




- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

فصل اول : مجموعه ، الگو و دنباله

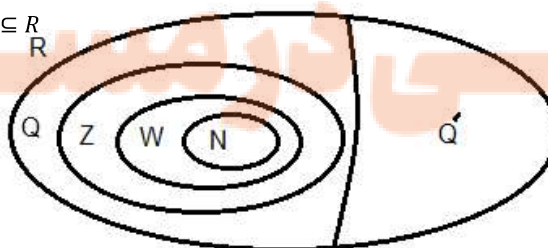
۲	درس نامه
۱۱	تست
۱۶	آزمون یک از فصل اول
	<b>فصل دوم : مثلثات</b>
۱۹	درس نامه
۲۵	تست
۲۹	آزمون دو از فصل دو
	<b>فصل سوم : توان های گویا و عبارتهای جبری</b>
۳۲	درس نامه
۴۲	تست
۴۷	آزمون سه از فصل سوم
	<b>فصل چهارم : معادله ها و نامعادله ها</b>
۵۰	درس نامه
۵۸	تست
۶۲	آزمون چهار از فصل چهار
	<b>فصل پنجم : تابع</b>
۶۵	درس نامه
۶۹	تست
۷۳	آزمون پنج از فصل پنج
	<b>فصل ششم : شمارش ، بدون شمردن</b>
۷۶	درس نامه
۷۹	تست
۸۳	آزمون شش از فصل ششم
	<b>فصل هفتم : آمار و احتمال</b>
۸۶	درس نامه
۸۸	تست
۹۴	آزمون هفت از فصل هفتم
۹۷	آزمون هشت کل کتاب
۱۱۲	آزمون نه کل کتاب
۱۱۲	آزمون ده کل کتاب

فصل اول : مجموعه و الگو

مجموعه های  $N, W, Z, Q, R$  مجموعه های اصلی هستند.








نکته : مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ را مجموعه ی اعداد حقیقی می نامند. و با  $\mathbb{R}$  نشان می دهیم.

$$\begin{cases} N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \\ Q \subseteq R \end{cases}$$



نمودار ون

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی و  $a < b$  باشد، حالت های زیر را داریم:

نمایش بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
$(a, b)$	$\{x   a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x   a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x   a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x   a < x \leq b\}$	
$(-\infty, a]$	$\{x   x \leq a\}$	
$(a, +\infty)$	$\{x   x > a\}$	
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

تست: در بازه  $(-2, 3)$  چند عدد صحیح، چند عدد حسابی و چند عدد طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۵ و ۲ و ۳ (۲) ۳ و ۳ و ۲ (۳) ۵ و ۳ و ۲ (۴) ۲ و ۳ و ۱

حل: گزینه ی ۳. اعداد صحیح  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ، در این بازه هستند پس ۵ عدد صحیح و ۳ عدد حسابی و ۲ عدد طبیعی

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  را با نماد  $A \cup B$  نشان می دهند.

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  را با نماد  $A \cap B$  نشان می دهند

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه ی  $A - B$  تفاضل دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  است.

تعریف: مجموعه ای که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد مجموعه ی متناهی می نامیم و مجموعه ای که متناهی نباشد نامتناهی است.

عدد اصلی یک مجموعه: تعداد اعضای یک مجموعه ی متناهی مانند  $A$  را عدد اصلی و با  $n(A)$  نمایش می دهند.

مثال:  $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$  یک مجموعه ی نامتناهی است.

تعریف: در هر مبحث مجموعه ای که همه ی مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشد مجموعه ی مرجع می نامند و با  $U$  نشان داده می شود.

تعریف: هرگاه  $U$  مجموعه ی مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه  $U - A$  را متمم  $A$  می نامیم و آن را با نماد  $\bar{A}$  نشان می دهیم.

نکته: اگر مجموعه ی مرجع متناهی باشد تمام مجموعه ها و متمم آن ها نیز متناهی اند. وقتی مجموعه نامتناهی باشد نمی توان نظر داد.

۱- اگر  $A \subseteq C, B \subseteq C$  آنگاه  $A \cup B \subseteq C$

۲- برای هر سه مجموعه  $A, B, C$  داریم

الف)  $A \cup \emptyset = A$  (ب)  $A \cup A = A$  (پ)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

۳- اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $A \cup B = B$

۴- برای هر سه مجموعه  $A, B, C$  داریم

الف)  $A \cap \emptyset = \emptyset$  (ب)  $A \cap A = A$  (پ)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

۵- اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $A \cap B = A$

۶- برای هر سه مجموعه  $A, B, C$  داریم:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

۷- اگر  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه از  $U$  باشند داریم:

الف)  $\emptyset = U$  (ب)  $\emptyset = \emptyset$  (پ)  $(\emptyset) = A$

ت)  $A - B = A \cap \bar{B}$  ,  $\bar{A} - \bar{B} = B - A$  (ث) اگر  $A \subseteq B$  آنگاه  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

ج)  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  (چ)  $A \cup \bar{A} = U$

ح)  $(A \cup \bar{B}) = \bar{A} \cap B$  (خ)  $(A \cap \bar{B}) = \bar{A} \cup B$

**تعریف:** دو مجموعه ی نا تهی را که اشتراک آن ها مجموعه ی تهی است . دو مجموعه ی مجزا یا جدا از هم می نامند.

الف) برای هر دو مجموعه ی متناهی :

$$\begin{cases} n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{cases}$$

ب) برای هر سه مجموعه ی متناهی :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n((A \cap B) - C) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$$

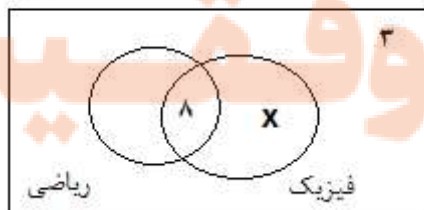
مثال: تعداد ارقام دو رقمی که بر ۷ بخش پذیرند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند چقدر است؟

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = \left[ \left( \frac{99}{7} - \frac{1}{7} \right) \right] - \left[ \left( \frac{99}{77} - \frac{1}{77} \right) \right] = (14 - 1) - (1 - 0) = 12$$

در مثال بالا برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۹ بر ۷ را بیابیم.

تست: از ۵۱ دانش آموز کلاس دهم ، ۸ نفر در دو کلاس تقویتی ریاضی و فیزیک و ۳۳ نفر در کلاس ریاضی ثبت نام کرده اند . اگر ۳ نفر در هیچ کلاسی نباشند ، تعداد نفرات کلاس فیزیک کدام عدد می تواند باشد؟

۵۱



۴۸ (۴)

۲۸ (۳)

۲۳ (۲)

۱۵ (۱)

حل: گزینه ی ۲ . نمودار ون مقابل را ببینید .

با توجه به شکل داوطلبان کلاس فیزیک برابر است با :

$$x + 8 = 15 + 8 = 23 = \text{فیزیک} \rightarrow x = 51 - 8 - 25 - 3 = 15$$

تعریف: اگر در یک دنباله، اختلاف هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی باشد آن را الگوی خطی می نامیم. جمله ی عمومی الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  می باشد.

$$1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$$

مثال: جمله ی  $n$ ام دنباله مقابل را به دست آورید.

$$a = 1, d = -\frac{1}{2} : a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(n-1) = \frac{3}{2} - \frac{n}{2}$$

مثال: جمله ی عمومی دنباله ی  $1, 3, 6, 10, \dots$  را به دست آورید.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

این دنباله مثلثی است پس جمله ی عمومی آن برابر است با:

تعریف: اگر جمله ی عمومی یک الگو درجه دوم باشد، آن را الگوی درجه دوم می نامیم. این الگو به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  می باشد.

نکته: در یک دنباله ی درجه دوم، اگر اختلاف هر دو جمله ی متوالی را بنویسیم، یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت  $2a$  ایجاد می شود.

**رابطه ی بازگشتی:** اگر در یک دنباله مشاهده کنیم که بین هر جمله و با جملات قبل از آن رابطه ای برقرار است رابطه ی حاصله را رابطه ی بازگشتی می نامیم باید در نظر داشته باشیم که در رابطه های بازگشتی باید جمله ی اول یا گاهی ۲ جمله ی اول باید مشخص باشند.

تست: مجموع ۵۰ جمله ی اول دنباله با جمله ی عمومی  $a_n = 1 + (-1)^n$  برابر است با:

۲۵ (۱)      ۵۰ (۲)      ۷۵ (۳)      ۱۰۰ (۴)

حل: چون  $(-1)^n = \begin{cases} 1, n \text{ زوج} \\ -1, n \text{ فرد} \end{cases}$  پس جمع هر دو جمله ی متوالی ۲ است که در ۵۰ جمله ۲۵ جفت جمله داریم و جواب ۵۰ خواهد بود.

تست: در الگوی زیر جمله ی عمومی تعدد مربع ها کدام است؟

$n^2 + 2$  (۲)       $n^2 + n$  (۱)

$n^2 - 2$  (۴)       $n^2 - n$  (۳)

حل: اگر تعداد مربع ها را بنویسیم داریم:  $1+2, 4+2, 9+2, 16+2, 25+2, \dots$  که با این استدلال گزینه ی ۲ درست است.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  برابر است با:

$$S_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا  $2n-1$  برابر است با:

**تعریف:** دنباله هایی که هر جمله ی آن (غیر از جمله ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله ی قبلی به دست می آید را دنباله ی حسابی می نامیم و به این مقدار ثابت قدر نسبت می گوئیم.

اگر اولین جمله ی یک دنباله ی حسابی  $a$  و قدر نسبت این دنباله  $d$  باشد. جملات این دنباله به شکل زیر خواهد بود:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n-1)d$$

جمله ی  $n$ ام این دنباله  $a + (n-1)d$  است.

نکته: در دنباله ی حسابی اگر قدر نسبت مثبت باشد جمله های دنباله به اندازه ی ثابتی افزایش می یابند و اگر قدر نسبت منفی باشد جمله های دنباله به اندازه ی ثابتی کاهش می یابند.

نکته: اگر  $a_m, a_n$  دو جمله ی دلخواه و  $m > n$  فرض شود، آن گاه قدر نسبت از رابطه ی روبه رو به دست می آید.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

تست: جمله ی چهارم یک دنباله حسابی ۸ و جمله ی هفتم این دنباله ۱۴ می باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

حل: 
$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_7 - a_4}{7 - 4} = \frac{14 - 8}{3} = 2$$

نکته: اضافه یا کم کردن یک عدد ثابت به تمامی جملات یک دنباله ی حسابی، تغییری را در قدر نسبت ایجاد نمی کند.

نکته: اگر جملات یک دنباله ی حسابی را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم، قدر نسبت در همان عدد ضرب می شود.

درج  $n$  واسطه ی حسابی بین دو عدد:

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$   $n$  واسطه ی حسابی قرار دهیم که با آن ها تشکیل دنباله ی حسابی بدهند، آن گاه قدر نسبت دنباله ی حاصل برابر خواهد بود با:  $d = \frac{b-a}{n+1}$

تست: اعداد  $\dots, \frac{7}{4}, a, b, \frac{7}{2}$  چهار جمله ی اول دنباله ی عددی اند.  $a \times b$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{77}{6}$       ۲ (۲)  $\frac{77}{7}$       ۳ (۳)  $\frac{15}{6}$       ۴ (۴)  $\frac{15}{7}$

حل: بین  $\frac{7}{4}$  و  $\frac{7}{2}$  دو واسطه ی حسابی قرار خواهد گرفت پس  $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{7}{4}}{2+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}, \dots \Rightarrow a \times b = \frac{7}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{8}$

نکته: اگر سه عدد  $a, b, c$  تشکیل دنباله ی حسابی بدهند آن گاه  $b = \frac{a+c}{2}$  یا  $2b = a + c$

تست: اگر  $a, 21, a+14$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول  $a$  باشند جمله ی چهارم کدام است؟

- ۱ (۱) ۲۴      ۲ (۲) ۳۵      ۳ (۳) ۴۳      ۴ (۴) ۴۷

حل:  $2b = a + c \Rightarrow 2(21) = a + a + 14 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow a_4 = 14 + 3 \times 7 = 35$

مجموع جملات دنباله ی حسابی با جمله ی عمومی  $a_n = a + (n-1)d$  از جمله ی اول تا  $n$  ام برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

قسمت اول زمانی قابل استفاده است که جمله ی اول و قدر نسبت را داریم و قسمت دوم زمانی قابل استفاده است که جمله ی اول و آخر را داشته باشیم.

تست: در دنباله ی حسابی  $\{a_n\}$  می دانیم  $a_7 + a_{16} = 42$ . مجموع ۲۲ جمله ی اول این دنباله کدام است؟

- الف) ۴۶۲      ب) ۴۵۶      پ) ۵۴۲      ت) ۵۲۴

می دانیم:  $d = \frac{a_n - a}{n-1}$  بنا بر این:  $a_7 + a_{16} = a_1 + 6d + a_1 + 15d = 2a_1 + 21d = 42$

از طرفی طبق نکته بالا:  $S_{22} = \frac{n}{2}(2a_1 + 21d) = 11 \times 42 = 462$

نکته: اگر فقط تعداد جملات یک تصاعد عددی فرد باشد، در این صورت:

$$S_n = n \times (\text{جمله وسط}) \quad \text{یا} \quad S_{2n-1} = 2n - 1 \times a_n$$

تست: اگر  $a_n = 3n + 1$  باشد، مجموع ۱۵ جمله ی اول کدام است؟

- (۱) ۳۷۰ (۲) ۳۷۳ (۳) ۳۷۷ (۴) ۳۷۵

حل: چون تعداد جملات ۱۵ تا است پس از رابطه ی  $S_{2n-1} = 2n - 1 \times a_n$  استفاده می کنیم:

$$S_{15} = S_{2 \times 8 - 1} = 15 \times (3 \times 8 + 1) = 375$$

نکته: در دنباله ی حسابی جمله ی عمومی از رابطه ی روبه رو نیز به دست می آید:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

نتیجه: مجموع جملات  $m$  ام تا  $n$  ام یک دنباله ی حسابی به شرط  $(m < n)$  از رابطه ی  $S_n - S_{m-1}$  به دست می آید.

نکته: در دنباله ی حسابی رابطه ی روبه رو برقرار است:

$$m + n = p + k \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_k$$

تست: در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات ششم و چهاردهم ۱۰۰ می باشد. جمله ی دهم کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۷۰ (۴) ۶۰

حل:  $14 + 6 = 10 + 10 \Rightarrow a_{14} + a_6 = a_{10} + a_{10} = 100 \Rightarrow a_{10} = 50$

نکته: اگر مجموع  $n$  جمله ی اول به صورت  $S_n = An^2 + Bn$  بیان شده باشد برای یافتن  $a_1$  کافست که  $n=1$  قرار دهیم و  $d=2A$

تست: اگر  $S_n = \frac{n(9n-5)}{12}$  باشد قدر نسبت دنباله ی حسابی کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{4}{5}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

تعریف: در دنباله ی هندسی هر جمله (غیر از جمله ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت مانند  $q$  در جمله ی قبلی به دست می آید  $q$  را قدر نسبت این دنباله می نامند. اگر اولین جمله ی یک دنباله ی هندسی  $a$  و قدر نسبت آن  $q$  باشد جملات این دنباله به شکل روبه رو خواهند بود:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{(n-1)}$$

جمله ی  $n$  ام این دنباله  $aq^{(n-1)}$  است.

نکته: قدر نسبت دنباله ی هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله ی قبلی به دست می آید.

تست: جمله ی پنجم دنباله ی هندسی ای که جمله ی سوم آن ۳۶ و جمله ی ششم آن ۹۷۲ باشد کدام است؟

- (۱) ۳۲۷ (۲) ۳۳۴ (۳) ۳۲۴ (۴) ۳۳۶

حل:  $\frac{a_6}{a_3} = \frac{aq^5}{aq^2} = \frac{972}{36} \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3, a = 4 \Rightarrow aq^4 = 324$

نکته: اگر قدر نسبت بیشتر از یک باشد دنباله هندسی افزایشی و اگر قدر نسبت بین صفر و یک باشد دنباله کاهش است.

درج  $n$  واسطه ی هندسی: اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  ،  $n$  عدد چنان درج کنیم که این  $n$  عدد با  $a$  و  $b$  تشکیل دنباله ی هندسی بدهند قدر نسبت این دنباله از رابطه ی مقابل به دست می

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \quad \text{آید:}$$

$$q = \pm \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \quad \text{تذکر: اگر } n+1 \text{ زوج باشد، آنگاه}$$

تست: بین دو عدد ۲ و ۱۶۲، ۳ عدد چنان درج کرده ایم که ۵ جمله ی حاصل تشکیل دنباله ی هندسی دهند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$\pm 3 \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad \pm 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \quad \text{حل:}$$

نکته: اگر  $am, ap, aq$  سه جمله از یک دنباله ی هندسی باشند، به شرطی که  $2p=mq$ . آن گاه  $2ap=am.aq$

واسطه ی هندسی دو عدد: اگر  $a, b, c$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند  $b$  را واسطه ی هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می نامیم و

$$b^2 = ac \quad \text{داریم:}$$

مثال:  $x$  را چنان تعیین کنید که ۳ جمله ی  $12x^4, 5x, 2x+1$  به ترتیب سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند؟

$$b^2 = ac \Rightarrow (\Delta x)^2 = (12x - 4)(2x + 1) \Rightarrow x = 2$$

نکته: دنباله ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله ی ثابت است.

نکته: اگر  $a^k, a^p, a^m$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند در این صورت توان های این اعداد یعنی  $k, p, m$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند و می توان نوشت

$$2p = m + k$$

تست: اگر  $4, 2^x, 64$  سه جمله ی متوالی دنباله ی هندسی باشند مقدار  $x$  کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

$$4, 2^x, 64 \Rightarrow 2^2, 2^x, 2^6 \quad \text{حل:}$$

چون این اعداد با پایه های مساوی تشکیل دنباله ی هندسی داده اند پس می توان آن ها را در رابطه ی  $2p = m + k$  قرار داد.

$$2x = 2 + 6 \Rightarrow x = 4$$

نکته: اگر در یک دنباله ی هندسی تعداد جملات فرد باشد و جمله ی وسط  $a_k$  باشد حاصل ضرب جملات برابر:

$$p_n = (a_k)^n$$

تست: هرگاه جمله ی پنجم یک دنباله ی هندسی ۳ باشد حاصل ضرب ۹ جمله ی اول کدام است؟

$$210 \quad (1) \quad 310 \quad (2) \quad 3^9 \quad (3) \quad 2^9 \quad (4)$$

$$p_9 = (a_5)^9 = 3^9$$

حل: چون ۵ وسط ۱ و ۹ است پس:

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

در دنباله ی هندسی با جمله ی اول  $a$  و قدر نسبت  $q$  مجموع  $n$  جمله اول برابر است با:

تست: در یک دنباله ی هندسی مجموع شش جمله ی اول  $\frac{19}{27}$  برابر مجموع سه جمله ی اول آن است. قدر نسبت کدام است؟



$$\frac{-4}{3} \text{ (الف)}$$

$$\frac{-2}{3} \text{ (ب)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (پ)}$$

$$\frac{2}{4} \text{ (ت)}$$

حل: طبق فرض  $S_3 = \frac{19}{27} S_6 = \frac{19}{27}$  حال داریم:

$$a_1 \frac{q^6-1}{q-1} = \frac{19}{27} \times a_1 \frac{q^3-1}{q-1} \rightarrow q^6 - 1 = \frac{19}{27} (q^3 - 1) \xrightarrow{q^3=x} 27x^2 - 27 = 19x - 19$$

قبول است پس  $q = -\frac{2}{3}$  و گزینه ۲ درست است.

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

نکته: اگر در یک دنباله ی هندسی مجموع  $n$  جمله ی اول را با نماد  $S_n$  نمایش دهیم داریم:

تست: در یک دنباله ی هندسی مجموع ۸ جمله ی اول  $\frac{5}{4}$  برابر مجموع چهار جمله ی اول است جمله ی ششم چند برابر جمله ی اول است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{18} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{19} \text{ (۳)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{13} \text{ (۱)}$$

$$\text{حل: } \frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a_8}{a_1} = q^{7} = \frac{a_4}{a_1} = q^3 \Rightarrow \frac{a_8}{a_1} = q^5 \Rightarrow \frac{a_8}{a_1} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \Rightarrow \frac{a_8}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

حد مجموع

در حالت کلی اگر دنباله ی هندسی  $\{a_n\}$  با شرط  $|q| < 1$  را در نظر بگیریم در مجموع  $S_n = a_1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  وقتی  $n$  بسیار بزرگ می شود به جای  $q^n$  می توانیم عدد صفر را قرار دهیم. به این ترتیب مجموع همه ی جملات دنباله به دست می آید.

قضیه: مجموع همه ی جملات دنباله ی هندسی  $\{a_n\}$  با تعریف  $q_n = a_1 a^{n-1}$  به شرط اینکه  $|q| < 1$  برابر است با:  $S = \frac{a_1}{1-q}$

مثال: عدد گویای بسط اعشاری  $0.666\dots$  را به شکل  $\frac{p}{q}$  بنویسید که  $p$  و  $q$  دو عدد طبیعی نسبت به هم اول اند.

حل: بسط را می توانیم به این صورت به شکل مجموع جملات یک دنباله ی هندسی بنویسیم.

$$a = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$$

یعنی دنباله ی هندسی با جمله ی اول  $\frac{6}{10}$  و قدر نسبت  $\frac{1}{10}$  پس مجموع همه ی جملات برابر است با:

$$a = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow p=2, q=3$$

مجموع اعداد مربع کامل متوالی یعنی  $1^2$  و  $2^2$  و  $3^2$  و ... دنباله ای حسابی یا هندسی تشکیل نمی دهند ولی لازم است فرمول مجموع آن ها بدانید که در بعضی از مسائل ظاهر می شوند. با توجه به این که  $k^2 = k + k + \dots + k$  می توانیم مجموع اعداد مربع کامل متوالی از  $1$  تا  $n^2$  را به تعدادی مجموع دنباله ی حسابی تبدیل کنیم

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

مجموع اعداد مربع کامل از  $1$  تا  $n^2$  برابر است با:

مثال حاصل مجموع زیر را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (1^2 + 2^2) + \frac{1}{12} (1^2 + 2^2 + 3^2) + \frac{1}{20} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \dots + \frac{1}{360} (1^2 + 2^2 + \dots + 60^2)$$

حل: اگر قرار دهیم  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$  آنگاه مجموع بالا همان  $S_p$  است داریم:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n+2}{6}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{2 \times 1 + 1}{6} + \frac{2 \times 2 + 1}{6} + \dots + \frac{2 \times 60 + 1}{6} = 620$$

## تست های فصل اول

۱- اگر  $A$  مجموعه ی اعداد طبیعی مضرب ۳ و  $B$  مجموعه ی اعداد صحیح با قدر مطلق کم تر از ۱۰۰ باشد ، کدام مجموعه در  $\mathbb{Z}$  با پایان است؟

(۱)  $A \cap B$       (۲)  $\bar{A} \cup B$       (۳)  $A \cap B$       (۴)  $A \cup B$

۲- تعداد اعضای کدام مجموعه کم تر است؟

(۱) اعداد اول کم تر از ۲۰      (۲) اعداد طبیعی مربع کامل کم تر از ۷۰

(۳) مقسوم علیه های صحیح ۶      (۴) کسر های بین ۰ و ۱ با مخرج ۷

۳- کدام مجموعه نامتناهی است؟

(۱) مثلث های با مساحت ۶      (۲) مربع های با مساحت ۶ و یک راس روی مبدا

(۳) خط های با شیب ۲ و گذرنده از مبدا      (۴) خط های گذرنده از مبدا

۴- کدام جمله درست است؟ ( $\mathbb{N}$  مجموعه ی مرجع است)

(۱) اگر  $A$  نامتناهی باشد  $\bar{A}$  حتما متناهی است.      (۲) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $B$  نامتناهی باشد  $A$  هم متناهی است.  
 و  $B$  نامتناهی باشد  $A \cup B$  برابر با  $\mathbb{N}$  است.      (۴) اگر  $A \subseteq B$  و مجموعه  $A$  نامتناهی باشد  $B$  هم متناهی است.

