تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net

فصل ۱ ـ آمار و احتمال

درس ۱ شمارش

درس ۲ احتمال

درس ۳ چرخهٔ آمار در حل مسائل

«... و أحاطَ بما لَدَيهِم و أحصیٰ كلَّ شیءٍ عَدَداً» (آیهٔ ۲۸ / سورهٔ مبارکهٔ جن)

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»

روستای مشکله ـ استان گیلان (شهرستان آستانه)

@ramin-Darsi

درس ۱

شمارش

فعالیت

۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، ۵۵ = ۲۵ + ۳۰ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می‌تواند به‌صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به‌صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: $A=\{$ماشین، اتوبوس، تاکسی، مترو، پیاده‌روی$\}$.

۲ + ۳ = ۵

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

مثال: شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟

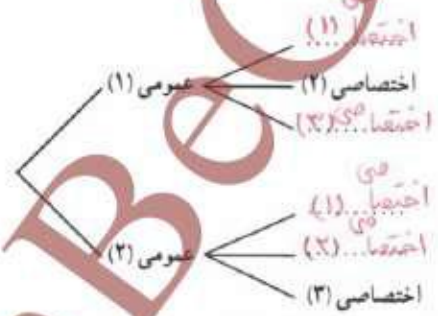
حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

تعداد انتخاب‌ها = ۵+۴+۳=۱۲

فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ۳ راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به ۲ × ۳ = ۶ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری‌که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

CamBeGam-Nar

مثال : مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید دربارهٔ نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

راه‌حل :

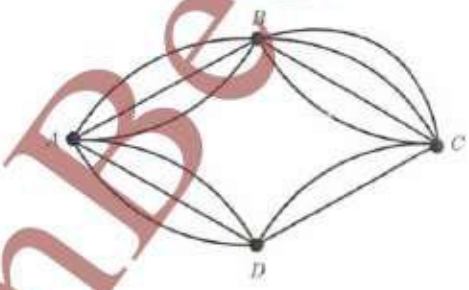
الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به ۷+۸=۱۵ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به ۵۶=۸×۷ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان :

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \to B \to C$ «یا» $A \to D \to C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین :

تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$= 3 \times 4 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18$

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \to C \to D$ «یا» $B \to A \to D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم :

تعداد راه‌های مسافرت از B به D = $4 \times 3 + 4 \times 1 = 16$

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند a، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a \times a = a^2$، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ و $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$.

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به‌صورت $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ تعریف می‌کنیم.

مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $۴! \times ۲ = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) \times ۲ = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$

ب) $\frac{۵!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times \overbrace{(۳ \times ۲ \times ۱)}^{۳!}}{\underbrace{(۳ \times ۲ \times ۱)}_{۳!}} = ۵ \times ۴ = ۲۰$

ب) $\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \not{۷!}}{\not{۷!}} = ۷۲۰$

ت) $\frac{۳! \times ۵! \times ۰!}{۷! \times ۱!} = \frac{\not{۶} \times \not{۵!} \times ۱}{۷ \times \not{۶} \times \not{۵!} \times ۱} = \frac{۱}{۷}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a، b، c و d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک **جایگشت** ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک **جایگشت** n تایی از آن n شیء می‌نامیم.»

فعالیت

۱ــ اگر افراد A ، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\underbrace{۳}_{C \text{ یا } B \text{ یا } A} \quad \underbrace{۲}_{\text{یکی از ۲ نفر باقی‌مانده}} \quad \underbrace{۱}_{\text{۱ نفر باقی‌مانده}} \rightarrow ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲ــ با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

تعداد اعداد ۵ رقمی $= ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ ← تعداد انتخاب‌ها: $\underline{۵} \quad \underline{۴} \quad \underline{۳} \quad \underline{۲} \quad \underline{۱}$ ←

۳ـ ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-1$ انتخاب داریم و... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times ۲ \times ۱ = n!$.

n $n-1$ $n-2$ ... ۲ ۱

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ← تعداد انتخاب‌ها

۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵

۵ × ۵! = ۶۰۰ ← اصل ضرب

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابراین:

۴ ۴ ۳ ۲ ۳ ← تعداد انتخاب‌ها

۱ یا ۳ یا ۵

۴ × ۴ × ۳ × ۲ × ۳ = ۲۸۸ ←

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد − تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۶۰۰ − ۲۸۸ = ۳۱۲

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ ← تعداد انتخاب‌ها

صفر

۱ ← اصل ضرب ← ۵! = ۱۲۰

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

۴ ۳ ۳ ۲ ۲ ← تعداد انتخاب‌ها

۲ یا ۴

۴ × ۳ × ۳ × ۲ × ۲ = ۱۹۲ ←

۱۲۰ + ۱۹۲ = ۳۱۲ = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

GamBeGam-Dar

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

تعداد انتخاب‌ها ← ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ ← اصل ضرب ← ۵! = ۱۲۰

صفر

تعداد انتخاب‌ها ← ۴ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ ← اصل ضرب ← ۴ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۹۶

۵

تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵ = ۱۲۰ + ۹۶ = ۲۱۶

تبدیل (انتخاب r شیء از بین n شیء، که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد.)

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

تعداد انتخاب‌ها ← ۷ | ۶ | ۵ | ۴ ← اصل ضرب ← ۷ × ۶ × ۵ × ۴ = ۸۴۰

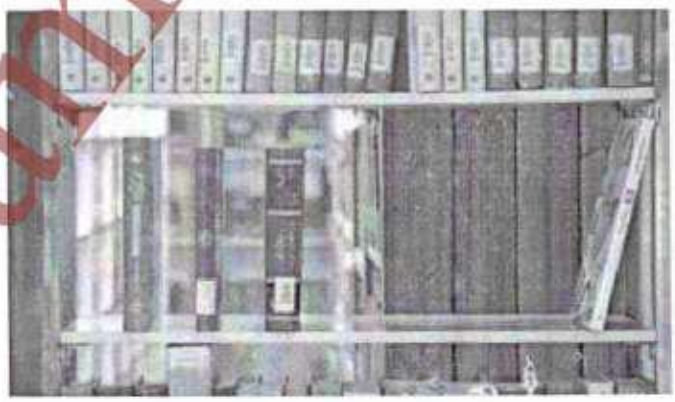
از طرفی: $۷\times۶\times۵\times۴=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=۸۴۰$

(توجه دارید که با جابه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، جابه‌جایی ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تعداد انتخاب‌ها ← ۵ ← اصل ضرب ← ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

از طرفی: $\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$



در حالت کلی، تشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n $(r \le n)$، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \leftarrow \quad n \quad n-1 \quad \cdots \quad (n-r+2) \quad (n-r+1)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} \quad n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

* **تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء**

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

روش اول: تعداد اعداد سه رقمی $= P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 210$

روش دوم: $\underset{\text{اصل ضرب}}{\longrightarrow}$ $\underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$ $\quad 7\times6\times5=210$

* **ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد.)**

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر ۳! تقسیم کنیم.

CamBeGam-Dar

تعداد مجموعه‌های سه عضوی $= \frac{P(۴,۳)}{۳!} = \frac{۴!}{۱!\times ۳!} = ۴$

انتخاب سه رقم	۱،۲،۴	۱،۲،۶	۱،۴،۶	۲،۴،۶
جابجائی‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_۱=\{۱,۲,۴\}$	$A_۲=\{۰,۱,۲,۶\}$	$A_۳=\{۱,۴,۶\}$	$A_۴=\{۲,۴,۶\}$

تعداد مجموعه‌های سه عضوی $= \frac{۲۴}{۶} = ۴$

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء را که جابه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه بدهیم؟

حل : در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!\times ۴!} = \frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۳!\times ۴!} = ۳۵$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ⟵ $۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵ = ۱۵۱۲۰$

روش دوم: $P(۹,۵) = \frac{۹!}{(۹-۵)!} = \frac{۹!}{۴!} = ۱۵۱۲۰$

@GamBeGam-Darsi

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد تیم‌های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{6! \times \cancel{3!}} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از بین ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می‌سازد (در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{3! \times \cancel{5!}} = 56$$

۴. در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره ابی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده‌اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ ابی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{3! \times \cancel{6!}} = 84$$

تمرین

۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

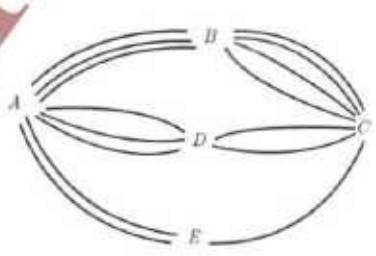
$12 + 11 + 10 = 33$

۲. بین پنج شهر $A، B، C، D، E$ مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ $(3 \times 4) + (3 \times 2) + (2 \times 1) = 20$

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟ $(3 \times 4) + (2 \times 3) = 24$

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟ $3 + (2 \times 4 \times 3) = 27$



@GamBeGam-Darsi

۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A=\{1,2,4,6,8,9\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی با حداقل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید : الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

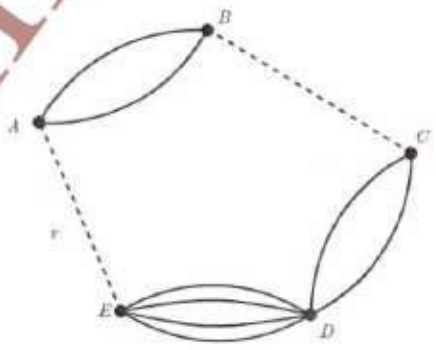
ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به‌صورت $(3^2+4\times3+3\times2)$ باشد.

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



@GamBeGam-Darsi

حل تمرینهای صفحه‌ی ۱۱

تمرین ۳:

الف) $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!=۱۲۰$

ب) $۴\times۳\times۱=۱۲$

پ) $۱\times۳\times۲\times۱\times۱=۶$

تمرین ۴:

$$p(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{۸!}=۹۰$$

تمرین ۵:

$۷\times۲\times۳=۴۲$

تمرین ۶:

الف) $۵\times۴\times۳\times۲\times۴=۴۸۰$ ب) $۲\times۵\times۴\times۳\times۲=۲۴۰$ پ) $\binom{۶}{۳}=۲۰$

ت) $\binom{۱۰}{۵}\times\binom{۶}{۱}=۲۵۲\times۶=۱۵۱۲$

کافی است تعداد زیر مجموع های دو عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۴,۶,۹\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{۶-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

تمرین ۷:

الف) $\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$ ب) $\binom{۱۲}{۲}=۶۶$

تمرین ۸:

الف) $\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۳}=۱۰\times۲۰=۲۰۰$ ب) $\binom{۱۲}{۲}=????$

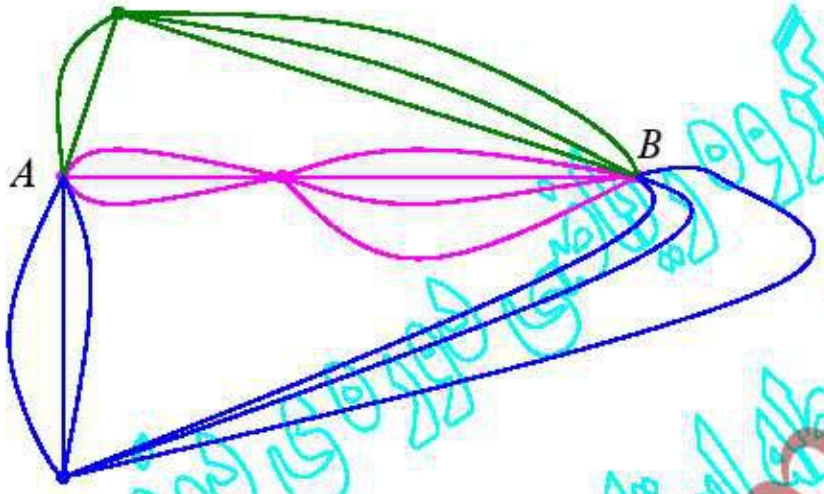
پ)

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۴}+\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۵}+\binom{۵}{۰}\times\binom{۶}{۶}=(۱۰\times۱۲)+(۵\times۶)+(۱\times۱)=۱۲۰+۳۰+۱=۱۵۱$$

@GamBeGamDarsi
گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه‌ی استان خوزستان

ت) $\binom{۵}{۲} \times \binom{۶}{۴} = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰$

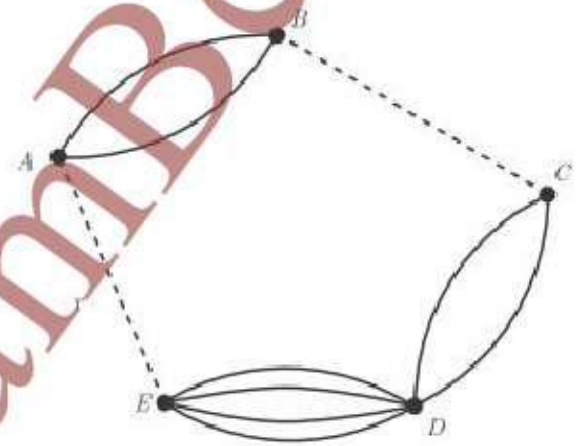
تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایپی دارد. حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم. می توان به شکل زیر عمل کرد.

A

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به Cرا برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم. خواهیم داشت.

$$۲ \times m \times ۲ + n \times ۴ = ۲۰ \rightarrow ۴m + ۴n = ۲۰ \xrightarrow{\div ۴} m + n = ۵$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱

@GamBeGamDarsi
گروه آموزشی گام به گام درسی

درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز دیگر ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... . بنابراین : دو وضعیت وجود دارد : یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد .

پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

@GamBeGam-Darsi

الف) نتیجه پرتاب سکه
ب) نتیجه پرتاب تاس
ج) نتیجه قرعه‌کشی

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم.

برای مثال، جمله سنگی را به داخل استخرهایی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می‌دانیم که سنگ به داخل آب فرو می‌رود یا بیش از پرتاب یک سکه، می‌دانیم که سکه روی زمین می‌نشیند. این گونه پدیده‌ها، آزمایش‌هایی قطعی هستند.

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

الف) نتیجه رها شدن سیب از درخت
ب) نتیجه استخراج مهره از درون کیسه وقتی که همه‌ی مهره‌ها هم‌رنگ باشند.

کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛ قطعی

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ تصادفی

پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ قطعی

ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ تصادفی

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟ تصادفی

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ خیر

ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.

{خودکار۱، خودکار۲، خودکار۳، خودکار۴، خودکار۵، مداد۱، مداد۲، مداد۳}

@GamBeGam-Darsi

فضای نمونه

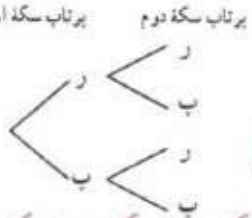
در پرتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم دانست. مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن **فضای نمونه** می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

بنابراین، در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با : $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۱. پرتاب دو سکه یاهم.



$S = \{(پ, پ), (ر, پ), (پ, ر), (ر, ر)\}$

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

$S = \{$ ر ر ر ، پ ر ر ، ر پ ر ، پ پ ر ، ر ر پ ، پ ر پ ، ر پ پ ، پ پ پ $\}$

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$S = \{(ر, ۱), (پ, ۱), (ر, ۲), (پ, ۲), (ر, ۳), (پ, ۳), (ر, ۴), (پ, ۴), (ر, ۵), (پ, ۵), (ر, ۶), (پ, ۶)\}$

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱،۱)	(۱،۲)	(۱ و ۳)	(۱ و ۴)	(۱ و ۵)	(۱ و ۶)
۲	(۲،۱)	(۲،۲)	(۲ و ۳)	(۲ و ۴)	(۲ و ۵)	(۲ و ۶)
۳	(۳ و ۱)	(۳ و ۲)	(۳،۳)	(۳ و ۴)	(۳،۵)	(۳ و ۶)
۴	(۴ و ۱)	(۴ و ۲)	(۴ و ۳)	(۴،۴)	(۴ و ۵)	(۴ و ۶)
۵	(۵ و ۱)	(۵ و ۲)	(۵،۳)	(۵ و ۴)	(۵ و ۵)	(۵ و ۶)
۶	(۶ و ۱)	(۶ و ۲)	(۶ و ۳)	(۶ و ۴)	(۶ و ۵)	(۶،۶)

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

@GamBeGam-Darsi

۲. سه دوست با نام‌های علی، بارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همهٔ برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

۳. در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز وجود دارد. به‌طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{۱, ۲, ۳\} \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است و مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است؛ یعنی $\varnothing \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

الف) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ب) $A = \{\}$

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $S \subseteq S$، پس S یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $S = \{ب, ر\}$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعهٔ کتاب، با هم خلاصهٔ آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام‌یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

الف) $A = \{۳, ۲, ۵\}$

ب) $B = \{۲\}$

@GamBeGam-Darsi

$C=\{2,4,6\}$

ج) برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

دهم یازدهم دوازدهم

$$n(A)=\binom{5}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}=5\times6\times4=120$$

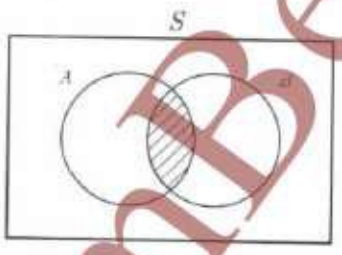
ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.

$$n(B)=\binom{6}{2}\binom{9}{1}+\binom{6}{3}\binom{9}{0}$$

$$=15\times9+20\times1=135+20=155$$

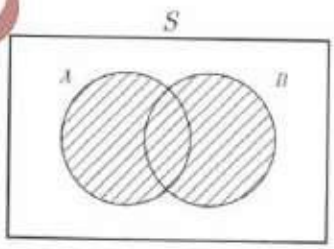
اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به‌صورت زیر یادآوری می‌کنیم.



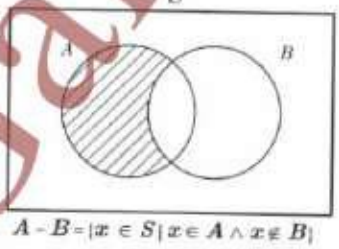
$A\cap B=\{x\in S\mid x\in A\wedge x\in B\}$

(شکل ۱)



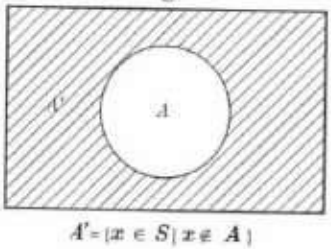
$A\cup B=\{x\in S\mid x\in A\vee x\in B\}$

(شکل ۲)



$A-B=\{x\in S\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

(شکل ۳)



$A'=\{x\in S\mid x\notin A\}$

(شکل ۴)

@GamBeGam-Darsi

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند :

الف) پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵)(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}$: یکی از تاس‌ها ۵ باشد

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$: مجموع اعداد برامده از دو تاس ۶ باشد

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A\cap B$ را محاسبه کنیم.

$A\cap B=\{(۱,۵),(۵,۱)\}$

ب) پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$: دو تاس یکسان

$B=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$: مجموع ۴ باشد

پیشامد مورد نظر برابر با $A\cup B$ است.

$A\cup B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۱,۳),(۳,۱)\}$

پ) پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

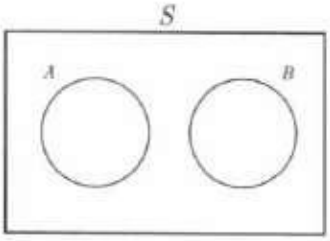
ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم :

$A\cup A'=S \quad , \quad A\cap A'=\varnothing$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A-B=A$ و $B-A=B$، در این صورت پیشامد $A\cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A-B=A$ و $B-A=B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A\cap B=\varnothing$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A\cap B=\varnothing$، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

@GamBeGam - Darsi

برای مثال، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

ـ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ـ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

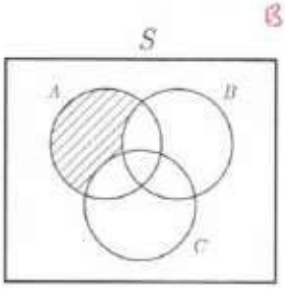
ـ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

ـ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ـ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

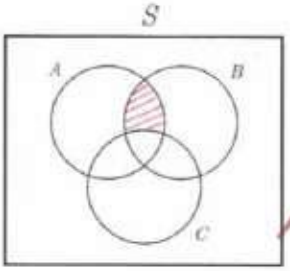
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ـ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.

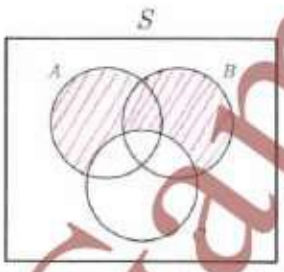


$A-(B\cup C)$

ـ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



ـ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

@GamBeGamDarsi

$C = \{(پ,پ,د), (پ,د,پ), (د,پ,پ), (د,د,د)\}$

پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ بله
- آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟ بله
- آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟ خیر

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید. در پرتاب یک تاس پیشامدهای «آمدن عدد زوج» و «آمدن عدد فرد» ناسازگارند.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \varnothing$ فضای نمونه متناهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر S، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان‌که پیشامد A تشدنی باشد، یعنی $A = \varnothing$، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$P(A) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \Rightarrow P(S) = 1$

۳. هرگاه $A \subseteq B$، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

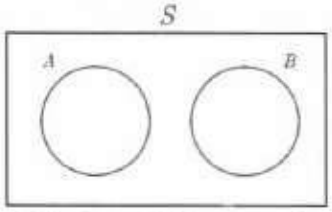
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشند، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛ بنابراین، $n(S)=۱۲$.

$$S=\{(پ,۶),\dots,(پ,۲),(پ,۱),(ر,۶),\dots,(ر,۲),(ر,۱)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با :

$$A=\{(پ,۶),(پ,۴),(پ,۲),(ر,۶),(ر,۴),(ر,۲)\} \; ; \; n(A)=۶$$

بنابراین، داریم :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبهٔ $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$n(s)=۱۲^۵ \rightarrow \underbrace{۱۲}_{\text{نفر پنجم}} \; \underbrace{۱۲}_{\text{نفر چهارم}} \; \underbrace{۱۲}_{\text{نفر سوم}} \; \underbrace{۱۲}_{\text{نفر دوم}} \; \underbrace{۱۲}_{\text{نفر اول}} \leftarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

@Gam-eGam-Darsi

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A، به‌طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

تعداد انتخاب‌ها ← $\frac{1}{\text{نفر اول}}$ $\frac{1}{\text{نفر دوم}}$ $\frac{1}{\text{نفر سوم}}$ $\frac{1}{\text{نفر چهارم}}$ $\frac{1}{\text{نفر پنجم}}$ → $n(A)=1$

در نتیجه داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{12^5}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$P(B)=\underbrace{\frac{1}{12^5}+\frac{1}{12^5}+\frac{1}{12^5}+\frac{1}{12^5}+\cdots+\frac{1}{12^5}}_{\text{۱۲ بار}}=\frac{12}{12^5}=\frac{1}{12^4}$$

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

$$P(C)=\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{8}{12}=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{12^5}=\frac{55}{144}$$

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

$n(S)=36$

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$n(A)=6$

این حالت بیشتر از دیگر حالت‌ها تکرار می‌شود. لذا احتمال برنده شدن کارت ۷ بیشتر است.

