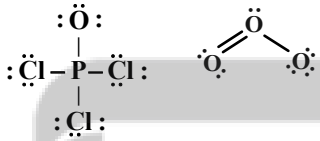
(شیمی ۱ - ردِ پای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** (حمید زبحی)

I) درست: 

II) درست: 

III) درست:

IV) نادرست: 

(شیمی ۱ - ردِ پای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین طیبی)

ابتدا میزان تولید CO_2 به ازای هر کیلومتر را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,gCO_2 : 54kmol \times \frac{10^3\,mol}{1kmol} \times \frac{44gCO_2}{1molCO_2}$$

سالانه $2376\times10^3\,gCO_2$

ماهانه $2376\times10^3 \div 12 = 198\times10^3\,g$ ماهانه gCO_2

$$\frac{gCO_2}{\text{مسافت}\,km} \quad \frac{198\times10^3\,gCO_2}{1500km} = 132g.km^{-1} \Rightarrow B \text{ برچسب}$$

$$?\,\text{درخت} \quad 2376\times10^3\,gCO_2 \times \frac{1\,\text{درخت}}{5\times10^4\,gCO_2}$$

حداقل ۴۸ درخت $\Rightarrow 47/52$

(شیمی ۱ - ردِ پای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۶ و ۸۴)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

عناصر X ، Y به‌ترتیب $_{13}Al$ و $_{29}Cu$ می‌باشند.

حداکثر نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در سولفید و نیترید عنصر مس به‌ترتیب در Cu_2S و Cu_3N یافت می‌شود که برابر با ۲ و ۳ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: Al در طبیعت به شکل بوکسیت (Al_2O_3 ناخالص) یافت می‌شود.

گزینهٔ «۲»: عنصری که در جدول تناوبی پایین عنصر X قرار گرفته است عنصر $_{31}Ga$ است و تنها یون پایدار Ga^{3+} را تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ «۳»: عنصر Z عنصر $_{16}S$ می‌باشد و اکسیدهای SO_2 و SO_3 از آن یافت می‌شوند.

(شیمی ۱ ـ ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

CO_2 ۰/۱۲۵ Ar ۰/۲ O_2 ۰/۲۵

N_2 ۰/۲۵ $\xrightarrow{\text{مجموعاً}}$ ۰/۸۲۵

CO $1-0/825=0/175 \Rightarrow \%CO=0/175\times100=\%17/5$

با فرض بر اینکه مخلوط اولیه ۱۰۰ لیتر باشد.

$25LO_2, 25LN_2, 20LAr, 12/5L\,CO_2$ $17/5LCO$

$$\underset{2L}{2CO} + \underset{1L}{O_2} \rightarrow \underset{2L}{2CO_2}$$

$17/5L$ $8/75L$ $17/5$

تولیدمی‌شود مصرف می‌شود

O_2 باقی‌مانده $25-8/75=16/25L$

CO_2 در مخلوط جدید $12/5+17/5=30L$

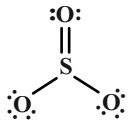
$$CO_2\%:\frac{30}{16/25+25+20+30}\times100\simeq32/8\%$$

(شیمی ۱ ـ ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

مدل A را می‌توان به SO_3 نسبت داد که در این مولکول چهار پیوند کووالانسی وجود دارد.

(درستی عبارت آ)؛



مدل B می‌تواند CO_2 باشد که در آن اتم کربن در گروه ۱۴ و اکسیژن در گروه ۱۶ است. (درستی عبارت ب)

مدل C نمی‌تواند $NaCl$ باشد زیرا مواد یونی فاقد مولکول مجزا هستند. (نادرستی عبارت پ)

مدل B نمی‌تواند N_2O باشد زیرا در این مولکول نیتروژن اتم مرکزی است و یکی از اتم‌های کناری هم نیتروژن خواهد بود، در حالی که در مدل B دو اتم یکسان به هم متصل نشده‌اند. (نادرستی عبارت ت)

(شیمی ۱ ـ ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

سهم CO_2 هر منبع (در ماه)
- نفت خام: $400\times0/5\times0/7=140kg$
- زغال سنگ: $400\times0/1\times0/9=36kg$
- گاز طبیعی: $400\times0/1\times0/36=14/4kg$
- نور خورشید: $400\times0/3\times0/05=6kg$

CO_2 تولید شده در سال $(140+36+14/4+6)\times12$

$2356/8kg\,CO_2$

تعداد درخت $\frac{2356/8}{50}\simeq47/1\Rightarrow$ حداقل ۴۸ درخت

(شیمی ۱ ـ ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۶۶)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

ابتدا ۲ معادلهٔ فرآیند هابر و سوختن گاز آمونیاک را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$1)\ N_2(g)+3H_2(g)\rightarrow2NH_3(g)$$
$$2)\ 4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow4NO(g)+6H_2O(g)$$

ابتدا از مقدار N_2 مقدار NH_3 و سپس با استفاده از معادله (۲) مقدار گاز NO را برحسب لیتر محاسبه می‌کنیم باید توجه داشت که اگر فراورده‌ها در شرایط STP باشند (دما $0^\circ C$ و فشار $1atm$) آب به صورت مایع از گازها جدا می‌شود.

$$8/4g\,N_2\times\frac{1mol\,N_2}{28g\,N_2}\times\frac{2mol\,NH_3}{1mol\,N_2}\times\frac{4mol\,NO}{4mol\,NH_3}\times\frac{22/4LNO}{1mol\,NO}=13/44LNO$$

(شیمی ۱ ـ ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

موارد «الف»، «ب» و «ت» نادرست هستند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

الف) پس از افطار احساس گرمی می‌کنیم، زیرا انرژی موادغذایی در حال آزاد شدن است.

ب) یکی از راه‌های آزادشدن انرژی موادی مانند الکل و بنزین، سوزاندن آن‌ها است.

ت) هنگامی که قند خون پایین باشد می‌توان با خودرن سیب یا نوشیدن شربت آبلیمو و عسل بدن را به حالت طبیعی بازگرداند.

(شیمی ۲ ـ در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

فقط عبارت «ب» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) ممکن است جسمی که دمای بیشتری دارد، جرم خیلی کمی داشته باشد.

پ) انرژی گرمایی به دما و تعداد ذرات (جرم) بستگی دارد.

ت) از آنجا که تعداد ذره‌های استخر خیلی بیشتر است، انرژی گرمایی بیشتری دارد.

(شیمی ۲ ـ در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

این واکنش گرماگیر است و در طی آن انرژی از محیط به سامانه انتقال خواهد یافت.

انجام چنین واکنشی با کاهش دمای ظرف همراه خواهد بود.

سطح انرژی فراورده‌ها بالاتر از واکنش‌دهنده‌ها خواهد بود.