۵- کدام مجموعه دارای بزرگ ترین عضو است؟

(۱)  $\mathbb{Z}$       (۲)  $(2, +\infty)$       (۳)  $\{x \in \mathbb{Q} | x \leq 4\}$       (۴)  $\{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}$

۶- اشتراک دو مجموعه ی  $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$  و  $[-5, 4]$  چند عضوی است؟

(۱) ۴      (۲) ۷      (۳) ۳      (۴) ۵

۷- اگر  $A = (-3, 1]$  و  $B = (0, 4)$  و  $C = (-2, 2)$  ، آنگاه  $(A \cup C) - B$  دارای چند عضو صحیح است؟

(۱) ۴      (۲) ۳      (۳) ۲      (۴) ۱

۸- اگر هیچ یک از مجموعه های  $A \cap (-1, 2)$  و  $A - (-1, 2)$  تهی نباشند ، کدام باره به عنوان  $A$  مورد قبول است؟

(۱)  $(0, 3)$       (۲)  $(0, 2)$       (۳)  $(-1, 1)$       (۴)  $(2, 3)$

۹- اگر  $A$  مجموعه ی اعداد دو رقمی و  $B = \{\gamma k; k \in A\}$  باشد ، آن گاه مجموعه ی  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

(۱) ۶      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۰- اگر  $A = \{ab, \{a\}, \{a, b\}\}$  و  $B = \{a, b\}$  باشد مجموعه ی  $A - \{B\}$  چند عضو دارد؟ (کنکور ۱۹)

(۱) ۳      (۲) ۷      (۳) ۳۱      (۴) ۱۵

۱۱- متمم مجموعه ی  $(B - A) / -A$  ، نسبت به مجموعه ی جهانی کدام است؟

(۱)  $A \cup B$       (۲)  $A \cap B$       (۳)  $A$       (۴)  $B$

۱۲- اگر مجموعه ی مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیر مجموعه ی  $A$  و  $B$  در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند ،  $A-B$  حداکثر چند عضو دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۱۷ (۳) ۷ (۴)

۱۳- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی غیر تهی باشند ،  $(A \cap B) - (B - A)$  برابر کدام مجموعه است؟

- $\hat{B}$  (۱)  $\emptyset$  (۲)  $A \cap B$  (۳)  $A - B$  (۴)

۱۴- متمم مجموعه ی  $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)$  کدام است؟

- $A$  (۱)  $\hat{B}$  (۲)  $\hat{A} \cup \hat{B}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)

۱۵- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ی غیر تهی باشند ، مجموعه ی  $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$  برابر کدام است؟

- $\hat{A} - \hat{B}$  (۱)  $(A - B)'$  (۲)  $\hat{A}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)

۱۶- اگر مجموعه  $A$  دارای ۵ عضو ، مجموعه ی  $B$  دارای ۶ عضو و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای ۲ عضو باشد ، مجموعه ی  $(A \cap \hat{B}) \cup (A \cup \hat{B})'$  چند عضو دارد؟

- ۷ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۱۷- مجموعه  $A$  دارای ۱۴ عضو ، مجموعه ی  $B$  دارای ۱۷ عضو و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای ۵ عضو است . چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟ (کنکور ۸۱)

- ۱۹ (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴)

۱۸- اجتماع دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  دارای ۴ عضو است . مجموعه های  $(A - B)$  ،  $(B - A)$  به ترتیب دارای ۱۲ و ۱۸ عضو هستند . اگر از هر یک از مجموعه های  $A$  و  $B$  ، ۹ عضو برداشته شود ، از مجموعه ی اشتراک آن ها ۴ عضو کم می شود . تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ی جدید کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

۱۹- جملات دوم و سوم یک الگوی خطی ۳ و ۷ هستند . جمله ی هشتم چند برابر جمله ی پنجم است؟

- ۱/۹ (۱) ۱/۸ (۲) ۱/۷ (۳) ۱/۶ (۴)

۲۰- اگر  $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$  باشد ، آن گاه جمله ی صدم دنباله با جمله ی عمومی  $S_n$  چگونه است؟

- ۰/۰۰۲ (۱) ۰/۰۵ (۲) ۰/۵۰۵ (۳) ۰/۵ (۴)

۲۱- در آرایه ی لوزی مقابل ، تعداد صفرهای توپر در جمله ی یازدهم کدام است؟

- ۶۱ (۱) ۶۲ (۲)

- ۶۳ (۳) ۶۴ (۴)

۲۲- در دنباله ی اعداد  $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$  ، جمله ی بیست و سوم کدام است؟

- ۴۸۴ (۱) ۵۱۷ (۲) ۵۲۹ (۳) ۵۷۶ (۴)

۲۳- اعداد فرد طبیعی را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره ی آن باشد :

(( ... (۷ و ۹) : دسته ی سوم (۳ و ۵) : دسته ی دوم (۱) : دسته ی اول )) مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

- ۱۰۰۰ (۱) ۷۲۹ (۲) ۱۳۳۱ (۳) ۱۲۹۶ (۴)

۲۴- بزرگ ترین و کوچک ترین جمله ی دنباله ی  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  چه قدر اختلاف دارند؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۲ (۴)

$$\frac{1^2 - 2^2 + 3^2}{2^2 - 3^2 + 4^2}$$

۲۵- بر طبق الگوی مقابل ، حاصل سطر چهارم کدام است؟ (کنکور ۸۴)

۲۷ (۱)

۲۸ (۲)

۲۹ (۳)

۳۰ (۴)

۲۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله ی هر دسته ، مجذور کامل باشد : ... (۱), (۲,۳,۴), (۵,۶,۷,۸,۹) ، اختلاف جملات آخر و اول در دسته ی دهم کدام است؟

۱۹(۱)

۱۷(۲)

۱۸ (۳)

۲۱(۴)

۲۷- در یک دنباله ی حسابی اگر جمله ی سوم ۸ و قدر نسبت برابر ۱/۵ باشد ، جمله ی سیزدهم کدام است؟

۲۴/۵(۱)

۲۳ (۲)

۲۲/۵ (۳)

۲۱ (۴)

۲۸- در ۲۰ جمله ی اول از دنباله ی حسابی ، مجموع جملات اول و سوم و پنجم و .. برابر ۱۳۵ و مجموع جملات دوم و چهارم و ششم و ... برابر ۱۵۰ می باشد . قدر نسبت کدام است؟

۱/۵(۱)

۰/۷۵ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۲۹- در دنباله ی حسابی  $a_1 = 3 + \sqrt{2}$  و  $a_2 = 5 + \sqrt{2}$  ، مجموع چهار جمله ی چهارم چقدر از مجموع چهار جمله ی دوم بیشتر است؟

۸(۱)

۶۴(۲)

۱۶(۳)

۳۲(۴)

۳۰- در دنباله ی حسابی  $a_1 = 5$  و  $d=3$  ، جمله ی  $n$ ام چقدر از جمله ی  $n$ ام دنباله ی حسابی دو با  $a_1 = 4$  و  $d=2$  بزرگ تر است؟

۱ (۱)

$n+1$  (۲)

$n$  (۳)

$n-1$  (۴)

۳۱- در یک دنباله ی حسابی  $a_5 + a_6 = 3$  و  $a_8 + a_9 = -2$  است . حاصل  $a_{13} + a_{14}$  چقدر است؟

$-\frac{55}{6}$  (۱)

$-\frac{37}{6}$  (۲)

$-\frac{5}{6}$  (۳)

$-\frac{67}{6}$  (۴)

۳۲- در یک دنباله ی حسابی بین جملات رابطه ی  $8 = 5a_3 - 3a_4 + 2a_5$  برقرار است . حاصل  $5a_1 - 3a_2 - 2a_3$  کدام است؟

-۸ (۱)

$-\frac{8}{y}$  (۲)

$\frac{8}{y}$  (۳)

۸ (۴)

۳۳- در یک دنباله ی حسابی اگر  $a_1 = 5$  و  $a_2 = 9$  ، آنگاه  $a_3 + a_4 + a_5$  چقدر است؟ (کنکور خارج از کشور ۸۶)

۱۹ (۱)

۳۸ (۲)

۵۷ (۳)

۷۵ (۴)

۳۴- در دنباله ی حسابی  $a_1 = 1$  و  $a_2 = \frac{5}{3}$  ، حاصل  $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{22} + a_{25} + a_{27}}$  کدام است؟

$\frac{35}{71}$  (۱)

$\frac{105}{71}$  (۲)

$\frac{7}{17}$  (۳)

$\frac{21}{17}$  (۴)

۳۵- در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات اول ، دوم و سوم برابر ۱۳ و مجموع جملات هفتم ، هشتم و نهم برابر ۴۸ است . قدر نسبت دنباله چقدر است؟

۱۷۱ (۱)

۱۸۹(۲)

۱۶۹ (۳)

۱۴۴(۴)

۳۶- ده عدد ، جملات متوالی از دنباله ی حسابی اند . مجموع ۵ جمله ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله ی آخر ۱۳۰ است . کوچک ترین این اعداد کدام است؟

۳(۱)

۴(۲)

۵(۳)

۶ (۴)

۳۷- در یک دنباله ی عددی ، مجموع ۴ جمله ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله ی بعدی آن ۳۰ می باشد . جمله ی یازدهم این دنباله کدام است؟(کنکور خارج از کشور ۸۵)

۷/۵(۱)

۸ (۲)

۸/۵ (۳)

۹ (۴)

۳۸- در دنباله ی حسابی ...  $-20, -26, X, \dots$  بزرگ ترین جمله ی منفی کدام است؟

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

۳۹- در یک مثلث قائم الزاویه ، طول اضلاع دنباله ی حسابی می سازند . وتر چند برابر محیط است؟

$\frac{5}{7}$  (۱)

$\frac{5}{8}$  (۲)

$\frac{5}{12}$  (۳)

$\frac{5}{13}$  (۴)

۴۰- در یک دنباله ی هندسی جمله ی سوم ۱۰ و جمله ی هفتم ۴۰ است . جمله ی اول کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$  (۲) ۲۵ (۳) ۵ (۴)  $\frac{5}{4}$

۴۱- در یک دنباله ی هندسی  $a_1, a_2, a_3, a_4 = 8$  ، حاصل  $a_1 a_5$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۱۶

۴۲- در یک دنباله ی هندسی قدر نسبت برابر  $\frac{1}{4}$  است . مجموع جملات پنجم و هفتم چند برابر مجموع جملات هشتم و دهم است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲) ۸ (۳) ۲ (۴)  $\frac{1}{2}$

۴۳- در دنباله ی هندسی  $\dots, \frac{1}{4}, 2$  ، مجموع پنج جمله ی اول چند برابر مجموع پنج جمله ی دوم است؟

- (۱)  $2^{10}$  (۲)  $2^2$  (۳) ۲ (۴)  $2^5$

۴۴- در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است . اگر جمله ی سیزدهم ۹ باشد ، جمله ی یازدهم کدام است؟

- (۱)  $6\sqrt{5}$  (۲) ۷ (۳)  $7\sqrt{5}$  (۴)  $7\sqrt{5}$

۴۵- در یک دنباله ی هندسی ۶ جمله ای ، مجموع دو جمله ی اول ۸۱ و مجموع دو جمله ی آخر ۱۶ می باشد . جمله ی اول کدام است؟

- (۱)  $48\sqrt{6}$  (۲)  $44\sqrt{6}$  (۳)  $33\sqrt{6}$  (۴)  $21\sqrt{6}$

۴۶- در یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت  $q=2$  ، مجموع شش جمله اول ، چند برابر مجموع ۳ جمله ی اول است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۷- اعداد  $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$  سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی اند . واسطه ی حسابی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲) ۲ (۳)  $1\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۴۸- در یک دنباله ی هندسی مجموع سه جمله ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ است . تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این ۳ عدد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۹- در یک دنباله ی هندسی مثبت به صورت  $\dots, b, a, 9, 4$  ، مجموع ۴ جمله ی اول کدام است؟

- (۱)  $31\sqrt{5}$  (۲)  $32\sqrt{5}$  (۳)  $33\sqrt{5}$  (۴)  $34\sqrt{5}$

۵۰- بین دو عدد ۲۲۴ و ۴ ، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله ی هندسی دهند . مجموع این سه عدد مثبت کدام است؟

- (۱) ۱۸۲ (۲) ۱۸۴ (۳) ۱۵۶ (۴) ۱۴۸

۵۱- در دو دنباله ی حسابی به صورت های  $\dots, 2, 7, 12, \dots$  و  $\dots, 1, 11, 14, \dots$  ، چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴) ۶۱

۵۲- اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله ی اول یک دنباله ی حسابی و سه جمله ی اول دنباله ی  $S_n$  به صورت  $3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  باشد ، جمله ی چهارم دنباله ی  $S_n$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲) ۴ (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴) ۵

۵۳- به ازای یک مقدار  $x$  ، اعداد  $x, x-8, x, x+12$  ، به ترتیب سه جمله ی اول دنباله ی هندسی مثبت هستند . جمله ی بعدی این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۵۴- در یک دنباله ی حسابی ، جملات سوم ، هفتم و نهم می توانند سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند ، چندمین جمله ی این دنباله صفر است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

## آزمون آمادگی فصل اول

۱- مجموع تعداد زیر مجموعه های دو مجموعه  $n+1$  و  $n+2$  عضو  $2176$  واحد بیشتر است . مقدار  $n$  کدام است؟

۷(۴)

۶(۳)

۵(۲)

۴(۱)

۲- اگر  $(B-A) \subseteq (A-B)$  باشد، کدام حکم لزوما در مورد  $A$  و  $B$  درست است؟

$B' \subseteq A'$  (۴)

$A \subseteq B'$  (۳)

$A = \{ \}$  (۲)

$A = B$  (۱)

۳- دو مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $B = \{k, k+1, k+2, \dots, 14, 15, 16\}$  دارای  $20$  زیر مجموعه مشترک  $3$  عضو هستند .

مقدار  $k$  چقدر است؟

۵(۴)

۷(۳)

۸(۲)

۶(۱)

۴- اگر  $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}, \dots$  مجموعه هایی باشند که کم ترین عضو هر مجموعه یک واحد بیشتر از بزرگترین عضو مجموعه ی

و مجموعه  $n$  ام دارای  $n$  عضو باشد . در این صورت مجموع اعضای  $A_{21}$  کدام است؟

۵۳۳۶(۴)

۵۰۸۲(۳)

۴۶۴۱(۲)

۱۱۱۳(۱)

۵- تمام زیر مجموعه های مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  را نوشته ایم. سپس مجموع اعضای هر مجموعه را حساب می کنیم و تمام این مقادیر را

باهم جمع می کنیم. حاصل جمع به دست آمده چند است؟

۱۹۵۶(۴)

۱۷۹۲(۳)

۳۵۸۴(۲)

۳۳۰(۱)

۶- در مسابقات ریاضی ، سه مسئله  $A, B, C$  داده شده است .  $25$  نفر دانش آموز حداقل یکی از مسئله ها را حل نکرده اند . از بین کسانی که مسئله ها را حل نکرده بودند ، تعداد دانش آموزانی که

مسئله  $b$  را حل کرده بودند ، دو برابر تعداد دانش آموزانی بودند که موفق به حل مسئله  $C$  شده بودند . تعداد دانش آموزانی که فقط مسئله  $A$  را حل کرده بودند یک نفر بیش تر از بقیه دانش

آموزانی بود که مسئله  $A$  را حل کرده بودند . اگر به اندازه نیمی از کسانی که تنها یک مسئله را حل کرده اند ، موفق به حل مسئله  $A$  نشده باشند ، چند نفر مسئله  $B$  را حل کرده اند؟

۶(۴)

۵(۳)

۳(۲)

۲(۱)

۷- اگر  $A = \{x \in Z \mid \sqrt{x} \leq 4, \sqrt{x} \in N\}$  و  $B = \{2x \mid x \in Z\}$  باشد، آن گاه  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

۶(۴)

۵(۳)

۳(۲)

۴(۱)

۸- مجموعه  $A$  تعداد  $96$  زیر مجموعه بیشتر از مجموعه  $B = \{a, e, i, o, u\}$  زیر مجموعه دارد . مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟

۷(۴)

۸(۳)

۹(۲)

۱۰(۱)

۹- مجموعه ی روبه رو چند عضو دارد؟ (روبو کاپ ۸۹)

$$\{6k + 1 \mid k \in Z, 1 \leq k \leq 1000\} \cup \{7k + 5 \mid k \in Z, 1 \leq k \leq 1000\}$$

۱۰- اگر مجموعه های  $A, B, C$  و  $D$  به صورت زیر تعریف شده باشند، کدام گزینه دارای بزرگ ترین عضو است؟ (المپیاد ریاضی ایران ۸۳)

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}, \quad D = \left\{ \frac{m}{\sqrt{n}} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

R-D(۴)

C ∪ A(۳)

A ∪ B(۲)

C ∩ D(۱)

۱۱- دنباله ی جمله کدام  $u_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2n^2 + 5n + 6}$  برابر  $\frac{1}{3}$  است؟

۷(۴)

۶(۳)

۸(۲)

۵(۱)

۱۲- دنباله جملات  $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$  به چه عددی نزدیک میشوند؟

۴) به عدد خاصی نزدیک نمیشود.

۲(۳)

۶(۲)

۳(۱)

۱۳- جمله عمومی دنباله حسابی  $a_n$  به صورت  $a_n = \frac{an^2 + 2n^2 + bn + c}{n+1}$  می باشد. اگر  $a_7 = 17$  باشد مقدار  $a+b+c$  کدام است؟

۱۳(۴)

۱۲(۳)

۱۱(۲)

۱۰(۱)

۱۴- حاصل عبارت روبرو کدام است؟

$$K = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{16}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{100}}$$

۴(۴)

۱(۳)

۲(۲)

۳(۱)

۱۵- جملات دوم، چهارم و صد و دوم یک دنباله ی غیر ثابت، جملات دوم، پنجم و هشتم یک دنباله هندسی می باشد. قدر نسبت دنباله هندسی

کدام هست؟

۵(۴)

۴(۳)

۳(۲)

۲(۱)

۱۶- در دنباله  $a_n$ ،  $a_1 = 1$  و به ازای  $n \geq 1$  داریم:  $a_n = \frac{2a_{n-1}}{\sqrt{4+a_{n-1}^2}}$  اولین جمله از این دنباله که مقدار آن کوچک تر از  $\frac{1}{5}$  باشد کدام است؟

 $a_{100}$  (۴) $a_{99}$  (۳) $a_{98}$  (۲) $a_{97}$  (۱)

۱۷- جملات چهارم و  $k$ ام و سیزدهم یک دنباله حسابی صعودی به ترتیب با جملات دوم و  $n$ ام و هشتم یک دنباله صعودی دیگر برابرند.  $n+k$  چند مقدار متمایز دارد؟ ( $2 < n < 8, 4 < k < 13$ )

۴) بی شمار

۳(۳)

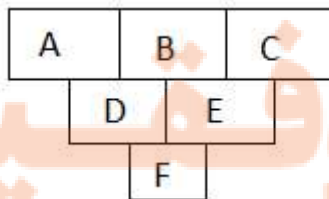
۲(۲)

۱(۱)

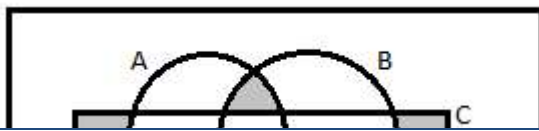
۱۸-  $A, B, C$  سه مجموعه ی دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه، تقاض دو

مجموعه ی بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً  $D = A - B$  کدام

گزینه حتما درست است؟

 $F \cap C \subseteq$  (۴) $F \subseteq A \cap C$  (۳) $B \subseteq F$  (۲) $F \subseteq C$  (۱)

۱۹- قسمت رنگی در شکل مقابل، توصیف کدام یک از مجموعه های زیر است.



الف)  $((A \cup B) - C) \cap (A \cap B)$

ب)  $((A \cap B) - C) \cup ((A - B) - C)$

پ)  $((A \cap B) - C) \cup ((A \cup B) - C)$

ت)  $(C - (A \cup B)) \cup ((A \cap B) - C)$

۲۰- سه عدد  $2^x - 1$  و  $2^{x+1} - 3$  و  $2^{2x}$  به ترتیب جملات سوم و هشتم و سیزدهم یک دنباله حسابی می باشند. مجموع این سه جمله کدام است؟

۳۲۴۹

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۲ (۱)

**فصل دوم : مثلثات**

واحد های اندازه گیری زاویه

الف) درجه که برابر  $\frac{1}{360}$  محیط دایره است.

ب) رادیان که از رابطه  $\frac{D}{R} = \frac{\pi}{180}$  به دست می آید در واقع  $2\pi = 360^\circ$

تست : در مثلث ABC اگر  $A=80^\circ$  باشد و برای دو زاویه ی دیگر رابطه ی  $C = \frac{\pi}{36} B$  برقرار باشد اندازه ی زاویه B چند است؟

۶/۶۶ (ت)

۶۶/۶ (پ)

۳/۳۴ (ب)

۳۳/۴ (۱)

حل:  $80 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 100 \rightarrow 2\hat{B} = 100 \rightarrow \hat{B} = 50$   
 $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{C}{180} = \frac{\frac{\pi}{36} B}{\pi} \rightarrow \hat{C} = \frac{1}{2} \hat{B}$

نسبت های مثلثاتی

ضلع مقابل زاویه  $\alpha$  تقسیم بر وتر  $\sin \alpha =$

ضلع مجاور زاویه  $\alpha$  تقسیم بر وتر  $\cos \alpha =$

ضلع مقابل زاویه  $\alpha$  تقسیم بر ضلع مجاور  $\tan \alpha =$

ضلع مجاور زاویه  $\alpha$  تقسیم بر ضلع مقابل  $\cot \alpha =$

تست : یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین با زاویه ی  $30^\circ$  درجه پرتاب می شود. پس از طی ۳۰۰۰ متر با همین زاویه ، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

$1500\sqrt{3}$  (۴)

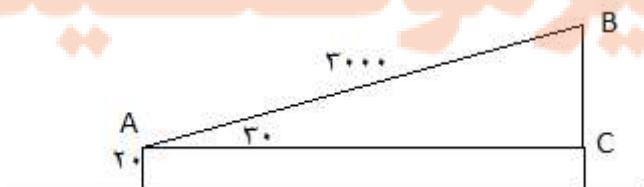
$1500\sqrt{3} + 20$  (۳)

۱۵۲۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

حل : گزینه ی ۲. مطابق شکل داریم :

$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{3000} \rightarrow BC = 1500$





۱۵۰۰ متر بالا رفته، از قبل ۲۰ متر فاصله داشت که جمعا ۱۵۲۰ می شود.

نکته: ضلع روبه روی زاویه ی ۳۰ درجه در مثلث قائم الزاویه  $\frac{1}{4}$  وتر است.

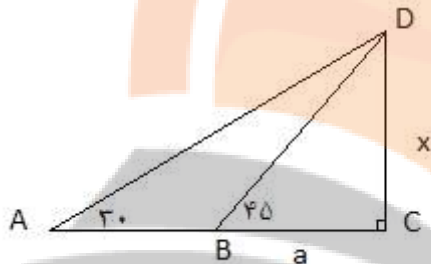
نکته: ضلع روبه روی زاویه ی ۴۵ درجه در مثلث قائم الزاویه  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  وتر است.

نکته: ضلع روبه روی زاویه ی ۶۰ درجه در مثلث قائم الزاویه  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  وتر است.

تست: افراد  $A$  و  $B$  که از هم به فاصله ی ۲۰ متر و در یک طرف برجی هستند، بالاترین نقطه ی این برج را به ترتیب با زوایای ۳۰ و ۴۵ درجه می بینند. ارتفاع برج کدام است؟

$$۱) ۲۰(\sqrt{3} + ۱) \quad ۲) ۲۰(\sqrt{3} - ۱) \quad ۳) ۱۰(\sqrt{3} - ۱) \quad ۴) ۱۰(\sqrt{3} + ۱)$$

حل: گزینه ی ۴. اندازه ی  $CD$  را  $x$  و اندازه ی  $BC$  را  $a$  فرض می کنیم.



$$\Delta_{BDC}: \tan 45^\circ = \frac{CD}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a$$

$$\Delta_{ADC}: \tan 30^\circ = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+a} \xrightarrow{x=a} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+x}$$

$$\frac{x+20}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow 1 + \frac{20}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 10(\sqrt{3} + 1)$$

نکته: در دایره مثلثاتی محور  $X$  ها محور کسینوس ها و به محور  $Y$  ها محور سینوس ها گفته می شود.

علامت نسبت های مثلثاتی

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	-	-	+	-
cot	-	-	+	-

نکته: برای حفظ کردن راحت تر جدول بالا، از قانون هستک استفاده می شود که در هر ناحیه مثبت ها را به ما نشان می دهد.

ه = حرف اول هستک: در ناحیه ی اول همه مثبت

س = حرف اول هستک: در ناحیه ی دوم سینوس مثبت

ت = حرف اول هستک: در ناحیه ی سوم تانژانت مثبت

ک = حرف اول هستک: در ناحیه ی چهارم کسینوس مثبت

(قانون بالا برای روابط بدون کتانژانت می باشد)

تست: اگر  $\sin x \cos x < 0$  و  $\sin x \cos x > 0$ ، در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

حل: گزینه ی ۲. می دانیم که  $\sin 90^\circ = 1$  و  $\cos 0^\circ = 1$  است. پس دنبال زاویه ای هستیم که  $\cos x < 0$  و  $\sin x > 0$  یعنی سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد، پس نقطه ی مفروض عرض مثبت و طول منفی دارد. پس در ناحیه دوم است.