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

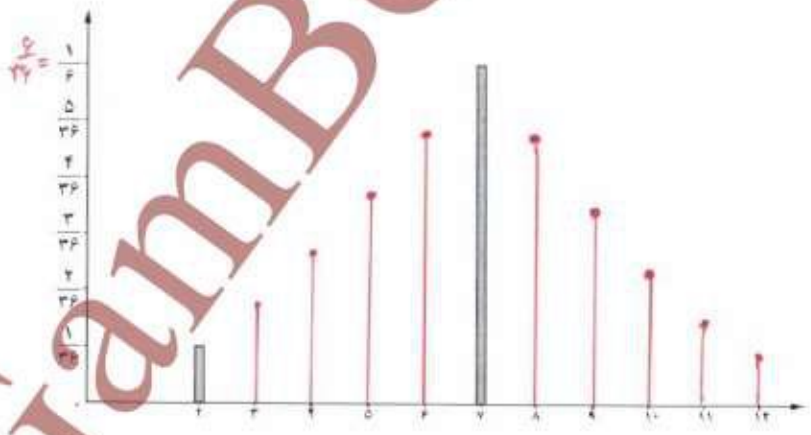
$B=\{(1,1)\}$ $C=\{(6,6)\}$

احتمال برنده شدن ۲ و ۱۲ کمتر است.

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

بله ممکن است. چون آزمایش تصادفی است. ولی احتمال آن نسبت از بقیه کمتر است.

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



برآمد مجموع ۵

$E=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ $P(E)=\frac{4}{36}$

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	مجموع
تعداد حالت‌های برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۳۶
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	۱

@GamBeGam-Darsi

فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه :

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.

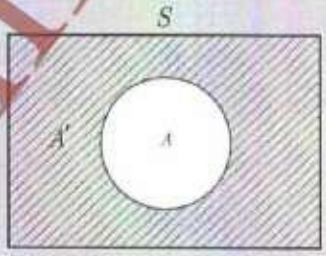
ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم : $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.



@CamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد. $۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با ۰/۰۱ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود. $۱-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}$

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{۳۲}{۴۹}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند. $۱-\frac{۳۲}{۴۹}=\frac{۴۹-۳۲}{۴۹}=\frac{۱۷}{۴۹}$

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رختآویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به‌طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشند، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می‌گیرید؟

حل: الف) چون قرار است ۳ پیراهن از بین ۱۰ پیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}=۱۲۰$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند. بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه ابی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A\cup B)$ را محاسبه کنیم. از انجا که A و B ناسازگارند، داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\binom{۴}{۳}_{\text{قرمز}}}{۱۲۰}+\frac{\binom{۴}{۳}_{\text{ابی}}}{۱۲۰}=\frac{۸}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن ابی و یک پیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C)=\binom{۴}{۱}_{\text{قرمز}}\times\binom{۴}{۱}_{\text{ابی}}\times\binom{۲}{۱}_{\text{زرد}}=۴\times۴\times۲=۳۲ \quad ; \quad P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

@GamBeGam-Darsi

پ) برای اینکه حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، آن‌گاه ۲ بیراهن قرمز یا ۳ بیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$n(D)=\underset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۲}}\times\underset{\text{بقیه بیراهن‌ها}}{\binom{۶}{۱}}+\underset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۳}}=۶\times۶+۴=۴۰ \quad ; \quad P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۴۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو بیراهن آبی باشند، باید دو بیراهن ابی یا یک بیراهن آبی و یا صفر بیراهن آبی داشته باشیم:

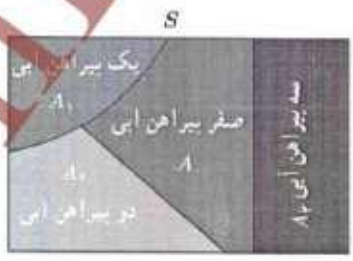
$$n(E)=\underset{\text{ابی}}{\binom{۴}{۲}}\times\underset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۱}}+\underset{\text{ابی}}{\binom{۴}{۱}}\times\underset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۲}}+\underset{\text{ابی}}{\binom{۴}{۰}}\times\underset{\text{بقیه}}{\binom{۶}{۳}}=۶\times۶+۴\times۱۵+۱\times۲۰=۱۱۶$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۱۱۶}{۱۲۰}=\frac{۲۹}{۳۰}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ بیراهن آبی باشد، آن‌گاه $P(F')=۱-P(F)$ احتمال این است که ۳ بیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F')=۱-P(F)=۱-\frac{\binom{\text{ابی}}{۴}}{\binom{۱۰}{۳}}=۱-\frac{۴}{۱۲۰}=\frac{۱۱۶}{۱۲۰}=\frac{۲۹}{۳۰}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان‌اند. یعنی می‌توان راه‌حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ بیراهن به دنبال تعداد بیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به‌صورت زیر است.



$$P(A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=P(S)=۱$$

@GamBeGam-Darsi

تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. تصادفی

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. قطعی

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم. تصادفی

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

ـ عددی را انتخاب می‌کند.

ـ سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

ـ سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

ـ از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

ـ نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

ـ از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند. نتیجه همواره ۲ یک. قطعی

ـ در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، ان‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت یاید، با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

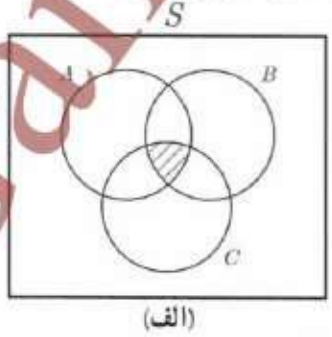
الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

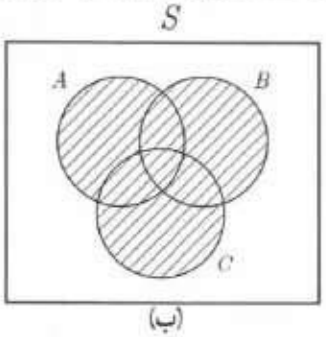
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

@GamBeGam-Darsi

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. پ) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

ب) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹. عقربهٔ دستگاه چرخندهٔ زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

@GamBeGam-Darsi

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۲ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها به‌طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

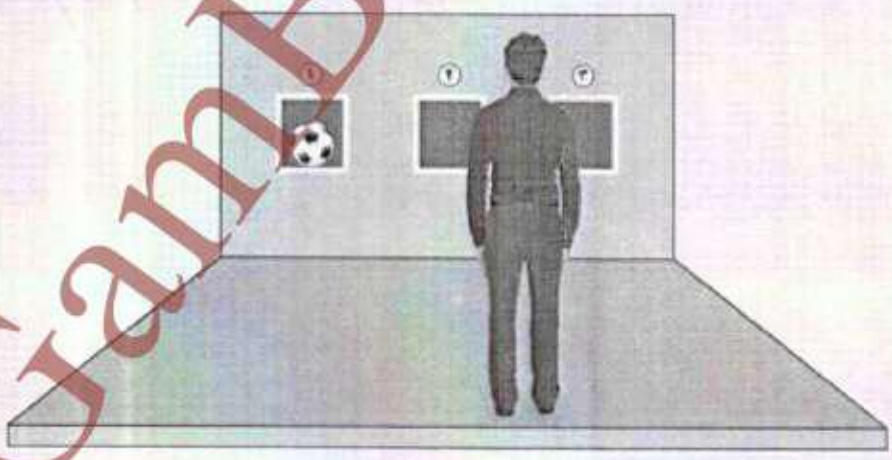
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد نتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیراین‌صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره دریچه غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟

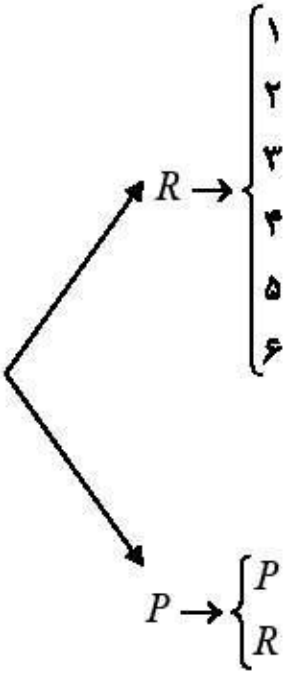


@GamBeGam-Darsi

حل تمرینهای صفحه‌ی ۲۵

تمرین ۲:

الف)



$$S=\{(R,۱),(R,۲),(R,۳),(R,۴),(R,۵),(R,۶),(P,P),(P,R)\}$$

ب)

$$A=\{(R,۲),(R,۴),(R,۶),(P,P),(P,R)\}$$

تمرین ۳:

الف)

$$S=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$$

ب)

$$A=\{۳,۹,۱۵\}$$

پ)

$$B=\{۱,۹\}$$

ت)

$$A-B=\{۳,۱۵\} \text{ و } A\cap B=\{۹\}$$

تمرین ۴:

الف : هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب : حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

@GamBeGam-Darsi
گروه آموزشی دوم متوسطه استان خوزستان

تمرین ۵ :

الف)

$$S=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۳۱,۳۲,۳۳,۳۴,۴۱,۴۲,۴۳,۴۴\}$$

ب)

$$A=\{۱۲,۲۴,۴۲\}$$

پ)

$$B=\{۱۱,۱۳,۲۳,۳۱,۴۱,۴۳\}$$

تمرین ۶ :

الف)

$$S=\{PPP,PPR,PRP,RPP,PRR,RPR,RRP,RRR\}$$

ب)

$$A=\{PPP,RRR\}$$

پ)

$$B=\{PPR,PRP,RPP\}$$

ت)

$$C=\{PPP,PPR,PRP,RPP\}$$

ث)

$$D=\{PRR,RPR,RRP,RRR\}$$

تمرین ۷ :

الف) عضو $۲^۴=۱۶$

ب) $A=\{PPRR,PRRR,RPRR,RRRR\}$

پ) $C=\{PRRR,RPRR,RRPR,RRRP,RRRR\}$

ت) خیر ناسازگار نیستند.

تمرین ۸ :

الف) $P(A)=\dfrac{\binom{۱۲}{۳}\times\binom{۵}{۰}}{\binom{۱۷}{۳}}=\dfrac{۲۲۰\times۱}{۶۸۰}=\dfrac{۱۱}{۳۴}$

ب) $P(B)=\dfrac{\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}}=\dfrac{۶۶\times۵}{۶۸۰}=\dfrac{۳۳}{۶۸}$

پ) $P(C)=\dfrac{\binom{۱۲}{۳}\times\binom{۵}{۰}}{\binom{۱۷}{۳}}+\dfrac{\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}}=\dfrac{۱۱}{۳۴}+\dfrac{۳۳}{۶۸}=\dfrac{۵۵}{۶۸}$

@CamBeGam-Darsi
گروه ریاضی دبیرستان خوزستان
متوسطه استان خوزستان

تمرین۹:

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

الف)

$A = \{۲,۳,۵,۷\} \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

ب)

$B = \{۱,۲,۳,۵,۷\} \rightarrow P(B) = \frac{۵}{۸}$

پ)

$C = \{۳,۶\} \rightarrow P(C) = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

تمرین۱۰:

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اول ۶ و۴ و۱ پرچم های غیر اول

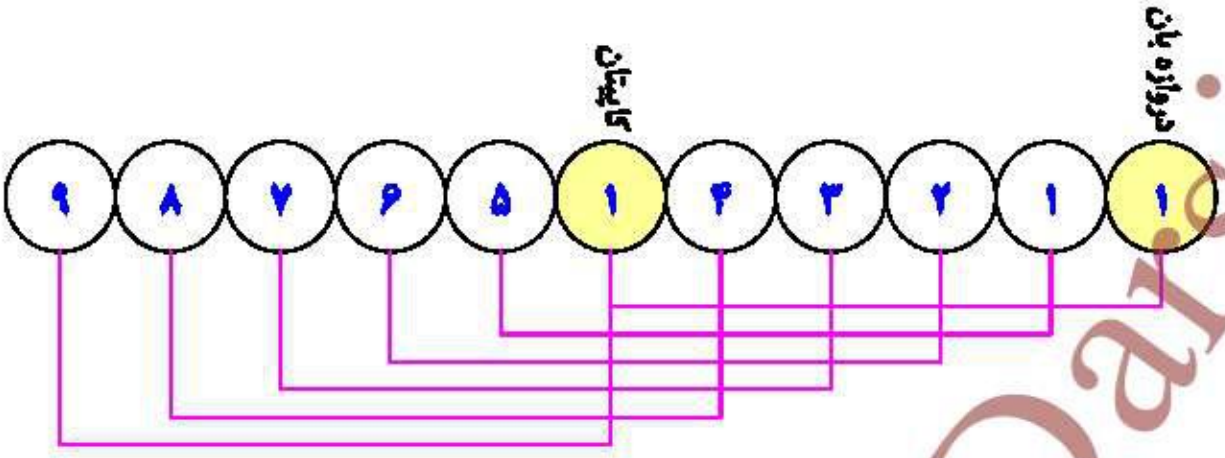
تعداد حالت های مساعد $۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴! \times ۳! = ۱۴۴$

تعداد کل حالت ها $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷! = ۵۰۴۰$

$P(E) = \frac{۱۴۴}{۵۰۴۰} = \frac{۱}{۳۵}$

@GamBeGam-Darsi
گروه بچه های گام
متوسطه استان خوزستان

تمرین ۱۱ :



تعداد حالت های مساعد $= ۹! \times ۶ \times ۲$

تعداد کل حالت ها $= ۱۱!$

$$P(E) = \frac{۹! \times ۶ \times ۲}{۱۱!} = \frac{۹! \times ۶ \times ۲}{۱۱ \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۶}{۵۵}$$

تمرین ۱۲ :

$$P(E) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۱۵}{۵}}{\binom{۲۰}{۷}} + \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۶}}{\binom{۲۰}{۷}} + \frac{\binom{۵}{۰} \times \binom{۱۵}{۷}}{\binom{۲۰}{۷}} =$$

تمرین ۱۳ :

الف) $$P(A) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳} \times \binom{۵}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۰ \times ۵}{۱۲۰} + \frac{۱۰ \times ۱}{۱۲۰} = \frac{۵۰ + ۱۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $$P(B) = \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۵ \times ۳ \times ۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

@GamBeGam-Darsi
گروه ریاضی دبیرستان
متوسطه استان خوزستان

درس ۳

چرخه آماری در حل مسائل

دنیای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج به‌دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی‌مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به‌طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

گروه اجراکننده این پروژه، پرسش‌نامه‌ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسش‌نامه را تکمیل کنند:

الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟

ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.

☐ خواندن کتاب الکترونیک ☐ شبکه‌های اجتماعی ☐ عکاسی ☐ بازی ☐ تماس تلفنی

☐ تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

@CamBeGam-Darsi

مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به‌صورت میانه و دامنه میان‌چارکی[1] گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به‌صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

- حدس می‌زنید دانش‌آموزان کلاس شما به‌طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟
- اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در پرسش اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟

داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشتباه‌های تایپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. پرسش‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلا میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

- ممکن است برخی دانش‌آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی پرسش‌نامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟

نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه میان‌چارکی آن ۳۵ ($Q_1 = ۶۵$, $Q_3 = ۱۰۰$) دقیقه بود.

- با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریبا) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟
- با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟
- چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

۱ـ پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان‌چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با IQR (Interquartile Range) نمایش می‌دهیم.

@CamBeCam-Darsi

دهم، یازدهم و دوازدهم

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های..... این مدرسه (نه دانش‌آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از تلفن‌های هوشمند.. (نه ابزارهای دیگر) صادق است[1].

با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش‌آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ شبکه‌های اجتماعی

از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، انها را چگونه تفسیر می‌کنید؟ ۵۰ درصد دانش‌آموزان بیش از ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد دیگر کمتر از ۷۰ دقیقه در روز

❖ مشاوران آموزشی، به کمک دانش‌آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش‌آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که ۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش‌آموزان را بهبود بخشد؛ ۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند و دانش‌آموزان در ساعاتی از شبانه‌روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها درمیان بگذارند؛ ۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش‌آموزان، می‌توان علاقه دانش‌آموزان به عکاسی و درنتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش‌آموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌ای داشته باشیم که با استفاده از ان عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش‌آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های : ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.

۱ــ هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با ان نتیجه‌گیری می‌کنیم، به‌اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

@GamBaGam-Darsi

کار در کلاس

اکنون که چرخهٔ حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونهٔ حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲		واقعی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵		نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به‌صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳		داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخهٔ آمار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم».
همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به‌دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازبینی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هرچیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های پهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانی‌های

@GamBoGam-Darsi

جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه اماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

به این ترتیب، مثلا «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای ازاد در میان پسران ۱۲ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می‌تواند به‌عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه اماری مورد بررسی تاثیر بگذارد؟

چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟

گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟(مثلا متخصصان تربیت‌بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را **تا حد ممکن** به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما اسان است؛ زیرا با ابزارهایی اشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمیتی قابل‌فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این‌قدر هم اسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ ایا اندازه‌گیری دارایی‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و... لزوما مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالا این‌طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که یا انها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلا «رفاه» یا به‌جای «هوش» مثلا «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

@CamBegam-Darsi

کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام‌یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

الف) ☐ سن دانش‌آموزان در کلاسی که در ان درس می‌خوانید.
☐ معدل سال گذشته دانش‌آموزان در کلاسی که در ان درس می‌خوانید.

ب) ☐ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی
☐ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی

۲. علی و امید در یک پروژه دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»

موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و/یا علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.

پ) اگر مثلا به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (اماره نمونه) بزرگ‌تر از میانگین ان در جامعه اماری (پارامتر جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلا به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.

دو اشکال دیگر را که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید.

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی ـ اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه‌گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها

ب) انتخاب خانوارها براساس رقم اخر تلفن خانه‌ها.

گام ۳ (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گرداوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

@TamBeGam-Darsi

کار در کلاس

آنچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گرداوری شده در یک پروژه دانش‌اموزی پیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم‌افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنیم؛ مثلا در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.

	شمارهٔ دانش‌آموز	سن	جنسیت	ورزش مورد علاقه	متوسط ساعات مطالعهٔ ازاد در هفته	نمرهٔ ادبیات
۱	۱۴	۱۴	۱	۱	۲	۱۵
۲	۵	۱۵	۲	۱	۰	۱۴
۳	۱	۱۴	۱	۲	۳	۱۵
۴	۴۵	۱۵	۱	۲۲	۵	۰
۵	۲	۵۱	۲	۲	۲۲	۱۷
۶	۱۷	۱۴	۲	۳	۶	۱۸
۷	۱۹	۱۵	۳	۱	۱۹	
۸	۳۴	۱۴	۲	۴	۴	۱۷
۹	۵۲	۱۴	۱	۳	۳	۱۵
۱۰	۱۲	۱۴	۱	۲	۰	۱۰
۱۱	۷	۱۴	۱	۲	۱	۱۲
۱۲	۳۵	۱۴	۲	۱	۲	۱۴
۱۳	۲۶	۱۵	۱	۴	۷	۲۰
۱۴	۲۱	۱۳	۲	۱	۵	۱۸

با توجه به جدول داده‌ها

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالا اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌اموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه ازاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش‌اموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است.

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟

ت) در متغیر «متوسط ساعت‌های مطالعه ازاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌اموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟

@GamBeGam-Darsi

بحث و گفت‌وگو

- اگر دانش‌آموزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار را چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟

ایا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملا درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفا گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج اماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از انها در گام بعد انجام خواهد شد.

یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم‌معیار پراکندگی گزارش شود معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

نیلا معیارها را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	میانگین	میانه	معیارهای گرایش به مرکز	IQR	SD (δ)	معیارهای پراکندگی	دامنهٔ تغییرات
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶٫۸۳	۱۷		۲٫۵	۱٫۴۱		۴
میزان تماشای تلویزیون	۴ ۲۹ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹٫۷۱	۶٫۲۵		۴	۸٫۹۴		۲۶

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته؛ IQR*: دامنهٔ میان چارکی؛ SD**: انحراف معیار.

سن: $Q_3 = 18$ $Q_2 = 17$ $Q_1 = 15,5$ $Min = 15$ $Max = 19$

میزان تلویزیون: $Q_3 = 7,5$ $Q_2 = 6,25$ $Q_1 = 4,5$ $Min = 4$ $Max = 30$

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

میانگین / انحراف معیار زیرا داده دورافتاده وجود ندارد.

* IQR: Interquartile Range
** SD: Standard Deviation

@GanBeGam-Darsi

ا) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟

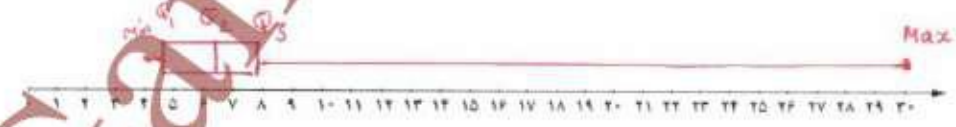
ب) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟

پ) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟

> در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل ان نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای ان، به اندازهٔ انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ت) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحهٔ قبل، کدام‌یک از نمودارهای زیر نشان‌دهندهٔ میانگین و انحراف معیار سن است؟ نمودار الف یا ب؟

اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این‌گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهندهٔ میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

دو شرکت بزرگ پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریبا ۱٫۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریبا ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»

مریم می‌گوید «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟»

آنها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گرداوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۱	۱.۵	۱.۲	۱.۷	۱.۴	۱.۹	۳	۱.۱	۱.۸
شرکت دوم	۰.۷	۱	۸	۱۲.۱	۰.۸	۱.۶	۲۰.۱	۰.۹	۰.۸

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریبا ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین،معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش‌اموزانشان تقریبا برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌اموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پ) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

@GamBeGam-Parsi

ت) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلا ۱ نفر بوده و با تغییر کادر اموزشی ۳ نفر شده است (٪۲۰۰ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر اموزشی ۸۴ نفر شده است (٪۲۰ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص‌کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه کننده باشد؟

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام نهایی (بحث و نتیجه‌گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های ان باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، **در بهترین حالت** می‌توانیم نتایج را **فقط** به جامعه اماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه اماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما **قطعی نیستند**؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد امد.

