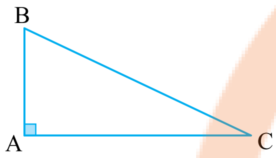
فصل ۶

مثلثات



در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویهٔ حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\sin B=\frac{AC}{BC},\quad \sin C=\frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویهٔ حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\cos B=\frac{AB}{BC},\quad \cos C=\frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویهٔ حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan B=\frac{AC}{AB},\quad \tan C=\frac{AB}{AC}$$

و عکس این نسبت را **کتانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\cot B=\frac{AB}{AC},\quad \cot C=\frac{AC}{AB}$$

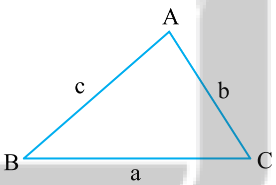
اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر، صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

۱) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ۲) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ۳) $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

۴) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ۵) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ ۶) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan\alpha\cot\alpha=1$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\quad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

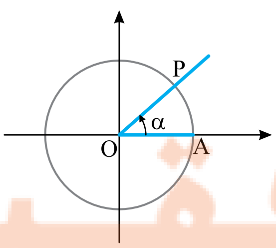


مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویهٔ میان این دو ضلع:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

از تساوی‌های بالا نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید، که به **قضیهٔ سینوس‌ها** معروف است:

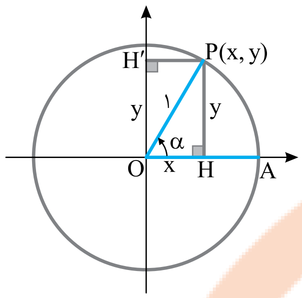
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایرهٔ مثلثاتی** می‌نامند. نقطهٔ تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1,0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازهٔ α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازهٔ زاویهٔ مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویهٔ α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کردیم، پس با معلوم بودن نقطهٔ P روی دایره و جهت دوران، زاویهٔ α مشخص می‌شود.

ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در آن قرار می‌گیرد، برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم
حدود α	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	$180^\circ<\alpha<270^\circ$	$270^\circ<\alpha<360^\circ$



مطابق شکل مقابل، فرض می‌کنیم $P(x, y)$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α باشد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin\alpha=\frac{PH}{OP}=\frac{y}{۱}=y \qquad \tan\alpha=\frac{PH}{OH}=\frac{y}{x}$$

$$\cos\alpha=\frac{OH}{OP}=\frac{x}{۱}=x \qquad \cot\alpha=\frac{OH}{PH}=\frac{x}{y}$$

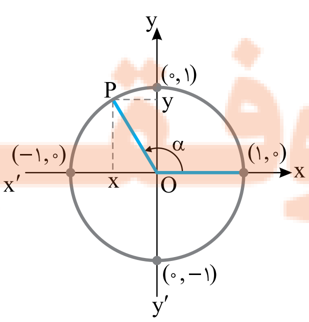
اگر P انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند. اگر P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطهٔ P در این ناحیه‌ها می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

ناحیه / نسبت	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های پرکاربرد به شرح زیر است:

زاویه / نسبت	$\alpha=۰^\circ$	$\alpha=۳۰^\circ$	$\alpha=۴۵^\circ$	$\alpha=۶۰^\circ$	$\alpha=۹۰^\circ$	$\alpha=۱۸۰^\circ$	$\alpha=۲۷۰^\circ$	$\alpha=۳۶۰^\circ$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده



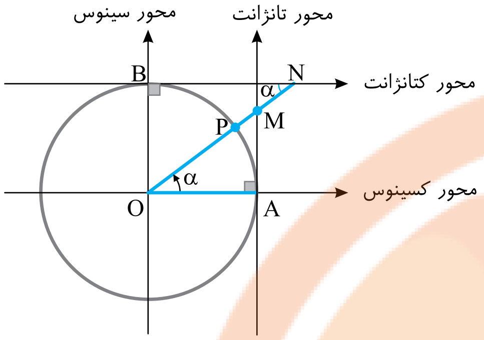
در دایرهٔ مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α، $\sin\alpha$ برابر عرض نقطهٔ P یعنی y است. پس $\sin\alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-۱\le y\le ۱$، پس $-۱\le\sin\alpha\le ۱$.