نکته: در ربع اول هر چه زاویه به  $90^\circ$  درجه نزدیک تر شود مقدار سینوس بیشتر می شود.  $0 < \theta < a < 90 \Rightarrow \sin \theta < \sin a$

نکته: در ربع اول هر چه زاویه به  $90^\circ$  درجه نزدیک تر شود مقدار کسینوس کمتر می شود.  $0 < \theta < a < 90 \Rightarrow \cos \theta > \cos a$

تست: اگر  $30^\circ \leq x \leq 150^\circ$  و  $\sin x = \frac{m-1}{4}$  باشد، برای  $m$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: گزینه ی ۳- سینوس  $30^\circ$  و  $150^\circ$  درجه برابر  $\frac{1}{2}$  است، پس زاویه ای که این بین باشد، عرضش یا همان سینوسش از  $\frac{1}{2}$  کم تر نیست و این وسط وقتی می خواهد از  $30^\circ$  به  $150^\circ$  درجه برسد. از  $90^\circ$  درجه عبور می کند، پس سینوسش در  $90^\circ$  درجه برابر ۱ است. پس داریم:

$$1 \geq \frac{m-1}{4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 30^\circ \leq x \leq 150^\circ \Rightarrow m \text{ می تواند } 2 \text{ و } 3 \text{ باشد.}$$

نکته: اگر خط  $y = x$  را روی دایره ی مثلثاتی رسم کنیم، با توجه به این که تمام نقاط بالای

این خط، عرضشان از طولشان بیشتر است و در پایین خط، طول نقاط بیشتر از عرض آن ها است،

می توان گفت که در بالای این خط  $\sin x > \cos x$  و در پایین این خط  $\sin x < \cos x$

نکته: برای تنازات و کتانزات داریم:

$$0 < a < 45 \Rightarrow \tan a < \cot a \quad 45 < a < 90 \Rightarrow \tan a > \cot a$$

نکته: در ربع اول همیشه  $\tan a > \sin a$  و  $\cos a < \cot a$

تست: اگر  $0 < a < 45$  باشد، حاصل عبارت  $|\cot a - \cos a| + |\sin a - \cos a| - \cot a$  کدام است؟

- (۱)  $\sin a - 2 \cos a$  (۲)  $-\sin a$  (۳)  $-\cos a$  (۴)  $2 \cos a - \sin a$

حل: گزینه ی ۲- در ربع اول کتانزات از کسینوس بزرگ تر است پس  $\cot a - \cos a$  همواره مثبت است و چون  $0 < a < 45$  سینوس از کسینوس کوچک تر است یعنی  $\sin a - \cos a$  منفی است پس:  $\cot a - \cos a + \cos a - \sin a - \cot a = -\sin a$

یاد آوری فرمول های مهم مثلثاتی:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \tan x \times \cot x = 1 \quad \text{نکته: } \tan x \text{ و } \cot x \text{ معکوس یکدیگرند.}$$

نکته: اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند. داریم:  $x + y = 90^\circ$

$$\sin x = \cos y, \cos x = \sin y \quad \tan x = \cot y, \cot x = \tan y$$

تست: حاصل عبارت  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\frac{\tan 45^\circ}{2}$  (۴)  $\left(\frac{\tan 45^\circ}{2}\right)^2$

گزینه ی ۲:  $\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$  و  $\tan 2^\circ = \cot 88^\circ$  داریم:

$$A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 88^\circ \tan 89^\circ = (\cot 88^\circ \tan 88^\circ)(\cot 89^\circ \tan 89^\circ) = 1 \times 1 = 1$$

مثال: اگر  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  باشد و انتهای کمان این زاویه در ناحیه دوم باشد،  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  را بیابید.

حل:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{20}{25}$

$$\rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{20}{25}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} \rightarrow \tan \theta = -2$$

مقادیر نسبت های مثلثاتی

	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
Cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
Tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	$+\infty$	۰	$-\infty$	۰
cot	$+\infty$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	$-\infty$	۰	$+\infty$

نکته: با توجه به جدول بالا بیشترین و کمترین مقدار  $\sin$  و  $\cos$  برابر ۱ و -۱ است.

تست: حاصل  $(\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ) \left(\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}\right)$  کدام است؟

۱)  $2 \sin 60^\circ$       ۲)  $-2 \sin 60^\circ$       ۳)  $\frac{1}{2} \sin 60^\circ$       ۴)  $-\frac{1}{2} \sin 60^\circ$

حل: گزینه ی ۴. با توجه به جدول بالا داریم:

$$(\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ) \left(\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \left(\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} \sin 60^\circ$$

تعریف: دایره ی مثلثاتی در واقع دایره ای است به شعاع واحد و به مرکز محور مختصات که در آن محور های مختصات قزراهای دایره می باشند.

نکته: اگر یک زاویه بین ۰ و  $2\pi$  باشد مقادیر سینوس و کسینوس بین ۱ و -۱ تغییر می کند. تنازانت و کتانزانت بین منفی بی نهایت و مثبت بی نهایت خواهند بود.

تست: اگر  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  و  $\cos \theta = 3m - 1$  باشد. حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

۱)  $m \leq \frac{2}{3}$       ۲)  $m \geq \frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$       ۴)  $-1 \leq m \leq 1$

حل:  $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \cdot \leq \cos \theta \leq \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \cos \theta \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3m - 1 \leq 1 \rightarrow \frac{1}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$

تست : حاصل عبارت  $(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$  برابر است با :

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $1 + \tan^2 x$  (۴)  $1 + \cot^2 x$

حل: به کمک اتحاد داریم :

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x$$

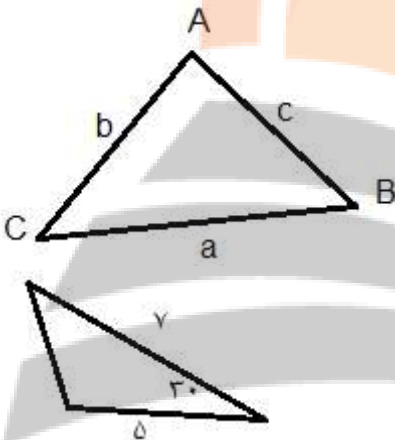
$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1 - \tan^2 x + \tan^2 x = 1$$

روش کتکوری: یه زاویه مانند زاویه  $\theta$  انتخاب کرده و حاصل را به دست می آوریم :

$$x = \theta \rightarrow (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) + \tan^2 \theta = 1$$

### کاربرد مثلثات در محاسبه ی مساحت

اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه ی بین این دو ضلع معلوم باشد ، می توان از رابطه ی زیر مساحت مثلث را محاسبه نمود :



$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} ac \sin B \\ S = \frac{1}{2} ab \sin C \\ S = \frac{1}{2} bc \sin A \end{cases}$$

تست : مساحت مثلث مقابل برابر است با :

- (۱)  $\frac{25}{4}$  (۲)  $\frac{25}{4}$  (۳)  $\frac{15}{4}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$

حل:

### رابطه ی شیب خط با تانژانت

$$\tan a = \text{شیب خط } d$$

اگر زاویه ای که خط  $d$  با محور  $x$  ها می سازد  $a$  بنامیم داریم :

تست : خطی که با محور  $x$  ها زاویه ی  $30^\circ$  درجه می سازد و محور  $y$  ها را در نقطه ای با عرض  $-\sqrt{3}$  قطع می کند ، از کدام نقطه ی زیر عبور می کند؟

- (۱)  $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$  (۲)  $(2, \sqrt{3})$  (۳)  $(\sqrt{3}, 6)$  (۴)  $(6, \sqrt{3})$

حل: گزینه ی ۴. شیب خط برابر است با:  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  و یک نقطه از خط را نیز داریم:  $(0, -\sqrt{3})$  پس :

$$Y - y = m(X - x) \Rightarrow y - (-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$$

که با جایگذاری گزینه ها مشخص می شود خط از نقطه ی  $(6, \sqrt{3})$  عبور می کند.

## تست های فصل دوم

۱- سینوس یکی از زوایای مثلث قائم الزاویه ای برابر  $\frac{7}{25}$  و طول ضلع همان زاویه ۷ سانتی متر بوده ، مساحت مثلث چند سانتی متر مربع است؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۸۴ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۱۲

۲- اگر  $\tan 34^\circ = \frac{2}{3}$  باشد . مقدار  $\frac{2 \sin 326^\circ + 3 \sin 56^\circ}{\cos 34^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $2/5$  (۲) ۲ (۳)  $-1/5$  (۴) -۱

۳- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 4 \cos(x - \frac{\pi}{4})$  در فاصله  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  از کدام ناحیه عبور نمی کند؟

- (۱) فقط ناحیه دوم (۲) فقط ناحیه سوم (۳) ناحیه دوم و چهارم (۴) ناحیه سوم و چهارم

۴- با در نظر گرفتن بازه  $[-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{18}]$  به عنوان دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = 4 \cos 3x$  ، برد آن بازه  $[a, b]$  خواهد بود . مقدار  $b-a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}-1}{-2}$

۵- اگر  $x = 283^\circ$  کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\cos x < \sin x$  (۲)  $\tan x < \sin x$  (۳)  $\tan^2 x < \sin^2 x$  (۴)  $\cos x < \tan x$

۶- اگر  $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$  باشد ، مقدار  $\tan \frac{x}{2}$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۳

۷- مقدار عبارت  $\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$  چقدر است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۲ (۴) ۳

۸- اگر  $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2$  ، مقدار  $\cos(x - \frac{\pi}{6})$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹- اگر  $x = \frac{\pi}{12}$  باشد مقدار کسر  $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$  برابر است با :

(۱)  $\sqrt{3} - 2$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $-\sqrt{3}$  (۴)  $1$

۱۰- مقدار عددی عبارت  $\sin 3x \cos 2x + 2 \sin x \cos x \cos 3x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{15}$  برابر است با:

(۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱- اگر  $\tan(a+b) = 5$  و  $\tan(a-b) = 2$  آن گاه  $\tan(2b)$  برابر است با:

(۱)  $\frac{9}{3}$  (۲)  $\frac{-2}{7}$  (۳)  $\frac{3}{11}$  (۴)  $\frac{2}{7}$

۱۲- اگر  $\frac{6}{5} = \sin^2 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^8 x$  باشد حاصل  $\sin^2 2x$  برابر است با:

(۱)  $\frac{4}{25}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{8}{25}$  (۴)  $\frac{16}{25}$

۱۳- حاصل عبارت  $\sin x \cdot \cos x (1 - \sin^2 x)$  به ازای  $x = 7/5^\circ$  برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{3}{16}$

۱۴- اگر  $\frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1} = 4$  باشد مقدار  $\tan^2 x$  چقدر است؟

(۱)  $2$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $1$

۱۵- اگر  $\sin x = \frac{2}{5}$  و  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  آن گاه  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{24}$  (۲)  $\frac{24}{7}$  (۳)  $-\frac{7}{24}$  (۴)  $-\frac{24}{7}$

۱۶- اگر  $\cos x + 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 2x$  چقدر است؟

(۱)  $-\frac{4}{5}$  (۲)  $-\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۱۷- اگر  $\alpha$  زاویه منفرجه و  $\sin \alpha = \frac{2}{5}$  باشد، مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$  کدام است؟

(۱)  $-7$  (۲)  $-\frac{1}{7}$  (۳)  $\frac{1}{7}$  (۴)  $7$

۱۸- حاصل عبارت  $\cos 15^\circ \cos 97/5^\circ \sin 7/5^\circ$  چقدر است؟

(۱)  $-\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

۱۹- اگر ماکزیمم عبارت  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos x$  برابر  $M$  باشد،  $M^2$  چقدر است؟

(۱)  $5 + \sqrt{2}$  (۲)  $3$  (۳)  $5 + 2\sqrt{2}$  (۴)  $5$

۲۰- انتهای کمان جواب های معادله  $\cos 2x = \sin x$  بر روی دایره مثلثاتی، رای های کدام مثلث است؟

(۱) قائم الزاویه (۲) متساوی الاضلاع (۳) متساوی الساقین (۴) مختلف الاضلاع

۲۱- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲۲- در معادله مثلثاتی  $1 - \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  یکی از صورت های کلی جواب کدام است؟

- (۱)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۲۳- یکی از جواب های معادله  $\sin 2x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos 2x = \frac{1}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{42}$  (۲)  $\frac{\pi}{21}$  (۳)  $\frac{\pi}{7}$  (۴)  $\frac{\pi}{14}$

۲۴- معادله  $(1 + 3 \sin x)(1 - 2 \sin x) = 0$  در فاصله  $0 \leq x \leq \pi$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) هیچ

۲۵- معادله  $(\cos x + 1)(2 \sin 4x - 1) = 0$  در فاصله  $0 < x < 2\pi$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۷

۲۶- در مثلث  $ABC$  رابطه  $\tan(B + 30^\circ) \tan(C + 30^\circ) = 1$  برقرار است. آنگاه:

- (۱)  $\hat{A} = 150^\circ$  (۲)  $\hat{A} = 120^\circ$  (۳)  $\hat{A} = 60^\circ$  (۴)  $\hat{A} = 30^\circ$

۲۷- جواب های معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$  در روی دایره ی مثلثاتی تشکیل یک ..... می دهند.

- (۱) متساوی الاضلاع (۲) قائم الزاویه (۳) متساوی الساقین (۴) مستطیل

۲۸- نمودار تابع  $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3\pi x\right)$ ، روی بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیش ترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۹- انتهای کمان های جواب های معادله  $\cos 2x \cos x + 1 = 0$  بر روی دایره مثلثاتی، رؤس یک چند ضلعی هستند. مساحت چند ضلعی کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

۳۰- در مثلثی به اضلاع ۵ و ۷ و ۹ واحد، کسینوس کوچک ترین زاویه آن کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{19}{30}$  (۳)  $\frac{5}{6}$  (۴)  $\frac{5}{7}$

۳۱- طول دو قطر متوازی الاضلاعی ۸ و ۴ واحد است. اگر زاویه بین این دو قطر ۶۰ درجه باشد، طول ضلع بزرگ متوازی الاضلاع چند برابر طول ضلع کوچک آن است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{\frac{7}{3}}$  (۳) ۲ (۴)  $\sqrt{\frac{7}{3}}$

آزمون آمادگی فصل دوم

۱- اگر  $\tan^2 x - \sin^2 x = 4k$  و  $\tan^2 x \sin^2 x = k + 6$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{3}$  (۲)  $\sqrt{8}$  (۳)  $4(3)$  (۴)  $3(4)$

۲- حاصل  $2 \cot^2 50^\circ + \operatorname{cosec}^2 50^\circ - 2 \cos^2 50^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 50^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $1 + \cot^2 50^\circ$  (۲)  $1$  (۳)  $\cot^2 50^\circ$  (۴) صفر

۳- در نیم دایره زیر، وتر  $CD$  با قطر  $AB$  موازی است. اگر  $AB=5$  و  $CD=3$  باشد، مقدار

$\tan \hat{A}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{5}{3}$

- (۳)  $3(3)$  (۴)  $2(4)$

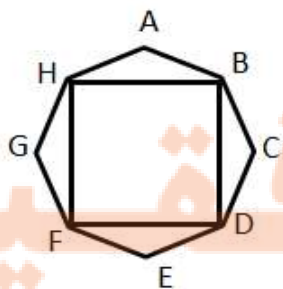
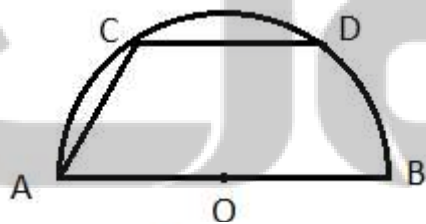
۴- شکل روبرو یک هشت ضلعی منتظم به ضلع ۲ می باشد. مساحت قسمت رنگ شده

کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{43}$  (۲)  $\sqrt{18}$

- (۳)  $\sqrt{24}$  (۴)  $\sqrt{12}$

۵- اگر  $-\frac{27}{16} = 3(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) + 2(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$  باشد مقدار  $\tan \alpha + \cot \alpha$  چقدر است؟





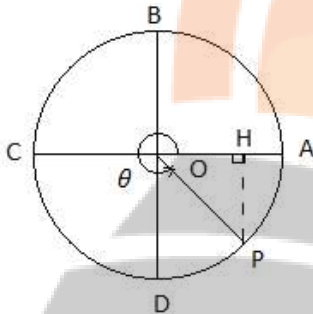
$$-\frac{2}{3} (4) \quad + \frac{2}{3} (3) \quad + \frac{4}{3} (2) \quad + \frac{2}{3} (1)$$

۶- اگر  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{4}$  و  $\cos 6x = \frac{1}{m-1}$  باشد، محدوده ی  $m$  کدام است؟

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right) (4) \quad (-1, 0) (3) \quad (-2, 0) (2) \quad (-1, 1 - \sqrt{3}) (1)$$

۷- حاصل  $L = \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4}$  که در آن  $n$  عددی طبیعی باشد، چند مقدار متمایز می تواند اختیار کند؟

$$4 (4) \quad 3 (3) \quad 2 (2) \quad 2 (1)$$



۸- در دایره مثلثاتی مقابل، طول نقطه ی P برابر  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  می باشد.  $\tan \theta$  کدام گزینه است؟

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5} (1) \quad -\sqrt{5} (2)$$

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5} (3) \quad -\frac{\sqrt{5}}{5} (4)$$

۹- در لوزی ABCD  $\cos \hat{A} = -\frac{2}{5}$  میباشد. اگر ضلع لوزی برابر ۱۰ سانتی متر باشد، مساحت آن چند سانتی متر مربع است؟

$$40 (4) \quad 50 (3) \quad 60 (2) \quad 80 (1)$$

۱۰- اگر  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} > \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

$$4 (4) \quad 3 (3) \quad 2 (2) \quad 1 (1)$$

۱۱- در دو طرف رودخانه ای به عرض ۳۵ متر، دو درخت با اختلاف ارتفاع ۱۵ متر در لب رودخانه قرار دارند. در بالای هر درخت مرغ ماهی خواری نشسته است. هر دو پرنده در یک لحظه با سرعت یکسان برای گرفتن ماهی شروع به پرواز می کنند. پرنده ای که روی یک درخت کوتاه تر نشسته است با زاویه ۳۱ درجه نسبت به سطح افق و پرنده دیگر با زاویه ۷۱ درجه نسبت به سطح افق رو به پایین و به سمت ماهی پرواز می کنند. کدام یک زود تر به ماهی می رسند؟ (با فرض آن که ماهی در جای خود ثابت باشد و نیز فاصله افقی دو پرنده ۳۵ متر باشد و به همراه ماهی در یک خط افقی باشند؟)

$$\sin 71^\circ \cong 0.93, \sin 31^\circ \cong 0.51, \cos 71^\circ \cong 0.31, \cos 31^\circ \cong 0.85$$

(۱) پرنده ای که روی درخت کوتاه نشسته است.

(۲) پرنده ای که روی درخت بلند نشسته است.

(۳) هم زمان به ماهی می رسند.

(۴) نمی توان تعیین کرد.

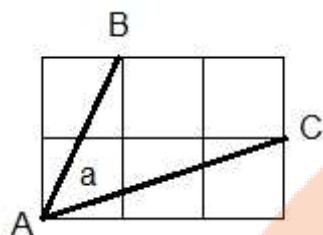
۱۲- با فرض  $\frac{2}{4} < \alpha < \pi$  و  $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$  حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

$$m < -1 (1) \quad m < 1 (2) \quad -1 < m < 1 (3) \quad -2 < m < -1 (4)$$

۱۳- اگر تساوی روبهرو یک اتحاد باشد، حاصل  $3a+2b+c$  کدام است؟

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x + 1} = a \sin x + b \cos x + c$$

$$3 (4) \quad 2 (3) \quad \frac{5}{2} (2) \quad 1 (1)$$



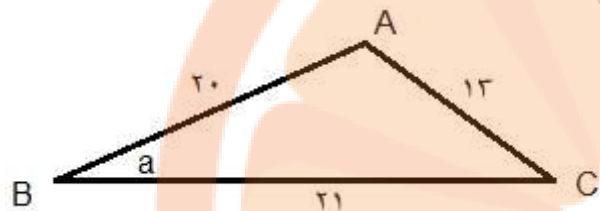
۱۴- مقدار زاویه  $a$  در شکل روبرو کدام است؟ (ضلع مربع ها یک واحد میباشد)

- ۱۵(۱)      ۳۰(۲)      ۴۵(۳)      ۶۰(۴)

۱۵- در شکل رو به رومقدار  $\tan \alpha$  چه قدر است؟

۲(۱)       $\frac{2}{5}$ (۲)

۳(۳)       $\frac{2}{4}$ (۴)



۱۶- اگر  $\sqrt{5}(\sin x + \cos x) = 3$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام می تواند باشد؟

- ۲(۱)      ۳(۲)       $\frac{2}{3}$ (۳)       $\frac{3}{4}$ (۴)

۱۷- کدام یک از نامساوی های زیر درست است؟ (کانگورو ۲۰۰۲)

۱)  $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$       ۲)  $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$

۳)  $\sin 2 < \sin 1 < \sin 3$       ۴)  $\sin 1 < \sin 3 < \sin 2$

۱۸- مقدار ماکسیمم عبارت  $A = |\sin x - 3|$  ازای به  $x \in R$  برابر است با: (روبوکاپ)

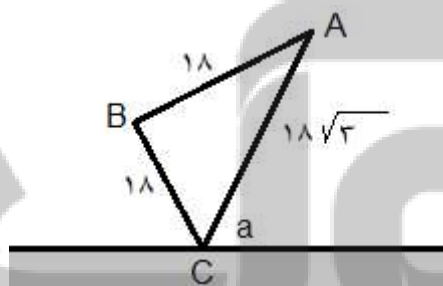
- ۲(۱)      ۳(۲)       $\pi$ (۳)      ۸(۴)

۱۹- رضا از نقطه  $A$  یک پرتو نور را به سطح آینه تابانده تا انعکاس آن نقطه  $B$  را روشن کند. با توجه

به مقادیر داده شده  $a$  چند درجه است؟

۱) ۳۰ درجه      ۲) ۴۵ درجه

۳) ۶۰ درجه      ۴) ۷۵ درجه



۲۰- حاصل عبارت  $S = \frac{1}{1+\tan 1^\circ} + \frac{1}{1+\tan 2^\circ} + \frac{1}{1+\tan 3^\circ} + \dots + \frac{1}{1+\tan 89^\circ}$  کدام است؟

- ۴۴(۱)      ۴۴/۵(۲)      ۴۵(۳)      ۴۵/۵(۴)

فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

ریشه ی  $n$  ام

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $b^n = a$  باشد، می گوئیم  $b$  ریشه ی  $n$  ام  $a$  است و می نویسیم:  $\sqrt[n]{a} = b$

نکته: هر گاه فرجه رادیکال زوج باشد، رادیکال به شرطی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد.

تست: اگر  $2 = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  باشد، حدود تغییرات  $x$  کدام است؟

(۱)  $x \leq -1$       (۲)  $-1 \leq x \leq 1$       (۳)  $x \geq -1$       (۴)  $x \geq 1$

حل: گزینه ی ۴.  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| - |x-1|$

حالا باید علامت قدر مطلق ها را طوری انتخاب کنیم که حاصل عبارت برابر ۲ باشد. پس هر دو عبارت باید مثبت باشند

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

### مقدار تقریبی و دقیق $\sqrt[n]{a}$

هر عدد به شکل  $\sqrt[n]{a}$  متناظر با یک نقطه روی محور اعداد است.

نکته: عدد  $\sqrt[n]{a}$  وقتی  $b^n = a$  باشد وقتی گویا است که  $b$  گویا باشد.

نکته: عدد  $\sqrt[n]{a}$  وقتی  $b^n \neq a$  باشد گنگ است.

برای پیدا کردن مقدار تقریبی اعدادی که به شکل  $\sqrt[n]{a}$  هستند:

(۱) تعیین می کنیم  $\sqrt[n]{a}$  بین کدام دو عدد صحیح یا گویا قرار دارد.

(۲) با توجه به تقریبی که می خواهیم  $\sqrt[n]{a}$  را با آن محاسبه می کنیم.