(شیمی ۲ ـ در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۱)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست – بخش عمدهٔ انرژی موجود در شیر داغ، هنگام فرآیند گوارش و سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

۲) درست – متن صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی

۳) نادرست – مقدار گرمای آزاد شده در واکنش‌ها در دمای ثابت ناشی از تفاوت انرژی گرمایی در مواد واکنش‌دهنده و فرآورده نیست! زیرا در دمای ثابت تفاوت چشمگیری میان انرژی گرمایی آن‌ها وجود ندارد.

۴) نادرست – هر واکنش شیمیایی ممکن است با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و ایجاد نور و صدا همراه باشد اما یک ویژگی بنیادی در همهٔ آن‌ها داد و ستد گرما با محیط پیرامون است. از این رو، هر واکنش شیمیایی ممکن است گرماده یا گرماگیر باشد.

(شیمی ۲ ـ در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(حمید زهی)*

عبارت اول نادرست است. بخش عمدهٔ انرژی شیر داغ، هنگام سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

عبارت دوم نادرست است. در فرآیندهای گرماده، دما می‌تواند تغییر نکند.

عبارت سوم درست است.

عبارت چهارم نادرست است. در فرآیند سوخت و ساز، شیر $(37^\circ C)$ به فرآورده‌های $(37^\circ C)$ تبدیل می‌شود.

(شیمی ۲ ـ در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

تاثیر درمسیر موفقیت

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

جرم مولی $C_7H_6O_2$ $7\times12+6\times1+2\times16=122g$

$Q \quad 0/5g\,C_7H_6O_2\times\frac{3/22\times10^6J}{122g\,C_7H_6O_2}\simeq13196J$

ظرفیت گرمایی آب C ویژه آب mc $4/184\times1000=4184\frac{J}{^\circ C}$

$Q \quad C_{کل}\Delta\theta=(C_{ظرفیت\ گرمایی\ آب}+C_{گرماسنج})\Delta\theta$

$13196 \quad (4184+C_{گرماسنج})\times3$

$C_{گرماسنج}\simeq214/67\frac{J}{^\circ C}$

(شیمی ۲ - در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸ و ۶۰ تا ۶۳)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

«ب»: نادرست؛ علت تفاوت در گرمای دو واکنش تفاوت در ماهیت شیمیایی واکنش‌دهنده‌هاست.

«ت»: نادرست؛ دما می‌تواند ثابت بماند.

(شیمی ۲ - در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

$N_2O_3(g)+3H_2(g)\rightarrow N_2(g)+3H_2O(l)$

عبارت جمله‌های اول و سوم نادرست است.

$?\Delta H=3molH_2\times\frac{6/02\times10^{23}H_2}{1molH_2}\times\frac{275/5kJ}{3/01\times10^{23}H_2}\quad 1653kJ$

در این واکنش گرما مصرف نمی‌شود، بلکه آزاد می‌شود.

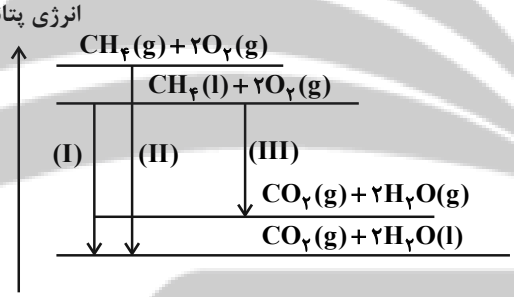
به ازای تولید هر مول گاز نیتروژن نیز $1653kJ$ گرما آزاد می‌شود.

اگر این واکنش در دمای $120^\circ C$ انجام شود. حالت فیزیکی $H_2O(g)$ است و در نتیجه چون سطح انرژی بخار آب در فراورده بیشتر است. گرمای کمتری آزاد می‌شود.

(شیمی ۲ - در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

در واکنش‌های گرماده هرچه اختلاف انرژی پتانسیل فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها بیشتر باشد مقدار گرمای آزاد شده بیشتر خواهد بود همان‌طور که در معادلهٔ واکنش‌های داده شده مشاهده می‌شود تفاوت واکنش‌ها در حالت فیزیکی CH_4 و H_2O است. با رسم نمودار انرژی، اختلاف انرژی پتانسیل فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها را مقایسه می‌کنیم:

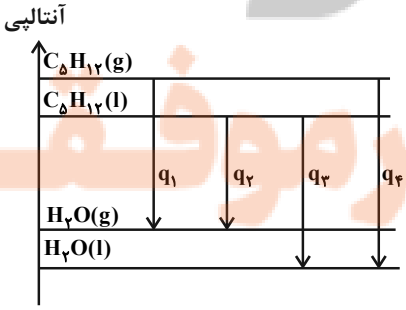


مقدار گرمای آزاد شده : $(II)>(I)>(III)$

(شیمی ۲ - در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به سطح انرژی مواد، میزان گرمای حاصل از انجام واکنش در هریک از شرایط گفته شده عبارت است از:



(شیمی ۲ - در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

تلاشی در مسیر موفقیت

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(حامد پویان‌نظر)*

تمامی گزینه‌ها به‌درستی موازنه شده‌اند به جز گزینهٔ «۱».

$$۴KOH(aq)+۴KMnO_۴(aq)\rightarrow ۴K_۲MnO_۴(aq)+۲H_۲O(l)+O_۲(g)$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(صادق درتومیان)*

در معادلهٔ نمادی، حالت فیزیکی مواد مشخص می‌گردد. نماد «$\xrightarrow{\Delta}$» نشان می‌دهد که واکنش‌دهنده‌ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند.

$$C_۲H_۵OH(l)+۳O_۲(g)\rightarrow ۲CO_۲(g)+۳H_۲O(g)$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(صادق درتومیان)*

اسکلت مرجان‌ها از جنس آهک (کلسیم اکسید) است.

$$SO_۲(g)+\frac{۱}{۲}O_۲(g)\rightarrow SO_۳(g)$$

$$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ بعد}} SO_۳(g)+H_۲O(l)\rightarrow H_۲SO_۴(aq)$$

ترتیب میزان تولید گاز $CO_۲$ بر اثر سوختن برای تأمین برق مصرفی برابر:

زغال سنگ > نفت خام > گاز طبیعی > انرژی خورشیدی > گرمای زمین > باد

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰، ۶۶ و ۷۲)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد فلاح‌نژاد)*

شکل داده شده عملکرد مولکول‌های کربن‌دی‌اکسید در برابر تابش خورشیدی را نشان می‌دهد. در این شکل شماره‌های (۱) و (۲) به‌ترتیب مربوط به بازتابش پرتوهای فروسرخ گسیل شده از زمین با طول موج بیش‌تر و انرژی کم‌تر و پرتوهای خورشیدی با طول موج کم‌تر و انرژی بیش‌تر هستند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۶۹)

۱۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد تقی‌زاده)*

تمام موارد درست بوده و از ویژگی‌های سوخت‌های سبز می‌باشند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(موسی خیاط‌علیمحمدی)*

به منظور حذف $CO_۲$ خروجی از نیروگاه‌ها، از CaO و MgO استفاده می‌شود و به ازای جرم یکسان، هر کدام که جرم مولی کم‌تری داشته باشد، تعداد مول بیش‌تری خواهد داشت و $CO_۲$ بیش‌تری حذف خواهد کرد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۷۰)

۱۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

فرمول شیمیایی گاز اکسیژن $O_۲$ و فرمول شیمیایی اوزون $O_۳$ است؛ بنابراین جرم مولی اوزون بیش‌تر از جرم مولی گاز اکسیژن است، پس نقطهٔ جوش اوزون از نقطهٔ جوش اکسیژن بالاتر است. واکنش‌پذیری اوزون بیش‌تر از واکنش‌پذیری اکسیژن است. در هر مولکول اوزون سه پیوند اما در هر مولکول گاز اکسیژن دو پیوند وجود دارد.