(از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟) $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$

یکپارچگی چرخهٔ امار در حل مسائل

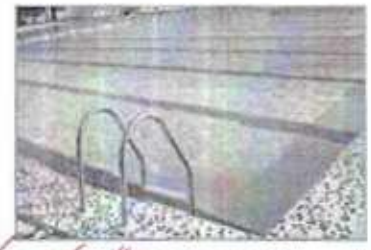
همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با امار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با انها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلا اگر امارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه اماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوما مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های ان را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم.

کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه امار، گام‌های دیگر را به شدت تحت‌تاثیر قرار می‌دهد. مثلا برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه‌تنها می‌توانیم جرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز **تردید و پرسش** داشته باشیم.

@CamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.



الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

پ) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند.

ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، مجریان پروژه جلسه‌ای را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی پروژه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای پر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «قوت شده است».

ث) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسیده بود، نتایج مورد انتظار به‌دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است.

ج) نتایج را فقط افراد متخصص امار تفسیر کرده‌اند.

@GanjeDarsi-Darsi

خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره اموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «انچه داری گرد است و زرد است و مجوف (میان‌تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که ان چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غربیل (غربال، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین نشان‌های دقیق دادی که عقول در ان حیران شوند اما ندانستی که غربیل در مشت نگنجد؟»

برگرفته از فیه ما فیه ــ مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به‌نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه اماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به‌صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌اموزان، از انها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام‌یک از شیوه‌های زیر به مدرسه امده‌اند؟

- ۱ــ پیاده یا با دوچرخه
- ۲ــ با وسایل حمل‌ونقل عمومی
- ۳ــ با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه اماری، نمونه اماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گرداوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گرداوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ــ اسمی/ترتیبی) ان را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و اماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) ایا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و امد دانش‌اموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلا به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری ازمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، ایا لزوما نتایج مشابهی حاصل می‌شد؟ توضیح دهید.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه اماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارد؟

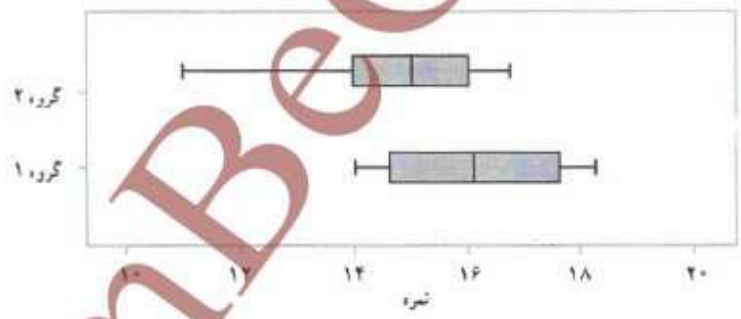
الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

@CamBeGam-Darsi

ب) مسئله : نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
نمونه : انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به انها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

ب) مسئله : نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.
نمونه : دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴ . «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌برد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما که بی‌تابانه منتظر کشف ان اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلا اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»
سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در شعبه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

پ) از مقایسه کمینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

@GamBeGam-Darsi

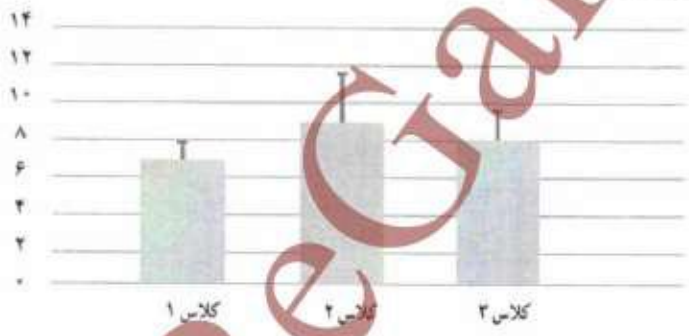
۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش‌اموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به‌نظر آنها چند ساعت اموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تاثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌اموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌اموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت برسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی ان را به‌صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خطا نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌اموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می پرسیم ایا انها می‌توانند به درستی به یاد اورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می کنید؟)

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ـ اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به‌صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تاثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

@GamBeGam-Darsi

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

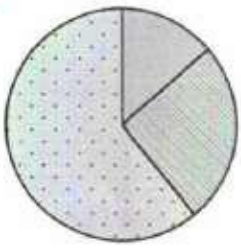
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به‌نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



۴۰ تا ۶۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال کمتر از ۲۰ سال

@GamBeGam-Darsi

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

(کیلومتر در ساعت) سرعت	۱۰-۰	۲۰-۱۰	۳۰-۲۰	۴۰-۳۰	۵۰-۴۰	۶۰-۵۰	۷۰-۶۰	۸۰-۷۰	۹۰-۸۰	۱۰۰-۹۰	۱۱۰-۱۰۰	۱۲۰-۱۱۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۲۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس:
«هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»
نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه آمار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه آزاد دانش‌آموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانش‌آموزان.

@GamBeGam_Darsi

حل تمرینهای صفحه‌ی ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱ :

بررسی وضعیت نمرات درسی دانش آموزان پایه‌ی اوّل دبستان چند پایه‌ی مختلط شهید احمدی شهرستان بستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین۲ :

الف:

جامعه‌ی آماری	دانش آموزان کلاس
نمونه‌ی آماری	دانش آموزان انتخاب شده
اندازه‌ی جامعه	۲۸ نفر
اندازه‌ی نمونه	۹ نفر

ب : پرسش شفاهی(چون تعداد نمونه کم است.) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثلاً برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پ : شیوه‌ی رفتن به مدرسه / کیفی / اسمی

ت : دایره ای ، میله ای / مُد و نسبت

ث : خیر. چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوتی پیش بیاید.

ج : خیر، نتایج ممکن است قدری تغییر کنند.

تمرین۳ :

الف :۱) مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند. ۲) مدیران نمی توانند، نماینده‌ی کل کارمندان محسوب شوند. برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

ب : ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود. برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ : ۱) دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند.۲) نمونه گیری تصادفی نیست. نمونه‌ی انتخاب نمونه ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین۴ :

الف : تقریباً مساویند. (ولی گروه اوّل نتیجه‌ی بهتری دارد.)

ب :دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است.

پ: مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اوّل گروه ۲ است. (گروه۱ بهتر است.)

ت : گروه الف. چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ث: گروه ۱ . نمودار متقارن است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

ج : جامعه‌ی گروه۱ به دلیل اطمینان از درست بودن نتایج

@GamBeGam Dars

تمرین۵ :

۲۲ و ۲۰ و ۲۰ و **۱۸** و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و **۱۲** و ۱۲ و ۱۲ و ۱۰ و **۱۰** و ۶ و ۴ و ۰

Q_1 Q_2 Q_3

چارک اول — چارک دوم (میانه) — چارک سوم

جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها ۱۲/۶

الف : داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند۵۰ تغییر می دهیم.

ب : میانگین این داده ها ۱۲/۶ می باشد . لذا می توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند(۱۲/۶ و ۹/۶) . بدین شکل میانگین تغییر نمی کند. از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تمرین۶ :

الف : ممکن است میزان ساعت جواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود. برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب : کمی / نسبتی (چون صفر مطلق دارند.)

پ :

گروه	کلاس۱	کلاس۲	کلاس۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۸	۱/۸

ت : اولاً : ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و .... ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً : میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث : والدین دانش آموزان ، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

@GamBeGam Darsi

تمرین۷:

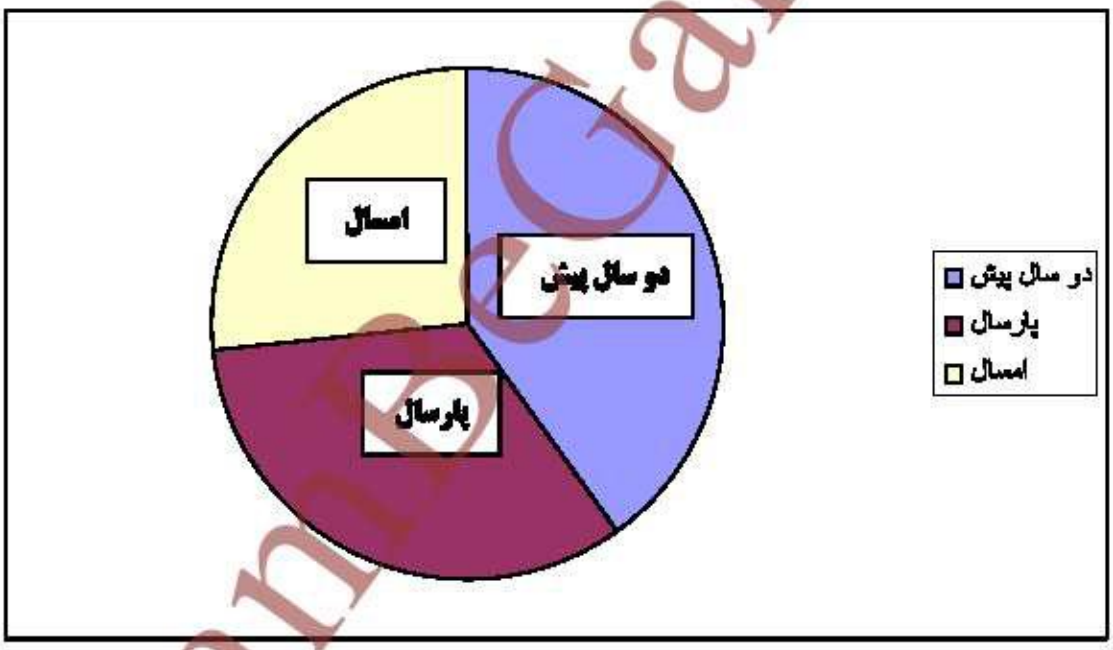
الف : ۳۰ نفر

ب : ۳۰ نفر (روند نزولی دارد.)

پ :

نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{۶۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۴۴$
پارسال	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۹۶$
جمع	۱۵۰	۳۶۰

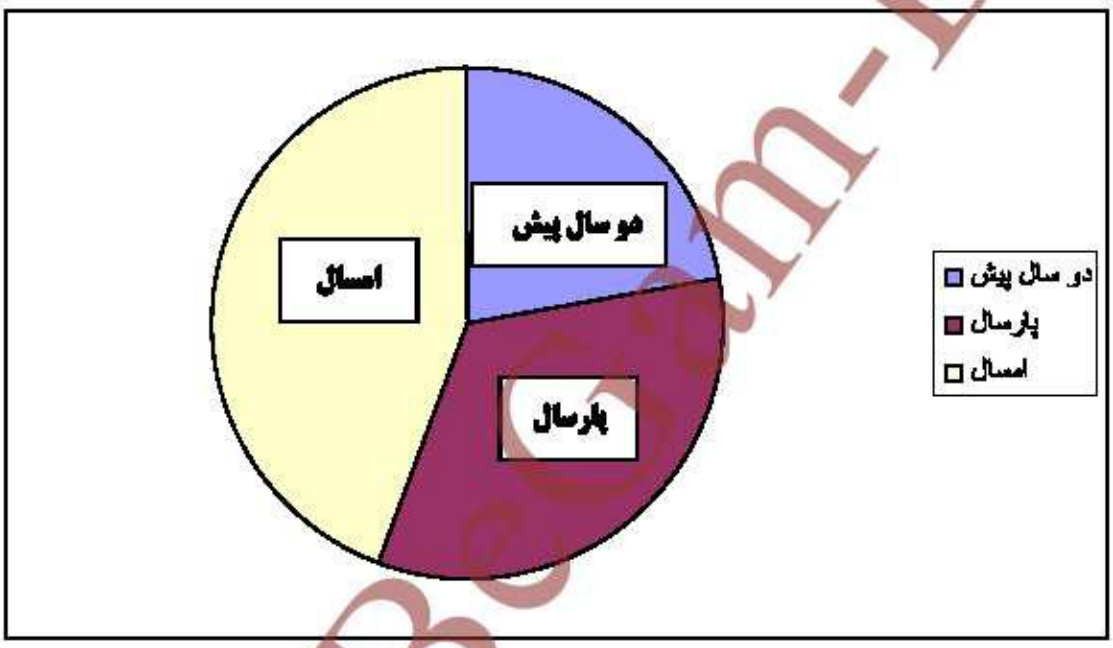


@GanjeGam-Darsi

ادامه ی حل تمرین۷

نمودار سایر اعضاء

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۸۰$
پارسال	۳۰	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۶۰$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت : عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و .... تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین۸ :

الف :

زاویه‌ی مرکزی (برحسب درجه)	دوره‌ی سنی
۵۴	کمتر از ۲۰ سال
۹۰	بین ۲۰ الی ۴۰
۲۱۶ (f)	بین ۴۰ الی ۶۰
۳۶۰	جمع

$۳۶۰ - (۹۰ + ۵۴) = ۲۱۶$

$\frac{۳۶۰}{۱۰۰} = \frac{۲۱۶}{x} \rightarrow x = \frac{۲۱۶ \times ۱۰۰}{۳۶۰} = ۶۰$ درصد

ب : مورد اول، زیرا

@GamBarim-Darsi

اولاً : در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانیاً : افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

تمرین۹ :

اشکال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه س بهتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

@GamBeGam Dars
منوسطه استان خوزستان

فصل ۲ـ الگوهای خطی

درس ۱ مدل‌سازی و دنباله

درس ۲ دنبالهٔ حسابی

إنَّ فی خلقِ السَّمٰواتِ وَالأرضِ وَ اختِلافِ اللَّیلِ وَ النَّهارِ لَآیاتٍ لِأُولِی الالبابِ (آیهٔ ۱۹۰ سورهٔ مبارکه آل عمران)

«و مسلماً در آفرینش آسمان‌ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه‌های (روشنی) برای خردمندان است»

در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

@CamBeGam-Darsi

درس ۱

مدل‌سازی و دنباله

مدل‌سازی

در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبهٔ قبض برق یک خانه با مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل‌سازی آشنا شدیم (رسم نمودارِ توابع متناظر با مفهوم مطرح‌شده).

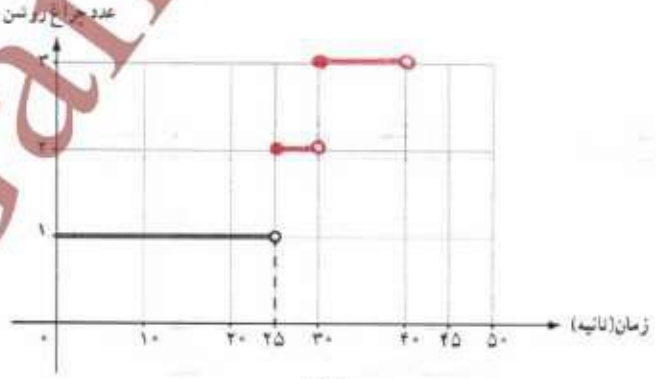
فعالیت

۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظهٔ شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیهٔ اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر چراغ روشنِ سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیهٔ tام، با توجه به فرض:

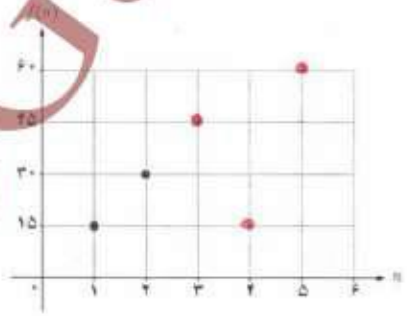
$$f(x)=\begin{cases}۱ & ۰\le t<۲۵\\ ۲ & ۲۵\le t<۳۰\\ ۳ & ۳۰\le t<۴۵\end{cases}$$

$$D_f=\{t\in\mathbb{R}\mid ۰\le t<۴۵\}\ ,\ R_f=\{۱,۲,۳\}$$



@GamBeGam-Darsi

۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n، شمارهٔ ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰

$$f(n)=\begin{cases} \ldots۱۵.n..... & ۱\le n\le ۳ \\ ۱۵+۴۵(n-۴) & ۴\le n\le ۵ \end{cases} \quad n\in \mathbb{N}$$

$$D_f=\{n\in \mathbb{N} \mid ۱\le n\le ۵\} \qquad R_f=\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰\}$$

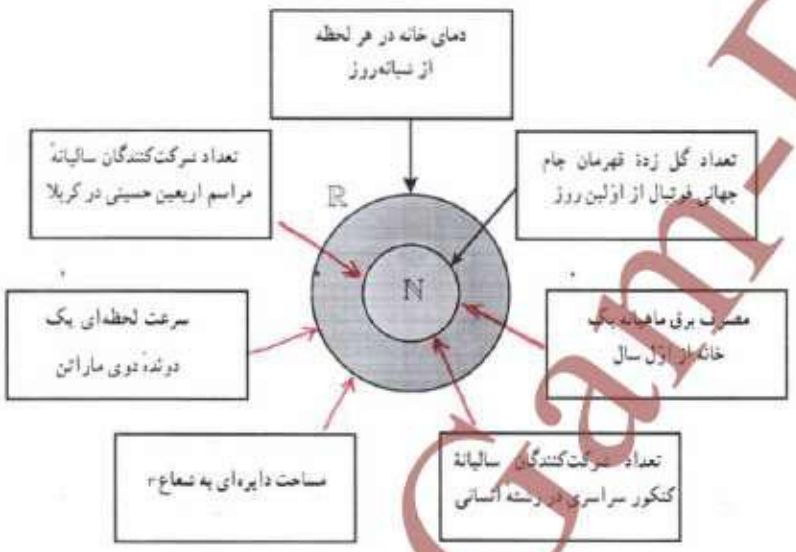
یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنهٔ آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنهٔ تابع زمان شروع به‌کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیهٔ ۴۵ام است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

در فعالیت دوم، دامنهٔ تابع بیانگر شمارهٔ ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

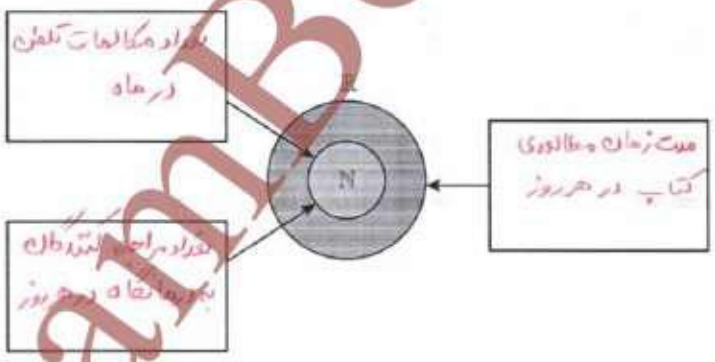
@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. اگر کتابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنهٔ هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنهٔ مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد :



در تعیین دامنهٔ تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و nام است، از مجموعهٔ اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

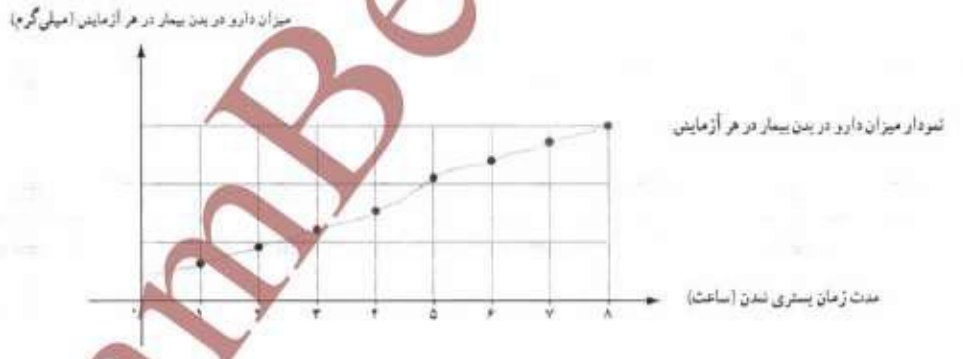
@GamBeGam-Darsi

کاربردی دیگر از مجموعهٔ اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان‌اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان‌پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصلهٔ زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به‌طور تقریبی بررسی می‌کنیم.

برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه‌روز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعهٔ اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

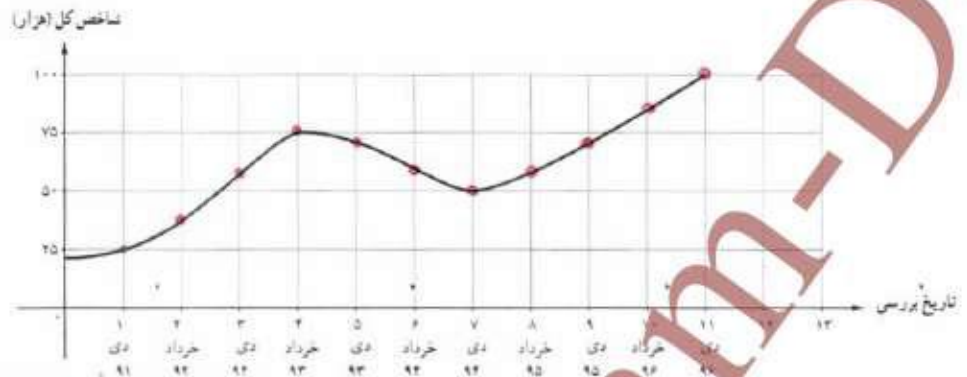


در فعالیت صفحهٔ بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.

@GamBeGam-Darsi

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران[1] (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ به‌طور تقریبی نشان می‌دهد.



الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطهٔ میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n اُمین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	۳۵	۵۰	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی‌ماه ۱۳۹۴ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ ۲) ۱۰۵,۰۰۰ ۳) ۱۱۲,۵۰۰ ۴) ۱۰۰,۰۰۰ ۵) ۱۲۵,۰۰۰

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به‌دست آمده برای دی‌ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

---

۱. شاخص بورس تهران، Tehran Price Index : TEPIX

@GamBeGam-Darsi

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت» اینها نمونهٔ جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟

بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها ــ که در اخبار مطرح می‌شود ــ «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت پیش بررسی شد. این شاخص از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایهٔ سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل‌ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز × تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک‌تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایهٔ سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه × تعداد سهام در روز بررسی[۱]» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

ــ فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه
A	۱۰۰۰	۴۵
B	۵۰۰	۳۰

$\Rightarrow$

قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
۶۰	۱۲۰۰
۸۰	۱۵۰۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰\times۶۰+۱۵۰۰\times۸۰}{۱۲۰۰\times۴۵+۱۵۰۰\times۳۰}\times۱۰۰ = \frac{۱۹۲,۰۰۰}{۹۹,۰۰۰}\times۱۰۰ = ۱/۹۳\times۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است.

توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۳۰۰۰ واحد برسد، یعنی ٪۵۰ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ٪۵۰ بوده است.

---

۱. فرمول بالا به روش محاسبهٔ «لاسپیرز» (Laspeyres) معروف است.

@GamBeGam-Darsi

هم سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جملهٔ nام یک الگو آشنا شدیم.[1] عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک تابعی با دامنهٔ اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام[2]، اعداد هر سطر را به‌صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم :

اگر n شمارهٔ هر سطر و a_n (جمله nام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد :

الف) با محاسبهٔ مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطهٔ میان a_1 ، a_2 و رابطهٔ میان a_3 ، a_2 و نیز a_4 و a_3 می‌توان مقادیر a_6 و a_5 را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطهٔ میان هر دو جملهٔ متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به‌دست می‌آید؟ چرا؟

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، **رابطهٔ بازگشتی**[3] می‌نامیم. برای دنبالهٔ اعداد بالا رابطه‌ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنبالهٔ بالا را مشخص کند.

هـ) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

و) رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطهٔ به‌دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

---

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. خواندنی کتاب ریاضی دهم

۳. Recursive Sequence

@GamBeGam-Darsi

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحهٔ قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت‌سر هم قرار دارند دنبالهٔ اعداد حقیقی می‌نامند.
جملات دنباله عموماً به‌صورت $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ نشان داده می‌شوند. a_n را جملهٔ nاُم دنباله می‌نامند که می‌تواند به دو صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطهٔ بازگشتی)

ب) رابطه‌ای برحسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطهٔ تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

$$\underset{a_1}{\downarrow}\ 4,\ \underset{a_2}{\downarrow}\ 7,\ \underset{a_3}{\downarrow}\ 10,\ \underset{a_4}{\downarrow}\ 13,\ \underset{a_5}{\downarrow}\ 16,\ \ldots$$

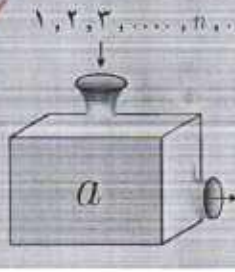
با در نظر گرفتن $a_1 = 4$، بقیهٔ جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت ۳ به جملهٔ پیشین به‌دست می‌آیند؛ یعنی:

$a_{n+1} = a_n + 3$ (رابطهٔ بازگشتی دنباله)

و یا می‌توان الگوی جملات دنباله را با ضابطهٔ $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای‌گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید.

تعریف دنباله: همان‌طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، اعضای بُرد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جملهٔ اول آن را $a(1)$، جملهٔ دوم را $a(2)$، جملهٔ سوم را $a(3)$، ... و جملهٔ nاُم را $a(n)$ در نظر می‌گیریم.

معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می‌دهند که آن را جملهٔ nاُم، جمله عمومی دنباله یا ضابطهٔ دنباله می‌نامند.



@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

با توجه به ضابطهٔ دنبالهٔ داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

پنج جملهٔ اول دنباله	جملهٔ nام
۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳	$a_n = ۳n - ۲$
۰، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴	$b_n = n^۲ - ۱$
$۱، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۵}$	$c_n = \frac{۱}{n}$
$-۱، \frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، -\frac{۱}{۵}$	$d_n = \frac{(-۱)^n}{n}$

مثال) برای جملات دنبالهٔ زیر :

$۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ۲۴۳، \ldots$

الف) رابطهٔ بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطهٔ تابعی دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ :

الف) برای نوشتن رابطهٔ بازگشتی در اولین دنباله، رابطهٔ میان جملات دنباله را بررسی می‌کنیم :

$a_۱ = ۳$ و $a_۲ = ۹ = ۳a_۱$ و $a_۳ = ۳a_۲ = ۳ \times ۹ = ۲۷$ و $a_۴ = ۳a_۳$

$\Rightarrow a_{n+۱} = ۳a_n \ ، \ a_۱ = ۳$

یعنی، هر جملهٔ دنباله ۳ برابر جملهٔ پیشین است. بدیهی است که تنها رابطهٔ $a_{n+۱} = ۳a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی‌کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_۱ = ۳$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطهٔ تابعی دنباله باید رابطهٔ میان n و a_n را مشخص کنیم :

اولین جمله $n = ۱ \rightarrow a_۱ = ۳$

دومین جمله $n = ۲ \rightarrow a_۲ = ۹ = ۳^۲$

سومین جمله $n = ۳ \rightarrow a_۳ = ۲۷ = ۳^۳$

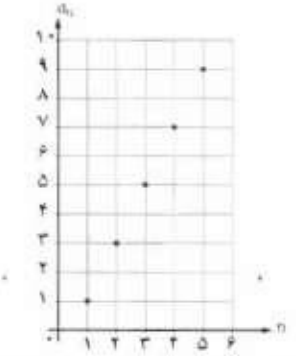
پس، ضابطهٔ تابع به‌صورت $a_n = ۳^n$ به‌دست می‌آید.

@GamBeGam-Darsi

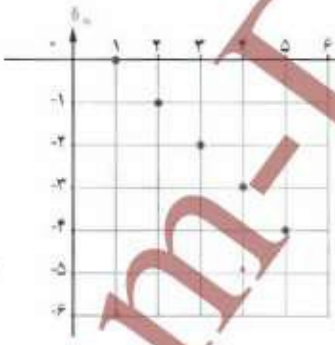
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنهٔ اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می‌توان رسم کرد :

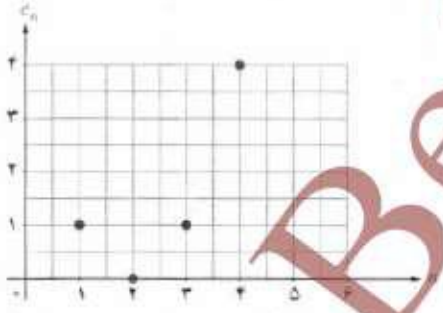
$a_n = 2n-1$ ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ...



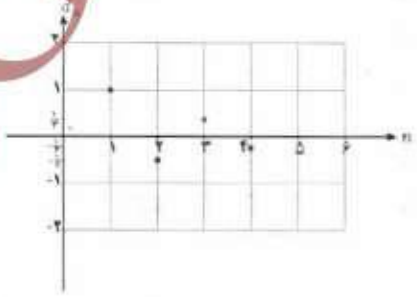
$b_n = 1-n$ ۰ ، -۱ ، -۲ ، -۳ ، -۴ ، ...



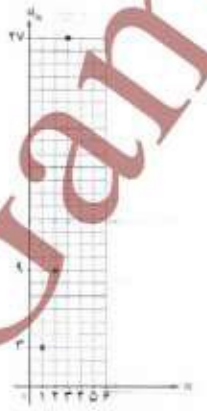
$c_n = (n-2)^2$ ۱ ، ۰ ، ۱ ، ۴ ، ...



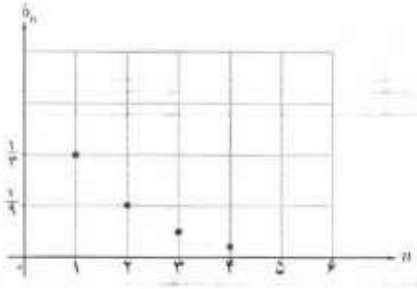
$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$



$e_n = 3^n$



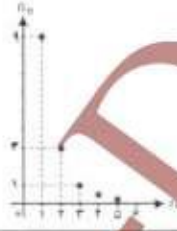
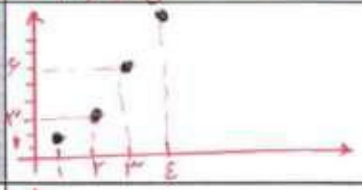
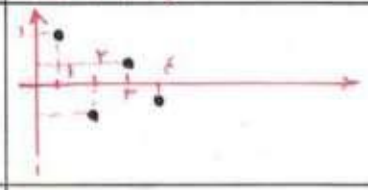
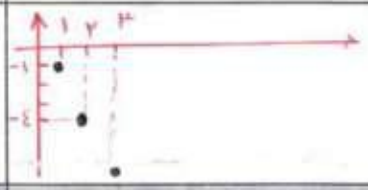
$f_n = (\frac{1}{3})^n$



@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطهٔ دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{3-n}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
	$a_n = 2n+1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ و $a_1 = 3$	$3, 5, 7, 9, \dots$
		$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	$1, 3, 6, 10, \dots$
	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$		$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$
	$a_n = -n^2$		$-1, -4, -9, -16, \dots$
		$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$*	$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

* دنبالهٔ فوق را دنبالهٔ فیبوناچی می نامند.

@GamBeGam-Darsi

تمرین

۱. برای محاسبهٔ قبض آب[۱] (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقهٔ مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطهٔ زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود:

هزینهٔ هر متر مکعب با توجه به طبقهٔ مصرف × میانگین مصرف = آب‌بها

جدول ۱. محاسبهٔ آب‌بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$۲۵ \le x < ۳۰$
۱۱/۵۸۰	$۳۰ \le x < ۳۵$
۱۵/۴۴۴	$۳۵ \le x < ۴۰$
۳۳/۴۶۲	$۴۰ \le x < ۵۰$
۶۶/۹۲۴	$x \ge ۵۰$

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۱/۴۱۹	$۰ \le x < ۵$
۲/۱۲۳	$۵ \le x < ۱۰$
۲/۸۲۷	$۱۰ \le x < ۱۵$
۳/۷۰۳	$۱۵ \le x < ۲۰$
۵/۲۰۰	$۲۰ \le x < ۲۵$

الف) نمودار «طبقه مصرف ـ آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی[۲] در تهران در یک ماه m^3 ۲۰/۴۹ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هرکدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هرکدام از آن‌ها را مشخص کنید.

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

ج) حجم مکعبی به ضلع x ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

هـ) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

---

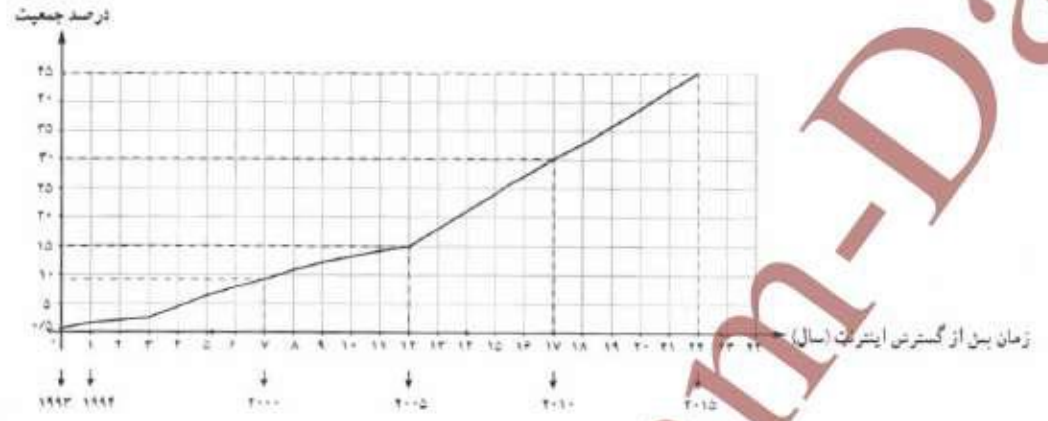
۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tpww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی، پس از محاسبهٔ حاصل‌ضرب گفته شده بر اساس طبقهٔ مصرف، عددی ثابت از عدد به‌دست آمده، کم می‌شود.

با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{۱}{۳}$ هزینهٔ واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینهٔ آب در مقایسه با کشورهای منطقه و بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۲. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران $۱۸ m^3$ است.

@GamBeGam-Darsi

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند[۱] :



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(۱)$ و $f(۷)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y=۴x-۱$ پیروی کند، با توجه به دامنهٔ دنباله :

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطهٔ بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطهٔ بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n=۳^n$ ، $b_n=(-\frac{۱}{۲})^{n+۱}$ ، $c_n=\frac{۱}{۳n-۱}$ ، $d_n=n^۲-۱$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $a_۲+b_۱$ ب) $c_۲-d_۱$ ج) $b_۴+d_۲$

۶. جملهٔ پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+۱}=\frac{۱}{۳}a_n$ ، $a_۱=-۲$ ب) $a_{n+۱}=\frac{۱}{۱+a_n}$ ، $a_۱=۱$

ج) $a_{n+۳}=a_{n+۲}+a_{n+۱}+a_n$ ، $a_۱=a_۲=a_۳=۱$ د) $a_{n+۱}=a_n+(-۱)^n$ ، $a_۱=۱$

---

۱. data.worldbank.org

@GamBeGam-Darsi

۷. جدول زیر را کامل کنید.

دنبالهٔ دو ضابطه‌ای	ضابطهٔ دنباله	رابطهٔ بازگشتی	جملات دنباله
			۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ...
			۴، ۱، ۴، ۱، ۴، ۱، ...
			$۱، \frac{۱}{۲}، ۳، \frac{۱}{۴}، ۵، \frac{۱}{۶}، \ldots$
			$\frac{۱}{۲}، \frac{۲}{۳}، \frac{۳}{۴}، \frac{۴}{۵}، \ldots$

۸. شش جملهٔ اول دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}a_n & n \text{ زوج}\\ ۳a_n+۱ & n \text{ فرد}\end{cases}$ را برای هرکدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_۱=۱۱$

ب) $a_۱=۲۵$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \le ۵$ رسم کنید.

الف) $a_n=-\frac{۱}{۲}n+۳$ ب) $a_n=(-\frac{۱}{۲})^n$

ج) $a_{n+۱}=\frac{۱}{a_n} \quad a_۱=۲$ د) $a_n=\begin{cases}۱ & n \text{ زوج}\\ \frac{۱}{n} & n \text{ فرد}\end{cases}$

۱۰. **محاسبهٔ جذر اعداد در تمدن بابل** ــ با نوشتن جملات دنبالهٔ بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲}(a_n+\frac{k}{a_n}) \qquad a_۱=k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

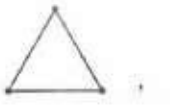
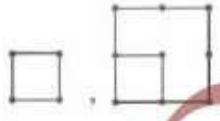
به کمک دنبالهٔ بازگشتی بالا، اگر $a_۴$ را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۳}$ ج) $\sqrt{۵}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

@GamBeGam-Darsi

۱۱. جملات دنبالهٔ بازگشتی $a_1=1$ ، $a_{n+1}=a_n+(n+1)$ رأس کدام‌یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟

الف)  ب) 

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس‌ماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط‌زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به‌صورت طبیعی خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است.
اگر $P_1=250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطهٔ بازگشتی، میزان مواد آلودهٔ صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

دریاچهٔ گهر، لرستان

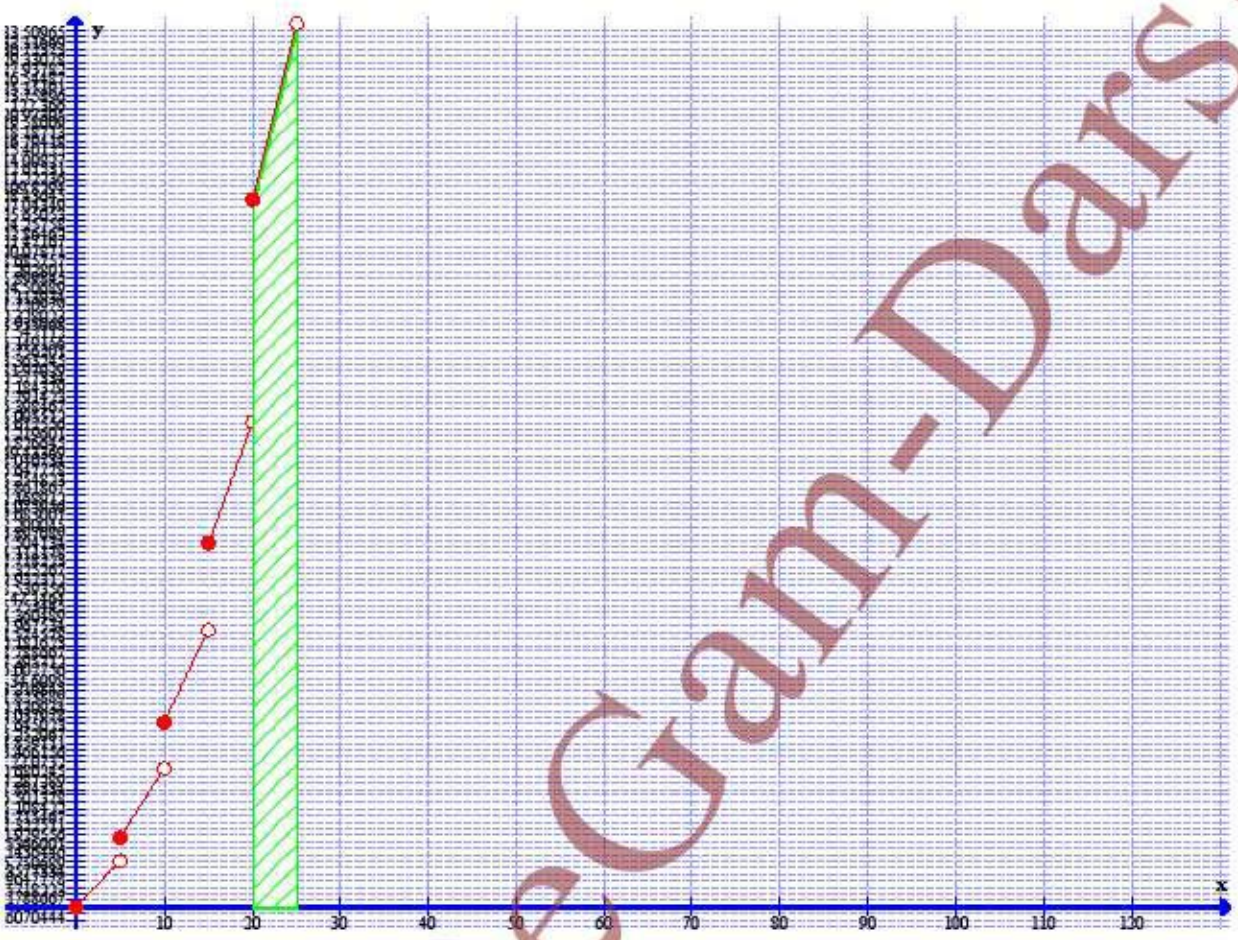
بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جملهٔ اول دنبالهٔ زیر را مشخص کنید؟

$a_1=a_2=1$ $\quad a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$

۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ...

@GamBeGam-Darsi



$f(x)$ / x x

$f(x)$ / x x

$f(x)$ / x x

[, /)∪[/ , /)∪…∪[/ ,) [,)

f(/) / / /

@GamBeGam-Darsi

N	R	
	✓	
✓		
	✓	
✓		
✓		

$f(\ )$ / $f(\ )$

t		
$f(t)$		

m ——————

h $y_{\circ}$ $mt_{\circ}$ ( )

y mt h y t

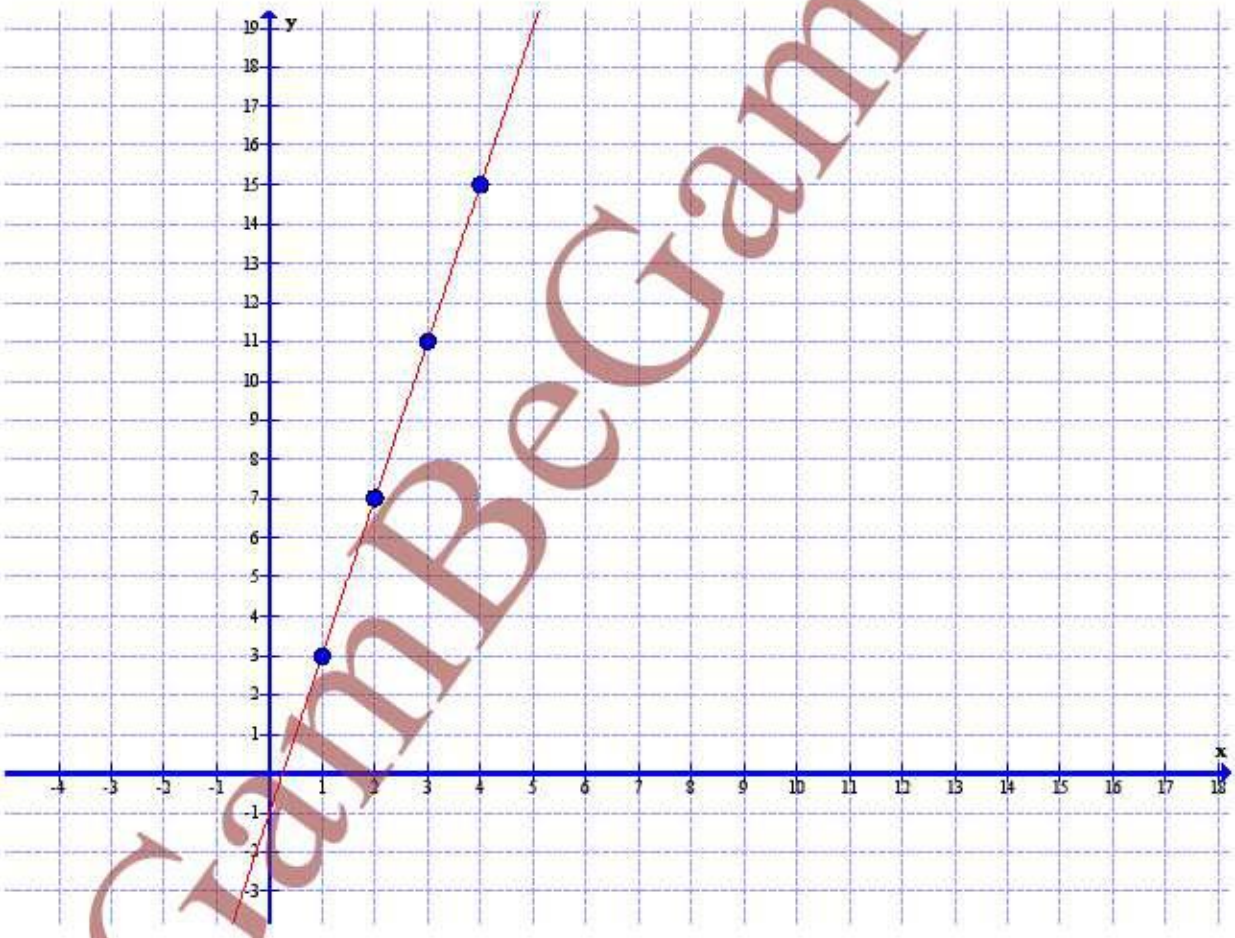
$f(t)$ t

$f(\ )$ ( )