تست: مجموع مقدار تقریبی  $\sqrt{10}$  با تقریب ۱ رقم و ۲ رقم اعشار، برابر کدام است؟

(۱)  $6/3$       (۲)  $6/32$       (۳)  $6/34$       (۴)  $6/36$

گزینه ی ۴ - چون  $4 < \sqrt{10} < 3$  و چون ۱۰ به ۹ نزدیک تر است پس اعداد نزدیک به ۹ را امتحان می کنیم:

$$9/61 = (3/1)^2 = 10/24 \text{ و } (3/2)^2 = 10/24 \text{ با } 10 \text{ نزدیک تر است پس مقدار تقریبی عدد } \sqrt{10} \text{ با یک رقم اعشار برابر } 3/2 \text{ است و همین کار را برای دو رقم انجام می دهیم:}$$

$$9/9856 = (3/16)^2 = 10/489 \text{ و } (3/17)^2 = 10/489 \text{ با تقریب دو رقم اعشار برابر } 3/16$$

است که حاصل جمع آن ها گزینه ی ۴ خواهد بود.

### توان های گویا

تمام قوانینی که برای توان های صحیح برقرار است برای توان های گویا نیز برقرار می باشند.

تست: حاصل  $\frac{(\frac{1}{2})^{-2} \sqrt{35}}{\sqrt{(\frac{1}{4})^{-5}} \sqrt{2}}$  برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$       (۲)  $\frac{1}{25}$       (۳) ۵      (۴) ۲۵

$$\frac{(\frac{1}{2})^{-2} \sqrt{35}}{\sqrt{(\frac{1}{4})^{-5}} \sqrt{2}} = \frac{(\frac{1}{5})^{-2} \times 5^{\frac{1}{2}}}{((\frac{1}{5})^{-2})^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{11}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5}$$

پاسخ: گزینه ی ۱ -

اعمال روی رادیکال

عملیات روی فرجه رادیکال ها : برای ضرب و تقسیم می توانیم رادیکال ها را به عبارت هایی با توان کسری تبدیل کنیم یا از روابط زیر استفاده کنیم

$$(1) \text{ رادیکال در رادیکال: } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \text{ و } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n \cdot n}} = a^{\frac{m}{n^2}}$$

$$(2) \text{ ساده شدن فرجه و توان: } \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(3) \text{ رادیکال با توان: } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(4) \text{ خارج کردن از زیر رادیکال: } \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$$

$$(5) \text{ بردن عدد به زیر رادیکال: } a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

نکات مهم:

الف) عبارت زیر رادیکال باید تعریف شده باشد

ب) هنگام ساده کردن و استفاده از رابطه های بالا علامت عبارت باید در تمام مراحل ثابت بماند.

تست: اگر  $a \in \mathbb{R}$  ، کدام گزینه درست است ؟

$$(1) \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (2) \sqrt[4]{(-2)^4} = -2 \quad (3) \sqrt[4]{a^4} = \sqrt{a} \quad (4) \sqrt[4]{a^4} = \sqrt{a^4}$$

پاسخ: گزینه ی ۴

ضرب و تقسیم رادیکال ها : دو یا چند رادیکال به شرطی می توانند در هم ضرب یا تقسیم شوند که دارای فرجه ی مشترک باشند . ( باز هم باید توجه داشت که باید عبارت زیر رادیکال در هر صورت تعریف شده باشد )

نکته: اگر فرجه ی رادیکال ها یکسان نباشد ، فرجه ی هر رادیکال را به ک م م دو فرجه تبدیل می کنیم . به این کار می گوییم فرجه مشترک گرفتن .

$$\text{مثال: } \sqrt[6]{2}\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^1 \cdot 3^1} = \sqrt[6]{2 \cdot 3} = \sqrt[6]{6}$$

جمع و تفریق رادیکال ها : دو یا چند رادیکال را به شرطی می توانیم با هم جمع یا تفریق کنیم که متشابه باشند .

$$\text{تست: حاصل } \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{\frac{1}{10}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{\frac{1}{10}}} - \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{\frac{1}{10}\sqrt[4]{10}} \text{ برابر کدام است؟}$$

$$(1) \sqrt[4]{10} \quad (2) -\sqrt[4]{10} \quad (3) -\sqrt[4]{\frac{1}{10}} \quad (4) \sqrt[4]{\frac{1}{10}}$$

پاسخ: گزینه ی ۲ -

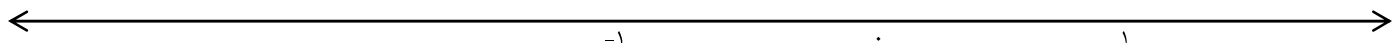
$$\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{\frac{1}{10}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{16}} \quad \frac{1}{10}\sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{10}\right)^4} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{10}}\sqrt[4]{\frac{1}{10}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{10}\right)^3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{\frac{1}{10}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{\frac{1}{10}}} - \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{\frac{1}{10}\sqrt[4]{10}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{10}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3}} - \frac{2\sqrt[4]{\frac{1}{16}}}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{10}\right)^4}} = \frac{-\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{10}\right)^4}} = -\sqrt[4]{10}$$

رادیکال و نامساوی ها

الف) ریشه ی اعداد حقیقی: اعداد حقیقی به چهار قسمت تقسیم می شوند.



$$a < -1 \quad -1 < a < 0 \quad 0 < a < 1 \quad a > 1$$

$$\sqrt[n]{a} < -1, \sqrt[n]{a} > a \quad -1 < \sqrt[n]{a} < 0, \sqrt[n]{a} < a \quad 0 < \sqrt[n]{a} < 1, \sqrt[n]{a} > a \quad \sqrt[n]{a} > 1, \sqrt[n]{a} < a$$

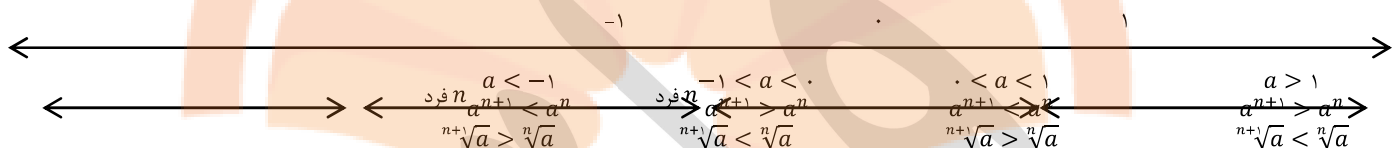
نکته: در مورد اعداد منفی رابطه‌ی نامساوی فقط در مورد ریشه‌های فرد برقرار است.

تست: اگر  $\sqrt[n]{a} < a$  باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$a^4 > a^3 \quad (4) \quad a^4 > a \quad (3) \quad a < -1 \quad (2) \quad a > 1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ - وقتی  $\sqrt[n]{a} < a$  است،  $a$  باید یا در نامساوی  $a > 1$  یا در نامساوی  $-1 < a < 0$  باشد. پس ۱ و ۲ نادرست است. با دادن یک مقدار منفی به گزینه‌های ۳ و ۴ معلوم می‌شود که گزینه‌ی ۴ نیز نادرست است.

ب) مقایسه‌ی رادیکال‌ها: برای مقایسه آن‌ها را به رادیکال‌هایی با فرجه‌ی مشترک تبدیل می‌کنیم. ولی اگر اعداد زیر رادیکال یکسان باشند می‌توانیم از ویژگی‌های زیر استفاده کنیم:



تست: اگر  $-1 < a < 0$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\sqrt{a} > a^4 \quad (4) \quad \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} \quad (3) \quad a^2 > a^3 \quad (2) \quad a^2 > a^4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴

### عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

تعریف: اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار ی برای متغیرهایشان مقدارهای یکسانی داشته باشند عبارت حاصل از تساوای بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{و} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

تجزیه به روش فاکتورگیری:

به زبان ساده بیرون کشیدن ضرایب یا متغیرهای مشترک از جملات یک چند جمله‌ای و قرار دادن آن به صورت ضرب در باقیمانده‌ی چند جمله‌ای را فاکتورگیری می‌گویند.

مثال: عبارت  $5ax^4 + 10a^3x^2$  را تجزیه کنید.

$$\text{حل:} \quad -5ax^4 + 10a^3x^2 = -5ax^2(x^2 - 2a^2)$$

تجزیه به روش دسته بندی: گاهی نمی‌توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به عبارت‌های کوچک تقسیم بندی کنیم و از هر کدام از آن‌ها عبارتی را فاکتور بگیریم در نهایت می‌توان یک عبارت را از کل فاکتور بگیریم:

$$\text{مثال:} \quad \underline{x^2 + 2x^2} + x + 2 = x^2(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 + 1)$$

نکته: گاهی اوقات قبل از اتحاد لازم است یکبار از فاکتورگیری استفاده کنیم.

مثال: تجزیه زیر را نگاه کنید.

$$8x^2 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

نکته: گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله‌هایی را تفکیک کنیم.

$$\text{مثال:} \quad 3x^2 + 7x + 2 = 3x^2 + \boxed{6x + x} + 2 = (3x^2 + 6x)(x + 2)$$

$$= 3x(x+2) + (x+2) = (x+2)(3x+1)$$

نکته: گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله هایی را حذف یا اضافه کنیم.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^2y^2 + 9y^2 &= \boxed{x^2 + 6x^2y^2 + 9y^2} - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 3y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

تجزیه به روش اتحاد مربع دو جمله ای:

برای تجزیه می توانیم از برخی از اتحاد ها استفاده کنیم. مثلاً اگر یک عبارت سه جمله ای داشته باشیم که دو جمله ی آن مربع کامل بوده و جمله ی دیگرش ۲ برابر حاصل ضرب جذر دو جمله ی مربع کامل باشد. آن سه جمله از راه اتحاد مربع دو جمله ای به صورت زیر تجزیه می شود:

$$\left( \text{جذر جمله مربع دوم (علامت جمله ی دیگر)} \times \text{جذر جمله مربع اول} \right)^2 = \text{سه جمله ای}$$

$$x^2 - 2x^2yz + y^2x^2$$

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

حل: عبارت سه جمله ای است و جملات اول و سوم مربع کامل و جمله ی دوم ۲ برابر حاصل ضرب جذر ها است پس می توان از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده کرد.

$$x^2 - 2x^2yz + y^2x^2 \rightarrow \begin{cases} x^2 = (x^2)^2, y^2z^2 = (yz)^2, 2x^2yz = 2(x^2)(yz) \\ x^2 - 2x^2yz + y^2x^2 = (x^2 - yz)^2 \end{cases}$$

استفاده از اتحاد اول در مسئله ها

مثال: اگر  $yz = y^2 + z^2$  باشد حاصل  $\frac{y^2+z^2}{3y^2-z^2}$  چه قدر است؟

$$y^2 + z^2 - 2yz = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد}} (y-z)^2 = 0 \Rightarrow y = z$$

حل:

$$\frac{y^2+z^2}{3y^2-z^2} = \frac{y^2+y^2}{3y^2-y^2} = \frac{2y^2}{2y^2} = 1$$

مثال: اگر  $x + y = 7$  و  $xy = 5$  باشد حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و جایگذاری به جواب می رسیم:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \rightarrow (7)^2 = x^2 + y^2 + 2 \times 5 \xrightarrow{\text{حل معادله}} x^2 + y^2 = 39$$

نکته: در برخی از عبارت های سه جمله وقتی بخواهیم آن ها را تجزیه کنیم به یک مشکل برخورد می کنیم و آن این است که جمله ای که باید ۲ برابر جمله ی اول در دوم باشد کم تر یا بیشتر از مقدار واقعی است. در این موارد با اضافه یا کم کردن مقدار عبارت لازم می توان اتحاد را تکمیل کرد.

مثال: با افزودن کدام عدد به عبارت  $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$  مربع یک دو جمله ای حاصل می شود؟

حل: جمله ی  $-6x$  جمله ای است که مساوی دو برابر جمله اول در دوم است اگر جمله اول  $2x$  باشد با تقسیم  $6x$  ابتدا بر ۲ سپس بر جمله اول خواهیم دید که جمله ی دوم  $-\frac{3}{4}$  می باشد

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} = 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + \left[ \frac{9}{4} \right] = 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} = \left( 2x - \frac{3}{4} \right)^2$$

نکته: روش پرکاربرد در تجزیه ی  $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax+m)(ax+n)$$

$$\begin{cases} m+n=b \\ m \times n=ac \end{cases}$$

مثال: عبارت  $2x^2 + 7x - 9$  را تجزیه کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 = \frac{1}{2}(2x+m)(2x+n) \\ m+n=7 \\ mn=-18 \end{cases} \rightarrow m=9, n=-2 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 7x - 9 = \frac{1}{2}(2x+9)(2x-2) = (2x+9)(x-1)$$

نکته: اگر جمع ضرایب در یک چند جمله ای صفر باشد عبارت عامل  $x-1$  دارد و اگر مجموع جملات درجه فرد با مجموع جملات درجه زوج برابر باشد. عامل  $x+1$  خواهد داشت.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج:}$$

مثال: حاصل  $9998^2 - 4$  را به دست آورید.

$$9998^2 - 4 = (9998-2)(9998+2) = 9996 \times 10000 = 9/996 \times 10^7 \quad \text{حل:}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد جمله ی مشترک:}$$

مثال:  $4x^2 - 10x - 6$  را تجزیه کنید.

حل: جمله ی اول به ما نشان می دهد که مربع عدد  $(2x)^2 = 4x^2$  است پس چند جمله ای را برحسب  $2x$  مرتب می کنیم. داریم:  $4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$

سپس با استفاده از  $t = 2x$  چند جمله ای را تبدیل و تجزیه می کنیم.

$$(2x)^2 - 5(2x) - 6 = t^2 - 5t - 6 = (t+1)(t-6) \Rightarrow (2x+1)(2x-6)$$

تست: اگر  $x^2 + 5x - 5 = 0$  باشد، حاصل  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$  برابر کدام است؟

$$111 \quad (4) \quad 99 \quad (3) \quad 55 \quad (2) \quad 50 \quad (1)$$

پاسخ گزینه ی ۲ -  $x^2 + 5x = 5 \rightarrow x^2 + 5x - 5 = 0$  با جایجایی عبارت اصلی داریم:

$$(x+1)(x+4)(x+3)(x+2) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = (5+4)(5+6) = 99$$

اتحاد مکعبات دو جمله ای ( اتحاد چاق و لاغر)

$$\begin{cases} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \end{cases}$$

ویژگی و تشخیص این اتحاد:

یک عبارت دو جمله ای در عبارتی سه جمله ای ضرب شده است:

(الف) دو جمله از جملات سه جمله ای مربع جملات دو جمله ای هستند

(ب) جمله ی دیگر قرینه حاصل ضرب جملات دو جمله ای است.

تجزیه به کمک اتحاد مکعبات

اگر عبارتی دو جمله ای داشته باشیم که هر دو جمله ی آن مکعب باشند: آنگاه این عبارت را می توان به روش زیر تجزیه کرد.

$$= \left( \sqrt[3]{\text{جمله اول}} \pm \sqrt[3]{\text{جمله دوم}} \right) \left( \left( \sqrt[3]{\text{جمله اول}} \right)^2 \mp \sqrt[3]{\text{جمله اول}} \times \sqrt[3]{\text{جمله دوم}} + \left( \sqrt[3]{\text{جمله دوم}} \right)^2 \right)$$

مثال: عبارت  $a^6 - 64b^6$  را تجزیه کنید.

$$a^6 - 64b^6 = (a^2 - 4b^2)(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4) \quad \text{حل:}$$

قسمت اول به کمک اتحاد مزدوج با هم تجزیه می شود پس:

$$(a^r - r b^r)(a^r + r a^r b^r + r^2 b^r) = (a - r b)(a + r b)(a^r + r a^r b^r + r^2 b^r)$$

تست: اگر  $a^r + b^r = 1$  باشد، حاصل  $a^r + b^r$  برابر کدام است؟

$$1 + r a^r b^r \quad 1 - r a^r b^r \quad r - a^r b^r \quad r a^r b^r \quad (1)$$

$$a^r + b^r = (a^r + b^r)(a^r - a^r b^r + b^r) \quad \text{پاسخ: گزینه ی ۳- ابتدا } a^r + b^r \text{ را تجزیه می کنیم:}$$

سپس  $a^r + b^r$  را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای به  $a^r + b^r$  تبدیل می کنیم:

$$a^r + b^r = (a^r + b^r)(a^r - a^r b^r + b^r) = 1((a^r + b^r)^r - r a^r b^r - a^r b^r) = 1 - r a^r b^r$$

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$\begin{cases} (a+b)^r = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r \\ (a-b)^r = a^r - r a^r b + r a b^r - b^r \end{cases}$$

تست: معادله ی  $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$  چند جواب دارد؟

$$3 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \text{هیچ} \quad (1)$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 8 - 1 = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x = 2 \quad \text{پاسخ: گزینه ی ۲-}$$

ترکیب و تعمیم اتحادها:

$$x^r + y^r = (x+y)^r - rxy$$

$$x^r + y^r = (x-y)^r + rxy$$

$$(x+y)^r - (x-y)^r = rxy$$

$$(x-y)^r - (x+y)^r = -rxy$$

$$x^r + y^r = (x+y)^r - rxy(x+y)$$

$$x^r - y^r = (x-y)^r + rxy(x-y)$$

$$x^r + y^r + z^r - rxyz = (x+y+z)(x^r + y^r + z^r - xy - xz - yz)$$

$$(x-y)^r + (x+y)^r = r x^r + r y^r$$

اتحاد مهم:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

اتحاد های زیر از اتحاد بالا نتیجه شده اند.

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

$$1 - y^n = (1+y)(1-y+y^2 - \dots + y^{n-1})$$

گویا کردن مخرج

الف) اگر مخرج شامل یک یا چند رادیکال به شکل عامل ضربی بود صورت و مخرج را در رادیکالی ضرب می کنیم که مخرج گویا شود.



برای گویا شدن  $\sqrt[n]{a^m}$  باید آن را در  $\sqrt[n]{a^{n-m}}$  ضرب کنیم

(ب) اگر مخرج شامل رادیکال هایی با فرجه ی زوج و به شکل جمع و تفریق باشد عبارت را در مزدوجش ضرب یا تقسیم می کنیم .

نکته : در صورتی که مخرج شامل سه عامل باشد ممکن است لازم باشد عمل ضرب کردن را چند بار انجام دهیم .

(پ) اگر با فرجه ی ۳ یا بالاتر از ۳ سر و کار داریم ، صورت و مخرج را در عاملی که باعث گویا شدن عاقل ها می شود ضرب و تقسیم می کنیم : در مورد توان ۳ داریم :

$$\begin{cases} (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \\ (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n \\ (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n \end{cases}$$

در مورد توان های بالا تر داریم :

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}-1} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}-1} \times \frac{\sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3^1} + 1}{\sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3^1} + 1} = \frac{\sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3^1} + 1}{2-1} = \sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3^1} + 1$$

(ت) اگر مخرج شامل رادیکال هایی با فرجه های مختلف باشد ، باید فرجه ی مشترک بگیریم سپس مخرج را گویا کنیم .

### رادیکال های مرکب

اگر عبارت زیر رادیکال خودش شامل رادیکال باشد به آن رادیکال مرکب می گوئیم :

(الف) اگر رادیکال مرکب به صورت  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  دو راه داریم :

۱- سعی می کنیم عبارت زیر رادیکال را به اتحاد مربع دو جمله ای تبدیل کنیم سپس رادیکال را ساده کنیم :

تست : حاصل :  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$  برابر کدام است؟

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی ۲ . سعی می کنیم عبارت  $7 - 4\sqrt{3}$  را به اتحاد مربع تبدیل کنیم :

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

۲- در مورد  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  می توانیم از روش زیر استفاده کنیم :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad \text{اگر } A^2 - B = C^2 \text{ رادیکال را به شکل زیر ساده می کنیم :}$$

تست : حاصل  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$  برابر کدام است ؟

$$\begin{matrix} 6 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی ۱ : اول رادیکال ها را به شکل  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  تبدیل می کنیم :

$$A^2 - B = 11^2 - 72 = 49 \rightarrow C = 7$$

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2} \quad \sqrt{11 - \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} - \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$$

(ب) اگر رادیکال مرکب ، شامل فرجه ی ۳ باشد باید عبارت زیر رادیکال را به شکل اتحاد مکعب دو جمله ای بنویسیم .

تست : حاصل  $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$  برابر کدام گزینه است ؟

۲ -  $\sqrt{3}$  (۴)

۲ +  $\sqrt{3}$  (۳)

۲ -  $\sqrt{3}$  (۲)

۲ +  $\sqrt{3}$  (۱)

پاسخ : گزینه ی ۲ سعی می کنیم  $26 - 15\sqrt{3}$  را به شکل اتحاد مکعب بنویسیم :

$$26 - 15\sqrt{3} = 8 + 18 - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^3$$

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} = 2 - \sqrt{3}$$

تست های فصل سوم

۱- حاصل  $\sqrt[3]{\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2}}}$  کدام است؟

$\sqrt{x}$  (۱)

$\sqrt{x}$  (۲)

$\sqrt{|x|}$  (۳)

$\sqrt{|x|}$  (۴)

۲- حاصل  $A = \sqrt{4 + \sqrt{12}} + \sqrt{4 - \sqrt{12}}$  کدام است؟

$\sqrt{12} + 1$  (۴)

$\sqrt{12} - 1$  (۳)

$\sqrt{3} + 2$  (۲)

$2\sqrt{3}$  (۱)

۳- حاصل  $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$2$  (۱)

۴- اگر  $x^{x^{x^{\dots}}} = 4\sqrt{2}$  باشد حاصل  $\sqrt[5]{x}$  کدام است؟

$\sqrt[16]{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$  (۴)

$\sqrt[8]{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$  (۳)

$\sqrt[8]{2\sqrt[3]{2}}$  (۲)

$\sqrt[16]{4\sqrt[3]{2}}$  (۱)

۵- در یک آزمایشگاه نوعی باکتری کشت داده می شود که در هر ساعت، وزن آن ها ۲ برابر می شود. اگر در ساعت ۸ صبح وزن باکتری ها ۴ گرم باشد. در ساعت ۹:۴۵ صبح وزن آن ها چند گرم خواهد بود؟ (رشد باکتری ها به صورت نمایی است)

$8\sqrt[8]{8}$  (۴)

$8\sqrt[4]{4}$  (۳)

$8\sqrt[2]{2}$  (۲)

$4\sqrt[4]{4}$  (۱)

۶- حاصل  $x = \sqrt{24 + 2\sqrt{24 + 2\sqrt{24 + \dots}}}$  کدام است؟

$\sqrt[3]{6}$  (۴)

$\sqrt[3]{6}$  (۳)

$\sqrt[3]{6}$  (۲)

$\sqrt[3]{2}$  (۱)

۷- حاصل عبارت  $S = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2-n}}$  برای  $n=100$  کدام است؟

$\sqrt{99}$  (۴)

$\sqrt{101}$  (۳)

$10$  (۲)

$9$  (۱)

۸- حاصل  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  کدام است؟

$\sqrt{6}$  (۴)

$\sqrt{3}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$1$  (۱)

۹- حاصل  $\sqrt[2]{9(\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{9} + 3)} + \sqrt[3]{9 + \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{81}}$  کدام است؟

$6$  (۴)

$\sqrt[3]{9} - 3$  (۳)

$\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$  (۲)

$5$  (۱)

۱۰- حاصل عبارت روبه رو کدام است؟

$\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

$\frac{9}{11}$  (۴)

$0.99$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$0.9$  (۱)

۱۱- اگر  $a, b, c$  اضلاع یک مثلث باشند و  $a$  بزرگ ترین ضلع مثلث باشد حاصل عبارت زیر کدام است؟

$k = \sqrt{a+b+c} - 2\sqrt{ac+bc} + \sqrt{a-b+c} - 2\sqrt{ac-bc}$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$  (۴)

$2\sqrt{a-b}$  (۳)

$2\sqrt{a+b}$  (۲)

$2\sqrt{c}$  (۱)

۱۲- حاصل  $K = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$  کدام است؟

$\sqrt{2} + 2$  (۴)

$2$  (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$2\sqrt{2}$  (۱)

۱۳- حاصل  $\sqrt{4+\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5} - 2$  (۲)  $\sqrt{\sqrt{5} + 1}$  (۳)  $\sqrt{4 - \sqrt{5}}$  (۴)  $\sqrt{\frac{4 - \sqrt{11}}{2}}$

۱۴- حاصل عبارت  $A = \sqrt{5 + 4\sqrt{3 - 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}}$  بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

- (۱) بین ۱ و ۲ (۲) بین ۲ و ۳ (۳) بین ۳ و ۴ (۴) بین ۴ و ۵

۱۵- اگر مجموع ضرایب بسط  $(x + 2y + 1)^n$ ،  $56$  واحد بیشتر از مجموع ضرایب بسط  $(x + y)^n$  باشد، مقدار  $n$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۶- اگر  $4x^2 + 12x + nx^2 - 12x^2 + mx^2$  مربع کامل باشد، مقدار  $m+n$  کدام گزینه است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۲۱ (۳) ۱۷ (۴) ۲۰