درصد حجمی اکسیژن در تروپوسفر حدود ٪۲۱ است اما اوزون در تروپوسفر بسیار کم وجود دارد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶ و ۷۳ تا ۷۶)

۱۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(موسی خیاط‌علیمحمدی)*

چون شرایط تمامی گازها یکسان است (STP)، یک مول از گازهای مختلف حجم برابری خواهند داشت. هر کدام که جرم مولی بیش‌تری داشته باشد، چگالی بیش‌تری نیز خواهد داشت.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد فلاح‌نژاد)*

با توجه به معادله‌های زیر، تمام موارد ذکر شده در سوختن کامل یک مول اتانول $(C_۲H_۵OH)$ نسبت به سوختن ناقص یک مول متان $(CH_۴)$ بیش‌تر است.

$$C_۲H_۵OH(l)+۳O_۲(g)\rightarrow ۲CO_۲(g)+۳H_۲O(l)$$

$$CH_۴(g)+\frac{۳}{۲}O_۲(g)\rightarrow CO(g)+۲H_۲O(l)$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی- صفحه‌های ۵۶، ۵۷، ۶۱ تا ۶۴ و ۷۷ تا ۸۱)

۱۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(بیژن باغبان‌زاده)*

$$۲H_۲+O_۲\rightarrow ۲H_۲O$$

$$CH_۴+۲O_۲\rightarrow CO_۲+۲H_۲O$$

$$?\,mol\,CH_۴\quad ۱۳۲g\,CO_۲\times\frac{۱mol\,CO_۲}{۴۴g\,CO_۲}$$

$$\times\frac{۱mol\,CH_۴}{۱mol\,CO_۲}=۳mol\,CH_۴$$

حال بخارآب حاصل از سوختن متان را می‌یابیم:

$$?\,L\,H_۲O\quad ۳mol\,CH_۴\times\frac{۲mol\,H_۲O}{۱mol\,CH_۴}$$

$$\times\frac{۲۲/۴L\,H_۲O}{۱mol\,H_۲O}=۱۳۴/۴L\,H_۲O$$

پس حجم بخارآب حاصل از سوختن گاز هیدروژن برابر ۲۲۴ لیتر می‌باشد، بنابراین داریم:

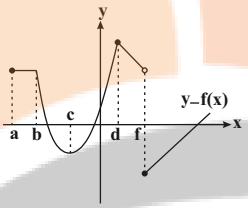
$$?\,L\,H_۲\quad ۲۲۴L\,H_۲O\times\frac{۲L\,H_۲}{۲L\,H_۲O}=۲۲۴L\,H_۲$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

حسابان ۲-اختیاری

۱۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(سهند ولی‌زاده)*

در نقاط $\{b,d,f\}$ مشتق نداریم. در نقطهٔ $\{c\}$ مشتق باید صفر باشد، طول نقطهٔ c منفی است در بازهٔ a تا b مشتق صفر است،چون شیب صفر است. در بازهٔ b تا c تابع نزولی و $f'<0$، در بازهٔ c تا d تابع صعودی و $f'>0$، در بازهٔ d تا f تابع نزولی $f'<0$ و در بازهٔ $(f,+\infty)$ تابع صعودی و $f'>0$ است. در بازه‌های d تا f و f تا $+\infty$ تابع خطی است، لذا f' ثابت است.



(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(سهند ولی‌زاده)*

$$f(x)\quad \sqrt{x^4+2x^3+x^2}=\sqrt{x^2(x^2+2x+1)}=\sqrt{x^2(x+1)^2}$$

$$|x(x+1)|$$

$$\xrightarrow{f'_+(0)} f(x)=x^2+x\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow f'_+(0)=1$$

$$\xrightarrow{f'_-(-1)} f(x)=x^2+x\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow f'_-(-1)=-1$$

$$f'_+(0)-f'_-(-1)=1-(-1)=1+1=2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹ و ۹۳)

۱۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(بابک سادات)*

با توجه به قضیهٔ کتاب درسی، اگر f در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز هست. پس ابتدا شرط پیوستگی را در نقطهٔ مرزی اعمال می‌کنیم چون در سایر نقاط این تابع پیوسته است. پس کافی است داشته باشیم:

$$f(1)\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow \frac{a(1)+b}{\sqrt{1}}=b(1)^3-1+6$$

$$\Rightarrow a+b=b+5\Rightarrow \boxed{a=5}\quad (1)$$

حال با جاگذاری $a=5$ در ضابطهٔ بالایی تابع، شرط مشتق‌پذیری را اعمال می‌کنیم یعنی:

$$f(x)\quad \begin{cases}\dfrac{5x+b}{\sqrt{x}} & ;\ x\geq 1\\ bx^3-x+6 & ;\ x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)\quad f'_-(1)\Rightarrow \frac{5(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x+b)}{x}\quad 3bx^2-1$$

$$\Rightarrow 5-\frac{(5+b)}{2}=3b-1$$

$$\Rightarrow 10-5-b=6b-2\Rightarrow 7b=7\Rightarrow b=1\quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a-b=4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹ و ۹۴)

۱۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی پیرانوند)*

باید نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در معادله خط مماس و نمودار تابع صدق کند، بنابراین:

$$1)\ 2y\quad 3x+5k\to 2\beta=3\alpha+5k$$

$$2)\ y\quad \sqrt{x^2+x-1}\to\beta=\sqrt{\alpha^2+\alpha-1}$$

از طرفی دیگر می‌دانیم مشتق به ازای طول نقطهٔ تماس، همان شیب خط مماس است، لذا:

$$y\quad \sqrt{x^2+x-1}\Rightarrow y'=\frac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)2}$$

$$\xrightarrow{x\ \alpha}\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{\alpha^2+\alpha-1}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\alpha^2+\alpha-1}=2\alpha+1\Rightarrow 9\alpha^2+9\alpha-9=4\alpha^2+4\alpha+1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2+5\alpha-10=0\Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=-2\end{cases}$$ غ‌ق‌ق چون α باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow \beta=\sqrt{1+1-1}=1\Rightarrow(\alpha,\beta)=(1,1)\xrightarrow{\text{در معادله خط صدق می‌کند.}}$$

$$2\quad 3+5k\Rightarrow k=\frac{-1}{5}$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیر وفائی)*

$$f(x)+k=\cos 2x-\sin x+k$$

اگر با انتقال k واحد در x x_0 بر محور x مماس باشد، یعنی $f'(x_0)=0$ است.