همچنین $\cos\alpha$ برابر طول نقطهٔ P یعنی x است. پس $\cos\alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-۱\le x\le ۱$، پس $-۱\le\cos\alpha\le ۱$.

برای هر زاویهٔ دلخواه مانند α،

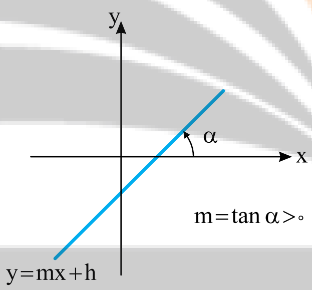
$$-۱\le\sin\alpha\le ۱,\qquad -۱\le\cos\alpha\le ۱$$

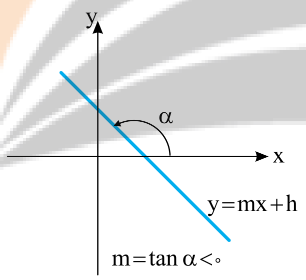
- در نقطهٔ $A(۱,۰)$ محوری عمود بر محور کسینوس رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور سینوس انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویهٔ دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است.
همچنین در نقطهٔ $B(۰,۱)$ محوری عمود بر محور سینوس رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور کسینوس انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور کتانژانت** می‌نامیم. مقدار کتانژانت هر زاویهٔ دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. برای مشخص کردن تانژانت و کتانژانت زاویهٔ α، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویهٔ α، را امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را در نقطه‌های $M(۱, y_۱)$ و $N(x_۱, ۱)$ قطع کند. در این‌صورت $y_۱ = \tan\alpha$ و $x_۱ = \cot\alpha$.



- با افزایش مقادیر α از ۰° به ۳۶۰°،
  - مقادیر $\sin\alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.
  - مقادیر $\cos\alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.
  - مقادیر $\tan\alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.
  - مقادیر $\cot\alpha$ در هر چهار ناحیه در حال کاهش هستند.

- اگر جهت مثبت محور طول‌ها و خط $y = mx + h$ یک زاویهٔ مثلثاتی به اندازهٔ α تشکیل دهند، آن‌گاه $m = \tan\alpha$.





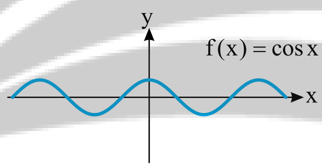
- یک **رادیان** در هر دایره اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. یک رادیان تقریباً $۵۷/۲۹^\circ$ است.
- اگر D اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰^\circ}$.
- اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازهٔ زاویه‌ای مرکزی برحسب رادیان برابر θ و طول کمان روبه‌رو به آن زاویه برابر L باشد، آن‌گاه $L = r\theta$.
- **مساحت قطاع:** اگر در دایره‌ای به شعاع r زاویهٔ قطاعی برابر با θ رادیان باشد، مساحت این قطاع برابر است با $\frac{۱}{۲} r^۲ \theta$.

- اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه

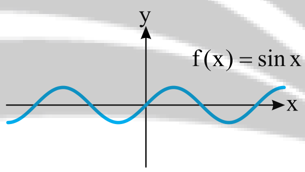
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$	$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

دامنه، برد و نمودار توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ به‌صورت زیر است:



$$D_f=\mathbb{R}\,,\quad R_f=[-۱,۱]$$

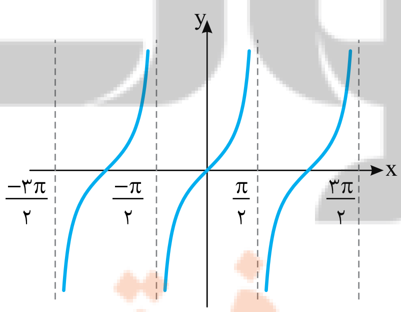


$$D_f=\mathbb{R}\,,\quad R_f=[-۱,۱]$$

اگـر x عـددی حقیقـی باشـد و $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسـبت می‌دهـد **تابع تانژانت** نامیده می‌شـود. اگر $f(x)=\tan x$، آن‌گاه