۱۷- اگر  $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{x^2}{x^2+x^2+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{16}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳)  $\frac{3}{10}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

۱۸- اگر  $a + b - c = 4$  باشد، حاصل  $a^2 - b^2 + c^2 - 16$  کدام است؟

- (۱)  $2(bc - 4a)$  (۲)  $2(4b - ac)$  (۳)  $2(ab - 4c)$  (۴)  $2(ac - 4b)$

۱۹- اگر  $x^2 + x = 1$  باشد، حاصل  $x^6 + 4x^3$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۰- حاصل  $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 257}{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15}}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۳

$$P = x(x-1)(x+2)(x-3)(x+3)(x+5)$$

۲۱- اگر  $x^2 + 2x = 4$  باشد، حاصل عبارت روبرو رو چقدر است؟

- (۱) ۵۳۲ (۲) -۴۴ (۳) -۷۷ (۴) ۲۵۲

۲۲- اگر  $a + b + c = 0$  و  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$  باشد، حاصل عبارت  $a^4 + b^4 + c^4$  کدام گزینه است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۲۳- اگر تساوی  $x^3 + d = a(x-1)^2 + b(x-1) + c(x-1) + d$  یک اتحاد باشد، مقدار  $abcd$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۲۴- اگر  $3\sqrt{\frac{a}{2}} + 3\sqrt{\frac{a}{2}} = 4$  باشد، حاصل  $3\sqrt{8a} + 3\sqrt{8a}$  کدام است؟

۲۵۶ (۴)

۱۹۴ (۳)

۵۲ (۲)

۱۴ (۱)

$$A = (x^2 - x^2)^2 + (x^2 + x^2 - 2)^2$$

۲۵- کم ترین مقدار عبارت روبه رو چقدر است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

صفر (۱)

۲۶- حاصل عبارت روبه رو کدام گزینه است؟  $A = 1390^2 + 1390 \times 1395 + 1395^2 + 3 \times 1390^2 \times 279 - 3 \times 1395^2 \times 278$

۲۵ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۳۹۵ (۲)

۱۳۹۰ (۱)

۲۷- اگر  $x + \frac{1}{x-2} = 5$  باشد حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  کدام است؟

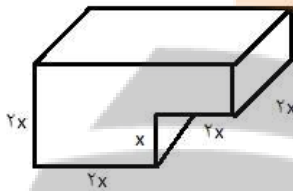
۴۱ (۴)

۳۲ (۳)

۲۵ (۲)

۲۷ (۱)

۲۸- در شکل مقابل، یک منبع آب به گنجایش ۱۵۰۰ لیتر رسم شده است. مقدار  $x$  کدام است؟



۵ (۲)

۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

۲۹- حاصل  $(\frac{1}{253})^2 + (\frac{4}{747})^2 + 18(\frac{1}{253})(\frac{4}{747})$  کدام گزینه است؟

۱۲۵ (۴)

۲۱۶ (۳)

۳۶ (۲)

۱۸۶ (۱)

۳۰- اگر  $(x^2 + 6x + 11)(x^2 + 6x + 7) = 621$  باشد و  $x < 0$  باشد، حاصل  $x^2 + 2x$  کدام گزینه است؟

۱۵ (۴)

۸۰ (۳)

۳۵ (۲)

۴۸ (۱)

۳۱- اگر  $\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$  کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۳۲- اگر  $a, b$  اعداد طبیعی باشند و داشته باشیم  $(a+1)(a+5) + 2b - b^2 - 8 = 0$  مقدار  $3a-2b$  کدام است؟

۵ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

۴ (۱)

$$x^2 + (x^2 - 2)^2 - 6 = -8$$

۳۳- معادله مقابل چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۴- حاصل  $\sqrt{51 \times 52 \times 53 \times 54 + 1} - 255$  کدام است؟

۶۰ (۴)

۵۵ (۳)

۵۰ (۲)

۴۸ (۱)

۳۵- اگر  $a = \sqrt{4x-1} - 2\sqrt{x-1}$  باشد حاصل  $\sqrt{4x+1}$  بر حسب  $a$  کدام گزینه است؟

$\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$  (۴)

$\frac{1}{2}(a + \frac{5}{a})$  (۳)

$\frac{1}{2}(a - \frac{2}{a})$  (۲)

$\frac{1}{2}(a - \frac{5}{a})$  (۱)

۳۶- نمودار رابطه  $xy + 1 = x^2 + y^2$  به چه صورت است؟

(۱) دو خط راست و یک نقطه خارج آن‌ها

(۲) سه خط راست

(۳) یک خط راست و یک نقطه خارج آن

(۴) دو خط راست

۳۷- به ازای چه تعدادی از اعداد طبیعی  $n$  حاصل  $13 - 20n + 8n^2 - n^3$  عددی اول است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۸- مجموع ارقام  $101^3 + 101^2 + 101 + 1$  کدام است؟

(۱) ۱۴

(۲) ۱۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۷

۳۹- اگر مربعات دو عدد طبیعی، عدد  $P$  باشد، تفاضل مکعبات آن‌ها کدام گزینه است؟

(۱)  $6P - 11$

(۲)  $\frac{P^2 + 16P - 29}{4}$

(۳)  $\frac{3P^2 + 1}{4}$

(۴)  $2P + 1$

۴۰- عبارت  $x^6 - 1$  شامل چند عدد اول است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

آزمون فصل سوم

۱- حاصل  $A = \sqrt{5 + 4\sqrt{3 - 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}}$  بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

(۱) بین ۲،۱

(۲) بین ۲،۳

(۳) بین ۳،۴

(۴) بین ۴،۵

۲- در یک آزمایشگاه نوعی باکتری کشت داده می شود که در هر ساعت ، وزن آن ها ۲ برابر می شود . اگر در ساعت ۸ صبح وزن باکتری ها ۴ گرم باشد . در ساعت ۹:۴۵ وزن آن ها چند گرم خواهد بود؟ ( رشد باکتری ها به صورت نمایی است)

۴ $\sqrt[4]{4}$  (۱)      ۸ $\sqrt[4]{4}$  (۲)      ۸ $\sqrt[4]{4}$  (۳)      ۸ $\sqrt[4]{8}$  (۴)

۳- حاصل  $x = \sqrt{24} + 2\sqrt{24} + 2\sqrt{24} + \dots$  کدام است؟

$\sqrt[4]{2}$  (۱)       $\sqrt[4]{4}$  (۲)       $\sqrt[4]{6}$  (۳)       $\sqrt[4]{8}$  (۴)

۴- حاصل  $x = \sqrt{37}$  به ازای  $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$  کدام است؟

$2\sqrt{37}$  (۱)       $\sqrt{37}$  (۲)       $\frac{\sqrt{37}}{2}$  (۳)       $\sqrt{37}-1$  (۴)

۵- حاصل عبارت روبه رو به ازای  $n=100$  کدام است؟

$$s = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2-n}}$$

۹ (۱)      ۱۰ (۲)       $\sqrt{10}$  (۳)       $\sqrt{99}$  (۴)

۶- حاصل عبارت روبه رو کدام گزینه است؟

$$A = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

۹/۰ (۱)      ۱/۲ (۲)      ۰/۹۹ (۳)      ۹/۱۱ (۴)

۷- حاصل  $\sqrt[3]{9(\sqrt{81} + \sqrt[3]{9} + 3 + \sqrt{9 + \sqrt[3]{9}} - 2\sqrt[3]{81})}$  کدام است؟

۵ (۱)       $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$  (۲)       $\sqrt[3]{9} - 3$  (۳)      ۶ (۴)

۸- ساده شده ی عبارت  $S = \frac{a^2+2a+(a+1)\sqrt{a^2-9}-3}{a^2-2a+(a-1)\sqrt{a^2-9}-3}$  با فرض  $a > 3$  کدام است؟

$\frac{a+2}{a-2}$  (۱)       $\frac{a-2}{a+2}$  (۲)       $\sqrt{a+3}$  (۳)       $\sqrt{a-3}$  (۴)

۹- اگر  $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{x+y}{x-y}$  با فرض  $x > y > 0$  کدام است؟

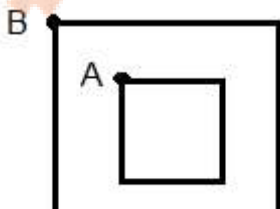
$\sqrt{2}$  (۱)      ۲ (۲)       $\sqrt{3}$  (۳)      ۳ (۴)

۱۰- حاصل  $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 257}{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{15}}$  کدام است؟

۲ (۱)      ۲ (۲)       $\frac{2}{3}$  (۳)      ۳ (۴)

۱۱- همانند شکل ، عکس مربعی را در یک قاب مربع شکلی چسبانده ایم که مرکز مربع ها بر هم منطبق

است. قسمت های خالی قاب را می توانیم با یک کاغذ مربع شکل به ضلع ۲۰ به طور کامل پوشش دهیم به طوری



که کاغذی اضافه نماند. اگر  $AB = 5\sqrt{2}$  باشد ابعاد قاب عکس به کدام صورت است؟

۲۲×۲۲(۱)      ۲۴×۲۴(۲)

۲۵×۲۵(۳)      ۳۰×۳۰(۴)

۱۲- حاصل عبارت  $1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$  به ازای  $x = \sqrt[5]{5}$  کدام است؟

۱۰(۱)      ۴(۲)      ۵(۳)      ۲۵(۴)

۱۳- اگر  $x^2 + 1 = x$  باشد، حاصل  $\left(x^{1395} + \frac{1}{x^{1395}}\right) \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)$  کدام گزینه است؟

-۲(۱)      ۲(۲)      ۴(۳)      -۴(۴)

۱۴- اگر بین اعداد حقیقی و مثبت،  $a, b, c$  رابطه‌ی  $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$  برقرار باشد، مقدار عبارت

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$  کدام است؟

۲(۱)      ۴(۲)      ۸(۳)      ۱۶(۴)

۱۵- مجموع ارقام عدد  $(10^{16} + 1)(10^{14} + 1)(10^{12} + 1)(10^{10} + 1)(10^8 + 1)(10^6 + 1)$  برابر است با:

۳۲(۱)      ۴۸(۲)      ۵۴(۳)      ۵۹(۴)

۱۶- عبارت حاصل  $S = \frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)}$  برابر است با:

۰/۰۱(۱)      ۲/۱۳۳(۲)      ۳/۱۳۰(۳)      ۰/۰۲(۴)

۱۷- عددی طبیعی را مثلثی می‌گوییم هرگاه بتوان به ازای یک  $n$  طبیعی آن را به صورت

$\frac{n(n+1)}{2}$  نوشت. مثلا عدد ۱۰ مثلثی است زیرا  $\frac{4 \times 5}{2} = 10$  می‌باشد. چند زوج  $(a, b)$  از

اعداد مثلثی وجود دارند به طوری که  $a-b=10$  باشد؟

۱(۱)      ۲(۲)      ۳(۳)      ۴(۴)

۱۸- اگر اعداد طبیعی  $A, B, C$  در دستگاه روبه رو صدق کنند مقدار  $A+B+C$  کدام است؟

$$\begin{cases} A^2 + 2B^2 - 2BC = 100 \\ 2AB - C^2 = 100 \end{cases}$$

۳۰(۱)      ۴۰(۲)      ۴۵(۳)      ۶۰(۴)

۱۹-  $a$  و  $b$  عددهایی مثبت اند که  $ab = a^2 - 2b^2$  باشد، حاصل  $\frac{a+b}{a-b}$  چه قدر است؟

۳(۱)       $\sqrt{2}$ (۲)       $\sqrt{3}$ (۳)      ۴ چنین اعدادی وجود ندارد.

۲۰- اگر  $S = \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\dots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\dots(100^3+1)}$  باشد، کدامیک از مقادیر زیر به  $S$  نزدیکتر است؟



## فصل چهارم : معادلات و نامعادلات

فرم کلی معادله ی درجه ی دوم به صورت روبه رو است :

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

روش های اصلی حل معادله ی درجه ۲

۱- روش کلی

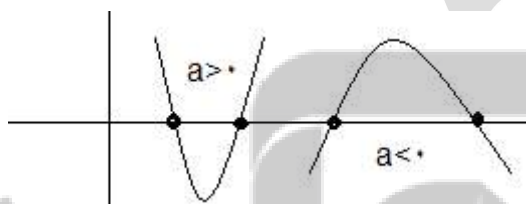
$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- روش کلی کمکی : اگر ضریب  $x$  یعنی  $b$  زوج باشد نگاه برای ساده شدن محاسبات از این روش استفاده می کنند :

$$b = \frac{b}{2} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

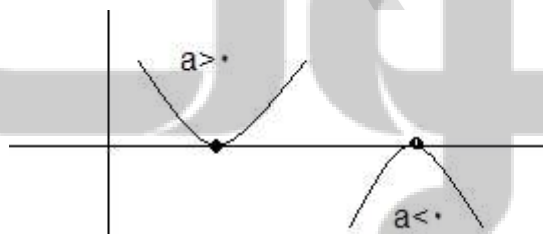
تعداد ریشه های معادله ی درجه دوم

۱)  $\Delta > 0$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز است یعنی محور  $x$  را در دو نقطه ی متفاوت قطع می کند.



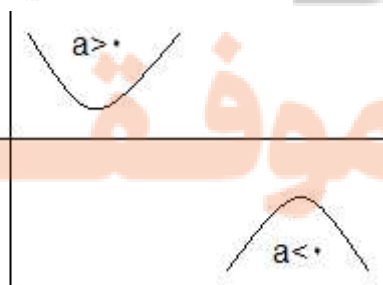
$$ax^2 + bx + c \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$$

۲-  $\Delta = 0$  معادله ریشه ی مضاعف دارد یعنی بر محور  $x$  ها مماس است.



$$ax^2 + bx + c \rightarrow a(x - x_1)^2 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

۳-  $\Delta < 0$  معادله ریشه ندارد یعنی سهمی محور  $x$  ها را قطع نمی کند و همواره در یک طرف محور  $x$  ها است.



تست : به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع  $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  ، همواره در زیر محور  $x$  ها است ؟ ( سراسری ریاضی ۸۵ )

$$m < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1) \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < m < 1 \quad (2) \quad 1 < m < \frac{3}{4} \quad (3) \quad m > \frac{3}{4} \quad (4)$$

حل : برای آن که سهمی در زیر محور  $x$  ها قرار بگیرد ، لازم است که  $\Delta < 0$  و  $a < 0$  :

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(m-1)m < 0 \rightarrow -4m^2 + 4m + 3 < 0 \rightarrow (-2m-1)(2m-3) < 0 \rightarrow m < -\frac{1}{2}, m > \frac{3}{2}$$

$a = m - 1 < 0 \rightarrow m < 1$  که اشتراک این دو گزینه ی ۱ خواهد بود

روابط بین ضرایب و ریشه های معادله ی درجه دوم

$$ax^2 + bx + c$$

$$\text{الف) } x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$$

$$\text{ب) } x_1 \times x_2 = P = \frac{c}{a}$$

$$\text{پ) } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

ت) اگر  $a + b + c = 0$  باشد :  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

ث) اگر  $a + c = b$  باشد :  $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$

تست : اگر یکی از ریشه های معادله ی درجه دوم  $x^2 - mx + m + 1 = 0$  یک واحد بیش تر از ریشه ی دیگر باشد ، ریشه ی بزرگ تر معادله برابر کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۳ یا ۲ (۲)

۳ صفر یا ۳

پاسخ : گزینه ی ۱ . وقتی یکی از ریشه ها یک واحد بزرگ تر از دیگری است یعنی تفاضل ریشه ها برابر ۱ است :  $\frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 1$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{(-m)^2 - 4 \times 1 \times (m+1)}}{1} = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 - 4m - 4} = 1 \rightarrow m^2 - 4m - 4 = 1 \rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0$$

چون  $a + c = b$  پس  $m = -1$  یا  $m = 5$  حالا به ازای هر دو این عددها ریشه ها را می یابیم :

$$m = -1 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$m = 5 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

نکته : در یک معادله ی چند جمله ای با هر درجه دلخواه اگر مجموع ضرایب برابر صفر باشد ، یکی از ریشه ها حتما برابر یک است و بر عبارت  $x - 1$  بخش پذیر است . سایر ریشه ها توسط تقسیم و تجزیه به دست می آید.

نکته : در یک معادله ی چند جمله ای با هر درجه دلخواه اگر مجموع ضرایب توان های زوج با مجموع ضرایب توان های فرد برابر باشد ، یکی از ریشه ها حتما برابر  $-1$  است و بر عبارت  $x + 1$  بخش پذیر است . سایر ریشه ها توسط تقسیم و تجزیه به دست می آید.

نکته : برای اینکه در معادله ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c$  دو ریشه معادله قرینه ی همدیگر باشند کافی است که  $b = 0$  باشد.

نکته : برای اینکه در معادله ی درجه دوم  $ax^2 + bx + c$  دو ریشه معادله معکوس همدیگر باشند کافی است که  $a = c$  باشد.

نکته : اگر بخواهیم معادله ی درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن قرینه ی ریشه های معادله ی  $ax^2 + bx + c$  باشد کافی است ضریب  $b$  را قرینه کنیم .

نکته : اگر بخواهیم معادله ی درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن معکوس ریشه های معادله ی  $ax^2 + bx + c$  باشد کافی است جای  $a$  و  $c$  را عوض کنیم .

نکته : اگر بخواهیم معادله ی درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن  $k$  برابر ریشه های معادله ی  $ax^2 + bx + c$  باشد کافی است  $b$  را  $k$  برابر و  $c$  را  $k^2$  برابر کنیم .

نکته : اگر بخواهیم معادله ی درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن  $k$  واحد بیشتر از ریشه های معادله ی  $ax^2 + bx + c$  باشد کافی است  $x$  را به  $x-k$  کنیم .

نکته : اگر بخواهیم معادله ی درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن  $k$  واحد بیشتر از ریشه های معادله ی  $ax^2 + bx + c$  باشد کافی است  $x$  را به  $x+k$  کنیم .

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

(الف) اگر  $\Delta > 0$

- ۱- اگر  $\frac{-b}{a} > 0$  باشد و  $\frac{c}{a} > 0$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز مثبت است.
- ۲- اگر  $\frac{-b}{a} < 0$  باشد و  $\frac{c}{a} > 0$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز منفی است.
- ۳- اگر  $\frac{-b}{a} > 0$  باشد و  $\frac{c}{a} < 0$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز غیر هم علامت که قدر مطلق ریشه ی مثبت بزرگ تر از قدر مطلق ریشه منفی است.
- ۴- اگر  $\frac{-b}{a} < 0$  باشد و  $\frac{c}{a} < 0$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز غیر هم علامت که قدر مطلق ریشه ی مثبت کوچک تر از قدر مطلق ریشه منفی است.
- ۵- اگر  $\frac{-b}{a} > 0$  باشد و  $\frac{c}{a} = 0$  معادله دارای یک ریشه ی مثبت است.
- ۶- اگر  $\frac{-b}{a} < 0$  باشد و  $\frac{c}{a} = 0$  معادله دارای یک ریشه ی منفی است.
- ۷- اگر  $\frac{-b}{a} = 0$  باشد و  $\frac{c}{a} < 0$  معادله دارای دو ریشه ی قرینه ی هم است.

(ب) اگر  $\Delta = 0$

- ۱- اگر  $\frac{-b}{a} > 0$  باشد و  $\frac{c}{a} > 0$  معادله دارای ریشه ی مضاعف مثبت است.
- ۲- اگر  $\frac{-b}{a} < 0$  باشد و  $\frac{c}{a} > 0$  معادله دارای ریشه ی مضاعف منفی است.

تست : حدود  $m$  چه باشد تا معادله ی  $x^2 - (m+2)x + 2m + 1 = 0$  دو ریشه ی مثبت داشته باشد؟

$$(1) m \geq 4 \text{ یا } m \leq 0 \quad (2) m \geq 4 \text{ یا } -2 < m \leq 0 \quad (3) m \leq 4 \text{ یا } \frac{1}{4} \leq m \leq 4 \quad (4) 2 < m \leq 4 \text{ یا } m \leq 0$$

پاسخ : گزینه ی ۱ . برای آن که معادله دو ریشه ی مثبت داشته باشد ، باید  $\Delta \geq 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  و  $-\frac{b}{a} > 0$  باشد . پس :

$$\Delta \geq 0 \rightarrow (m+2)^2 - 4(1)(2m+1) \geq 0 \rightarrow m^2 - 4m \geq 0 \rightarrow m(m-4) \geq 0 \rightarrow m \leq 0, m \geq 4$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow 2m+1 > 0 \rightarrow m > -\frac{1}{2} \quad -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow m+2 > 0 \rightarrow m > -2$$

اشتراک سه نامساوی بالا برابر گزینه ی ۱ است

### سهمی

به منحنی نمایش تابع درجه ۲ سهمی می گشیدند . هر سهمی دارای راس است که همیشه بیش ترین مقدار یا کم ترین مقدار سهمی را نشان می دهد.

(الف) اگر  $a$  مثبت باشد سهمی رو به بالا است و دارای مینیمی به مختصات  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  می باشد و برد تابع  $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$  است .

(ب) اگر  $a$  مثبت باشد سهمی رو به پایین است و دارای ماکزیمی به مختصات  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  می باشد و برد تابع  $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$  است .

(پ) سهمی دارای یک محور تقارن به معادله ی  $x = -\frac{b}{2a}$  است .

(ت) خط  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  تنها خطی است که بر سهمی مماس می شود.

(ث) اگر  $|a| > 1$  ، آن گاه نمودار سهمی فشرده تر از نمودار  $f(x) = x^2$  است و اگر  $|a| < 1$  ، آن گاه با نموداری باز تر از نمودار  $f(x) = x^2$  مواجه خواهیم شد .

(ج) اگر دو نقطه از سهمی دارای عرض های برابر داشته باشند نقطه ی وسط پاره خط بین این دو نقطه روی محور تقارن سهمی می باشد .

تست : در شکل روبه رو نمودار چند جمله ای  $P(x) = ax^2 + bx + c$  رسم شده است . درباره ی علامت  $S = 4a + 2b + 2c$  کدام گزینه درست است؟

(۱) همواره مثبت

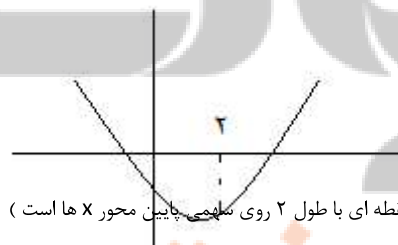
(۲) همواره منفی

(۳) گاهی مثبت و گاهی منفی

(۴) گاهی منفی و گاهی صفر

حل : چون سهمی رو به بالا است ، پس  $a > 0$  . هم چنین محور تقارن سهمی در سمت راست

محور عرض ها قرار دارد پس :  $-\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow b < 0$



سهمی محور  $y$  ها را در نقطه ای با عرض منفی قطع کرده ، پس  $P(0) = c < 0$  . حال دقت کنید که طبق نمودار  $P(2) < 0$  ( زیرا نقطه ای با طول ۲ روی سهمی پایین محور  $x$  ها است )

$$\text{بنابر این : } P(2) < 0 \rightarrow 4a + 2b + 2c < 0$$

تست : به ازای چند مقدار  $m$  بیش ترین مقدار سهمی  $y = mx^2 - (m+3)x + 5$  برابر ۱ است ؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

پاسخ : گزینه ۱ . بیش ترین مقدار سهمی یعنی عرض راس ، پس باید عرض راس را برابر ۱ قرار دهیم :

$$-\frac{\Delta}{4a} = 1 \rightarrow -\frac{(m+3)^2 - 4m \times 5}{4m} = 1 \rightarrow m^2 + 6m + 9 - 20m = -4m \rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ۱ و ۹ هر دو مثبت هستند و سهمی  $y = mx^2 - (m+3)x + 5$  وقتی ماکسیمم دارد که  $m < 0$  پس هیچ کدام از جواب های به دست آمده قابل قبول نیست .

نکته: اگر معادله ی سهمی دارای پارامتر باشد و بخواهیم حدود پارامتر ها را طوری تعیین کنیم که سهمی از ناحیه های مشخصی عبور کند باید نمودار سهمی مورد نظر را رسم کنیم و شرایطی را بررسی کنیم که نمودار آن ویژگی ها را داشته باشد. شرایطی را که معمولاً باید مورد بررسی قرار بگیرند این ها هستند: طول راس، عرض راس، نقاط برخورد با محور ها و مینیمم و ماکسیمم.