$$\Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x-\cos x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0}-\cos x(4\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow \cos 2x=-1,\sin x=\pm 1\\ \sin x=-\frac{1}{4}\Rightarrow\cos 2x=\frac{7}{8}\end{cases}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

حال به ازای مقادیر بالا نمودار $f(x)+k$ y بر محور x ها مماس است،

یعنی رابطهٔ $\cos 2x-\sin x=-k$ برقرار است:

$$\begin{cases}\cos x=0,\sin x=1\Rightarrow k=2\\ \cos x=0,\sin x=-1\Rightarrow k=0\\ \sin x=-\frac{1}{4}\Rightarrow k=-\frac{9}{8}\end{cases}$$

پس باید $k\in\{-\frac{9}{8},0,2\}$ باشد.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۵)

۱۴۶- **گزینهٔ «۴»** (بابک سادات)

عبارت $g(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{g(x)}{f(x)}\quad \frac{x^8-1}{(x^2+1)(x^4+1)}=x^2-1$$

حالا از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^2}=2x$$

و در نهایت x را مساوی یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{g'(1)f(1)-f'(1)g(1)}{(f(1))^2}=2$$

$$\xrightarrow{f(1)\ 4} g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=2\times 4^2=32$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱۴۷- **گزینهٔ «۱»** (فهیمه ولی‌زاده)

$$y\quad \left(\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}\right)^3$$

$$\Rightarrow y'=3\left(\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}\right)'\left(\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}\right)^2$$

$$3\left(\frac{\frac{1(2x+1)-2(x+3)}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{2x+1}}\right)^2$$

$$x\quad 1\Rightarrow y'=3\left(\frac{\frac{1(3)-2(4)}{9}}{2\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2\quad \frac{-5\sqrt{3}}{9}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴ و ۹۶)

۱۴۸- **گزینهٔ «۴»** (سروش موئینی)

$$y\quad f(\sqrt[3]{x-1})\Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}f'(\sqrt[3]{x-1})$$

$$\xrightarrow{x\ 2} y'=\frac{1}{3}f'(1)=-1\Rightarrow f'(1)=-3$$

$$y\quad f\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)\Rightarrow y'=\frac{2\times(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}f'\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$$

$$\xrightarrow{x\ 2} y'(2)=\frac{5}{25}f'(1)=\frac{1}{5}(-3)=-0/6$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴ و ۹۶)

۱۴۹- **گزینهٔ «۲»** (علی سلامت)

با توجه به حد داده شده داریم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{2x-8}\quad \frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\quad \frac{1}{2}f'(4)=12$$

$$\Rightarrow f'(4)=24(*)$$

حال از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y\quad f(\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{x}{2}})\Rightarrow y'=f'(\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{x}{2}})\times\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow y'(8)=f'(2+2)\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)\overset{(*)}{=}24\left(\frac{5}{24}\right)=5$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴ و ۹۶)

۱۵۰- **گزینهٔ «۴»** (محمدجواد محسنی)

$$f(x)\quad x^3+ax-a$$

$$f'(x)=3x^2+a$$

$$f''(x)=6x$$

چون می‌خواهیم دو تابع f' و f'' بر هم مماس شوند، باید معادلهٔ $f''(x)\quad f'(x)$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. یعنی $\Delta=0$:

$$f''(x)\quad f'(x)\Rightarrow 3x^2+a=6x\Rightarrow 3x^2-6x+a=0$$

$$\Delta=36-4(3)(a)=0\Rightarrow a=3$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۸)

تلاشی در مسیر موفقیت

هندسه ۳(اختیاری)

۱۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

سهمی‌هایی که معادلات آنها در گزینه‌های «۳» و «۴» داده شده است، رو به بالا یا پایین باز می‌شوند، بنابراین کافی است معادلات گزینه‌های «۱» و «۲» را بررسی کنیم.

گزینهٔ «۱»:

$$y^2-2x+2y-1=0 \Rightarrow y^2+2y+1=2x+2$$

$$\Rightarrow (y+1)^2=2(x+1)$$

دهانهٔ سهمی رو به راست است.

گزینهٔ «۲»:

$$y^2+4x-2y-3=0 \Rightarrow y^2-2y+1=-4x+4$$

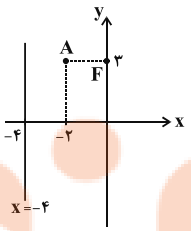
$$\Rightarrow (y-1)^2=-4(x-1)$$

دهانهٔ سهمی رو به چپ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

رأس سهمی دقیقاً وسط پاره خطی است که از کانون بر خط هادی سهمی عمود می‌شود. پس مطابق شکل نقطهٔ $A(-2,3)$ رأس سهمی و دهانهٔ سهمی رو به راست است.



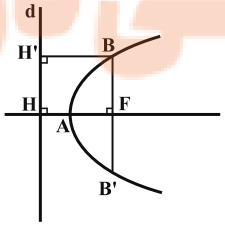
از طرفی فاصلهٔ کانونی سهمی برابر فاصلهٔ کانون تا رأس یعنی برابر ۲ است، بنابراین داریم:

معادلهٔ سهمی: $(y-3)^2=8(x+2)$

$$\xrightarrow{y=0} 9=8x+16 \Rightarrow 8x=-7 \Rightarrow x=-\frac{7}{8}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*



می‌دانیم هر نقطهٔ واقع بر سهمی از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است، بنابراین مطابق شکل BH' BF و در نتیجه چهارضلعی $BFHH'$ مربع است. فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a$ FH است، پس $2a$ BF و طول BB' چهار برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۵۵)

۱۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

معادلهٔ سهمی را به فرم متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$3y^2-4x+6y+5=0 \Rightarrow 3y^2+6y+3=4x-2$$

$$\Rightarrow 3(y+1)^2=4(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow (y+1)^2=\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})$$

نقطهٔ $A(\frac{1}{2},-1)$ رأس سهمی است و سهمی رو به راست باز می‌شود، بنابراین داریم:

$$4a \quad \frac{4}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$x \quad -a+h=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{6} \text{ : معادلهٔ خط هادی}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

اگر a فاصلهٔ کانونی، d قطر قاعده و h گودی (عمق) دیش مخابراتی باشد، آنگاه داریم:

$$a \quad \frac{d^2}{16h}=\frac{48^2}{16\times 12}=\frac{48}{16}\times\frac{48}{12}=3\times 4=12$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۵۹)

۱۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

محور تقارن سهمی، عمودمنصف پاره خطی است که نقاط $M(0,-5)$ و $N(0,3)$ دو سر آن هستند، پس داریم:

$$y \text{ : محور تقارن سهمی} \quad \frac{-5+3}{2}=-1$$

بنابراین کانون سهمی روی خط $y=-1$ قرار دارد. می‌دانیم هر نقطهٔ واقع بر سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است، پس اگر $F(\alpha,-1)$ کانون این سهمی باشد، آنگاه با توجه به اینکه نقطهٔ $M(0,-5)$ به فاصلهٔ ۴ واحد از خط هادی سهمی واقع است، داریم:

$$MF \quad 4 \Rightarrow \sqrt{(\alpha-0)^2+(-1+5)^2}=4$$

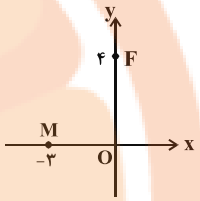
$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2+16}=4 \Rightarrow \alpha=0$$

فاصلهٔ کانون تا خط هادی، دو برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است، پس $۴ \quad ۲a$ و در نتیجهٔ فاصلهٔ کانونی سهمی $a = ۲$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱۵۷- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

از آنجا که سهمی فقط در یک نقطه محور x ها را قطع می‌کند، پس دهانهٔ آن رو به راست یا چپ باز می‌شود (سهمی افقی است).