@GamBeGam-Darsi

y	x	
x		
y		

a_n	n			
n				
a_n				



a_n n a_n a_n

m

a_n a_n m

@GamBeGam-Darsi

a b (–) – —

c d (———) ( ) – –
( )

b d (–) ( ) — —

a_n $-a_n$; a

a a $-a$ –( ) —

a $-a$ –(—) — a $-a$ –(—) —

a $-a$ –(—) —

a_n ——— ; a
a_n

a a ——— —— –
a

a ——— —— – – a ——— —— – –
a – – – –

a ——— —— – –
a – –

a_n a_n a_n a_n ; a a a

a a a

n a a a a

n a a a a

@GamBeGam Darsi
گروه آموزشی دوره ی دوم
متوسطه استان خوزستان

a_n a_n ($)^n$; a

a

n a a ( ) ( )

n a a ( )

n a a ( ) ( )

n a a ( )

a_n a_n ; a
a_n n

a_n a ; a a_n a ; a
n
a_n n

– – –

n n
a_n – n
n

– – – –

a_n $\frac{n}{n}$

@GamBeGam-Darsi

a

n a a ( )

n a $-a$ $-($)

n a a ( )

n a $-a$ $-($)

n a a ( )

a

n a a ( )

n a $-a$ $-($)

n a a ( )

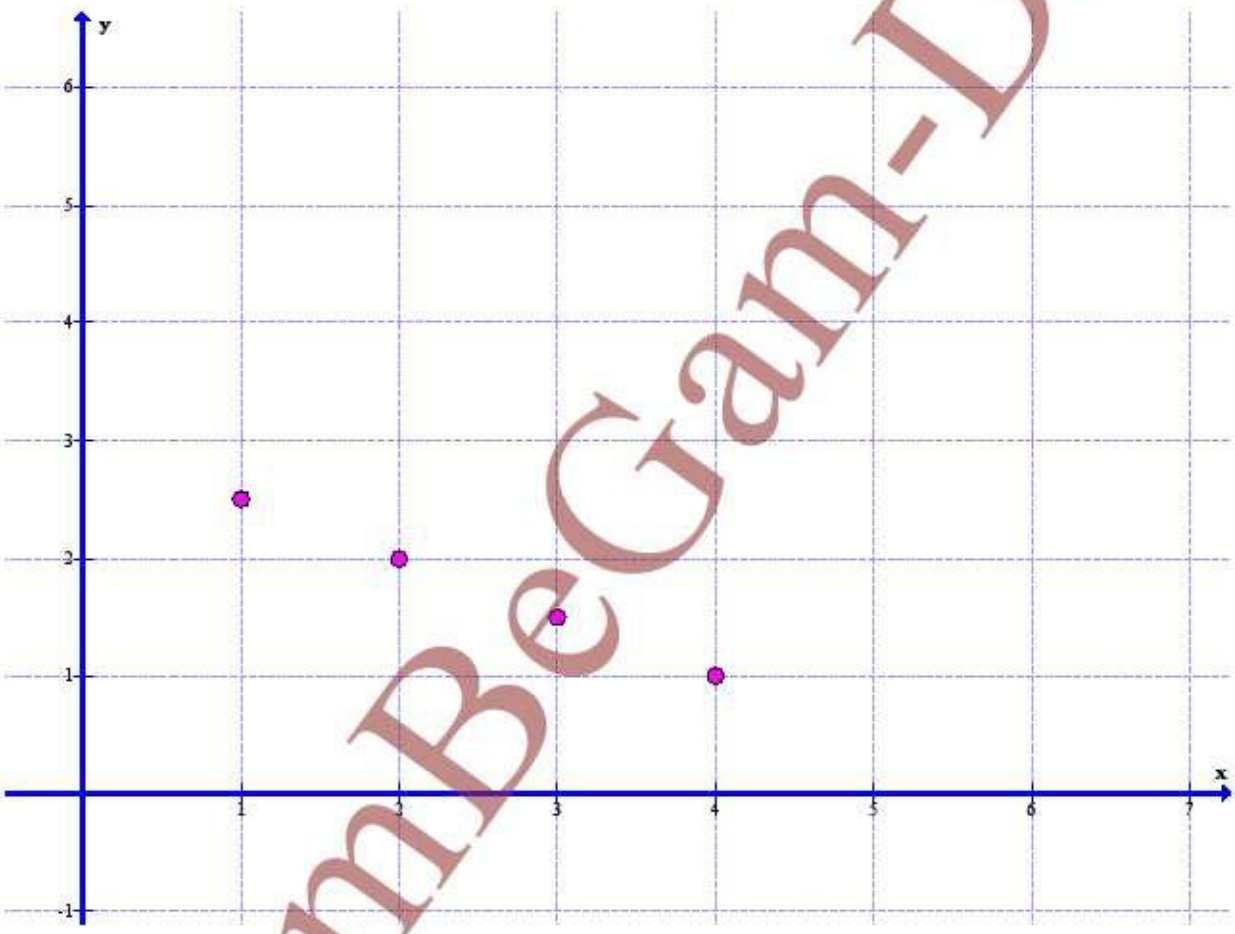
n a $-a$ $-($) —

n a a (—) —

— —

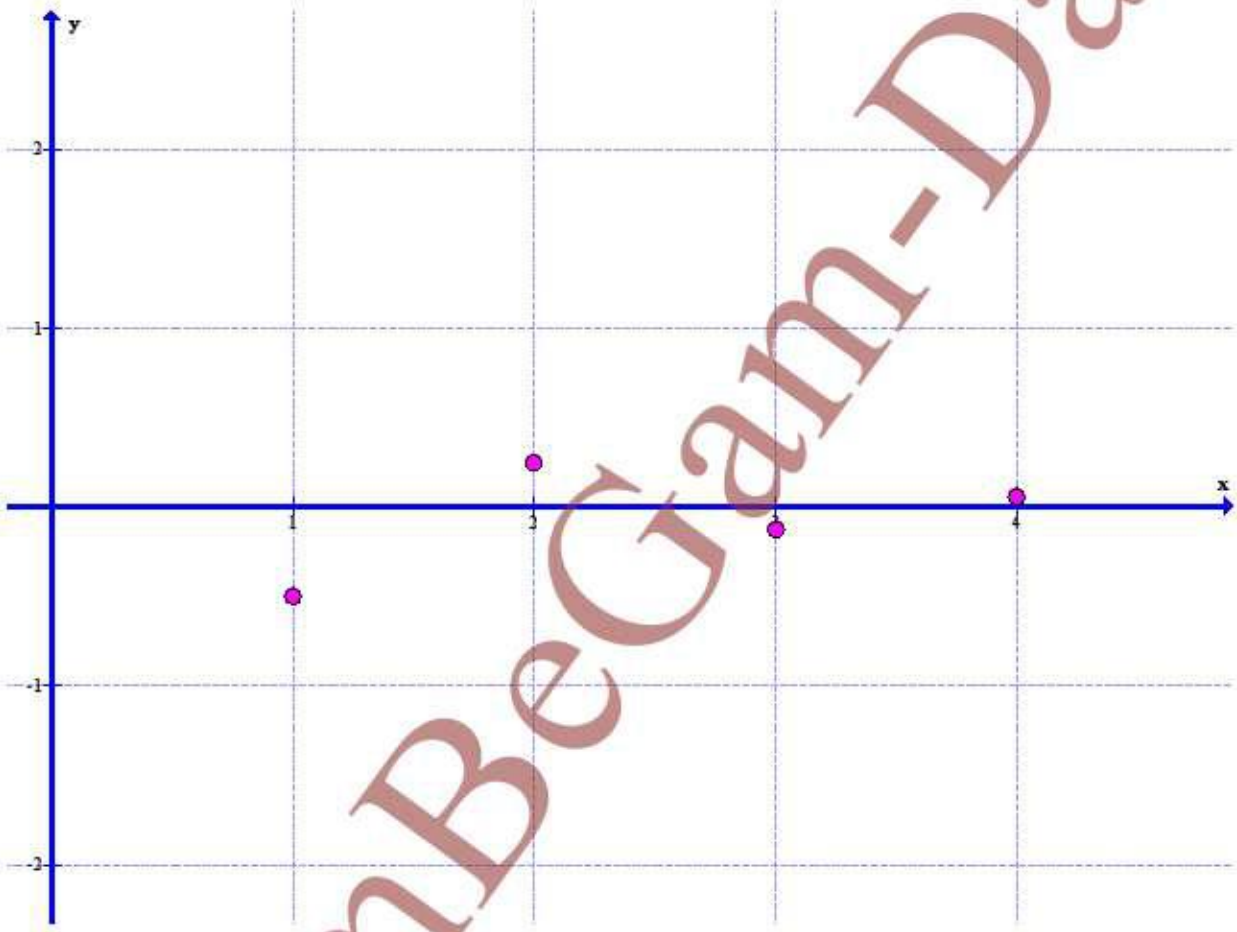
@GamBeGam-Darsi

a_n $-n$				
n				
a_n	$-$		$-$	



@GamBeGam-Darsi

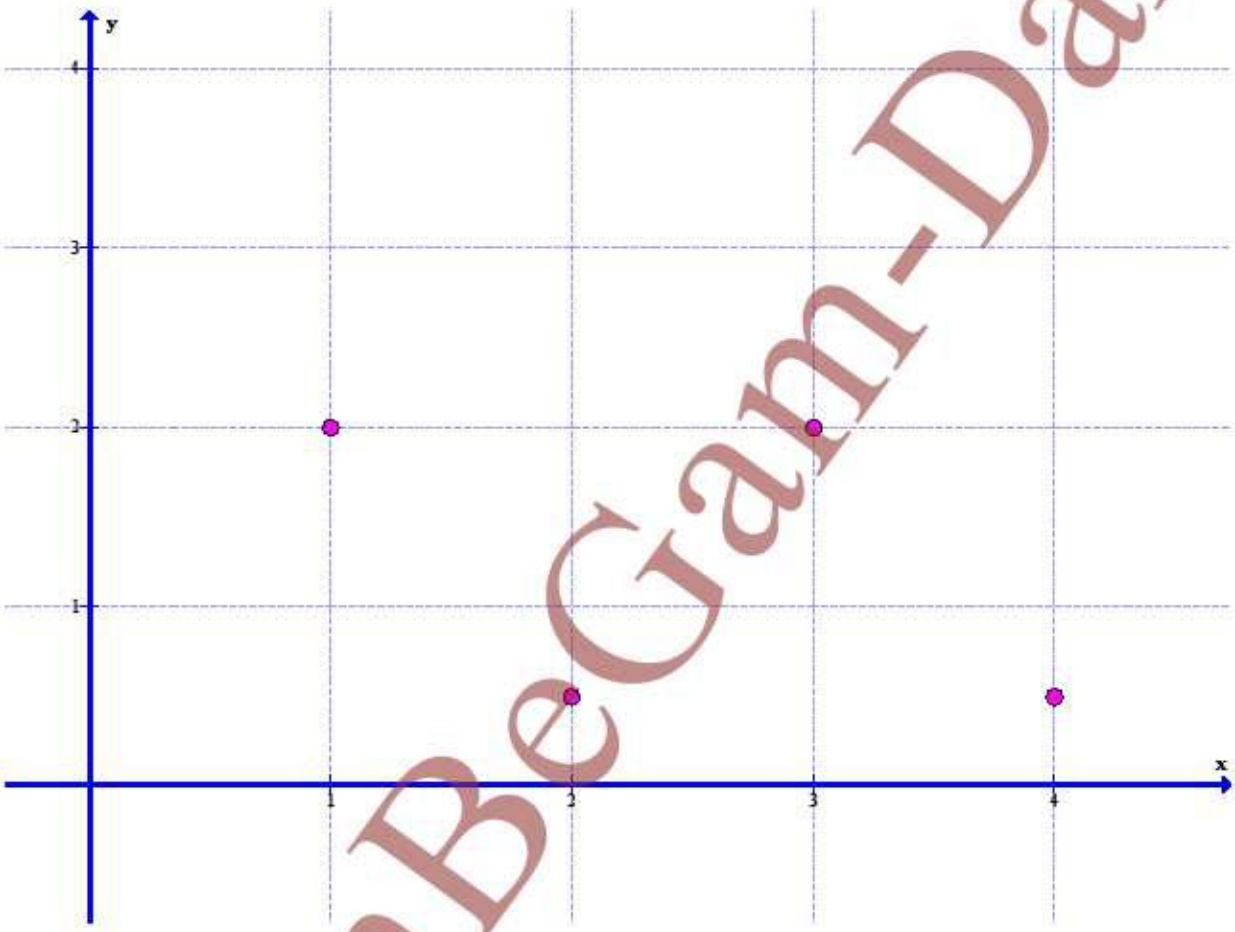
$a_n \quad (\ -)^n$				
n				
a_n	—	—	—	—



@GamBeGam-Darsi

a a $\frac{}{a}$ $-$ a $\frac{}{a}$ a $\frac{}{a}$ $-$

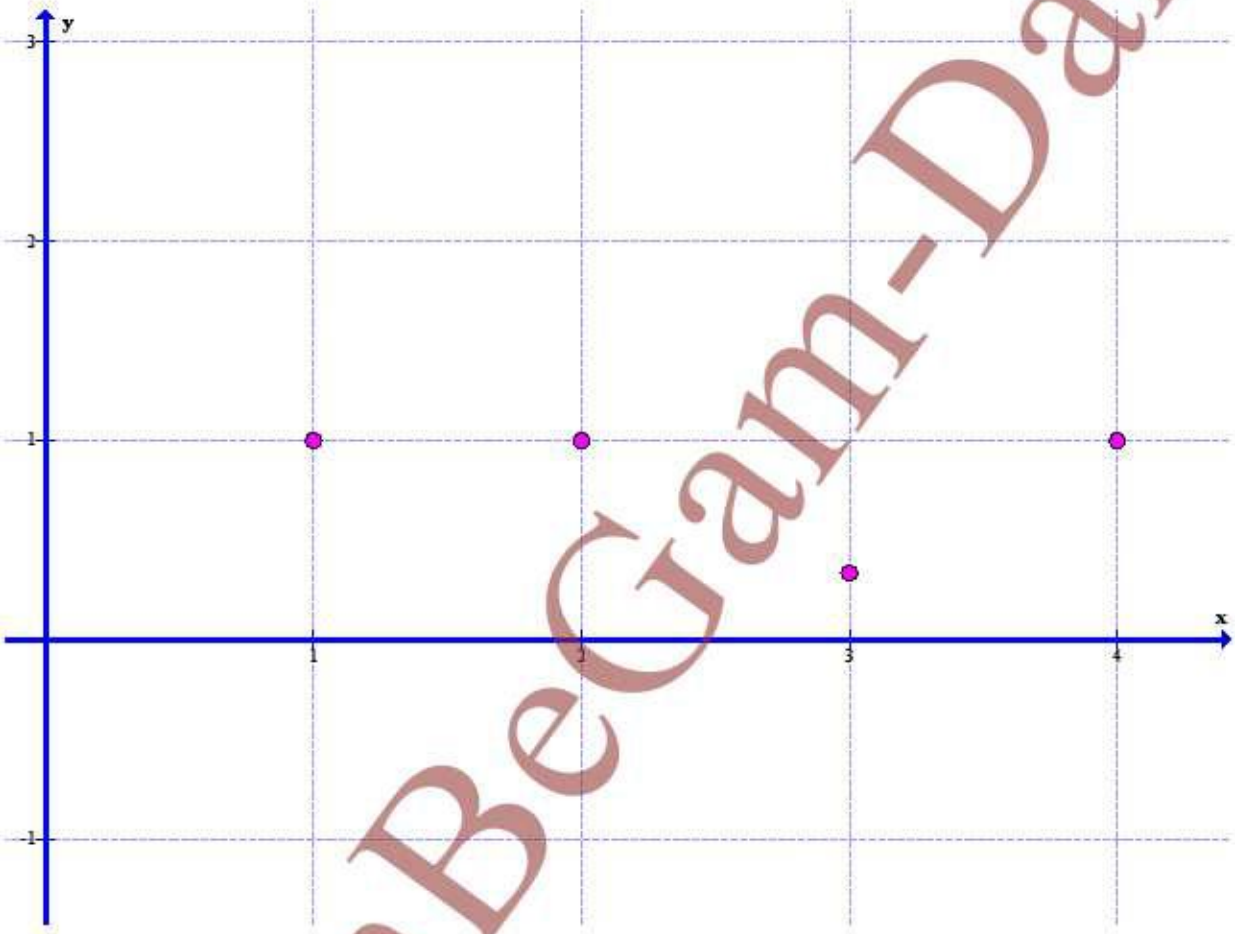
n				
a_n		$-$		$-$



@GamBeGam-Darsi

a a a – a

n				
a_n			–	



k

a_n $-(a_n$ $\frac{}{a_n})$; a

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-($ $-)$ $-$

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-(-$ $-)$ $-(-$ $-)$ $-$ — — /

@GamBeGam-Darsi

k

a_n $-(a_n$ $\frac{}{a_n})$; a

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-($ $-)$ $-($ $)$

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-($ $-)$ $-$ $-$ $-$ /

k

a_n $-(a_n$ $\frac{}{a_n})$; a

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-($ $-)$ $-($ $)$

a $-(a$ $\frac{}{a})$ $-($ $-)$ $-$ $-$ $-$ /

a_n a_n $(n$ $)$; a

a

n a a $($ $)$

n a a $($ $)$

@GamBeGamDarsi
گروه علمی دوره ی دوم متوسطه آموزش خصوصی

p_n p_n $-p_n$; p

n p p $-p$ —( )

n p p $-p$ —( )

n p p $-p$ —( ) / /

n p p $-p$ / —(/)
/ / /

n p p $-p$ / —(/)
/ / /

@GamBeGam-Darsi

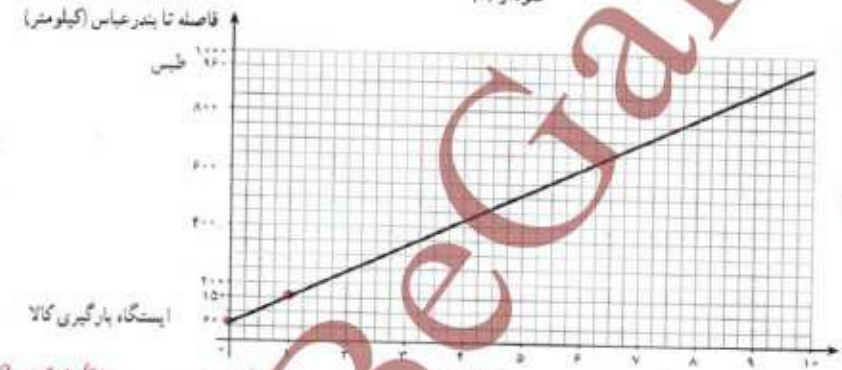
درس ۲

دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان ـ زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

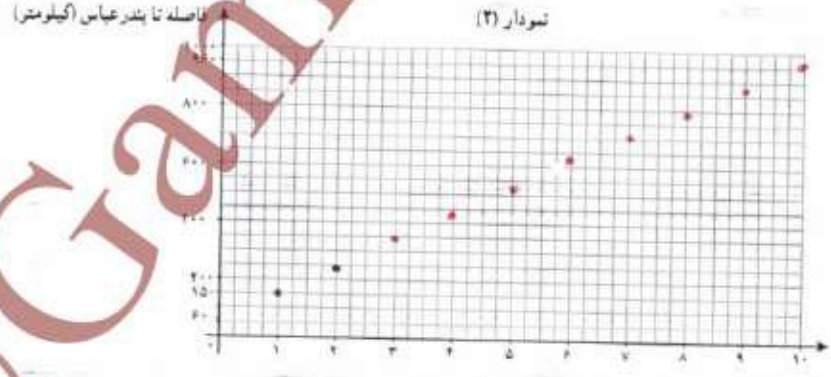
نمودار (۱)



الف) ضابطهٔ تابع و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

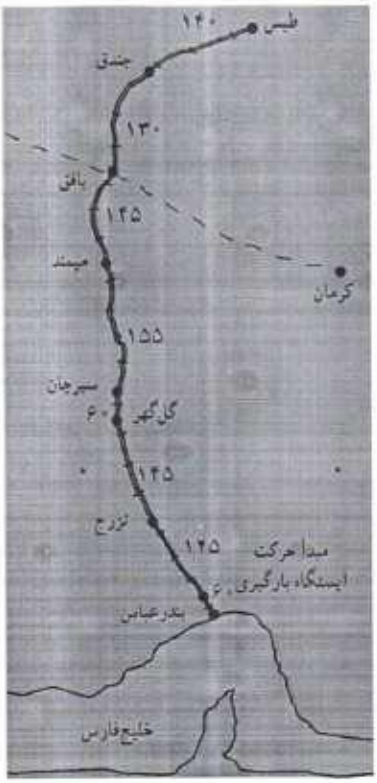
نمودار (۲)



ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

@GamBeGam-Darsi

د) جدول ۱ را به کمک نقشهٔ داده شده کامل کنید.



جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری ــ نرزج	۱۲۵	۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵
نرزج ــ گل‌گهر	۱۴۵	۱۸۵ + ۱۴۵ = ۳۳۰
گل‌گهر ــ سیرجان	۶۰	۳۳۰ + ۶۰ = ۳۹۰
سیرجان ــ میمند	۱۵۵	۳۹۰ + ۱۵۵ = ۵۴۵
میمند ــ بافق	۱۴۵	۵۴۵ + ۱۴۵ = ۶۹۰
بافق ــ جندق	۱۳۰	۶۹۰ + ۱۳۰ = ۸۲۰
جندق ــ طبس	۱۴۰	۸۲۰ + ۱۴۰ = ۹۶۰

هـ) با فرض اینکه a_n مسافت طی شدهٔ قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰$ $= ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰$ $= ۲۴۰ + ۹۰ = ۳۳۰$	$a_4 = a_3 + ۹۰$ $= ۴۲۰$	$a_5 = a_4 + ۹۰$ $= ۵۱۰$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + ۹۰$ $= ۶۰۰$	$a_7 = a_6 + ۹۰$ $= ۶۹۰$	$a_8 = a_7 + ۹۰$ $= ۷۸۰$	$a_9 = a_8 + ۹۰$ $= ۸۷۰$	$a_{10} = a_9 + ۹۰$ $= ۹۶۰$

و) با مقایسهٔ جدول‌های ۱ و ۲، کدام ایستگاه‌ها محل تماس راهبر قطار بوده‌اند؟ چرا؟

ایستگاه بافق ــ مقایسه مسافت و فاصله از دو جدول

$a_7 = ۶۹۰$

فاصله ۶۹۰ کیلومتری

@GamBeGam-Darsi

ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_{11} = a_{10} + \dots \\ a_{11} = a_1 + \dots \times 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_8 = a_7 + \dots \\ a_8 = a_5 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_7 + \dots \\ a_8 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_7 = a_6 + \dots \\ a_7 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت :

(۱)

$a_n = a_1 + (\quad) \times 90$

$a_n - a_{n-1} = \dots$ (رابطهٔ بازگشتی)

$a_n - a_m = (\quad) \times 90$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ط) رابطهٔ (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطهٔ تابع به‌دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنبالهٔ حسابی[1]

نکتهٔ قابل توجه در دنبالهٔ مطرح شده در فعالیت، یعنی دنبالهٔ «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به‌گونه‌ای که براساس هر دو جملهٔ متوالی، جملهٔ بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جملهٔ آنها به جز جملهٔ اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنبالهٔ حسابی، دنباله‌ای به‌صورت :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جملهٔ nاُم این دنباله با رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ معرفی می‌شود.

«d» را اختلاف مشترک[2] دنبالهٔ حسابی می‌نامند؛ زیرا همهٔ جملات دنباله در یک ویژگی مشترک‌اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

---

1. Arithmetic Sequence
2. Common Difference

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d، چه تأثیری در جملات دنبالهٔ حسابی دارد؟

۳. جدول زیر را کامل کنید.

a_n	بنج جملهٔ اول	اختلاف مشترک	جملهٔ اول
$a_n = a + (n-1)d$	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots$	d	a
$a_n = 2 + 3(n-1)$	$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$	3	2
$a_n = 4 + (n-1)(-3)$	$4, 1, -2, -5, -8, \ldots$	-3	4
$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \ldots$	$-\frac{1}{2}$	4
$a_n = -3 + 5(n-1)$	$-3, 2, 7, 12, 17, \ldots$	5	-3

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راهِ آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به‌دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی[1] در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.

در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میلهٔ اول ۲۹/۵ متر و میلهٔ دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

۱. مقنی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

خواندنی

سدی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوپا، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشتهٔ سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامهٔ ناصرخسرو به قنات گناباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر چاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله.

حفر صدها چاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همتاست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارچ یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و چاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه‌متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظهٔ آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به‌ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده‌متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزهٔ خود را با لباس سفید و اشهدگویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیبی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانش زمین نیازی به وجود پمپ برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویهٔ حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون چاه‌ها را ممکن می‌ساخته است؛ از آن در که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله چاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند[1].

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعهٔ پایدار، نوشته شده است: «قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست‌کم به ۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه‌هزاره زنده مانده است. شبکهٔ آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد.»

بیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به‌آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوبارهٔ آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

---

۱. طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر هویت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

@GanjeDarsi

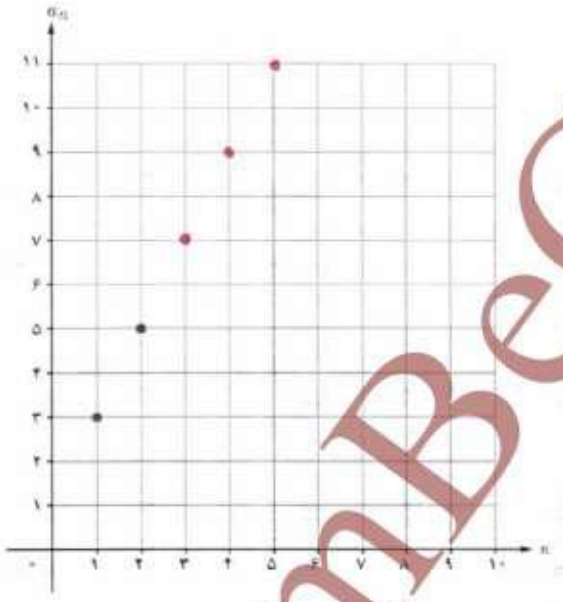
فعالیت

دنبالهٔ حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبهٔ سه جملهٔ دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ اول و دوم می‌گذرد، به‌دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطهٔ خط به‌دست آمده صدق می‌کنند؟

ج) شیب خط به‌دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنبالهٔ حسابی) دارد؟

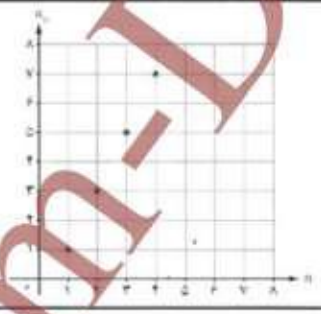
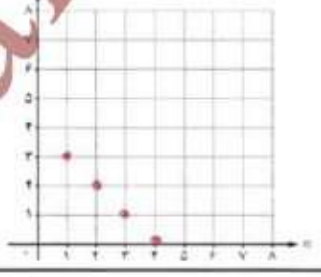
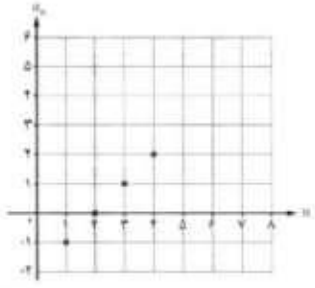
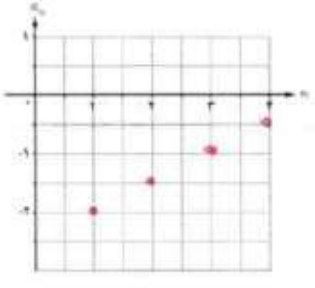


اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را بنویسیم، یک معادلهٔ خط خواهد شد. هر دنبالهٔ حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنبالهٔ ساخته‌شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنبالهٔ حسابی را مشخص می‌کند.

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

ضابطهٔ تابع	دنبالهٔ ساخته شده از تابع	چهار جملهٔ اول دنباله	نمودار دنباله
$y=2x-1$	$a_n=2n-1$	۱، ۳، ۵، ۷	
$y=-x+4$	$a_n=-n+4$	۳، ۲، ۱، ۰، ...	
$y=x-2$	$a_n=n-2$	-۱، ۰، ۱، ۲، ...	
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$	$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{5}{2}$	$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$	

معادله خط
$y=mx+h$

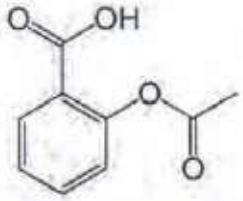
عرض از مبدأ
$h=y_1-mx_1$

شیب خط
$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

توجه:

@GamBeGam-Darsi

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود.[1] اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی گرم می شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن ـ زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲٬۰۰۰٬۰۰۰ تومان است که ٪۱۰ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه‌کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)

با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می کند؛ زیرا :

بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ nام دنباله باید برابر با مبلغ ..... تومان باشد؛ یعنی در رابطهٔ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

باید .....

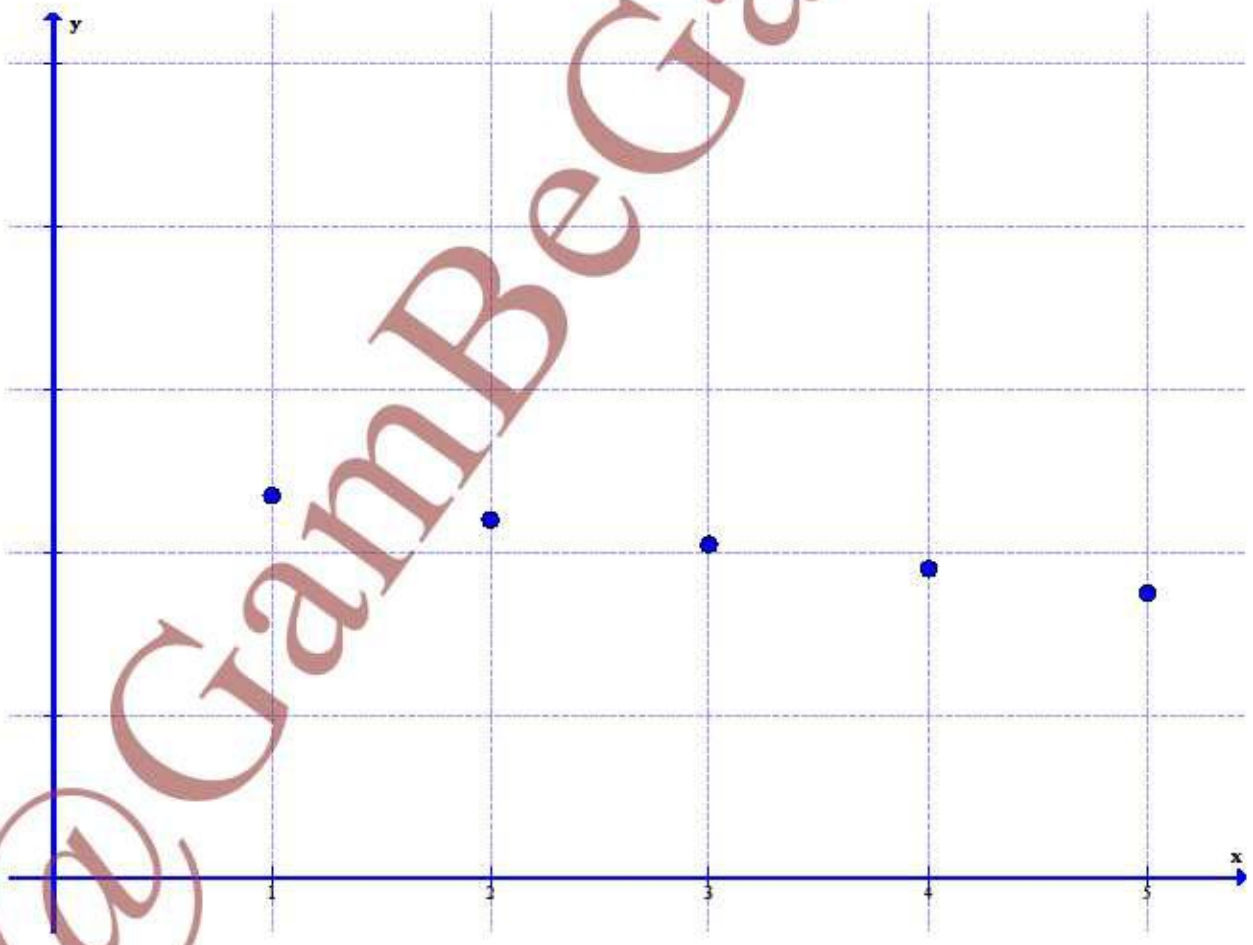
---

۱. این داروها را در فارماکوکینتیک Zero Order Kinetics می‌نامند.

@GamBeGam-Darsi

a a a ...

a_n n a_n n n n



@GamBeGam-Darsi

n								
b_m								
m								

b b b ...

b_n m b_m m m m /

/ /

—

				n
				n

a_n n a_n n n

@GamBeGam-Darsi

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی

در فعالیت «محاسبهٔ تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنبالهٔ حسابی ۱/۵ ، ۲ ، ۲/۵ ، ... ، ۲۹ ، ۲۹/۵ ، ۳۰ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقنّی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقنّی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.

الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم‌عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم :

مجموع ۵۸ چاه از مادرچاه تا آخرین میله : $S_{۵۸} = ۳۰ + ۲۹/۵ + ۲۹ + \cdots\cdots + ۲/۵ + ۲ + ۱/۵$

مجموع ۵۸ چاه از آخرین میله تا مادرچاه : $S_{۵۸} = ۱/۵ + ۲ + ۲/۵ + \cdots\cdots + ۲۹ + ۲۹/۵ + ۳۰$

$$۲S_{۵۸} = ۳۱/۵ + ۳۱/۵ + \cdots\cdots + ۳۱/۵ + ۳۱/۵$$

$$۲S_{۵۸} = ۵۸ \times ۳۱/۵ \Rightarrow S_{۵۸} = \frac{۵۸ \times ۳۱/۵}{۲} \Rightarrow S_{۵۸} = ۹۱۳/۵ \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مقنّی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند :

$$\text{تعداد روز برای پایان کار} = \frac{۹۱۳/۵}{۲} = ۴۵۶/۷۵ \text{ روز}$$

بنابراین، مقنّی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبهٔ مجموع $a_۱$ تا a_n و محاسبهٔ مجموع $a_۱$ تا a_n برای تعیین S، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آوریم :

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{۲}\big(۲a_۱ + (n-۱)d\big)$$

رابطهٔ بالا را در محاسبهٔ مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا :

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۵۸} = \frac{۵۸}{۲}(۳۰ + ۱/۵) = ۹۱۳/۵$$

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱-، ۲-، ۴-، ۹، ..... و ۱۹۹

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n \ , \ a_1 = -2$ $\quad S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطهٔ بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

۲. مجموع سی جملهٔ اول اعداد فرد را به‌دست آورید.

$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n-1$

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(1+59) = 900$

۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = 870$ برای به‌دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطهٔ

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

با جای‌گذاری $d = 3$ و $a_1 = 15$ در رابطهٔ بالا $n = 20$ به‌دست می‌آید.

@GamBeGam-Darsi

تمرین

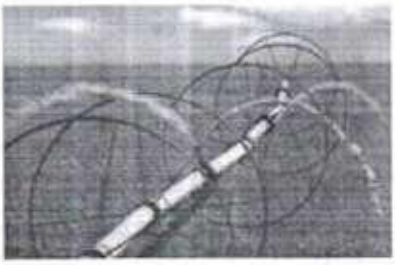
۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنبالهٔ حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$ د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی ۵۲ و جملهٔ نوزدهم آن ۹۲ است. جملهٔ سی‌اُم این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصلهٔ اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصلهٔ هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانهٔ سنگ‌بری برای صیقل‌دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفادهٔ مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b، m عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطهٔ $d = \frac{b-a}{m+1}$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(m+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطهٔ به‌دست‌آمده در مسئلهٔ ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ و ۵ و ۹ و ..... و ۲۰۱ ب) ۸۹ و ۸۵ و ۸۱ و ..... و ۱۳

@GamBeGam-Darsi

۹. باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پلهٔ این نردبان ۱۲۵سانتی‌متر و عرض آخرین پلهٔ آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰سانتی‌متر کوتاه‌تر از پلهٔ پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

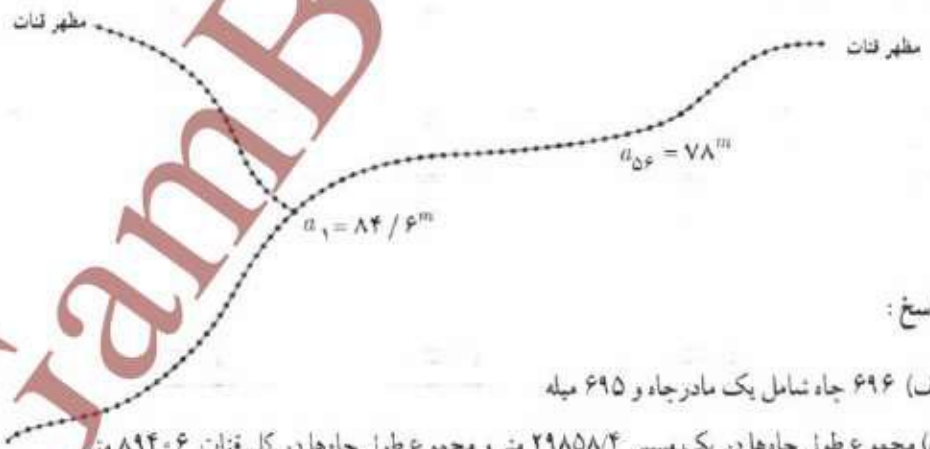
۱۰. **ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران** ــ عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه‌شاخه قنات برابر و عمق پنجاه‌و ششمین چاه (میلهٔ ۵۵ام) ۷۸متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصلهٔ میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰سانتی‌متر درنظر گرفته شود :

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینهٔ حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵۰هزار تومان باشد، هزینهٔ حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینهٔ ۳۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی : a_n را عمق چاه nاُم تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ :

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر ۲۹۸۵۸/۴ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) ۲۲،۳۵۱،۵۰۰،۰۰۰ تومان

د) ۴۷،۲۰۱،۵۰۰،۰۰۰ تومان

@GamBeGam-Darsi

– –

n	a a
n	a a
n	a a
n	a a
n	a a

a k

k k k k k k

k

a_n a $(n$ $)d$ $(n$ $)(\ )$ n

n n n $__$

a_n a $(n$ $)d$ a a a a d a d

a a d a d

$(a$ $d)$ $(a$ $d)$ d d

d

a d a a

a_n a $(n$ $)d$ a $(\ \ \ )(\ )$

a	*a*	*a*		*a*

a_n *a* (*n*)*d* *a* ( )( )

S ( ) /

a

a

a

a

d *a*

a_n *a* (*n*)*d*

a ( )( )

b *a*

m *a* *b*

n *m*

a *a* a_n *a* *b* *a* (*a* (*n*)*d*) *a* *b* *a*

a_n *b*

(*n*)*d* *b* *a* *d* $\frac{b \quad a}{n}$ *n* *m* *d* $\frac{b \quad a}{(m \quad)}$ $\frac{b \quad a}{m}$

d $\frac{b \quad a}{m}$ *d* ——

@GamBeGam-Darsi

$b \quad a \quad (n \quad)d$ $a \qquad b$

$n \quad \frac{b \quad a}{d}$

$n \quad \frac{b \quad a}{d} \qquad _____$

$S \quad \frac{n}{-}(a \quad b) \quad —(\qquad)$

$n \quad \frac{b \quad a}{d} \qquad _____$

$S \quad \frac{n}{-}(a \quad b) \quad —(\qquad)$

$n \quad \frac{b \quad a}{d} \qquad _____$

$S \quad \frac{n}{-}(a \quad b) \quad –(\qquad) \qquad /$

@GamBeGam-Darsi
گروه آموزشی گام به گام
متوسطه استان خوزستان

فصل ۳ـ الگوهای غیرخطی

درس ۱ دنبالهٔ هندسی

درس ۲ توان‌های گویا

درس ۳ تابع نمایی

توابع نمایی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل‌ها، بیماری‌های واگیردار، شدت اصوات و زلزله‌ها کاربرد دارد.

Ganjgan-Darsi

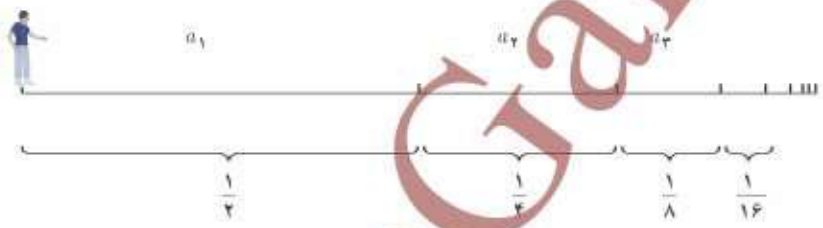
درس ۱

دنبالهٔ هندسی[۱]

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو[۲]، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هرکدام از فاصله‌ها نصف فاصلهٔ پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots$$ زمان رسیدن به در خروجی کلاس

و چون جملات دنباله ... و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{2}$ و t هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود[۳]. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبهٔ مجموع آنها» انجامید که در ادامهٔ این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

---

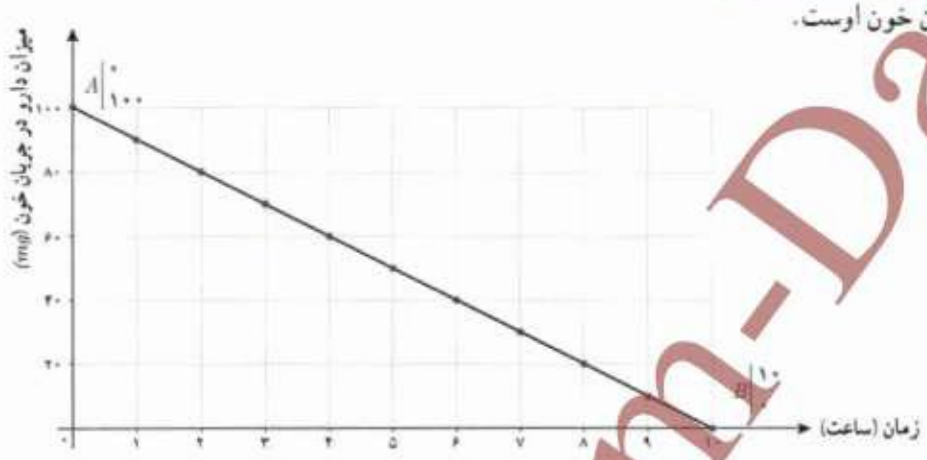
۱. Geometric Sequence ۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برونکور، نیوتن و اویلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

@CanBeCam-Darsi

فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحهٔ ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، مادهٔ مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنبالهٔ کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظهٔ مصرف دارو تا لحظهٔ تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش ۱۰ میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1=۹۰ \qquad a_{n+1}=a_n-۱۰$$

پس، برای تعیین ضابطهٔ تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m_{AB}=\frac{۰-۱۰۰}{۱۰-۰}=-۱۰$$

$h=$ عرض از مبدأ $=۱۰۰$ $\Rightarrow$ $a_n=-۱۰n+۱۰۰$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ضابطهٔ تابعی دنباله را به کمک رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا:

$a_1=۹۰$: میزان دارو در بدن پس از یک ساعت

$d=-۱۰$: کاهش ثابت ۱۰ میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو

$$\Rightarrow a_n=۹۰+(n-1)\times(-۱۰) \Rightarrow a_n=-۱۰n+۱۰۰$$

میزان حذف دارو و مادهٔ مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود[۱] و در تعداد زیادی از داروها مادهٔ مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه‌عمر مادهٔ مؤثر[۲]» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت صفحهٔ بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطهٔ تابعی دنباله مشخص می‌کند.