نکته: شرط آن که سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  از چهار ناحیه ی دستگاه مختصات عبور کند آن است که  $ac < 0$

تست: اگر سهمی  $y = mx^2 + (2m - 1)x + m - 1$  از هر چهار ناحیه ی دستگاه مختصاتی عبور کند، حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $m > 1$  (۲)  $m < 1$  (۳)  $-1 < m < 0$  (۴)  $0 < m < 1$

پاسخ: گزینه ی ۴ - همان طور که گفتیم کافی است که  $ac < 0$  باشد، پس:

$$m(m - 1) < 0 \rightarrow 0 < m < 1$$

استفاده از مینیمم و ماکسیمم سهمی در مسائل کاربردی

در برخی از مسائل پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم خواسته شده است اگر بعد از نوشتن معادله ی مسئله به معادله ی یک سهمی رسیدیم مقدار مینیمم و ماکسیمم همان  $-\frac{\Delta}{4a}$  خواهد بود.

تست: اگر  $x \in [0, 5]$  باشد، کم ترین مقدار اختلاف مربع آن با چهار برابرش کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) -۴ (۴) -۵

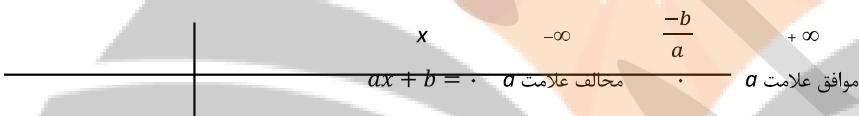
پاسخ: گزینه ی ۳. باید کم ترین مقدار اختلاف مربع آن با چهار برابرش پس معادله ی  $y = x^2 - 4x$  است که مینیمم آن برابر است با:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2}{4 \times 1} = -4$$

تعیین علامت

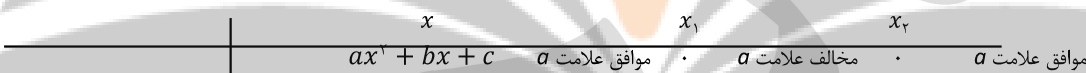
چند جمله ای درجه اول

ابتدا معادله ی  $ax + b = 0$  را حل می کنیم سپس:

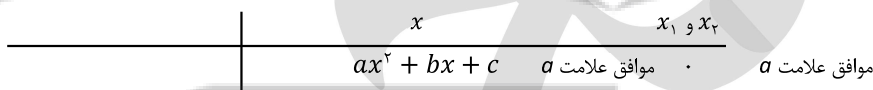


چند جمله ای درجه دوم

الف) اگر  $\Delta > 0$



ب) اگر  $\Delta = 0$



پ) اگر  $\Delta < 0$  همواره موافق علامت  $a$

تست: به ازای چند عدد صحیح عبارت  $\frac{x^2 - 4x - 12}{3x - x^2}$  مقداری ثابت دارد؟

(۱) هیچ (۲) سه (۳) پنج (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ی ۲. ریشه های صورت و مخرج را به دست می آوریم و جدول تعیین علامت را رسم می کنیم:

$$\frac{x^2 - 4x - 12}{3x - x^2} = \frac{(x - 6)(x + 2)}{x(3 - x)}$$



همان طور که در جدول می بینیم عبارت در بازه های  $(-2, 0)$  و  $(3, 6)$  مثبت است و اعداد صحیح متعلق به آن ها  $-1$ ،  $4$  و  $5$  هستند

نکته: عبارت  $ax^2 + bx + c$  به ازای تمام مقادیر  $x$  همواره مثبت است هر گاه:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

و همواره منفی است هر گاه:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

تست: اگر عبارت  $(m + 2)x^2 - 2mx + 1$  به ازای تمام مقادیر  $x$  مثبت باشد، حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $-1 < m < 2$  (۲)  $-2 < m < 1$  (۳)  $-1 < m < 1$  (۴)  $-2 < m < 2$

پاسخ: گزینه ی ۱. باید  $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$  پس:

$$\Delta < 0 \rightarrow 4m^2 - 4(m + 2) < 0 \rightarrow -1 < m < 2$$

اشتراک این دو گزینه ی ۱ می باشد.

نکته: همواره رادیکال با فرجه ی زوج مثبت است پس برای تعیین علامت با آن مثل علامت مثبت برخورد می کنیم و رادیکال با فرجه ی فرد را تعیین علامت می کنیم.

### نامعادله

تست: از دستگاه نامعادلات  $\begin{cases} 2x + y < 6 \\ x + 2y > 3 \end{cases}$  حدود  $x$  کدام است؟

$$x < 1 \quad (1) \quad x > 1 \quad (2) \quad x < 3 \quad (3) \quad x > 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ی ۳. باید کاری کنیم که  $y$  حذف شود. برای اینکار نامساوی اول را در  $-2$  ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} 2x + y < 6 \\ x + 2y > 3 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} -4x - 2y > -12 \\ x + 2y > 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -3x > -9 \rightarrow x < 3$$

### روش حل نامعادلات کسری

در این حالت ابتدا تمام عبارت را به یک سمت آورده و پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده کردن به یک کسر می رسیم. با تعیین علامت صورت و مخرج و در نهایت خود کسر جواب را می یابیم.

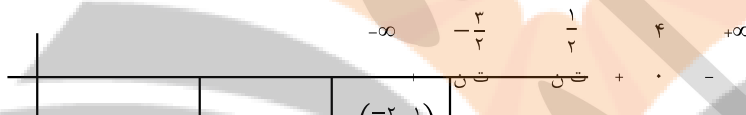
تست: مجموعه جواب نامعادله ی  $\frac{1}{2x-1} \leq \frac{2}{3x+2}$  کدام است؟

$$(1) \quad [4, +\infty) \quad (2) \quad (-\infty, 4] \quad (3) \quad \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup [4, +\infty) \quad (4) \quad \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, 4\right]$$

پاسخ: گزینه ی ۳. همه ی عوامل را به یک طرف منتقل و ساده می کنیم.

$$\frac{1}{2x-1} \leq \frac{2}{3x+2} \rightarrow \frac{1}{2x-1} - \frac{2}{3x+2} \leq 0 \rightarrow \frac{3x+2-4x+2}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{-4+4}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$$

سپس حاصل را تعیین علامت می کنیم:



با توجه به جدول تعیین علامت چون کسر باید کوچک تر یا مساوی صفر باشد، پس مجموعه ی جواب  $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup [4, +\infty)$  است.

نکته: در حل نامعادلات امکان طرفین  $-$  وسطین کردن وجود ندارد. مگر اینکه علامت عبارات مخرج دو طرف همواره معلوم باشد.

$$\frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-1} \rightarrow x-1 > x-2$$

مثلا کار انجام شده مقابل غلط است:

**نکته:**  $|x| > a \rightarrow x > a, x < -a$   $|x| < a \rightarrow -a < x < a$

$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$   $|x| = |y| \rightarrow x = \pm y$

تست: اگر  $x < -3$  و  $x > 4$  باشد، کدام نامساوی برقرار است؟

$$|2x+1| > 7 \quad (1) \quad |2x-1| < 7 \quad (2) \quad |2x+1| > 7 \quad (3) \quad |2x+1| < 7 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ی ۱. میانگین دو عدد  $-3$  و  $4$  عدد  $\frac{1}{2}$  است. پس آن را از طرفین نامساوی ها کم می کنیم:

$$\begin{cases} x < -3 \rightarrow x - \frac{1}{2} < -\frac{7}{2} \\ x > 4 \rightarrow x - \frac{1}{2} < \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{7}{2} \Rightarrow |2x-1| > 7$$

### حل نامعادلات قدر مطلق

برای حل نامعادلات قدر مطلق از روش های زیر استفاده می کنیم:

۱- در نامعادله هایی که به شکل  $|A| < B$  و  $|A| > B$  از ویژگی های قدر مطلق استفاده می شود.

۲- برای حل نامعادله به شکل  $|A| < |B|$  می توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم.

۳- برای حل هر نوع نامعادله ی قدر مطلق می توانیم ریشه های عبارت های داخل قدر مطلق را به دست آوریم مجموعه ی اعداد حقیقی را به بازه های جدای از هم

تقسیم و نامعادله را در هر قسمت حل کنیم.

۴- می توانیم از رد گزینه ها استفاده کنیم

تست: مجموعه جواب نامعادله ی  $|3x-1| < x$  کدام است؟

$$(1) \quad \left(0, \frac{1}{3}\right) \quad (2) \quad \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad (3) \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad (4) \quad \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

پاسخ: گزینه ی ۳. از  $|3x-1| < x$  نتیجه می گیریم که باید  $x < 0$  باشد پس با شرط  $0 < x$  داریم:

$$|3x - 1| < x \rightarrow -x < 3x - 1 < x \Rightarrow \begin{cases} -x < 3x - 1 \rightarrow x > \frac{1}{4} \\ 3x - 1 < x \rightarrow x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم: با توجه به اینکه  $x < 0$  است طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(3x + 1)^2 < x^2 \rightarrow 8x^2 - 6x + 1 < 0.$$

چون  $a > 0$  پس گزینه ی ۳ درست است.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2 \times 8} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

روش سوم: ریشه ی داخل عبارت قدر مطلق  $\frac{1}{3}$  است پس مجموعه ی اعداد را به دو بازه ی  $x < \frac{1}{3}$  و  $x \geq \frac{1}{3}$  تقسیم می‌کنیم:

$$x < \frac{1}{3} \rightarrow -3x + 1 < x \rightarrow -4x < -1 \rightarrow x > \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

$$x \geq \frac{1}{3} \rightarrow 3x - 1 < x \rightarrow 2x < 1 \rightarrow x < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

که اشتراک دو بازه ی بالا جواب است.

روش چهارم: از روش عدد گذاری و رد گزینه ها استفاده می‌کنیم عدد  $\frac{3}{4}$  در ۲ و ۴ هست ولی در ۱ و ۳ نیست با قرار دادن  $\frac{3}{4}$  در نامعادله داریم:  $\left| \frac{9}{4} - 1 \right| < \frac{3}{4}$  که نادرست است پس ۲ و ۴ حذف

می‌شوند. عدد  $\frac{1}{4}$  در ۱ هست ولی در ۳ نیست. با قرار دادن  $\frac{1}{4}$  در نامعادله داریم:  $\left| \frac{3}{4} - 1 \right| < \frac{1}{4}$  که نادرست است، پس ۱ نیز حذف می‌شود.

# تکنیک‌های ریاضی

## تلاشی در مسیر موفقیت

۱- اگر یکی از ریشه های معادله  $3x^2 - 2ax + 3a - 1 = 0$  برابر ۲ باشد ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲)  $\frac{7}{2}$  (۳)  $\frac{16}{3}$  (۴) ۴

۲- حدود  $m$  چقدر باشد تا عبارت  $A = mx^2 - 2(m-1)x + m$  به ازای مقادیر مختلف  $x$  همواره مثبت باشد؟

- (۱)  $0 < m < \frac{1}{4}$  (۲)  $m > \frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4} < m < \frac{3}{4}$  (۴)  $m > \frac{3}{4}$

۳- چند نقطه روی خط  $2x + 3y = 18$  می توان یافت به طوری که حاصل ضرب طول و عرض آن نقاط ۱۲ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴- اختلاف ریشه های معادله  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} + 1 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$  (۲)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$

- (۳)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$  (۴)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$

۵- اگر دامنه تعریف عبارت  $\frac{x-3}{-2x^2+2ax-b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{4\}$  باشد، مقدار  $a + b$  چقدر است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۶ (۳) ۵۴ (۴) ۴۴

۶- در معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$  می دانیم  $a + b = -16$  می باشد. لزوماً یکی از ریشه های معادله برابر است با:

- (۱)  $\frac{b}{16}$  (۲)  $-\frac{b}{4}$  (۳)  $a - 4$  (۴)  $-a - 4$

۷- به ازای چند مقدار طبیعی  $k$  معادله  $k(x+1)(x+2) = 3x + 2$  ریشه حقیقی ندارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸

۸- مجموع مربعات ۴ مضرب طبیعی و متوالی عدد ۶ برابر ۱۹۴۴ می باشد. مجموع آن ها کدام است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۶۰ (۳) ۱۰۸ (۴) ۷۲

۹- برای ساختن جعبه ای در باز به شکل مکعب مستطیل که قاعده آن مربع بوده و ارتفاع آن ۱۵cm می باشد،  $1600 \text{ cm}^2$  مقوا به کار رفته است. ضلع قاعده جعبه چند سانتی متر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۲

۱۰- زمینی به اندازه کافی بزرگ در اختیار داریم و می خواهیم به کمک ۶۰ متر نرده، دور یک زمین مستطیل

شکل به مساحت ۷۲ متر مربع را حصار بکشیم و به کمک همان ۶۰ متر نرده، آن قسمت را به سه مستطیل

برابر همانند شکل مقابل تقسیم کنیم. عرض هر مستطیل کوچک چقدر است؟

- (۱) ۴ یا ۲ (۲) ۳ یا ۴ (۳) ۲ یا ۳ (۴) ۳ یا ۶

۱۱- معادله  $2 \times 9^x = 3 \times 4^x + 6^x$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴



۱۲- در ضرب دو عدد طبیعی که اختلاف آن ها ۸ واحد است اشتباهی رخ داده و رقم دهگان ، ۳ واحد بیشتر محاسبه شده است . اگر حاصل به دست آمده را بر عدد بزرگ تر تقسیم کنیم ، خارج قسمت ۱۴ و باقیمانده ۹ می شود . مجموع این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳۴      (۲) ۴۵      (۳) ۲۹      (۴) ۴۱

۱۳- مجموع مربعات سه عدد متوالی ، ۲۰ واحد کم تر از مجموع مربعات دو عدد بعدی است . میانگین این ۵ عدد کدام است؟

- (۱) ۱۰      (۲) ۱۱      (۳) ۱۲      (۴) ۱۳

۱۴- اگر  $a, b$  اعداد صحیح بوده و معادله زیر دارای یک ریشه مضاعف  $x = a - 1$  باشد ، مقدار  $a + b$  کدام است؟

$$(a - 2)x^2 - (a + 1)x + 2a - b = 0$$

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۵- معادله  $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$  چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۴

۱۶- اگر  $\sin \alpha, \cos \alpha$  ریشه های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  باشند حاصل  $\frac{6a^2b + 1 - a^6}{b^3}$  کدام است؟

- (۱) -۸      (۲) ۶      (۳) ۲۴      (۴) -۱۶

۱۷- دو قایق موتوری در نقاط A, B به فاصله های به ترتیب ۶۰۰ و ۸۰۰ متری از نقطه O قرار دارند .

هم زمان قایق A با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه و قایق B با سرعت ۱۵ متر بر ثانیه به سمت نقطه O و در

مسیرهای عمود بر هم شروع به حرکت می کنند . پس از چند ثانیه فاصله دو قایق ۳۰۰ متر می شود؟

- (۱) ۱۲      (۲) ۱۶      (۳) ۲۴      (۴) ۲۸

۱۸- تعدادی دانش آموز به شهر بازی رفته و مجموعاً ۱۲۰۰۰۰ تومان خرج می کنند و آن مبلغ را به طور مساوی بین خود تقسیم می کنند . اما یکی از آن ها فراموش کرده که با خود پول بیاورد ، بنابراین بقیه سهم او را می دهند . در این صورت سهم هر کدام ۶۰۰۰ تومان بیشتر می شود . تعداد دانش آموزان چند تا بوده است؟

- (۱) ۴      (۲) ۵      (۳) ۶      (۴) ۷

۱۹- به ازای چه مقادیری از  $m$  عدد ۳ بین دو ریشه معادله  $x^2 - 4x + 3m = 0$  قرار دارد؟

- (۱)  $m < \frac{4}{3}$       (۲)  $m > \frac{4}{3}$       (۳)  $m > 1$       (۴)  $m < 1$

۲۰- فاصله بین دو ریشه یک سهمی ۸ واحد است . اگر راس سهمی نقطه  $(2, 4)$  باشد ، سهمی محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

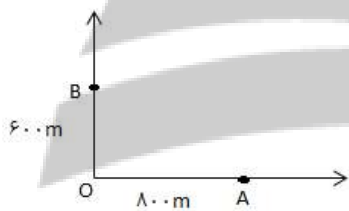
- (۱)  $(0, 2)$       (۲)  $(0, 3)$       (۳)  $(0, 1)$       (۴)  $(0, -2)$

۲۱- مقدار مینیمم سهمی که از نقاط  $(4, 0), (2, 0), (6, 4)$  می گذرد کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{3}{2}$

۲۲- به ازای کدام محدوده برای  $m$  منحنی  $y = (m - 1)x^2 + 2x - 3$  تنها از ناحیه دوم مختصات نمی گذرد؟

- (۱)  $(\frac{2}{3}, 1)$       (۲)  $(\frac{2}{3}, 1]$       (۳)  $(\frac{2}{3}, 1)$       (۴)  $[\frac{2}{3}, 1]$





۲۳- سهمی  $y = (2a - b)x^2 - (a + b)x - 8$  در نقطه ای به طول ۲- بر محور  $x$  ها مماس است. مقدار  $ab$  چقدر است؟

- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴

۲۴- به ازای کدام مقدار  $a$  سهمی  $y = x^2 + 5x + 4$  بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y$	$+$	$0$	$-$

۲۵- جدول تعیین علامت منحنی  $y$  به صورت مقابل می باشد. نمودار  $y$  از کدام نقطه نمی تواند بگذرد.

- (۱)  $(\frac{1}{3}, -3)$  (۲)  $(\frac{1}{3}, 2)$  (۳)  $(3, -1)$  (۴)  $(-3, 1)$

۲۶- کدام یک از جملات زیر در مورد عبارت  $x^6 + x + 1$  درست است؟

(۱) به ازای همه مقادیر حقیقی  $x$ ، مثبت است.

(۲) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی  $x$ ، مثبت و به ازای بعضی از مقادیر حقیقی  $x$ ، منفی است.

(۳) محور طول ها را در ۶ نقطه قطع می کند. (۴) محور عرض ها را قطع نمی کند.

۲۷- مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x}$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $(0, 1)$  (۴)  $\mathbb{R} - [0, 1]$

۲۸- مجموعه جواب نامعادله  $x < |x^2 - 2x| < x$  بازه  $(a, b)$  می باشد.  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱/۵ (۴) ۲/۵

۲۹- اگر  $a$  در نامعادله  $0 \leq 20 + |x - 1| - 5|x - 1| - |x^2 - x| - 4|x|$  صدق کند، حاصل  $K = |a + 3| + |a - 5|$  کدام است؟

- (۱)  $2a - 2$  (۲)  $2 - 2a$  (۳) ۸ (۴) ۲

۳۰- مجموعه جواب نامعادله  $x^2 - 3x + 2 \leq |x^2 - 3x + 2|$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشمار

۳۱- چند عدد صحیح در نامعادله  $\frac{x^4}{1+x^4} \leq \frac{x^5}{1+x^5}$  صدق نمی کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشمار

۳۲- نامعادله  $x < |2x - 3|$  معادله کدام نامعادله است؟

- (۱)  $|x - 2| < 1$  (۲)  $|x - 1| < 2$  (۳)  $|x + 2| < 1$  (۴)  $|x + 1| < 2$

۳۳- نامعادله  $|x^3 + 2x - 50| < 2|x - 29| + |x^2 + 8|$  چند جواب صحیح دارد؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

آزمون فصل چهارم

۱- اگر  $m$  و  $n$  ریشه های معادله  $x^2 - 4x + 2 = 0$  باشند، حاصل عبارت روبه رو کدام گزینه است؟

$$A = \left(3m + \frac{2}{n}\right)\left(3n + \frac{2}{m}\right)$$

۳۶ (۴)

۲۸ (۳)

۴۴ (۲)

۳۲ (۱)

۲- اگر معادله  $x^2 + ax + b = 0$  دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز باشد، در این صورت

معادله  $4x^2 + 2(a+1)x + 4a + b = 0$  چند ریشه ی حقیقی دارد؟

۴ بستگی به مقدار  $a$  و  $b$  دارد.

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳- مقدار  $3 + \frac{12}{4 + \frac{12}{4 + \frac{12}{4 + \dots}}}$  کدام است؟

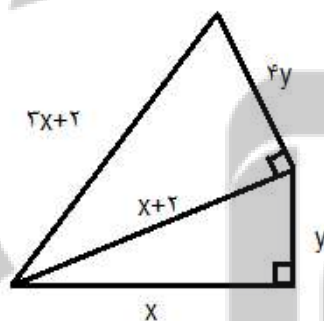
$2 + \sqrt{13}$  (۴)

۵ (۳)

$\frac{4 + \sqrt{13}}{2}$  (۲)

۴ (۱)

۴- اگر مساحت شکل مقابل با مساحت مربعی به ضلع  $a$  برابر باشد، مقدار  $a$  چه قدر است؟



۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۷ (۴)

۱۴ (۳)

۵- به ازای چند مقدار حقیقی  $k$ ، معادله  $(x-1)(x^2 - kx + 4) = 0$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$4x + \sqrt{x^2 - 2} = 5 \times 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 2} = 6$$

۶- معادله مقابل چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۷- از گوشه های یک ورق مستطیل شکل که نسبت اضلاع آن ۱ به ۲ است، همانند شکل

چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر بریده ایم تا یک جعبه درست شود. اگر حجم جعبه ۲۵۲

سانتی متر مکعب باشد، مساحت ورقه ی مستطیل شکل چند سانتی متر مربع است؟

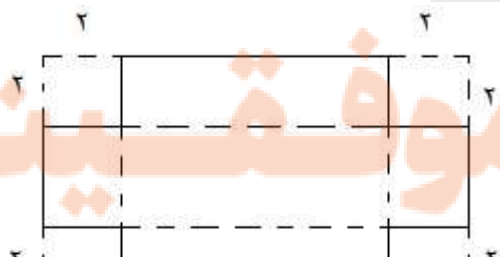
۳۳۸ (۴)

۲۸۸ (۳)

۲۴۲ (۲)

۲۰۰ (۱)

۸- در شکل مقابل نقطه ی  $M$  روی خط  $3x + 2y = 12$  بین دو نقطه ی  $A$  و  $B$  در حال



A

$$3x + 2y = 12$$

حرکت است. بیشترین مساحتی که مستطیل OCMD خواهد داشت، چه قدر است؟

۱۲(۲) ۸(۱)

۶(۴) ۴(۳)

۹- چند عدد طبیعی و کوچک تر از ۲۰۰ به جای k میتوان قرار داد بع طوری که معادله ی

$$kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$$

دارای ریشه های گویا باشد؟

۱۳(۴) ۱۵(۳) ۹(۲) ۱۷(۱)

۱۰- نمودار اگر  $x^2 - 3ax + 2b$  یه صورت روبرو باشد، مقدار  $2a+3b$  چقدر

است؟

۱۲(۲) ۸(۱)

۱۸(۴) ۱۶(۳)

۱۱- مجموعه جواب نامعادله ی مقابل کدام است؟

$(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}) - \{-1\}$  (۲)  $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{4})$  (۱)

$(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}) - \{-1\}$  (۴)  $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{4})$  (۳)

۱۲- اگر  $\frac{x^2+3x-1}{x^2+5} + \frac{x^2+5}{x^2+2x-1} = 2$  باشد، انگاه مجموع ارقام عدد  $13x+7y$  کدام است؟

۵(۴) ۷(۳) ۹(۲) ۲(۱)

۱۳- معادله  $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 8$  چند مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

(۴) جواب ندارد (۳) دو جواب (۲) یک جواب (۱) جواب ندارد

۱۴- به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله ی  $\frac{1}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{1}{y}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی جواب دارد؟

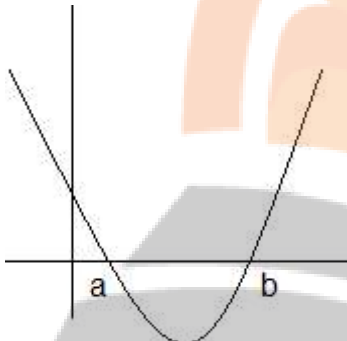
(۴) چهار (۳) دو (۲) یک (۱) چنین های وجود ندارد.