می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سهمی از خط هادی و کانون سهمی برابر است، بنابراین اگر خط $x = \alpha$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} M(-۳,۰) \\ F(۰,۴) \end{cases} \Rightarrow MF = \sqrt{(۰+۳)^۲ + (۴-۰)^۲} = ۵$$

$$|\alpha - (-۳)| = ۵ \Rightarrow |\alpha + ۳| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + ۳ = ۵ \Rightarrow \alpha = ۲ \\ \alpha + ۳ = -۵ \Rightarrow \alpha = -۸ \end{cases}$$

اگر $x = ۲$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر ۲ و فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۱ است.

اگر $x = -۸$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر ۸ و فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۴ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱۵۸- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت متعارف می‌نویسیم:

$$x^۲ - mx - ۳y - \frac{m^۲}{۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ - mx + \frac{m^۲}{۴} = ۳y + \frac{۳m^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{m}{۲})^۲ = ۳(y + \frac{m^۲}{۴})$$

نقطهٔ $A(\frac{m}{۲}, -\frac{m^۲}{۴})$ رأس سهمی است و سهمی رو به بالا باز می‌شود، بنابراین داریم:

$$۴a \quad ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

کانون سهمی $: F(h, a+k) = (\frac{m}{۲}, \frac{۳}{۴} - \frac{m^۲}{۴})$

کانون سهمی روی خط $x \quad y$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرار دارد، پس داریم:

$$y \quad x \Rightarrow \frac{۳ - m^۲}{۴} = \frac{m}{۲} \xrightarrow{\times ۴} ۳ - m^۲ = ۲m$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m+۳)(m-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \quad -۳ \\ m = ۱ \end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱۵۹- **گزینهٔ «۳»** (مسعود درویشی)

نقطهٔ $F(۱, \frac{۱}{۲})$ کانون این سهمی است. با توجه به مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی، دهانهٔ سهمی رو به راست است و رأس سهمی دقیقاً وسط پاره‌خطی است که از کانون و خط هادی رسم می‌شود، یعنی نقطهٔ $A(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲})$ است. همچنین فاصلهٔ کانونی سهمی، برابر فاصلهٔ رأس تا کانون، یعنی $a = \frac{۳}{۴}$ است و در نتیجه داریم:

معادلهٔ سهمی $: (y - \frac{۱}{۲})^۲ = ۳(x - \frac{۱}{۴})$

$$\xrightarrow{y \ ۰} \frac{۱}{۴} = ۳x - \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

۱۶۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

محور تقارن سهمی موازی محور y ها است، پس بازتاب این دو اشعهٔ نورانی از کانون سهمی عبور می‌کنند، یعنی نقطهٔ $(۱,۳)$ کانون این سهمی است. با تبدیل معادلهٔ سهمی به حالت متعارف داریم:

$$x^۲ - ۲x - ۴y + m = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۴y - m + ۱$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴(y - \frac{m-۱}{۴})$$

نقطهٔ $A(۱, \frac{m-۱}{۴})$ رأس سهمی و دهانهٔ آن رو به بالا است. داریم:

$$۴a \quad ۴ \Rightarrow a = ۱$$

کانون سهمی $: F(h, a+k) = (۱, ۱ + \frac{m-۱}{۴})$

$$۱ + \frac{m-۱}{۴} = ۳ \Rightarrow \frac{m-۱}{۴} = ۲ \Rightarrow m = ۹$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

تلاشی درمسیر موفقیت

ریاضیات گسسته (اختیاری)

۱۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود رویشی)*

تعداد روش‌های ممکن برای انجام این کار برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}+\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۱}+\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۲}$$
$$۳۶+۲۴+۱۲=۷۲$$

(ریاضی ۱ - شمارش بدون شمردن؛ مشابه مثال صفحهٔ ۱۳۴)

۱۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(عزیزاله علی اصغری)*

اعداد مورد نظر را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

الف) رقم یکان، رقم صفر باشد:

تعداد اعداد پنج رقمی $۶\times۵\times۴\times۳\times۱=۳۶۰$

ب) رقم یکان، رقم ۵ باشد (در این حالت رقم صفر نمی‌تواند اولین رقم سمت چپ باشد):

تعداد اعداد پنج رقمی $۵\times۵\times۴\times۳\times۱=۳۰۰$

بنابراین در مجموع می‌توان $۳۶۰+۳۰۰=۶۶۰$ عدد با شرایط مورد نظر نوشت.

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۱۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

مجموعهٔ A را می‌توان به دو زیر مجموعهٔ $A_۱=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ (شامل اعداد فرد) و $A_۲=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ (شامل اعداد زوج) افراز نمود. حالت‌های ممکن برای انتخاب یک زیر مجموعهٔ ۴ عضوی از A که مجموع اعضای آن عددی زوج باشد، برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\text{۴عدد فرد}}+\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{۲عدد فرد}}\times\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲عدد زوج}}+\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴عدد زوج}}=۵+۱۰\times۱۵+۱۵=۱۷۰$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

×○×○×○×○×○×○×

فرض کنید ابتدا ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم در صف بایستند که این کار به $۶!$ طریق امکان‌پذیر است. اگر محل قرار گرفتن این دانش‌آموزان را مطابق شکل با ○ نمایش دهیم، آنگاه ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم می‌توانند در مکان‌هایی که با علامت × در شکل مشخص شده قرار گیرند. بعد از انتخاب ۴ مکان از ۷ مکان مشخص شده باید دقت کرده که $۴!$ جایگشت برای ایستادن این ۴ دانش‌آموز در این مکان‌ها وجود دارد، بنابراین تعداد حالت‌های ایستادن این افراد در یک صف برابر است با:

$$۶!\times\binom{۷}{۴}\times۴!=۶!\times\frac{۷!}{۴!۳!}\times۴!=\frac{۶\times۵!\times۷!}{۳!}=۵!\times۷!$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

۱۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(عزیزاله علی اصغری)*

رقم ۴ تنها رقم زوج در این عدد هشت رقمی است، پس لزوماً ۴ در رقم یکان قرار می‌گیرد.