---

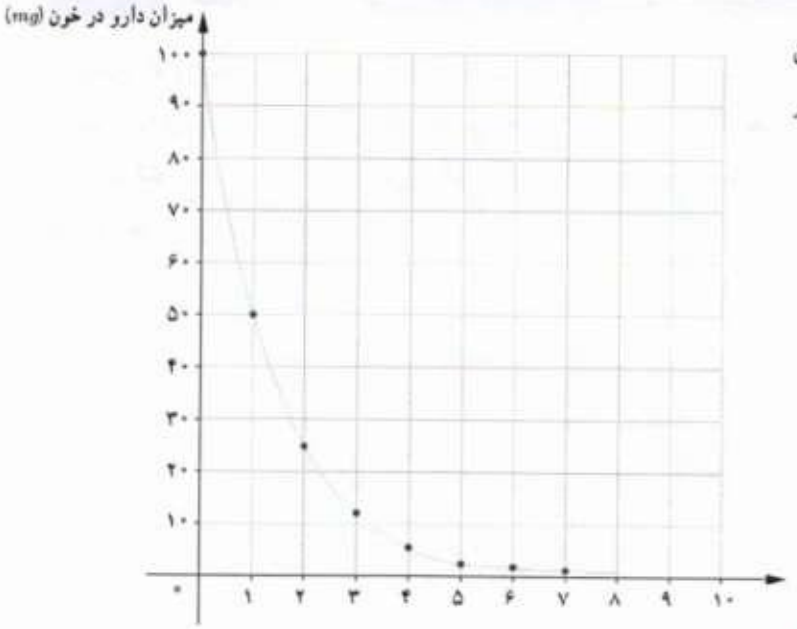
۱. از این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه‌عمر یک دارو (Half – life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

@GamBeGam-Darsi

فعالیت

شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون ــ زمان» را کامل کنید.



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطهٔ بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جملهٔ دنباله از حاصل‌ضرب عدد ثابت ... در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید؛ یعنی :

$a_1 = ۵۰$ $\quad a_{n+1} = \ldots a_n$

ج) ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$a_1 = ۵۰ \quad a_2 = \frac{1}{2} \times ۵۰ \quad a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times ۵۰\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times ۵۰ \quad a_4 = \ldots$

$\Rightarrow \quad a_n = \ldots$

خواندنی

دانستن نیمه‌عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال :

ــ در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

ــ در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

ــ کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

@CamBeCam-Darsi

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جملهٔ اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک[1] می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای به‌صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

است که در آن $a \neq 0$ جملهٔ اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.
جملهٔ nام این دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $a_n = a_1 r^{n-1}$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جملهٔ عمومی دنباله	ضابطهٔ بازگشتی	پنج جملهٔ اول	نسبت مشترک	جملهٔ اول
$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$, $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$r = \frac{1}{3}$	$a_1 = 1$
$a_n = (\frac{3}{2})^{n-1} (\frac{1}{81})$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$, $a_1 = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$r = \frac{3}{2}$	$a_1 = \frac{1}{81}$
$a_n = 4(-\frac{1}{2})^{n-1}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2}) a_n$, $a_1 = 4$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$r = -\frac{1}{2}$	$a_1 = 4$
$a_n = (\frac{1}{5})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$, $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$r = \frac{1}{5}$	$a_1 = 1$
$a_n = 100(\frac{1}{4})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$, $a_1 = 100$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$r = \frac{1}{4}$	$a_1 = 100$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$، دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☑ کاهشی ☐ ثابت است.

ب) اگر $r > 1$، دنبالهٔ a_n، ☑ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ج) اگر $r = 1$، دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☑ ثابت است.

---

۱. Common ratio

@GamBeGam-Darsi

n		n	
۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 0/5 \Rightarrow 1 \not< 0/5$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 0/5 \Rightarrow 0/6561 \not< 0/5$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 0/5 \Rightarrow 0/9 \not< 0/5$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 0/5 \Rightarrow 0/59049 \not< 0/5$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 0/5 \Rightarrow 0/81 \not< 0/5$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 0/5 \Rightarrow 0/531441 \not< 0/5$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 0/5 \Rightarrow 0/729 \not< 0/5$	۸	$\left(\frac{9}{10}\right)^{8-1} < 0/5 \Rightarrow 0/4782969 < 0/5$

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $\Rightarrow n > 7$

کار در کلاس

ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ را مشخص کنید.

$a_{n+1} = r a_n \qquad a_1 = a$

کار در کلاس

(هزینهٔ استهلاک)[1] ــ شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینهٔ استهلاک این یخچال هر سال معادل ٪۱۰ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال nاُم باشد :

الف) ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ v_n را به‌دست آورید.

با توجه به هزینهٔ استهلاک ٪۱۰، ارزش یخچال فریزر در هر سال ٪۹۰ سال قبل خواهد بود؛ یعنی :

$v_1 = 960{,}000 \qquad v_2 = 960{,}000 \times \frac{90}{100} = 864{,}000 \qquad v_3 = 777{,}600 \qquad v_n = 960{,}000\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ٪۱۰ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ٪۱۰ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطهٔ v_n را به‌گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنبالهٔ v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی : با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480{,}000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

$960{,}000\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 480{,}000 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$

ادامه پایین صفحه

هـ) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ هندسی است؟

$a_{n+1} = a_n - k \qquad a_{n+1} = k a_n$

---

1. Depreciation Cost

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر مادهٔ کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

خواندنی

برای بدست آوردن چند نیمه عمر می توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به‌سبب وجود مادهٔ کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازهٔ کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و ... می‌گردد. مصرف بیش از اندازهٔ آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیهٔ پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازهٔ آنهاست.

توجه به نیمه‌عمر مادهٔ کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.

@GeoGebra-Darsi

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل ۸۰ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با یک «رابطهٔ بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطهٔ تابعی دنباله)

د) با جای‌گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطهٔ به‌دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به‌دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر «S_n» میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰ :۰۰ بامداد	$S_1=80mg$
۲	۱۵ بهمن	۸: ۰۰ صبح	$S_2=\frac{1}{2}S_1+80 \quad =40+80=120$
۳	۱۵ بهمن	۴: ۰۰ بعد از ظهر	$S_3=\frac{1}{2}S_2+80 \quad =60+80=140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰ :۰۰ بامداد	$S_4=\frac{1}{2}S_3+80=70+80=150$
۵	۱۶ بهمن		$S_5=\frac{1}{2}S_4+80=75+80=155$
۶	۱۶ بهمن		$S_6=\frac{1}{2}S_5+80=77/5+80=157/5$

ب) با توجه به نحوهٔ کامل کردن جدول بالا، رابطهٔ بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1}=80+\frac{1}{2}S_n \quad , \quad S_1=80$$

ج) برای نوشتن ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ S_n برحسب n، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80mg$ است)، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده در قسمت ب :

$$S_1=A$$

$$S_2=A+\frac{1}{2}S_1=A+\frac{A}{2}$$

$$S_3=A+\frac{1}{2}S_2=A+\frac{1}{2}(A+\frac{1}{2}A)=A+\frac{1}{2}A+(\frac{1}{2})^2A$$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBeGam-Darsi

به همین صورت برای محاسبهٔ $S_۴$:

$$S_۴ = A+\frac{۱}{۲}A+(\frac{۱}{۲})^۲A+\cdots+(\frac{۱}{۲})^{۳}A$$

پس برای محاسبهٔ مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A+\frac{۱}{۲}A+(\frac{۱}{۲})^۲A+\cdots+(\frac{۱}{۲})^{n-۱}A \qquad (۱)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را در ضریب $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم :

$$\frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲}A+(\frac{۱}{۲})^۲A+\cdots\cdots+(\frac{۱}{۲})^{n}A \qquad (۲)$$

با تفاضل رابطهٔ (۱) از (۲) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S_n-\frac{۱}{۲}S_n = A-(\frac{۱}{۲})^nA \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}S_n = A(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = ۲A(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A=۸۰^{mg}$، مجموع میزان آنتی‌بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$$

د) با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده برای S_n :

$$S_۱ = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^۱) = ۱۶۰\times\frac{۱}{۲} = ۸۰$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم مشخص کنیم :

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=ar^{n-۱}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a+ar+ar^۲+ar^۳+\cdots+ar^{n-۱} \qquad (r\neq ۱)$$

از رابطهٔ :

$$S_n = a\times\frac{۱-r^n}{۱-r}$$

به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحهٔ پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه‌های دنباله‌های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای $a_۴$ و $S_۴$ چیست؟

@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جملهٔ اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جملهٔ اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \cdots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}}\right) =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \cdots$	$a_1 = \ldots\frac{1}{4}\ldots$	$r = \ldots\frac{1}{4}\ldots$	$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^4}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3}\left(\frac{256-1}{256}\right) = \frac{85}{256}$ $S_8 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^8}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{65536-1}{65536}\right)$ $= \frac{21845}{65536}$ $S_7 =$ $S_1 =$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \cdots$	$a_1 = \ldots\frac{2}{5}\ldots$	$r = \ldots\ldots$	
$\frac{2}{5}, 2, 10, \cdots$	$a_1 = \ldots\frac{2}{5}\ldots$	$r = \ldots 5 \ldots$	$S_6 = \frac{2}{5}\left(\frac{1-5^6}{1-5}\right)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{1-15625}{-4} = 1562,4$

۲. نمودار زیر یک دنبالهٔ هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جملهٔ اول آن و محاسبهٔ نسبت مشترک دنبالهٔ هندسی:

الف) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

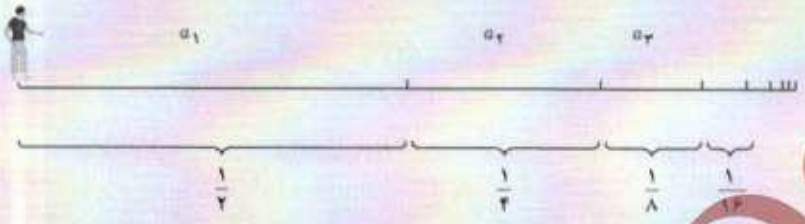
ب) حاصل S_{10} را به‌دست آورید.

$S_{10} = 2\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2 \times 2\left(\frac{1024-1}{1024}\right) = \frac{1023}{256}$

@GamBeGam-Darsi

خواندنی

جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان‌طور که خوانده شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنبالهٔ r^n بسیار بسیارکوچک می‌شود و می‌توانیم در حالتی که مجموع بی‌شمار جملات دنبالهٔ هندسی خواسته می‌شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین :

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow[\text{خیلی بزرگ باشد}]{\text{در حالتی که n عدد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفتهٔ او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از رابطهٔ $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots$ به‌دست آیدکه یک دنبالهٔ هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است :

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots = \frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

چون n، تا بی‌نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی‌نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف‌نظر کرد :

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده‌اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیهٔ مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می‌پنداشت اگر بی‌شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی‌شمار جمله باید بی‌نهایت شود!

@CamBeCam-Darsi

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۵) a, ... , b ⇒ $n+2$ جمله

$\begin{cases} a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}$

۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}$

۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $\quad a_1 = 1$

۴) $a_{n+1} = 2a_n$ $\quad a_1 = 1$

۲. با توجه به مفهوم دنبالهٔ هندسی و نسبت مشترک جملات دنبالهٔ هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطهٔ هندسی میان a و c می‌نامند.)

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه[1] مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ٪۶۰ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر تودهٔ سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد تودهٔ سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن تودهٔ سرطانی به کمک جراحی، باقی‌ماندهٔ سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

۵. میان دو عدد a و b، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنبالهٔ شروع از a و ختم به b یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطهٔ $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. (راهنمایی : تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی۲۷ و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جملهٔ هفتم این دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۶) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots \Rightarrow r^{5-3} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow a_7 = a_1 r^6 = a_1 r^6 \times r^2 = a_5 \times r^2 = 243 \times 9 = 2187$

قسمت الف سوال ۴

$a_{22} = 10^{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_4 = 10^{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} = 16 \times 10^{10}$

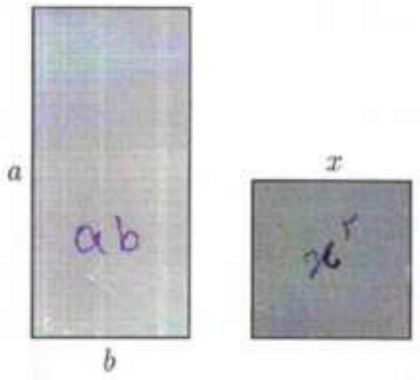
n		n	
۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 1 \not< 7\times10^{-6}$	۸	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.016384 \not< 0.000007$
۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.4 \not< 0.000007$	۹	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.006553 \not< 0.000007$
۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.16 \not< 0.000007$	۱۰	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.002621 \not< 0.000007$
۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.064 \not< 0.000007$	۱۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.001048 \not< 0.000007$
۵	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.0256 \not< 0.000007$	۱۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.000419 \not< 0.000007$
۶	$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.0104 \not< 0.000007$	۱۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{13-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.000016 \not< 0.000007$
۷	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.0041 \not< 0.000007$	۱۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{14-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0.000006 < 0.000007$

بعد از ۱۴ بار

@CamBeGam-Darsi

۸) $a_n = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{n-۱} \Rightarrow a_۵ = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{۵-۱} = ۱۵۰۰۰ \times ۰/۵۲۲۰۰۶۲۵ = ۷۸۳۰/۰۹۳۷۵$

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.
اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های
زیر تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟



الف) x و b و a
ب) b و x و a
پ) x و a و b

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ٪۱۵ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.
الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)
ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۱۰. مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.

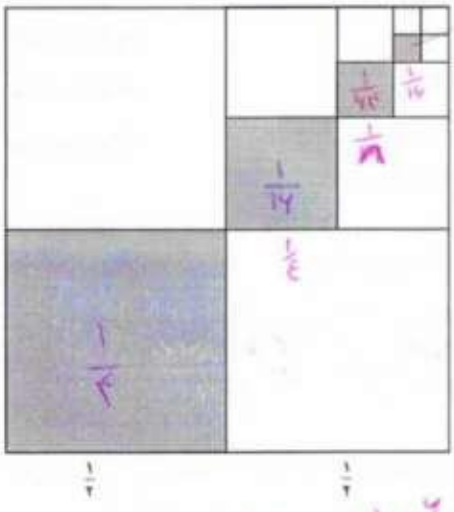
الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \ldots + ۴۰۹۶$

ب) $\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲۰} + \ldots + \frac{۱}{۶۴۰}$

۱۱. نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}$ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به‌دست آورید.

@CamBeGam-Darsi

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



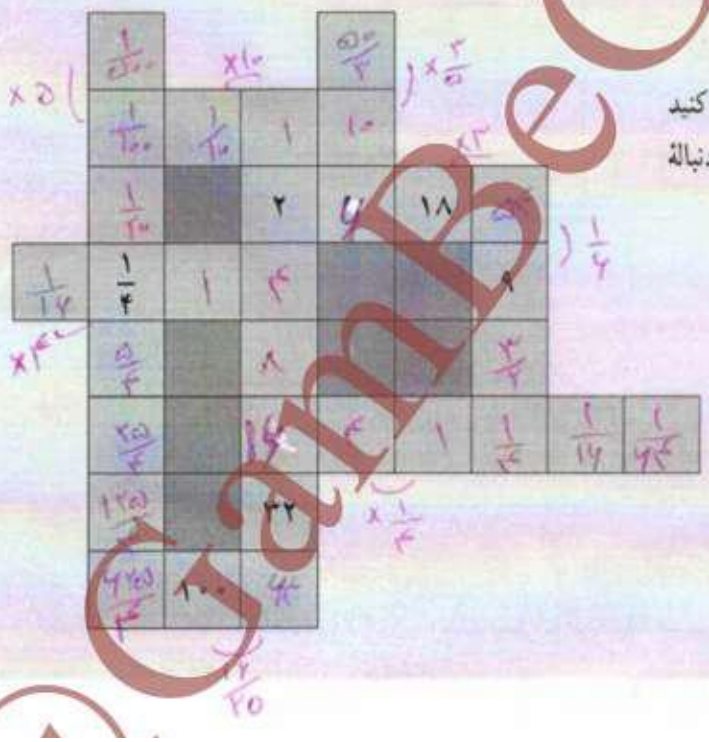
الف) حاصل دنبالهٔ مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

بازی و ریاضی

مربع های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنبالهٔ هندسی تشکیل بدهد.



CamBeGam-Darsi

درس ۲

«ریشهٔ nاُم و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوهٔ ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید.
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون دربارهٔ اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحوهٔ محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$۴^۳=$ $(۲)^{-۷}=$ $(\frac{۲}{۵})^۲=$ $۷۳^۱=$

$(-۳)^۶=$ $-۳^۶=$ $(۰/۰۱)^۵=$ $(۱\frac{۱}{۲})^۰=$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$(-۳۶)^۷+۹^۷=$ $(۲/۱)^۶\times(\frac{۲۱}{۱۰})\times(۲\frac{۱}{۱۰})^۴=(۲/۱)^{۱۱}$

$(-۴)^۳\times(-۵)^۳=$ $(\frac{۴}{۷})^۵\div(\frac{۴}{۷})^۸=$ $(۱۰^۶)^۸=$

تهیه کننده:

گروه ریاضی منطقهٔ دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBeGam.ir

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
$a^m . b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-۳۶)^۲ \times ۹^۲ =$
$(a^m)^n = a^{mn}$	

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$۵^۲ \times ۵^۸ = ۵^{۱۰} = ۵^{۱۵}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$۹^{۱۰} \div ۹^۶ = ۹^{۱۰-۶} = ۹^۴$
$a^m . b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۲^۳)^۴ = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = ۱۶$ می‌باشند و چون $۴^۲ = ۱۶$ و $(-۴)^۲ = ۱۶$، پس ۴ و ۴- با $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشهٔ سوم عدد حقیقی مانند a، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = a$ است. برای مثال، ریشهٔ سوم عدد ۲۷، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = ۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد.
با همین استدلال، ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-، پاسخ معادلهٔ $x^۵ = -۳۲$ است که برابر ۲- و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادلهٔ $x^۶ = ۶۴$ هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند.
جدول صفحهٔ بعد را مانند نمونه کامل کنید.

amBeGam-Darsi

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\sqrt[4]{۶۴}$, $-\sqrt[4]{۶۴}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{۶۴}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[5]{-۶۴}$
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[5]{-۶۴}$
ریشه‌های ششم	$\sqrt[6]{۶۴}=۲$, $-\sqrt[6]{۶۴}=-۲$	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{۶۴}=۲$	وجود ندارد
ریشه هفتم	$\sqrt[7]{۶۴}$	$\sqrt[7]{-۶۴}$
.....	$\sqrt[7]{۶۴}$	$\sqrt[7]{-۶۴}$

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می‌نامیم، هرگاه : $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشهٔ nاُم مثبت عدد a است.

در حالت کلی‌تر، دربارهٔ ریشه‌های nاُم ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می‌توان گفت :

$a \geq ۰$	n زوج باشد	a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}$
$a < ۰$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

GamBeGam-Π

$a \geq 0$ و n زوج است : $a=25, n=8 \Rightarrow$ ریشه‌های ۸اُم عدد ۲۵ $= -\sqrt[8]{25} = 1/495$. $-\sqrt[8]{25} = -1/495$

$a \geq 0$ و n فرد است : $a=64, n=3 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$ ریشه سوم عدد ۶۴

$a < 0$ و n زوج است : $a=-64, n=4 \Rightarrow$ ۶۴- ریشه چهارم ندارد $\sqrt[4]{-64}$

$a < 0$ و n فرد است : $a=-27, n=3 \Rightarrow$ ریشه سوم عدد ۲۷- $= \sqrt[3]{-27} = -3$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است: یعنی :

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

برای مثال، $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$ و $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$. همچنین $\sqrt[3]{(-3)^3} = |-3| = 3$ و $\sqrt[12]{(5)^{12}} = 5$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعهٔ شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیرعامل در جلسهٔ ارائهٔ گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانهٔ شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایهٔ شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانهٔ آن را ٪۲۰ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایهٔ شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند :

سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^{\text{زمان (بر حسب سال)}}$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایهٔ شرکت را به‌صورت زیر حساب کرد :

پس از گذشت یک سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^1 = 120$

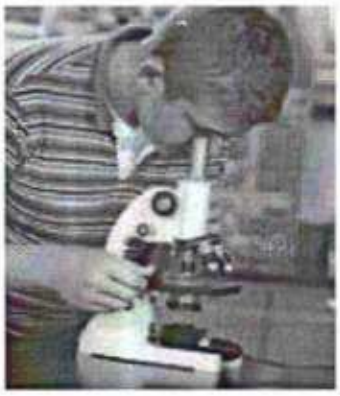
پس از گذشت ۲ سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^2 = 144$

CamBeGar

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایهٔ شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوهٔ کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوهٔ استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیهٔ باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	___	t
جرم (گرم)	$2^{1}=2$	$2^{2}=4$	$2^{3}=8$	$2^{4}=16$	$2^{5}=32$	$2^{6}=64$	$2^{7}=128$	___	2^{t}

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید : آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به‌دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد : نظر خودت دربارهٔ جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد : مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شود، اما مقدار $2^{\frac{1}{2}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد :

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می‌شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم : $a^2=2$ یعنی $a=\sqrt{2}$. (زیرا a مثبت است.) بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{2}$ را به‌صورت توانی از ۲ بنویسیم.

معادلهٔ $2^b=\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به‌دست آوریم.

$\sqrt{2}=2^b$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\Longrightarrow (\sqrt{2})^2=(2^b)^2 \Rightarrow 2=2^{2b} \Rightarrow 2^1=2^{2b} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

بنابراین، داریم: $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

پس از ۲۰ دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) $=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ = پس از ۱۰ دقیقه ($\frac{1}{6}$ ساعت)

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a<0$، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هرجا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که: $2^6=2^{2\times3}=(2^2)^3$

دربارهٔ توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$7^{\frac{5}{2}}=7^{5\times\frac{1}{2}}=(7^5)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7^5} \qquad 3^{\frac{2}{3}}=3^{2\times\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^2}$$

و به‌طور کلی، داریم:

هرگاه $a>0$، برای دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

BeGam.Dar

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$5^{\frac{3}{2}} =$ $\qquad 6^{\frac{7}{9}} =$ $\qquad 12^{-\frac{2}{11}} =$

$(2\frac{1}{3})^{-\frac{8}{3}} =$ $\qquad (0/001)^{\frac{12}{4}} =$

روابطی که در ابتدای درس دربارهٔ توان‌های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان‌های گویا و حقیقی[1] اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m . b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$3^{\frac{1}{2}} =$ $\qquad 7^{\frac{1}{8}} =$ $\qquad \sqrt[3]{25} =$

$\sqrt[10]{2/7} =$ $\qquad (0/31)^{\frac{1}{2}} =$ $\qquad \sqrt[10]{1} =$

۲. با توجه به مسئلهٔ بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایهٔ شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید.