۱۵- معادله ی  $1 = ||a| + 3|$  چند جواب حقیقی دارد؟

۸(۴) ۳(۳) ۲(۲) ۱(۱)

۱۶- فرض کنید مقدار عبارت  $f(x) = -x^2 + bx + c$  همواره کم تر یا مساوی ۲ باشد. اگر این سهمی دو ریشه حقیقی داشته باشد فاصله

ریشه های ان حداکثر چه قدر است؟



$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x + 1} + \frac{|2x + 6|}{|x + 1|} > 24$$

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۲۰ (۴)

۱۷-بزرگ ترین عدد حقیقی  $k$  که برای هر عدد مثبت  $a$  با شرط  $1 \geq a - \frac{1}{a}$  داشته باشیم

$a^2 - \frac{1}{a^2} \geq k(a - \frac{1}{a})$  کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۲۰ (۴)

۱۸- به ازای چه مقادیری از  $a$  سهمی  $y = (2-a)x^2 + 2(a+2)x - 2a$  پایین خط  $y = 4$  قرار دارد؟

$a > 2$  (۱)

$a < 6$  (۲)

$a > 6$  (۳)

$a < 2$  (۴)

۱۹- اگر  $a, b, c$  طبیعی بوده و جدول تعیین علامت عبارت  $y = [(a-2)x + b](x-c)^2$  به صورت زیر باشد مقدار  $a + 2b + 3c$  کدام

است؟

۶ (۱)

۷ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)



۲۰- سهمی  $y = x^2 - 2ax + 1$  و خط  $y = 2b(a-x)$  را در نظر بگیرید. تعریف می کنیم:

$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{خط و سهمی یکدیگر را قطع نمی کنند}\}$  مساحت  $A$  کدام است؟

$\frac{\pi}{4}$  (۱)

$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$  (۲)

۱ (۳)

$\pi$  (۴)

### فصل پنجم: تابع

#### روش های نمایش رابطه:

الف) جدول

ب) زوج مرتبی

پ) نمودار پیکانی

ت) نمودار مختصاتی

تست: رابطه ی  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$  چند عضو زوج مرتبی دارد؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۸ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

حل: زوج مرتب های رابطه ی  $R$  به صورت زیر هستند:

$$R = \{(-2, 0), (-1, 1), (-1, -1), (0, -2), (0, 2), (1, 1), (1, -1), (2, 0)\}$$

زوج مرتب: هر گاه یک رابطه را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش دهیم، در این صورت زمانی این رابطه تابع خواهد بود که در این زوج مرتب ها هیچ مولفه ی اول یکسانی نداشته باشیم.

تذکر: در صورت وجود مولفه های اول یکسان مولفه های دوم نیز باید یکسان باشند.

تست: اگر رابطه ی  $R = \{(4, 5), (a + 2, 3), (4, a^2 + 4), (2, b)\}$  تابع باشد،  $a + b$  کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۱ (۴)

$$a^2 + 4 = 5 \rightarrow a = \pm 1 \rightarrow a = -1$$

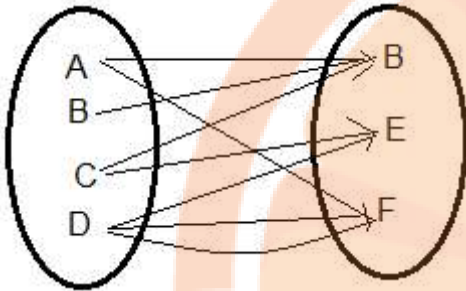
حل: دو زوج مرتب (4,5) و (4, a^2 + 4) با هم برابرند. پس:

$$a = -1 \rightarrow \{(4,5), (2,3), (4,5), (2,b)\} = \{(4,5), (2,3), (2,b)\} \rightarrow b = 3 \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

نمودار پیکانی:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B که با نمودار پیکانی نشان داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.

تست: حداقل چند پیکان از نمودار ون مقابل حذف کنیم تا رابطه ی حاصل، یک تابع باشد؟



(1) 2

(3) 4

حل: با حذف پیکان هایی از D به E و C به B و A به B به نمودار ون می رسمیم.

تابع خطی:

هر تابع که به صورت  $f(x) = ax + b$  که در آن a و b اعداد حقیقی باشند تابع خطی نام دارد.

تست: اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که  $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x}$  مقدار  $f(-4)$  کدام است؟ (سنجش جامع تجربی 94)

(1) 1      (2) -1      (3) -3      (4) -5

حل:  $f(x) = ax + b \rightarrow ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x} \quad f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow f(-4) = -5$

نکته: برای یافتن برد در یک تابع خطی با توجه به شرایط دامنه، متغیر y را می سازیم و حدود آن را می یابیم.

نکته: برای محاسبه ی دامنه از روی برد، با توجه به y و محدوده ی آن، باید حدود x را به دست آوریم.

تست: اگر  $f(x) = 6x - 7$  و برد تابع بازه ی  $[-1, 23]$  باشد، دامنه ی تابع کدام است؟

(1) (1,5)      (2) [1,5]      (3) (-1,5)      (4) (1, -5)

حل:  $-1 \leq y \leq 23 \rightarrow -1 \leq 6x - 7 \leq 23 \rightarrow 6 \leq 6x \leq 30 \rightarrow 1 \leq x \leq 5 \rightarrow [1,5]$

دامنه و برد تابع

دامنه و برد در جدول: قسمت بالایی جدول دامنه و قسمت پایینی برد است.

دامنه و برد در نمودار پیکانی: مجموعه ی همه ی عضوهای مجموعه ی اول دامنه و زیرمجموعه ای از مجموعه ی دوم را برد می گویند.

دامنه و برد در زوج مرتب ها: مولفه های اول زوج های مرتب را دامنه و مولفه های دوم را برد تابع می گویند.

تست: اگر  $f = \{(2,5), (6,3), (3,4), (4,7)\}$  و  $g = \{(3,2), (2,1), (4,5), (1,3)\}$  باشد. برد تابع  $f(g)$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 94)

(1) {5,3}      (2) {4,5,7}      (3) {3,5,7}      (4) {4,5,3,2}

$$rg = \{(3,4), (2,2), (4,10), (1,6)\} \rightarrow f(rg) = \{(3,7), (2,5), (1,3)\}$$

حل:

دامنه و برد از روی نمودار: تصویر نمودار روی محور  $x$  ها را دامنه و تصویر نمودار روی محور  $y$  ها را برد می گویند.

توابع چند جمله ای: دامنه ی هر تابع چند جمله ای مجموعه ای تمام اعداد حقیقی است.

توابع کسری: یک تابع کسری در مجموعه ای اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج تعریف شده است.

توابع رادیکالی:

الف) با فرجه زوج: دامنه برابر است با مجموعه ای اعداد حقیقی که به ازای آن ها عبارت زیر رادیکال منفی نباشد.

ب) با فرجه فرد: دامنه ی این توابع با دامنه ی عبارت زیر رادیکال یکی است.

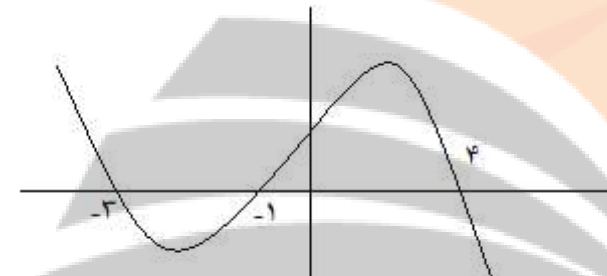
تست: شکل روبه رو نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است.

دامنه ی تابع با ضابطه ی  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۴ خارج)

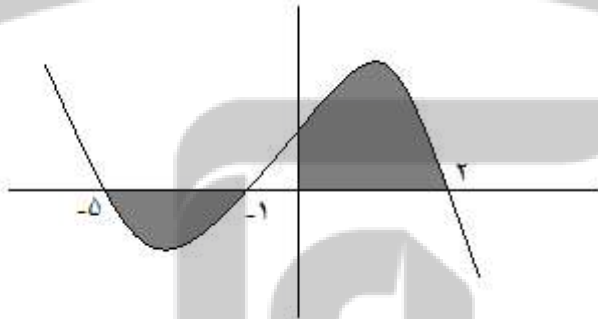
۱)  $[-1,1] \cup [0,6]$       ۲)  $[-3,1] \cup [0,2]$

۳)  $[-5,-3] \cup [-1,2]$       ۴)  $[-5,-3] \cup [0,2]$

حل: باید  $xf(x) \geq 0 \rightarrow (x-2)f(x-2) \geq 0$



همان طور که می دانیم حاصل ضرب دو عبارت زمانی مثبت است که یا هر دو مثبت باشند یا هر دو منفی باشند. اگر به نمودار تابع توجه نماییم کاملاً مشخص است که این اتفاق در بازه های زیر رود داده است.



### انتقال تابع

الف) انتقال های عمودی و افقی

اگر تابع  $y=f(x)$  معلوم باشد بری رسم نمودار توابع بع صورت زیر عمل می کنیم:

۱- برای رسم نمودار  $y=f(x-a)$  کافی است نمودار  $y=f(x)$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۲- برای رسم نمودار  $y=f(x+a)$  کافی است نمودار  $y=f(x)$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

۳- برای رسم نمودار  $y=f(x)+a$  کافی است نمودار  $y=f(x)$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۴- برای رسم نمودار  $y=f(x)-a$  کافی است نمودار  $y=f(x)$  را به اندازه  $a$  واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

نمودار توابع  $y=f(-x)$  و  $y=-f(x)$

۱- برای رسم نمودار  $y=-f(x)$  قرینه ی نمودار  $y=f(x)$  را نسبت به محور  $x$  ها رسم می کنیم.

۲- برای رسم نمودار  $y=f(x)$  قرینه ی نمودار  $y=f(x)$  را نسبت به محور  $y$  ها رسم می کنیم .

نمودار توابع  $y=f(ax)$  و  $y=af(x)$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < 1 \leftarrow \text{نمودار فشرده می شود} \\ a > 1 \leftarrow \text{نمودا کشیده می شود} \end{array} \right\} y = af(x) - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < 1 \leftarrow \text{نمودار فشرده می شود} \\ a > 1 \leftarrow \text{نمودا کشیده می شود} \end{array} \right\} y = f(ax) - 2$$

تست: نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{7}x \right| - 2$  را  $y = 4$  واحد به طرف  $x$  های منفی و یک واحد به طرف  $y$  های مثبت انتقال می دهیم . نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطعند؟ ( سراسری تجربی ۹۳ )

(۱)  $-3/5$       (۲)  $-3$       (۳)  $-2/5$       (۴)  $-2$

حل:  $y = \left| \frac{1}{7}x \right| - 2 \xrightarrow{\text{انتقال}} y - 1 = \left| \frac{1}{7}(x + 4) \right| - 2 \rightarrow y = \left| \frac{1}{7}(x + 4) \right| - 1$

۳- ق ق  $\left| \frac{1}{7}x \right| - 2 = \left| \frac{1}{7}(x + 4) \right| - 1 \xrightarrow{\times 7} |x| - 4 = |(x + 4)| - 2 \rightarrow x + 4 = \pm(|x| - 2) \rightarrow x = -1, -3$

روش دوم : تابع انتقال  $y = \left| \frac{1}{7}(x + 4) \right| - 1$  را بدست آورده و گزینه ها را امتحان می کنیم تا مقدار دو تابع یکسان باشد.

تست های فصل پنجم

۱- به ازای کدام مقدار  $m$  رابطه  $\{(3,4), (m, 1), (3, m + 2), (5, m)\}$  یک تابع است؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۲- فرض کنیم  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$  و  $g(x) = x - \frac{1}{x}$  باشند ، در این صورت  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $x^2 - 4$       (۲)  $x^2 - 2$       (۳)  $x^2$       (۴)  $x^2 + 2$

۳- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$  مفروض است.  $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

۴- اگر  $f(x+1) = x^2 + 3x^2 + 3x$  باشد آنگاه  $f(\sqrt[3]{2})$  چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt[3]{4}$  (۴)  $\sqrt[3]{2}$

۵- اگر  $f(x) = x(x-1)$  و  $g(x) = [x]$  مقدار  $(f \circ f)(1 + \sqrt{3})$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $3 + \sqrt{3}$  (۴) ۵

۶- در تابع  $f(x) = a \sin^2 x + b \sin 2x$  اگر  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$  و  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۷- به ازای کدام مقدار  $a$  رابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & x \geq 1 \\ a^2 - 4a + x & x \leq 1 \end{cases}$  یک تابع است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۸- رابطه  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$  چند عضو طوج مرتب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹- دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مجموعه زوج های مرتب بیان شده اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (۱)  $f \cup g$  (۲)  $f \cap g$  (۳)  $f - g$  (۴)  $f \circ g$

۱۰- تمام دامنه تابع  $y = \sqrt{[x]-1} + \sqrt{3-[x]}$  کدام است؟

- (۱)  $1 \leq x \leq 4$  (۲)  $1 < x < 3$  (۳)  $1 \leq x \leq 3$  (۴)  $1 \leq x < 4$

۱۱- اگر  $f(x) = \sqrt{5-x}$  و  $g(x) = x^2 + 4$  آنگاه دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $[-4, 1]$  (۳)  $[-1, 5]$  (۴)  $(-\infty, 5]$

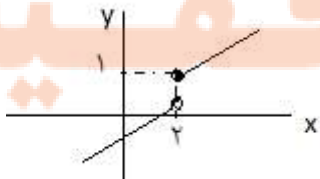
۱۲- دامنه تابع  $y = \sqrt{4 - \sqrt{x+1}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۳- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه رو باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{\text{Log}f(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $(1, +\infty)$

- (۳)  $(2, +\infty)$  (۴)  $(3, +\infty)$





۱۴- اگر دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 6}$  بازه  $[-2, 3]$  باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۲

۱۵- اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{bx-a}$  باشد، مقدار  $f(x)f(\frac{1}{x})$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) a (۳) b (۴) ab

۱۶- اگر  $f(x) = 2x + 2a$  و  $g(x) = x^2 + bx + c$  و  $fog(x) = 2x^2 + x + 1$  باشند، آنگاه  $a+b+c$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۳

۱۷- اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$  باشد، دامنه تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $(-2, +\infty) - \{1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۳)  $(-2, +\infty)$  (۴)  $(-2, +\infty) - \{0\}$

۱۸- با فرض  $f(x) = 2x - x^2$  و  $g(x) = x^2 + x$ ، مجموع ریشه های معادله  $fog(x) = 0$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۱۹- اگر  $f(\sqrt{x+1}) = x + 2\sqrt{x} + 2$ ، آنگاه  $f(\sqrt{2})$  چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲)  $1 + \sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2} + 1$  (۴) ۵

۲۰- اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$  تابع  $gof^{-1}$  کدام است؟

- (۱)  $\{(1, 3), (0, 0)\}$  (۲)  $\{(2, 4), (3, 5)\}$  (۳)  $\{(2, 0), (-1, 4)\}$  (۴)  $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

۲۱- در تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin x - 1}$  مقدار  $f(-\frac{1}{2}f(x))$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) تعریف نشده

۲۲- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$  و  $g(f(a)) = 5$  باشد، عدد  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۳- در تابع  $f(x) = ax^2 + bx + 4$  رابطه  $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$  برقرار باشد، مقدار  $2a-b$  کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۲۴- اگر  $f(x) = (2x-3)^2$  و  $g(x) = x+2$  نمودارهای دو تابع  $f$  و  $fog$ ، با کدام طول متقاطعند؟

- (۱) -۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{3}{2}$

۲۵- اگر  $g = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 2), (2m, a)\}$  یک به یک باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۶- تابع  $y = 2x^2 - 2x + 5$  در بازه  $(-\infty, a]$  یک به یک باشد. حداکثر مقداری که  $a$  می تواند اختیار کند چقدر است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $-\frac{2}{3}$  (۴)  $-\frac{2}{5}$

۲۷- اگر  $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$  معکوس پذیر باشد، حدود  $a$  کدام است؟

$a \leq 2$  (۴)

$a < 2$  (۳)

$a > 2$  (۲)

$a \geq 2$  (۱)

۲۸- نمودار  $y = -(x + 1)^2 + 1$  معکوس خود را در چند نقطه قطع می کند؟

بیشمار (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

۳ (۱)

۲۹- به ازای کدام مقدار  $a$  نمودار معکوس تابع  $f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}$  از نقطه  $(a + 4, a)$  می گذرد؟

۱۵ (۴)

۱۰۲ (۳)

-۱۰۲ (۲)

-۱-۵ (۱)

۳۰- اگر  $f = \{(3,1), (2,5), (4,3), (1,6)\}$  باشد برد تابع  $f + f^{-1}$  کدام است؟

$\{4, 8\}$  (۴)

$\{5, 9\}$  (۳)

$\{3, 9\}$  (۲)

$\{5, 8\}$  (۱)

۳۱- اگر  $f(x) = [x]$  مجموعه مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است؟

$\{-1, 0, 1\}$  (۴)

$\{0, 1\}$  (۳)

$\{1\}$  (۲)

$\{0\}$  (۱)

۳۲- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$  محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول یک و محور  $y$  ها را در نقطه ای به عرض  $-6$  قطع کرده و از نقطه  $(-2, -6)$  می گذرد.  $f(-1)$  کدام است؟

$-4$  (۴)

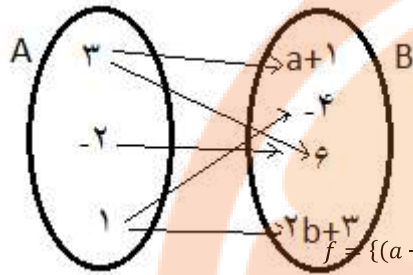
$-5$  (۳)

$-7$  (۲)

$-8$  (۱)

تلاشی در مسیر موفقیت

آزمون فصل پنجم



۱- اگر نمودار پیکانی مقابل نشان دهنده یک تابع باشد. مقدار  $a+b$  کدام است؟

- ۴ (۱)  $-2$  (۲)  
۳ (۳)  $11$  (۴)

۲- به ازای چه مقدار برای  $a$  رابطه روبه رو بیانگر یک تابع نمی باشد؟

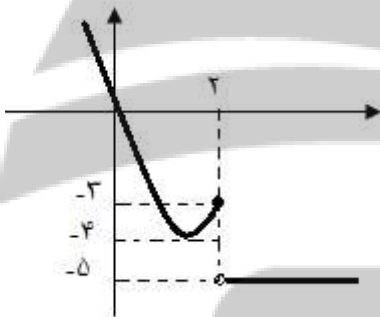
- ۴ (۱)  $6$  (۲)  $5$  (۳)  $7$  (۴)

۳- به ازای کدام مقدار  $a$  ضابطه  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5 \pm (a^2 + 1)(x^2 - \sqrt{x})$  بیانگر یک تابع می باشد؟ ( $x \in \mathbb{R}^+$ )

- صفر (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴)

۴- برد تابع  $f$  که در شکل مقابل رسم شده است را به صورت  $R_f = [a, +\infty) - (b, c)$  نوشته ایم. مقدار  $a+b+c$  کدام است؟

- $-14$  (۱)  $-13$  (۲)  
 $-12$  (۳)  $-11$  (۴)



۵- اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-3}{ax^2-bx+c}$  برابر  $\mathbb{R} - \{2, -3\}$  باشد مقدار  $\frac{2a+3b}{4c}$  کدام است؟

- ۱۸ (۱)  $\frac{1}{12}$  (۲)  $\frac{1}{16}$  (۳)  $\frac{1}{24}$  (۴)

۶- اگر در تابع  $f(x) = 4 - a|x - 2|$  دامنه تابع بازه  $[-1, 6]$  و برد تابع بازه  $[4, 7]$  باشد مقدار  $a$  خواهد بود؟

- $-1$  (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$  (۳)  $-2$  (۴)

۷- ارتفاع علف های یک چمن زار در ساعت ۴ صبح ۲ سانتی متر می باشد. اگر به طور متوسط در هر ۲ ساعت ۳ میلی متر به ارتفاع چمن ها اضافه شود در لحظه  $t$  از آن روز ارتفاع چمن ها ( $h$ ) از کدام رابطه به دست می آید؟

$h = 20 + \frac{3}{4}(t - 4)$  (۱)  $h = 20 + \frac{3}{4}(t + 4)$  (۲)

$h = 20 + \frac{3}{4}(t - 4)$  (۳)  $h = 20 + \frac{3}{4}(t + 4)$  (۴)

۸- اگر  $f(x) = \begin{cases} -4 & x \in \mathbb{N} \\ 1 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$  باشد حاصل  $f(x) = f\left(\frac{200}{1}\right) + f\left(\frac{200}{2}\right) + f\left(\frac{200}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{200}{200}\right) + f(200)$  کدام است؟

- ۱۵۰ (۱)  $140$  (۲)  $125$  (۳) صفر (۴)

۹- اگر  $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2}$  باشد ضابطه  $f\left(\frac{x+1}{x}\right)$  کدام است؟

$\frac{4-x}{4+x}$  (۴)

$\frac{2-x}{3+x}$  (۳)

$\frac{x+2}{x-3}$  (۲)

$\frac{x+1}{x}$  (۱)

۱۰- اگر تابع  $f = \{(2, m), (4, \sqrt{m+2}), (5, \frac{n}{4})\}$  ثابت باشد. مقدار  $mn^2$  کدام است؟

۱۶ (۴)

۳۲ یا -۴ (۳)

۳۲ (۲)

-۴ (۱)

۱۱- اگر  $f(x) = |x-7| - |x-11|$  باشد، مقدار  $A = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20)$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۱۴ (۲)

۲۶ (۱)

۱۲- چند نقطه روی نمودار  $y = 1 - |x-2|$  وجود دارد که فاصله اش از مبدا برابر ۵ باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۳- دو خط  $d_1: y = 4 - x$  و  $d_2: y = x + 2$  یکدیگر را در نقطه  $P$  قطع می کنند. نقطه  $M$

روی خط  $d_1$  و پایین تر از نقطه  $P$  حرکت می کند. چنان چه از  $M$  خطی به موازات محور طول ها

رسم کنیم تا خط  $d_2$  را در نقطه  $N$  قطع کند. مساحت مثلث  $MNP$  به صورت تابعی

از طول نقطه  $M$  کدام است؟

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$  (۲)

$f(x) = (x-2)^2$  (۱)

$f(x) = 2(x-1)(x-2)$  (۴)

$f(x) = (x-1)^2$  (۳)

۱۴- اگر ضابطه تابع مقابل به صورت  $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 0 \\ cx+3 & 0 < x < b \\ x-1 & x \geq b \end{cases}$  باشد، مقدار  $abc$  کدام است؟

۶ (۲)

۲ (۱)

$-\frac{3}{2}$  (۴)

-۳ (۳)

۱۵- فرض کنید  $f(x) = ax + b$  است. اگر  $f(0) \leq 2, f(1) \geq 0, f(2) \leq 4$  باشد بیشترین مقدار ممکن برای  $f(10)$  کدام است؟ (المپیاد ریاضی ایران ۸۶)

۳۶ (۴)

۲۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۱۶- در تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x-a & x > 2 \\ 2x+a+1 & x \leq 2a+2 \end{cases}$  اگر بازه  $[m, n]$  تمام مقادیر ممکن برای  $f(f(a))$  را در بر داشته باشد، حداقل مقدار  $n-m$  چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۲ (۱)

۱۷- اگر تمام مقادیر سهمی  $y = 2x^2 - 3x + 1$  را یک واحد به سمت بالا سپس یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نقاط حاصل روی کدام سهمی زیر قرار می گیرند؟

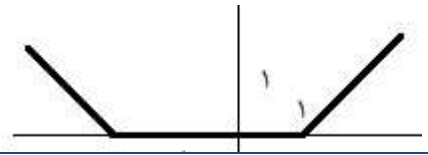
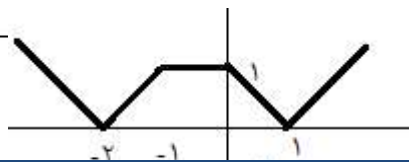
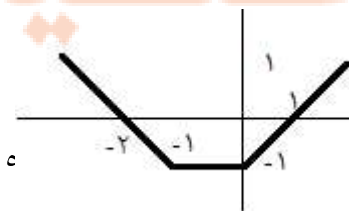
$y = 2x^2 + x - 1$  (۴)

$y = 2x^2 - 7x + 5$  (۳)

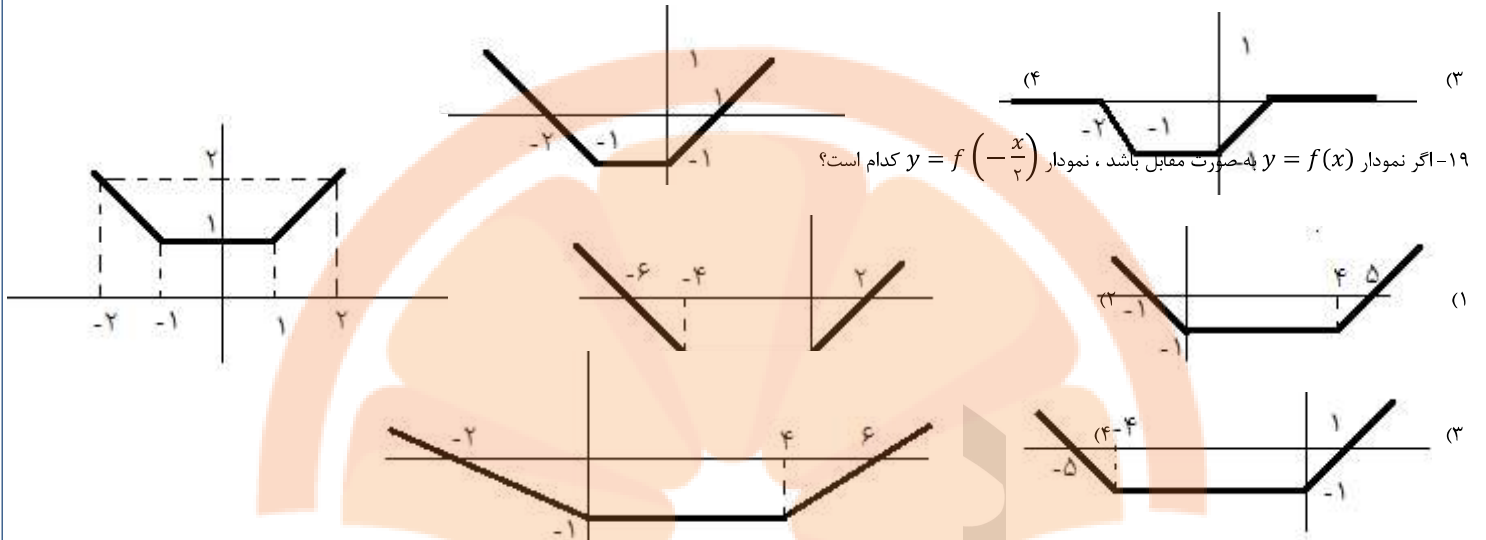
$y = 2x^2 + x + 1$  (۲)

$y = 2x^2 - 7x + 7$  (۱)

۱۸- اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار  $y = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$  کدام است؟



(۱) (۲)



۱۹- اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار  $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$  کدام است؟

۲۰- فرض کنید  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$  در این صورت مقدار عبارت  $S$  کدام است؟ (المپیاد ۷۵)

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

(۱) ۷/۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۶/۵ (۴) ۴/۵

### فصل ششم: ترکیبات

**اصل ضرب:** هر گاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به  $m$  طریق مختلف و جزء دوم به  $n$  طریق مختلف و ... انجام شود آنگاه آن عمل به  $m \times n \times \dots$  طریق مختلف انجام می شود.