رقم ۳، سه بار و رقم ۵، چهار بار در این عدد تکرار شده است، پس با توجه به رابطهٔ جایگشت با تکرار تعداد اعداد هشت رقمی زوج قابل نوشتن با ارقام این عدد برابر است با:

$$\frac{۷!}{۳!۴!}\quad\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۶\times۴!}\quad ۳۵$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) عدد مورد نظر شامل هفت رقم ۱ و یک رقم ۲ باشد:

$$n_۱\quad\frac{۸!}{۷!۱!}=۸$$

ب) عدد مورد نظر شامل چهار رقم ۱ و چهار رقم ۲ باشد:

$$n_۲\quad\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰$$

پ) عدد مورد نظر شامل یک رقم ۱ و هفت رقم ۲ باشد:

$$n_۳\quad\frac{۸!}{۱!۷!}=۸$$

تلاشگر در مسیر موفقیت

بنابراین کل تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$n \quad n_1 + n_2 + n_3 = 86$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱۶۷- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

اگر تعداد شاخه‌های گل انتخاب شده از این ۴ نوع گل را بـا x_1، x_2، x_3 و x_4 نمایش دهیم، آنگاه تعداد جواب‌های مسئله برابـر تعـداد جـواب‌هـای طبیعی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ است که حاصل از رابطهٔ زیر بـه دست می‌آید:

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف خطیبی)*

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$

$x_2 > 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \Rightarrow x_2 = y_2 + 4$

اگر y_3 x_3 و y_4 x_4 فرض شود، آنگاه تعداد جواب‌های معادلـه بـا شرایط داده شده برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر است:

$(y_1 + 2) + (y_2 + 4) + y_3 + y_4 = 12$

$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $\binom{6+4-1}{4-1} \quad \binom{9}{3} = 84$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

متغیر x_4 حداکثر برابر ۳ است. از طرفی تعداد جـواب‌هـای طبیعـی معادلـهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است، پس داریم:

حالت اول: $x_4 \quad 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 11$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$

حالت دوم: $x_4 \quad 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

حالت سوم: $x_4 \quad 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر است با:

$45 + 21 + 1 = 67$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

برای به دست آوردن جـواب‌هـای صـحیح معادلـه، لازم اسـت $\frac{8}{x_2}$ عـددی صحیح باشد، پس ۴ حالت زیر امکان‌پذیر است:

$x_2 \quad 1 \Rightarrow x_1 + 8 + x_3 = 13 \Rightarrow x_1 + x_3 = 5$

$\Rightarrow |S_1| = \binom{5+2-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$

$x_2 \quad 2 \Rightarrow x_1 + 4 + x_3 = 13 \Rightarrow x_1 + x_3 = 9$

$\Rightarrow |S_2| = \binom{9+2-1}{2-1} = \binom{10}{1} = 10$

$x_2 \quad 4 \Rightarrow x_1 + 2 + x_3 = 13 \Rightarrow x_1 + x_3 = 11$

$\Rightarrow |S_3| = \binom{11+2-1}{2-1} = \binom{12}{1} = 12$

$x_2 \quad 8 \Rightarrow x_1 + 1 + x_3 = 13 \Rightarrow x_1 + x_3 = 12$

$\Rightarrow |S_4| = \binom{12+2-1}{2-1} = \binom{13}{1} = 13$

بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله برابر است با:

$|S| = 6 + 10 + 12 + 13 = 41$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

فیزیک ۳- اختیاری

۱۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(مهدی آذرنسب)*

بررسی تک‌تک موارد:

آ) نادرست - بسامد امواج فراصوتی‌ای که وال عنبر تولید می‌کند، حدود ۱۰۰kHz است.

ب) نادرست - برای تشخیص یک جسم با استفاده از پژواک امواج فراصوتی، اندازهٔ آن جسم باید در حدود طول موج به‌کار رفته یا بزرگ‌تر از آن باشد.

پ) درست

ت) نادرست - در چنین شرایطی که اجزای تشکیل دهنده سطح با برآمدگی و فرورفتگی‌های بزرگ‌تر از طول موج تابیده شده است، موج به‌صورت نامنظم بازتاب پیدا می‌کند.

(فیزیک ۳- بر هم کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۱۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمود منصوری)*

با توجه به آن‌که سرعت صوت ثابت است و اختلاف زمانی $\Delta t = 0/12s$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta x = vt \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow \Delta t = t_{هوا} - t_{میله} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_{هوا}}{v_{هوا}} - \frac{\Delta x_{میله}}{v_{میله}}$$

اگر فاصلهٔ شخصی که با چکش ضربه می‌زند تا شخصی که صدای ضربه را می‌شنود Δx درنظر بگیریم: Δx $\Delta x_{میله}$ $\Delta x_{هوا}$

و همچنین $v_{میله}$ $10v_{هوا}$ است:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{هوا}} - \frac{\Delta x}{10v_{هوا}} \Rightarrow \Delta t = \frac{9\Delta x}{10v_{هوا}}$$

$$\Rightarrow 0/12 = \frac{9\Delta x}{10\times 360} \Rightarrow \Delta x = 48m$$

راه دوم: هرگاه در دو محیط (که دارای سرعت‌های متفاوتی هستند) صوت، یک طول را با اختلاف زمانی Δt طی کند. آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \times \Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{(10\times 360)\times 360}{(10\times 360) - 360} \times 0/12 = 48m$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱۷۳- **گزینهٔ «۳»** *(بیتا خورشید)*

شخص صدای بلندگوی A را 14dB بلندتر از B می‌شنود می‌توانیم فاصلهٔ دو بلندگوی A و B را از مقایسهٔ تراز شدت صدای آن‌ها به‌دست بیاوریم:

$$\beta_A - \beta_B = 14dB$$

$$\beta_A - \beta_B = 10\log(\frac{d_B}{d_A})^2 \Rightarrow 14 = 10\log(\frac{500}{d_A})^2$$

$$\Rightarrow 1/4 = \log(\frac{500}{d_A})^2$$

$1/4 \quad 2-0/6 = \log 100 - 2\log 2 = \log\frac{100}{2^2} = \log 25$

$\log 25 \quad \log(\frac{500}{d_A})^2 \Rightarrow 25 = (\frac{500}{d_A})^2 \Rightarrow d_A = 100m$

شخص صدای بلندگوی C را 12dB کوتاه‌تر از A می‌شنود:

$$\beta_A - \beta_C = 12dB$$

$$\beta_A - \beta_C = 10\log(\frac{d_C}{d_A})^2 \Rightarrow 1/2 = \log(\frac{d_C}{100})^2$$

$$\Rightarrow 1/2 = 4\times 0/3 = \log 16$$

$16 \quad (\frac{d_C}{100})^2 \Rightarrow d_C = 400m \Rightarrow d_C - d_A = 400 - 100 = 300m$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

هر تُن حاصل از دیاپازون دارای دو ویژگی ارتفاع و بلندی است که هر دو به ادراک شنوایی ما مربوط می‌شوند.