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\,,k\in\mathbb{Z}\}\,,\quad R_f=\mathbb{R}$$

نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تانژانت روی هر بازه به صورت $(k\pi-\frac{\pi}{۲}\,,k\pi+\frac{\pi}{۲})$، که $k\in\mathbb{Z}$، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.



فرض کنید عددی حقیقی مانند T وجود دارد که به‌ازای هر $x\in D_f$،

۱) $x\pm T\in D_f$ ۲) $f(x\pm T)=f(x)$

در این صورت می‌گوییم f تابعی **متناوب** است.

کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، **دورهٔ تناوب** تابع f می‌نامیم.

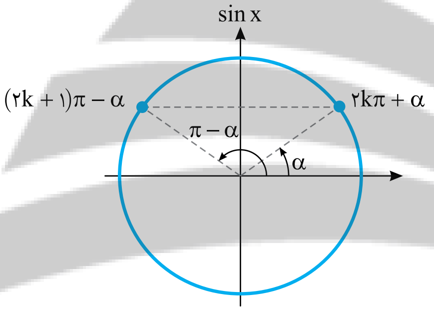
اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند که $a, b \neq 0$، آن‌گاه تابع‌های $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دورهٔ تناوب آن‌ها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|+d$ است.

اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند و $a, b \neq 0$، آن‌گاه دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\tan(bx+c)+d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

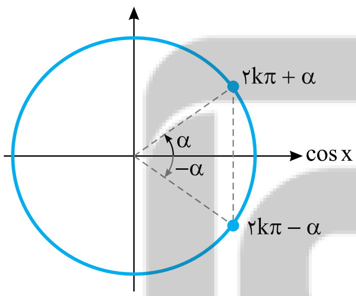
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$	$\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به صورت زیر است:



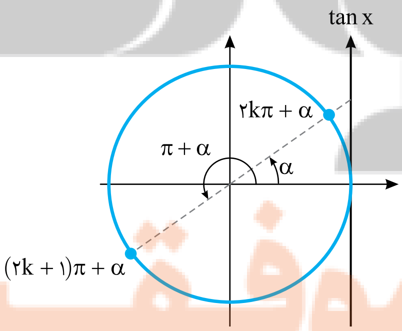
$$x=2k\pi+\alpha\ ,\quad x=(2k+1)\pi-\alpha\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به صورت زیر است:



$$x=2k\pi\pm\alpha\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ به صورت زیر است:



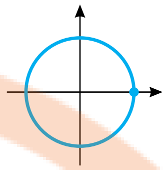
$$x=k\pi+\alpha\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

برای حل کردن معادلهٔ $\sin x=m$ که $-1\le m\le 1$، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\sin\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ را پیدا کنیم.

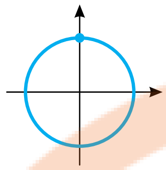
- برای حل کردن معادلهٔ $\cos x=m$ که $-1\le m\le 1$، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\cos\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ را پیدا کنیم.

- واضح است که معادله‌های $\sin x = m$ و $\cos x = m$ به‌ازای mهایی که در بازهٔ $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند.

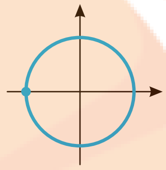
- **معادلات خاص**



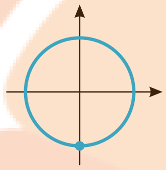
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$



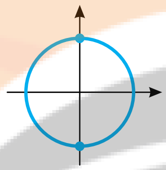
$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



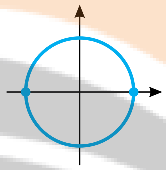
$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$



$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$