۳سال و ۶ ماه بعد : $100 \times (1/02)^{\frac{7}{2}} = 100 \times \sqrt{(1/02)^7}$

۱ سال و ۲ ماه بعد : $100\,(1/02)^{\frac{7}{5}} = 100\sqrt[5]{(1/02)^7}$

۶ماه ($\frac{1}{2}$ سال) بعد : $100 \times (1/02)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{1/02}$

۲۰۰ روز بعد : $100 \times (1/02)^{\frac{200}{365}} = 100\sqrt[365]{(1/02)^{200}}$

۱. در این کتاب، تمامی توان‌های اعداد، گویا هستند.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBeGa Dar

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان‌دار زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۲}} = (۲^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۲$

$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}} =$

$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}} =$

$۳۲^{\frac{۱}{۵}} =$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$(۲\times۸)^{\frac{۱}{۴}} =$

$-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}} =$

$۳^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۲}{۳}} =$

$۷^{\frac{۳}{۴}}\times۷^{\frac{۵}{۴}} =$

$۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}+۱۲۵^{\frac{۱}{۴}} =$

$۸^{\frac{۲}{۷}}\times(۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} =$

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[۳]{-۸}$ را به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[۳]{-۸}$ به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نادرست است.

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$، $\sqrt[۴]{۵^۲}$، $\sqrt[۶]{۵^۳}$ با هم برابرند.

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$۳^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۱}{۲}} =$

$۵^{\frac{۱}{۲}}\times۵^{-\frac{۱}{۴}} =$

$۸^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{\frac{۱}{۲}} =$

$(۲^۶)^{\frac{۱}{۳}} =$

$(\frac{۳^۴}{۲^۶})^{\frac{۱}{۲}} =$

$\left(\frac{a^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴} =$

$۳^{۰/۲۶}\times۳^{۰/۷۴} =$

$(m^{\frac{۳}{۴}}.n^{\frac{۱}{۴}})^۲(m^۲n^۳)^{\frac{۱}{۲}} =$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBe Gam-Darsi

۳. در هریک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$(۰/۳۶)^{۴} \times (۰/۳۶)^{x} \times (۰/۳۶)^{-۶} = (۰/۳۶)^{۷}$

$۸^{x} \times ۹^{۵} = ۷۲^{۵}$

$\frac{x^{۵} \times ۱۵^{۳}}{۳^{۲} \times ۳^{۵} \times ۳} = ۵^{۳}$

$(۲^{x})^{۶} = \frac{۱}{۳^{۲}}$ اشتباه چاپی

جواب در پایین صفحه

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ (V حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم V را از فرمول زیر به‌دست آورد.

$r = (\frac{۳V}{۴\pi})^{\frac{۱}{۳}}$

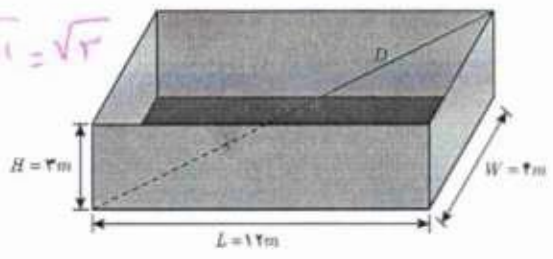
ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{۳۲\pi}{۳}$ است، به‌دست آورید.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵. اگر D قطر جعبهٔ زیر باشد، اندازهٔ آن از طریق تابع $D = (L^{۲} + W^{۲} + H^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازهٔ D را به‌دست آورید.

ب) اگر اندازهٔ $L = W = H = ۱\,m$ باشند، اندازهٔ D را به‌دست آورید.



@GamBeGam-Darsi

۳) $(۳^{x})^{۶} = \frac{۱}{۳^{۲}} \Rightarrow ۳^{۶x} = ۳^{-۲} \Rightarrow ۶x = -۲ \Rightarrow x = \frac{-۲}{۶} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$

درس ۳

تابع نمایی

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی ـ اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعهٔ بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحلهٔ اول، یکی از عوامل آلوده‌کنندهٔ محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحلهٔ دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحلهٔ بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحلهٔ ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟

برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

تعداد مراحل بازی	میزان امتیازهای کسب شده
۰	$۳^۰ = ۱$
۱	$۳^۱ = ۳$
۲	$۳^۲ = ۹$
۳	$۳^۳ = ۲۷$
۴	?
?	۲۴۳
۶	?
۷	?
۸	?
۹	?
۱۰	?

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

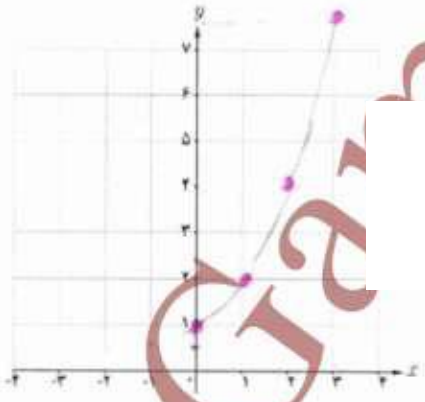
۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به‌دست آورید.

۴. با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحلهٔ nام را به‌دست آورید؟

فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به‌دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطهٔ $f(n)=2^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم!

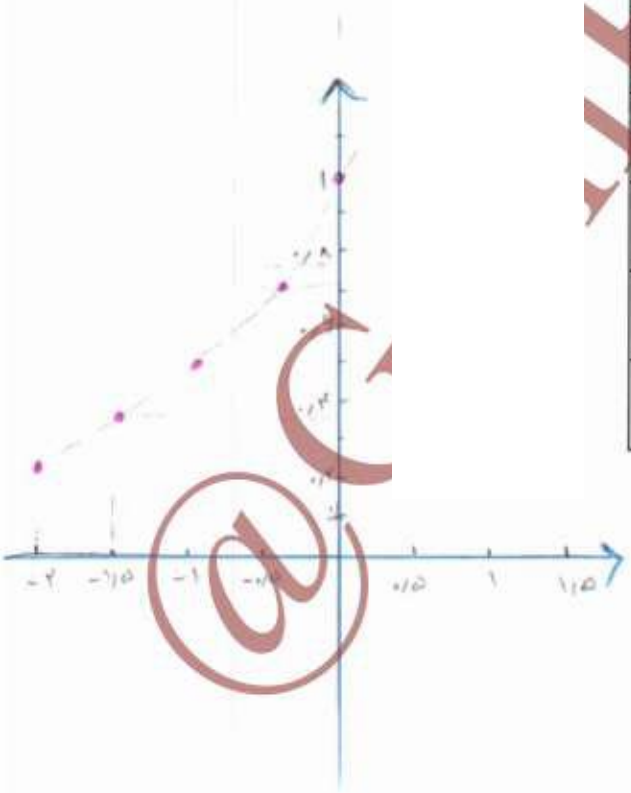
۱. مقادیر به‌دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به‌دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.



تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

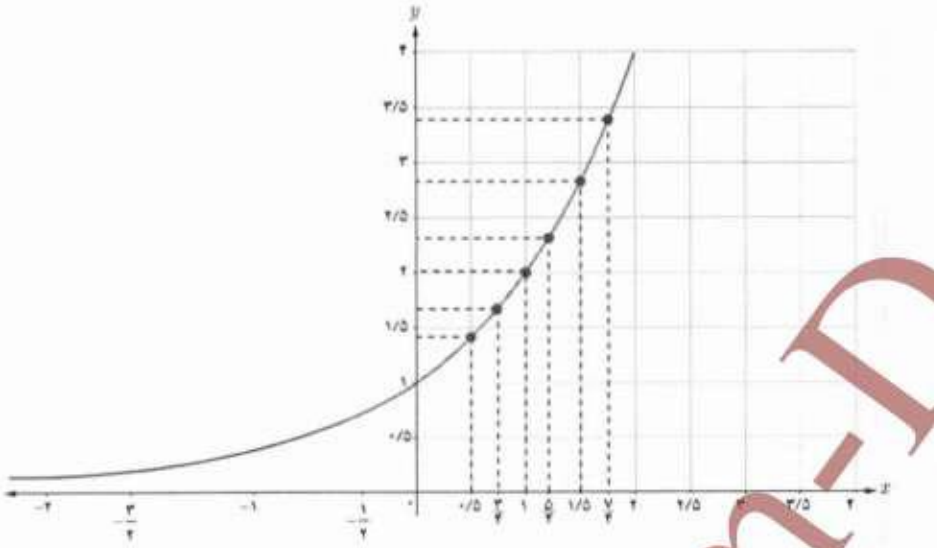
۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
	۱
$-\frac{1}{2}$	۰/۷۰۷
-۱	۰/۵۰۰
$-\frac{3}{2}$	۰/۳۵۳
-۲	۰/۲۵۰



@CubeGan-Dars

۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = ۲^x$ را برای xهای دیگر نیز به‌دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ به صورت زیر خواهد بود :



هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی[۱] نامیده می‌شود.

تذکر : حرف a معرف پایه و حرف x معرفِ نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی f را به‌صورت زیر تعریف کرد :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = a^x \qquad (a > ۰ , a \neq ۱)$$

منظور از $\mathbb{R}^+$، مجموعهٔ $\{x \mid x \in \mathbb{R} , x > ۰\}$ است.

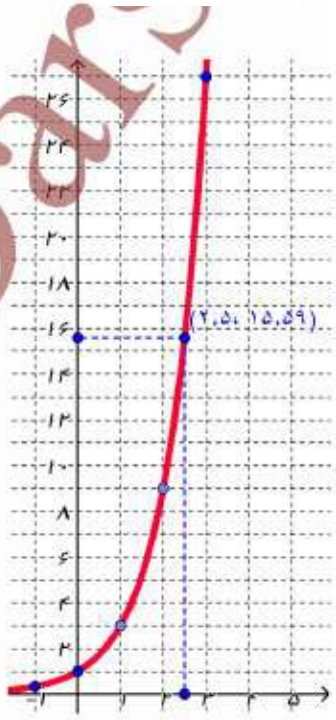
فعالیت

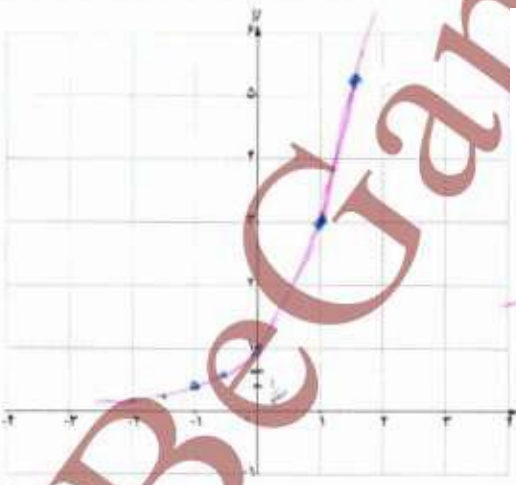
الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = ۳^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحهٔ بعد را روی محورهای مختصات به‌دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

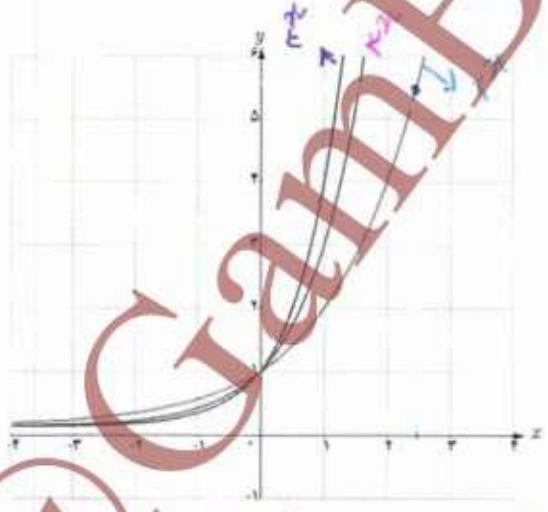
۱ـ این تابع به این علت نمایی نامیده می‌شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

x	3^x	y	محاسبهٔ y با استفاده از ماشین‌حساب تا سه رقم اعشار
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۳
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹







همان‌گونه که دیده می‌شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطهٔ یک محور yها را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

پ) نمودار توابع $y = 2^x$، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

میزان افزایش مقدار عرضهایشان با هم متفاوت است

@GamBeGam-Dars

فعالیت

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک‌بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن‌ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	؟
؟	$\frac{1}{32}$
⋮	⋮
۸	؟
؟	$\frac{1}{1024}$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟

در نمودار زیر، رابطهٔ تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است.

نقطهٔ تقاطع منحنی با محور yها چیست؟

فعالیت

۱. تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

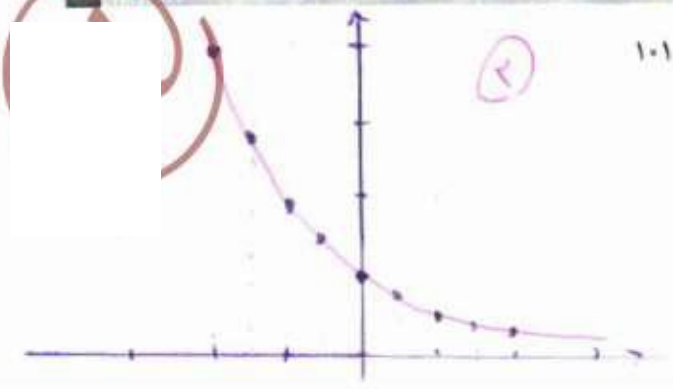
جدول ۴

x	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$	۴	۴
$-\frac{۳}{۲}$	$(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$	$\sqrt{۸}$	۲٫۸۲۸
-۱	$(\frac{۱}{۲})^{-۱}$	۲	
$-\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}}$	$\sqrt{۲}$	
۰	$(\frac{۱}{۲})^{۰}$	۱	
$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۰٫۷۰۷
۱	$(\frac{۱}{۲})^{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	۰٫۵
$\frac{۳}{۲}$	$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۸}}$	۰٫۳۵۳
۲	$(\frac{۱}{۲})^{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۰٫۲۵

۲. نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را روی صفحهٔ مختصات به‌دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار، مقدار تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ بله

۳. نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را با نمودار تابع $y=۲^x$، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ $y=۲^{-x}$ یک تابع صعودی ولی $y=(\frac{۱}{۲})^x$ یک تابع نزولی است.

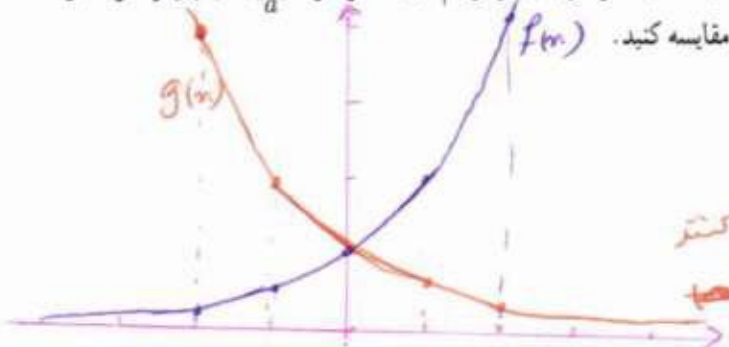
در تابع نمایی $y=a^x$، اگر $۰<a<۱$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



Program-Dars

کار در کلاس

تابع نمایی $f(x)=a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد a ($a>1$)، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x)=(\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحهٔ مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.

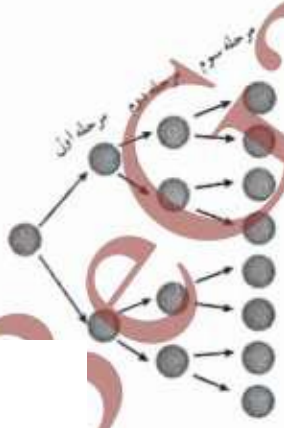


تمرین

۱. در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

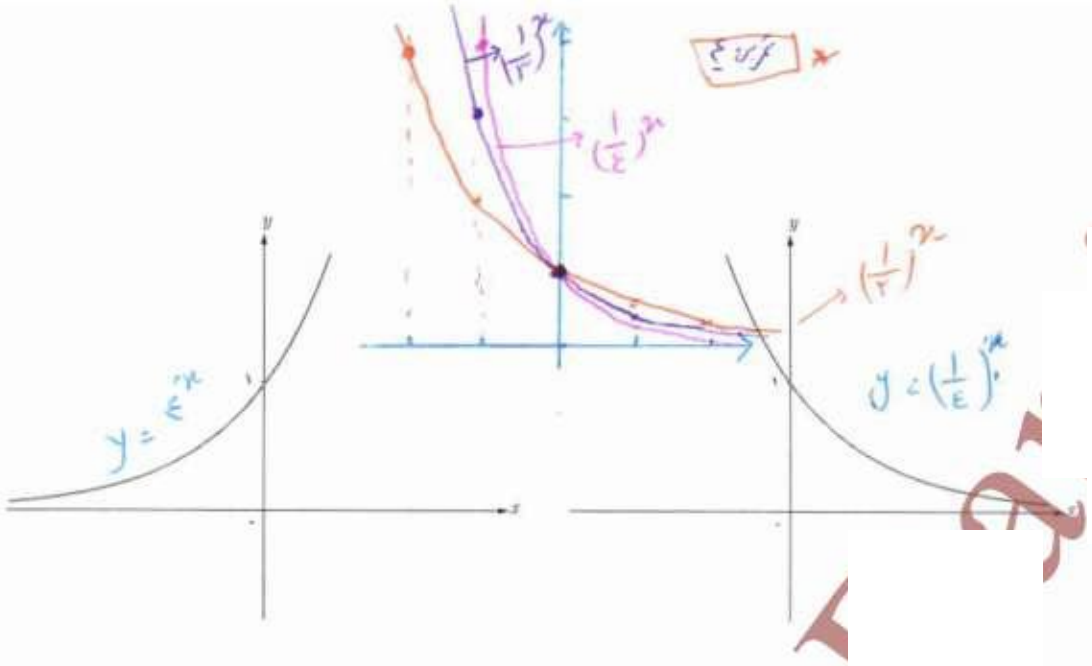
الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲. یک نمونهٔ واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y=4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحهٔ مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدارعرضهایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرمودهٔ رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکنندهٔ کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	
۱۹	
⋮	
۲۳	

@GamBeGam

برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک‌سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به‌دست آورید.

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰+\left(۱۰۰۰۰۰۰\times\frac{۱۴}{۱۰۰}\right)=۱۰۰۰۰۰۰+۱,۴۰۰,۰۰۰=۱۱,۴۰۰,۰۰۰$$

بنابراین، در جدول شمارهٔ ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید میزان مبلغ سپرده‌گذاری‌شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده‌گذاری‌شده را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه‌گذاری اولیه) به‌دست آوریم :

$$۱۱,۴۰۰,۰۰۰+۱۱۴۰۰۰۰\times\frac{۱۴}{۱۰۰}=۱۱۴۰۰۰۰+۱۵۹۹۶۰۰۰=۱۲۹۹۶۰۰۰$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰\times(۱/۱۴)^۲=۱۲,۹۹۶,۰۰۰$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به‌دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادلهٔ کلی رشد نمایی، به‌صورت $f(t)=c(۱+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات برحسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادلهٔ کلی که بیانگر مبلغ سرمایه‌گذاری پس از t سال است، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$f(t)=۱۰,۰۰۰,۰۰۰\times(۱+۰/۱۴)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کرهٔ زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کرهٔ زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کرهٔ زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کرهٔ زمین را در هر دورهٔ زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادلهٔ کلی زوال نمایی، به فرم $f(t)=c(۱-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای‌گذاری r ،c و t در معادلهٔ کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با :

$$y = ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ (۱ - ۰/۰۱)^{۱۸} = ۳۳۳۸,۶۰۰$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایهٔ این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به‌صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به‌دست آورید. در صفحه بعد

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. در صفحه بعد

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟ $g(10) > f(10)$ → سال دهم به بعد

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟ گربه ها زیاد و زیادتر و موش ها کم و کمتر میشوند.

(۱) $y = ۴۰۰۰۰۰۰ \times (۱ + ۰/۱۳)^{۱۰} = ۴۰۰۰۰۰۰ \times ۳/۷۰۷ = ۱۴۸۲۸۰۰۰۰$

(۲) $y = ۱۰۰۰۰۰۰ \times (۱ + ۰/۷)^{۱۰} = ۱۰۰۰۰۰۰ \times ۱/۷۹ = ۱۷۹۰۰۰۰$

(۳) موش $f(x) = ۲۳۵۷۶ (۱ - ۰/۰۲۵)^{t} = ۲۳۵۷۶ (۰/۹۷۵)^{t}$

گربه $g(x) = ۱۵۷۸۶ (۱ + ۰/۰۱۸)^{t} = ۱۵۷۸۶ (۱/۰۱۸)^{t}$

ب) $f(۹) > g(۹)$

$f(۱۰) < g(۱۰)$

بین بین ۹ سال و ۱۰ سال برابر میشوند.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

IranBeGam-Dig.ir

$f(1) = 22\,057 \times (0.9705)^1 = 22\,948.4$

$f(2) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.995}\right)^2 = 22\,329.2$

$f(3) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.992}\right)^3 = 21\,489.92$

$f(4) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.993}\right)^4 = 21\,218.4$

$f(5) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.988}\right)^5 = 20\,764.88$

$f(6) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.985}\right)^6 = 20\,029.4$

$f(7) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.982}\right)^7 = 19\,548.10$

$f(8) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.981}\right)^8 = 19\,094.04$

$f(9) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.979}\right)^9 = 18\,492.04$

$f(10) = 22\,057 \times \left(\frac{0.9705}{0.977}\right)^{10} = 18\,102.02$

$g(1) = 15\,784 \times (1.018)^1 = 16\,070.4$

$g(2) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.013}\right)^2 = 16\,249.08$

$g(3) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.015}\right)^3 = 16\,409.92$

$g(4) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.017}\right)^4 = 16\,569.76$

$g(5) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.019}\right)^5 = 16\,729.44$

$g(6) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.021}\right)^6 = 16\,889.12$

$g(7) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.023}\right)^7 = 17\,048.80$

$g(8) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.025}\right)^8 = 17\,208.48$

$g(9) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.027}\right)^9 = 17\,368.16$

$g(10) = 15\,784 \times \left(\frac{1.018}{1.029}\right)^{10} = 17\,527.84$

Tam-Darsi

تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net