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحهٔ ۸۱)

۱۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(بابک اسلامی)*

در حالتی‌که چشمهٔ صوت ساکن است، فاصلهٔ جبهه‌های موج در دو سوی چشمه یکسان و طول‌موج در جلو و عقب آن برابر است.

در حالتی‌که چشمهٔ صوت در حال حرکت است، فاصلهٔ جبهه‌های موج در جلوی چشمه کمتر از پشت آن خواهد بود، بنابراین طول‌موج در جلوی چشمه کوتاه‌تر خواهد بود.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

۱۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

در واقع دانش‌آموز (۲) در لحظهٔ t_1 صدای دانش‌آموز (۱) و در لحظهٔ t_2، پژواک صدا را از صخره می‌شوند. با توجه به رابطهٔ تندی متوسط داریم:

$$\begin{matrix} t_1 & \frac{d}{v} \\ t_2 & \frac{d+2\times(280)}{v} \end{matrix} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\times(280)}{v}$$

که در آن v تندی صوت در هوا است.

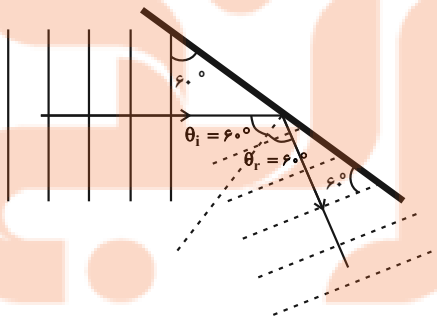
با توجه به روند کلی حل مسأله مشخص است که فاصلهٔ دو دانش‌آموز از هم تأثیری در فاصلهٔ زمانی شنیدن دو صدا ندارد. پس داریم:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} \quad \frac{2(280)}{2(200)} \xrightarrow{\Delta t = 1/75s} \Delta t' = 1/25s$$

(فیزیک ۳- بر هم کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا زاویهٔ تابش و بازتابش پرتوی موج تابیده به مانع تخت را می‌یابیم. با توجه به این‌که زاویهٔ تابش (θ_i) و زاویهٔ بازتاب (θ_r) با هم برابرند، با رسم خط عمود در محل برخورد پرتوی موج تابیده به مانع تخت، می‌بینیم $\theta_i = \theta_r = 60^\circ$ است.



از طرف دیگر، چون جبهه‌های موج بازتابیده عمود بر پرتوی موج بازتابیده است، مطابق شکل، زاویهٔ برخورد جبهه‌های موج بازتابیده با سطح مانع تخت برابر $\theta = 60^\circ$ است.

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۱۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمدصارق مام‌سیره)*

با به‌کارگیری قانون اسنل با توجه به این‌که فاصلهٔ هر دو جبههٔ موج متوالی همان طول موج است می‌توان نوشت:

$$\lambda_A = 8mm \ , \lambda_B = 6mm$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \quad \frac{n_B}{n_A}$$

اما چون ضریب شکست محیط‌ها با طول موج پرتو در این محیط‌ها رابطهٔ عکس دارد، می‌توان نوشت:

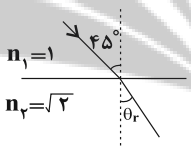
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \quad \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin\theta_2} = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{8}{10\sin\theta_2} = \frac{8}{6}$$

$$\sin\theta_2 = 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ, D = \theta_1 - \theta_2 = 53^\circ - 37^\circ = 16^\circ$$

(فیزیک ۳- بر هم کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۹)

۱۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهری براتی)*

با توجه به قانون اسنل داریم:

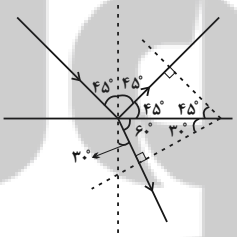


$$n_1 \sin\hat{\theta}_i = n_2 \sin\hat{\theta}_r$$

$$\Rightarrow 1\times\sin 45^\circ = \sqrt{2}\times\sin\hat{\theta}_r \Rightarrow \hat{\theta}_r = 30^\circ$$

طبق قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است. از طرفی جبهه‌های موج عمود بر پرتوی نور هستند، در نتیجه با توجه به شکل زیرداریم:

$$\alpha = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$



(فیزیک ۳- بر هم کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۹)

۱۸۰- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

با افزایش دمای هوا، چگالی آن کاهش یافته که این امر سبب کاهش ضریب شکست هوا می‌شود.

سایر گزینه‌ها، عبارت‌های صحیحی هستند.

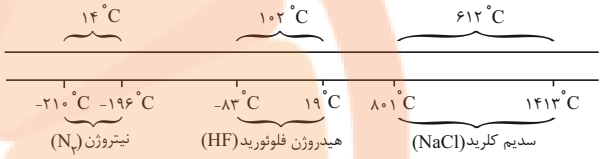
(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

شیمی ۳- اختیاری

۱۸۱- گزینهٔ «۲» *(فرزاد رضایی)*

هر مادهٔ خالصی در گسترهٔ دمایی بین نقطهٔ ذوب و جوش خود به حالت فیزیکی مایع است.

در شکل زیر گسترهٔ دمایی از هر ماده که می‌تواند به حالت مایع باشد نمایش داده شده است که سدیم کلرید بیشترین گسترهٔ دمایی و نیتروژن کمترین گسترهٔ دمایی را دارد.



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ماده‌ای که در گسترهٔ دمایی کمتری به حالت مایع است، نیتروژن (N_2) می‌باشد که در ساختار لوویس آن: $N \equiv N$: دو جفت الکترون ناپیوندی و سه جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

گزینهٔ «۲»: در دمای $-۱۰۰^\circ C$، سدیم کلرید و هیدروژن فلوئورید در دمایی کمتر از نقطهٔ ذوب خود می‌باشند بنابراین حالت فیزیکی آن‌ها جامد است.

گزینهٔ «۳»: ماده‌ای که در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است سدیم کلرید (NaCl) می‌باشد که شامل یک عنصر فلزی (Na) و یک عنصر نافلزی (Cl) است.

گزینهٔ «۴»: ماده‌ای در دمای اتاق گازی است که نقطهٔ جوش آن کمتر از ۲۵ درجهٔ سلسیوس است که نیتروژن و هیدروژن فلوئورید اینگونه‌اند ولی گشتاور دو قطبی هیدروژن فلوئورید مخالف صفر است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۷۶)

۱۸۲- گزینهٔ «۳» *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

تنها عبارت (ت) درست است.

در تشکیل NaCl از فلز سدیم و گاز کلر، Na الکترون از دست داده و اکسید می‌شود در مقابل Cl الکترون گرفته و کاهش می‌یابد.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت (آ): عدد کوئوردیناسیون به شمار نزدیک‌ترین یون‌های ناهم‌نام موجود پیرامون هر یون در شبکهٔ بلور گفته می‌شود.

عبارت (ب): آنتالپی فروپاشی مقدار انرژی لازم برای شکستن یا فروپاشی یک مول ترکیب یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا است.

عبارت (پ): چگالی بار، هم‌ارز با نسبت بار یون به حجم آن است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۱۸۳- گزینهٔ «۴» *(امیر حاتمیان)*

تنها عبارت (ث) درست است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت (آ): Fe_2O_3: قرمز رنگ/ TiO_2: سفید رنگ/ دوده: سیاه‌رنگ

عبارت (ب): محلولی از نمک وانادیم (III) به رنگ سبز است.

عبارت (پ): مهم‌ترین دلیل استفاده از تیتانیم در ساخت موتور جت، دمای ذوب بالاتر و چگالی پایین‌تر آن نسبت به فولاد است.

عبارت (ت): محلول سبز رنگ وانادیم حاوی یون‌های V^{3+} می‌باشد.

با توجه به آنکه وانادیم در دورهٔ ۴ و گروه ۵ جای دارد، عدد اتمی آن برابر ۲۳ است.

$_{23}V : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3 4s^2$

$_{23}V^{3+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2$

۱۲ تعداد الکترون با $l=1$

عبارت (ث): آلیاژ نیتینول ← نیکل(Ni) و تیتانیم(Ti)

تیتانیم یکی از اجزاء آلیاژ نیتینول بوده که اکسید آن (TiO_2) به عنوان رنگ‌دانهٔ سفید استفاده می‌شود.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۶)

۱۸۴- گزینهٔ «۲» *(محمدپارسا فراهانی)*

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت:

عبارت اول: شارهٔ A که ترکیب یونی است می‌تواند حتی در روزهای ابری و شب‌هنگام انرژی گرمایی را در خود ذخیره کند تا شارهٔ B که ترکیب مولکولی است را بخار کند و شارهٔ B بخار شده توربین را حرکت دهد.

عبارت دوم: ترکیب‌های یونی در حالت مذاب رسانا هستند و شارهٔ A یک ترکیب یونی مذاب است.

عبارت سوم: گسترهٔ دمایی سدیم کلرید مذاب در این فناوری حدود $۸۵۰^\circ C - ۱۳۵۰^\circ C$ است.

عبارت چهارم: ترکیب‌های مولکولی نسبت به ترکیب‌های یونی در گسترهٔ دمایی کمتری به حالت مایع هستند. شارهٔ B یک ترکیب مولکولی است؛ اما شارهٔ B باید در سردکننده به مایع تبدیل شود. پس تا نقطهٔ میعان سرد می‌شود نه نقطهٔ ذوب!

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۱۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: $LiBr > KF > NaCl$

گزینهٔ «۲»: $NaF > LiCl > KCl$

گزینهٔ «۴»: $KF > KCl > KBr$

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۸۰)

۱۸۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی بیرفتی)*

فقط مورد (الف) درست است.

عبارت (الف): در الماس پیوندهای کربن- کربن به صورت یگانه است. پیوند کربن- کربن در اتن دوگانه و در اتین سه‌گانه است. در نتیجه مقایسهٔ، انرژی پیوند کربن- کربن به صورت الماس < اتن < اتین است.

عبارت (ب): مقایسهٔ نقطهٔ ذوب به صورت زیر است:

$$MgO > CaO > MgF_2$$

عبارت (پ): مقایسهٔ شعاع گونه‌ها به صورت $F^- > Ne > Na^+ > Mg^{2+}$ است. زیرا همهٔ ذره‌ها ۱۰ الکترون دارند. در صورت برابر بودن الکترون‌ها، هر چه تعداد پروتون‌ها بیشتر باشد، شعاع ذره کوچک‌تر می‌شود.

عبارت (ت): رنگ هر ماده، مطابق طول موج نوری است که بازتاب می‌دهد.

در نتیجه، مقایسهٔ طول موج بازتاب شده، به صورت زیر است:

$$V^{2+} < V^{4+} < V^{3+} < V^{5+}$$

گونه	V^{2+}	V^{3+}	V^{4+}	V^{5+}
رنگ	بنفش	سبز	آبی	زرد

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۰، ۷۸، ۸۱ و ۸۴)

۱۸۷- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی زواره)*

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند. بررسی عبارت‌ها:

عبارت «الف»: $_{22}Ti$ عنصری از دورهٔ چهارم و جزو عنصرهای دستهٔ d است.

عبارت «ب»: چگالی تیتانیم از چگالی فولاد کمتر و نقطهٔ ذوب آن از نقطهٔ ذوب فولاد بیشتر است.

عبارت «پ»: در ساختن پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما به جای فولاد از تیتانیم استفاده می‌شود.

عبارت «ت»: نیتینول (آلیاژ هوشمند) از Ti و Ni ساخته می‌شود که در تهیهٔ فراورده‌های صنعتی و پزشکی کاربرد دارد.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱۸۸- **گزینهٔ «۳»** *(کامران جعفری)*

با توجه به منحنی‌های داده شده سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها در هر سه واکنش یکسان بوده و پایداری واکنش‌دهنده‌ها در هر سه واکنش یکسان است. اما سرعت واکنش، پایداری فراورده‌ها، ΔH واکنش و گرماده یا گرماگیر بودن در سه واکنش با هم تفاوت دارد.

(شیمی ۳- شیمی راهی به سوی آینده‌ای روشن؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۱۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(موسی خیاط علیمحمدی)*

کاتالیزگر انرژی فعال‌سازی رفت و برگشت را به یک اندازه کاهش می‌دهد.

$$\Delta H = E_a - E'_a$$

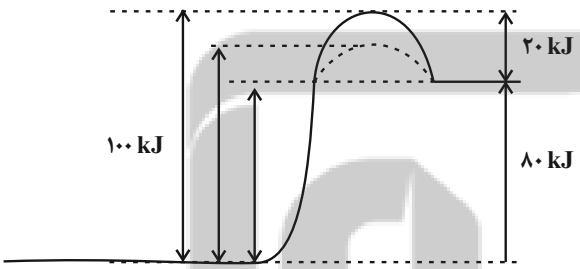
$$۸۰ \quad E_a - ۲۰ \Rightarrow E_a = ۱۰۰ kJ$$

بررسی گزینهٔ «۳»: در حضور کاتالیزگر

$$\left.\begin{matrix} E_a & ۱۰۰-۳۰ & ۷۰kJ \\ E'_a = ۲۰-۳۰ = -۱۰kJ \end{matrix}\right\}$$

بررسی گزینهٔ «۴»: در حضور کاتالیزگر

$$\left.\begin{matrix} E_a & ۱۰۰-۱۵ & ۸۵kJ \\ E'_a = ۲۰-۱۵ & & ۵kJ \end{matrix}\right\}$$



(شیمی ۳- شیمی راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۱۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: سرامیک را به شکل مش (دانه)های ریز در می‌آورند.

گزینهٔ «۲»: توده‌های فلزی به قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر است.

گزینهٔ «۴»: در این فرایند NO به O_2 و N_2 تبدیل می‌شود.

(شیمی ۳- شیمی راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net