نکته: ((و)) نشان اصل ضرب است.

تست: در یک هتل ۶ اتاق وجود دارد. ۴ نفر به چند طریق می توانند وارد این اتاق ها شوند؟ (همه ی افراد می توانند وارد یک اتاق شوند)

(۱)  $2^6$  (۲)  $2^4$  (۳)  $4^6$  (۴)  $6^4$

پاسخ: گزینه ی ۴. انتخاب هر نفر به نفرات دیگر ربطی ندارد و هر شخص ۶ انتخاب دارد.

**اصل جمع:** اگر کار  $A$  را بتوان به  $n$  یا  $m$  یا ... طریق انجام داد. به شرطی که اشتراکی با هم نداشته باشند، آنگاه به طور کلی کار  $A$  را به  $m+n+\dots$  طریق می توان انجام داد.

نکته: ((یا)) نشان اصل جمع است.

تست: از بین ۴ خیاط، ۳ دانشمند و ۲ نویسنده، می خواهیم ۲ نفر را انتخاب کنیم. به چند روش می توانیم این کار را انجام دهیم به طوری که دو نفر منتخب همکار نباشند؟

(۱) ۵۷۶ (۲) ۵۶ (۳) ۲۶ (۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ی ۳. گرامان انتخاب دو نفری غیر همکار است. چند مدل داریم

الف) یک خیاط و یک دانشمند  $3 \times 4 = 12$

ب) یک دانشمند و یک نویسنده  $2 \times 3 = 6$

پ) یک نویسنده و یک خیاط  $2 \times 4 = 8$

پس این کار با  $12+6+8=26$  روش انجام می شود.

تعریف: اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آنگاه  $n!$  برابر است با:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نکته: عمل فاکتوریل را می توانیم هر جایی قطع کنیم، به شرط آنکه در جلوی جمله ی آخر علامت فاکتوریل را قرار دهیم.

مثال:  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2)!$   $5! = 5 \times 4!$

تست: اگر  $56n! = (n + 2)!$  باشد، حاصل  $(n - 1)!$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲۰

پاسخ: گزینه ی ۳.  $(n + 2)! = 56n! \rightarrow (n + 1)(n + 2) = 56 = 7 \times 8 \rightarrow n = 6 \rightarrow (n - 1)! = 5! = 120$

### جایگشت:

طرز قرار گرفتن  $n$  شی در کنار هم را جایگشت  $n$  شی می گویند.

تست: چند عدد سه رقمی بخش پذیر بر ۵ و متشکل از رقم های فرد وجود دارد؟ (سراسری فنی ۸۸)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

حل: چون در مسئله ذکر نشده تکرار مجاز است یا خیر، تکرار را مجاز می گیریم. می خواهیم یک عدد ۳ رقمی با ارقام فر ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ بسازیم. از آنجا که عدد بر ۵ بخش پذیر است پس رقم یکان باید ۵ باشد.

$$5 \times 5 \times 1 = 25$$

مسائلی که در آن ها چند شی مشخص باید کنار هم باشند

تست: ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند. تعداد ۵ رقمی های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

حل: سه رقم فرد را یک مجموعه در نظر می گیریم که این مجموعه به اتفاق دو عدد زوج دیگر یعنی اعداد ۲ و ۴ به ۳! طریق کنار هم جایجا می شوند. اما مجموعه ی اعداد فرد نیز به ۳! طریق کنار هم قرار می گیرند. که بنا به اصل ضرب:

$$3! \times 3! = 36$$

### مسائل یک در میان

تست: ۳ پسر و ۳ دختر به چند طریقی می توانند یک در میان کنار هم قرار گیرند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

حل: اگر پسر ها را با حرف پ و دختر ها را با حرف د نمایش دهیم ترتیب قرار گرفتن یک در میان آن ها به صورت (پ د پ د پ د) یا (د پ د پ د پ) می باشد. چون دختر ها و پسر ها متفاوت اند در بین خود جایجایی دارند. جایگشت پسر ها با فرض ثابت بودن دختر ها ۳! و همچنین جایگشت دختر ها با فرض ثابت بودن پسر ها ۳! است پس:

$$3! \times 2! \times 3! = 72$$

تعریف: تعداد جایگشت های  $r$  شی از  $n$  شی که ترتیب قرار گرفتن آن ها کنار هم مهم باشد را ترتیب از  $n$  می گویند و با نماد  $P(n, r)$  نشان می دهند که از رابطه ی روبرو محاسبه می شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تست: از ۱۲ نفر دانش آموز نمونه، به چند راه می توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟ (سراسری انسانی خارج از کشور ۹۱)

- (۱) ۱۳۲۰ (۲) ۶۶۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۲۲۰

$$P(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 1320$$

حل: چون ترتیب به خاطر متمایز بودن سه کار، اهمیت دارد جواب برابر است:

**تعریف:** تعداد آرایش‌های مختلف  $r$  شی از  $n$  شی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم مهم نباشد را ترکیب  $r$  از  $n$  می‌گویند و با نماد  $C(n, r)$  یا  $\binom{n}{r}$  نشان می‌دهند که از رابطه‌ی مقابل

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{به دست می‌آید:}$$

تست: اگر  $C(n, 4) = P(n-1, 3)$ ، عدد  $n$  کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۴)

$$43 \quad (4) \qquad 34 \quad (3) \qquad 24 \quad (2) \qquad 23 \quad (1)$$

حل: گزینه ی ۲

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} \rightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \rightarrow \frac{n!}{4!} = \frac{(n-1)!}{1} \quad (n-1)! \times 24 = n \times (n-1)! \rightarrow n = 24$$

تست: از بین ۸ نفر که ۳ نفر از آن‌ها، یاشار، حمید و نوید هستند. به چند روش می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری که حتما حمید انتخاب شود و از بین یاشار و نوید حداکثر یک نفر انتخاب شود؟

$$30 \quad (4) \qquad 28 \quad (3) \qquad 24 \quad (2) \qquad 22 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی ۴. از بین ۸ نفر می‌خواهیم ۴ نفر را انتخاب کنیم چون حمید باید انتخاب شود پس انتخاب ۳ از ۷ را داریم که در این حالت  $\binom{7}{3} = 35$  اما یک حالت غیر مطلوب داریم. هم

$$\text{یاشار و هم نوید انتخاب شوند و یک نفر دیگر باقی می‌ماند که انتخاب ۱ از ۵ است. } \binom{5}{1} = 5$$

$$\text{پس حالت‌های مطلوب برابرند: } 35 - 5 = 30$$

نکته: حاصل  $\binom{n}{r}$  نشان دهنده‌ی تعداد زیر مجموعه‌های  $r$  عضوی یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی است.

تست: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۱ چند زیر مجموعه با حداقل ۲ عضو دارد؟

$$969 \quad (4) \qquad 968 \quad (3) \qquad 1014 \quad (2) \qquad 1013 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی ۱ است. حداقل ۲ عضو یعنی ۲ عضوها + ۳ عضوها + ... + ۱۰ عضوها

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - [\binom{10}{0} + \binom{10}{1}] = 1024 - 11 = 1013$$

### سوالات فصل ششم

۱- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد که ابتدا کتاب‌های علمی یک در میان باشد؟

$$72 \quad (4) \qquad 96 \quad (3) \qquad 120 \quad (2) \qquad 144 \quad (1)$$

۲- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آن‌ها تکرار نشده باشد؟

$$\frac{8!}{5!3!} \quad (1)$$

$$\frac{8!}{5!} \quad (2)$$

$$\frac{8!}{3!} \quad (3)$$

$$8!(4)$$

۳-با چهار رقم ۰ و ۱ و ۲ و ۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$18(1)$$

$$20(2)$$

$$15(3)$$

$$10(4)$$

۴-مجموعه  $\{a, b, c, d, e\}$  چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟

$$25(1)$$

$$20(2)$$

$$15(3)$$

$$10(4)$$

۵-با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می توان نوشت؟

$$9(1)$$

$$24(2)$$

$$36(3)$$

$$48(4)$$

۶-از بین ۶ دانش آموز کلاس چهارم و ۵ دانش آموز کلاس سوم می خواهیم انجمنی را با ۴ دانش آموز کلاس چهارم و ۲ دانش آموز کلاس سوم تشکیل دهیم. این عمل به چند طریق ممکن است؟

$$25(1)$$

$$150(2)$$

$$330(3)$$

$$420(4)$$

۷-دانش آموزی باید به ۱۸ سوال از ۲۰ سوال امتحان به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می توان این ۱۸ سوال را انتخاب کرد؟

$$18(1)$$

$$20(2)$$

$$190(3)$$

$$380(4)$$

۸-یک ساختمان با ۸ طبقه و ۵ رنگ مختلف داریم. به چند طریق می توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ آمیزی کرد. به طوری که هیچ دو طبقه مجاوری هم رنگ نباشند؟

$$5^8(1)$$

$$5 \times 4^7(2)$$

$$5 \times 4 \times 3^6(3)$$

$$5 \times 3^7(4)$$

۹-با اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$30(1)$$

$$60(2)$$

$$90(3)$$

$$120(4)$$

۱۰-با استفاده از اعداد مجموعه  $\{1, 2, 5, 8, 9\}$  به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته ایم. در چند حالت این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگ تر و از ۸۰۰۰۰ کوچک تر باشد؟

$$12(1)$$

$$18(2)$$

$$24(3)$$

$$36(4)$$

۱۱-چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگ تر از ۴۰۰۰ وجود دارد؟ (ارقام زوج اند نه اعداد)

$$27(1)$$

$$72(2)$$

$$48(3)$$

$$60(4)$$

۱۲-چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$72(1)$$

$$84(2)$$

$$96(3)$$

$$108(4)$$

۱۳-با ارقام  $\{0, 1, 2, 5, 8\}$  چند عدد چهار رقمی می توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

$$20(1)$$

$$60(2)$$

$$100(3)$$

$$120(4)$$

۱۴-با استفاده از ارقام ۰ و ۲ و ۴ و ۷ و ۳ عددی سه رقمی به تصادف می سازیم. در چند حالت عدد ساخته شده زوج است؟

$$12(1)$$

$$18(2)$$

$$30(3)$$

$$20(4)$$

۱۵-با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)



۶ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۴ (۴)

۱۶- ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند . تعداد ۵ رقمی های حاصل کدام است؟ ( سراسری تجربی ۸۲)

۱۱۲ (۱)

۲۴ (۲)

۳۶ (۳)

۴۸ (۴)

۱۷- تعداد جایگشت های حروف کلمه computer که در آن سه حرف c,m,o به صورت com قرار گرفته باشند چند تا است؟

۵۰۴۰ (۱)

۷۲۰ (۲)

۴۸۰ (۳)

۳۶۰ (۴)

۱۸- از بین ۵ دانش آموز سال اول ، ۴ دانش آموز سال دوم و ۳ دانش آموز سال سوم به چند طریق می توان ۲ نفر انتخاب کرد به شرط آن که از یک پایه نباشند؟

۶۰ (۱)

۴۷ (۲)

۵۴ (۳)

۶۴ (۴)

۱۹- دو تاس را پرتاب می کنیم در چند حالت مجموع دو عدد رو شده مربع کام است؟

۷ (۱)

۹ (۲)

۸ (۳)

۶ (۴)

۲۰- با حروف کلمه Persian چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آن n بعد از S بیاید و S بلافاصله بعد از ۲ بیاید؟

۲۴۰ (۱)

۳۶۰ (۲)

۴۵۰ (۳)

۵۴۰ (۴)

۲۱- سکه ای را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای سومین بار رو بیاید . تعداد حالاتی که در پرتاب بیستم به این منظور برسیم چقدر است؟

$\binom{20}{3}$  (۱)

$\binom{19}{3}$  (۲)

$\binom{20}{2}$  (۳)

$\binom{19}{2}$  (۴)

۲۲- در چند جایگشت از حروف کلمه fraction تمام حروف صدادر در کنار یکدیگر قرار دارند؟

۸! (۱)

$6! \times 3!$  (۲)

$5! \times 3!$  (۳)

۷! (۴)

۲۳- در مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  چند عدد بدون ۹ وجود دارد؟

۷۲۹ (۱)

۷۲۸ (۲)

۷۲۷ (۳)

۷۲۶ (۴)

۲۴- در صفحه شطرنج هشت در هشت چند مستطیل با مساحت ۱۲ واحد سطح وجود دارد؟

۵۰ (۱)

۵۱ (۲)

۱۰۰ (۳)

۱۰۲ (۴)

۲۵- از بین ۸ زوج (۱۶ زن و شوهر) به چند طریق می توان یک مرد و یک زن انتخاب کرد که زن و شوهر نباشند؟

۶۴ (۱)

۱۶ (۲)

۱۵ (۳)

۵۶ (۴)

۲۶- می خواهیم از بین ۱۰ سوال ۶ سوال پاسخ دهیم . اگر مجبور باشیم از ۵ سوال اول حداقل به ۳ سوال پاسخ دهیم ، این کار به چند طریق ممکن است؟

۱۰۰ (۱)

۱۵۰ (۲)

۱۵۵ (۳)

۱۶۰ (۴)

۲۷- در چند جایگشت از حروف کلمه MATRIX عبارت MAT وجود دارد؟

۱۲۰ (۱)

۳۶ (۲)

۲۴ (۳)

۷۲ (۴)

۲۸- تمام اعداد ۴ رقمی و بدون تکرار را با ارقام (۰ و ۳ و ۴) را نوشته ایم . مجموع این اعداد کدام است؟

۲۹- به چند طریق می توان ۳ میوه مختلف را بین ۵ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداکثر یک میوه برسد؟

۳۵ (۱)

۵<sup>۳</sup> (۲)

۶۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

۳۰- معادله  $x + y = 100$  در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱۰۰ (۱)

۹۹ (۲)

۱۰۱ (۳)

۹۸ (۴)

۳۱- در حاصل بسط  $(x + y)^5$  ضریب  $x^2 y^3$  چند است؟

۶ (۱)

۱۰ (۲)

۲۰ (۳)

۵ (۴)

۳۲- به چند طریق می توان از ۱۲ نفر را به دو گروه ۵ و ۷ نفره تقسیم کرد؟

 $\frac{1}{2} \binom{12}{7}$  (۱) $\binom{12}{5}$  (۲)۲<sup>۱۲</sup> (۳)۲  $\binom{12}{5}$  (۴)

# نزد پنجم

## تلاشی در مسیر موفقیت

۱- رضا میخواهد از عرض رود خانه ای عبور کند. برای سهولت در عبور از رودخانه ۷ سنگ در عرض رود خانه قرار داده ایم که رضا بتواند به کمک آن ها از رود خانه بگذرد. به چند طریق رضا میتواند از عرض رود خانه عبور کند به شرط آنکه حداقل بر روی یکی از سنگ ها پا بگذارد و روی سنگ ها به عقب باز نگردد؟

۱۲۸(۱)      ۱۲۹(۲)      ۱۲۷(۳)      ۱۲۶(۴)

۲- در مجموعه  $S = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, \dots, 200\}$  چند عدد بر ۲ و ۳ بخش پذیر بوده ولی بر هر دوی آن ها بخش پذیر نباشد؟

۶۷(۱)      ۶۳(۲)      ۵۴(۳)      ۵۰(۴)

۳- حاصل  $A = \binom{5}{5} + \binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{1}$  کدام است؟

۱)  $\binom{15}{3}$       ۲)  $\binom{15}{8}$       ۳)  $\binom{15}{2}$       ۴)  $\binom{15}{5}$

۴- مجموعه ی A دارای n عضو و مجموعه ی B دارای n+1 عضو می باشد. اگر اختلاف اختلاف تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی دو مجموعه ی B و A برابر ۱۲۰ باشد،

مجموعه ی A چند زیر مجموعه ی ۳ عضوی دارد؟

۸۴(۱)      ۲۱۰(۲)      ۱۲۰(۳)      ۱۶۵(۴)

۵- حاصل  $A = \binom{100}{1} - \binom{100}{2} + \binom{100}{3} - \binom{100}{4} + \dots + \binom{100}{100}$  کدام گزینه است؟

۱) ۲۱۰۰      ۲) ۲۹۹      ۳) ۲۵۰      ۴) صفر

۶- مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  چند زیر مجموعه دارد که بزرگ ترین عضو آن ها ۶ است؟

۶۴(۱)      ۳۲(۲)      ۱۰(۳)      ۱۶(۴)

۷- چند تا از عدد های مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$  نه بر ۸ بخش پذیرند و نه بر ۱۲؟ (المپیاد بلغارستان ۹۳)

۲۰۷(۱)      ۷۹۲(۲)      ۸۰۲(۳)      ۸۳۳(۴)

۸- ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور طول ها در نظر می گیریم و آن ها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور عرض ها وصل کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید هیچ سه تایی از یک نقطه نمی گذرد. تعداد تقاطع ایجاد شده چند تا است؟ (المپیاد ایران ۷۴)

۷۹۸۰۰(۱)      ۴۰۰۰۰(۲)      ۳۶۱۰۰(۳)      ۴۲۰۰۰(۴)

۹- ۵ مهره ی سفید و ۱۰ مهره ی سیاه داریم. به چند طریق می توان مهره ها را در یک ردیف از چپ به راست کنار هم قرار داد،

به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره ی سفید حداقل یک مهره ی سیاه قرار داشته باشد؟ (المپیاد ایران ۷۴)

۱۲۶(۱)      ۱۳۲(۲)      ۲۱۸(۳)      ۲۵۲(۴)

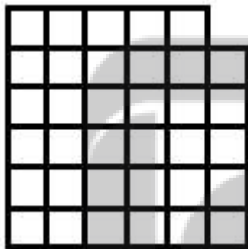
۱۰- در شکل مقابل چند مربع وجود دارد؟ (المپیاد ایران ۷۷)

۱۳۵(۱)

۷۵(۲)

۸۵(۳)

۱۰۵(۴)



۱۱- یک صفحه مشبک ۴x۵ داریم. در این صفحه چند شکل مانند (افقی یا عمودی) (المپیاد ۸۱ ایران)



۳۰(۱)      ۳۱(۲)      ۳۲(۳)      ۳۳(۴)

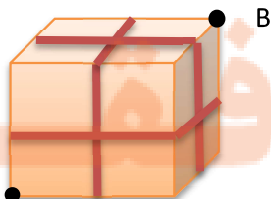
۱۲- می خواهیم عدد ۷۲ را طی چند مرحله به عدد ۱ تبدیل کنیم. در هر مرحله مجازیم عددی که تا این مرحله به دست آمده را فقط بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ تقسیم کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟ (المپیاد ریاضی ۸۳)

۵(۱)      ۶(۲)      ۱۰(۳)      ۱۲(۴)

۱۳- شبکه مربعی ۲x۲x۲ را در نظر بگیرید. مورچه ای می خواهد از کوتاه ترین مسیر با حرکت

روی شبکه های سطح مکعب از راس A به راس B برود. این کار به چند طریق ممکن است؟

۶۰(۱)      ۹۰(۲)      ۳۶(۳)      ۵۴(۴)



۱۴- به چند طریق میتوان در جدولی ۳x۳، سه مهره ی سفید و سه مهره ی سیاه را طوری قرار داد که در هر سطر و در هر ستون یک مهره ی سفید و یک مهره ی سیاه وجود داشته باشد؟ (المپیاد ریاضی ۸۵)

۶(۱) ۱۲(۲) ۱۸(۳) ۲۴(۴)

۱۵- به چند طریق می توان ۱۱ خانه از جدول  $2 \times 12$  را سیاه کرد به طوری که دو خانه ی سیاه ضلع مشترک نداشته باشند؟

۴۲(۱) ۴۴(۲) ۴۶(۳) ۴۸(۴)

۱۶- به چند طریق می توان ۵ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه را در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که دقیقا ۳ بلوک سیاه داشته باشد؟ (یک بلوک سیاه چند مهره ی سیاه کنار هم است که در دو طرف آن مهره ی سیاه دیگری نباشد. مثلا ارایش مقابل دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد.)

۵۴(۱) ۱۲۰(۲) ۲۰۰(۳) ۴۰۰(۴)

۱۷- چند سه تایی  $(a, b, c)$  از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک ترین مضرب مشترک  $a, b, c$  برابر ۷۰۰۰ باشد؟

۱۰۰۸(۱) ۲۱۸۷(۲) ۵۱۰۳(۳) ۹۵۸۳(۴)

۱۸- شخصی در اصفهان زندگی می کند و می خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به اصفهان بازگردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه ی بین این چهار شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روز های زوج موجود است. اگر این شخص، سفر خود را شنبه آغاز کند به چند حالت می تواند این سفر را انجام دهد؟

۲۱۶(۱) ۷۲(۲) ۱۰۸(۳) ۱۲۰(۴)

۱۹- دانش آموزی میخواهد کتاب های ریاضی، فیزیک، ادبیات، عربی اول و دوم دبیرستان خود را در ۸ هفته و در هر هفته یک کتاب مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که کتاب اول آن موقع را قبلا خوانده باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟

۷۰(۱) ۵۷۶(۲) ۲۵۲۰(۳) ۲۰۱۶۰(۴)

۲۰- به چند طریق می توان دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد

به طوری که  $\frac{a+b}{a-b}$  عددی طبیعی باشد؟

۱۹(۱) ۲۴(۲) ۲۸(۳) ۲۹(۴) ۵

## فصل هفتم: آمار و احتمال

### احتمال رخداد یک پیشامد:

احتمال رخداد پیش آمد از دستور مقابل به دست می آید.  $\text{احتمال رخداد یک پیش آمد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{همه تعداد حالت های ممکن}}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نکته: اگر احتمال دو پیشامد مساوی باشد آن ها را هم شانس می نامند.

نکته: حاصل جمع عددهای احتمال در همه ی زیر مجموعه های یک پیشامد برابر یک است.

مثال: یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. همه ی حالت های ممکن را نمایش دهید. و احتمال پیشامد  $A$  که در آن فقط یک بار پشت بیاید را بیابید.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (ر-ر-ر), (ر-ر-پ), (ر-پ-پ), (ر-پ-ر), \\ (پ-ر-ر), (پ-ر-پ), (پ-پ-ر), (پ-پ-پ) \end{array} \right\}$$

$$A = \{(ر-ر-پ), (ر-پ-ر), (پ-ر-ر)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

تست: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\frac{۲}{۹} (۱) \quad \frac{۵}{۱۸} (۲) \quad \frac{۱}{۴} (۳) \quad \frac{۵}{۱۲} (۴)$$

حل: چون دو تاس را پرتاب می کنیم پس فضای نمونه ای برابر ۳۶ است. اکنون حالت هایی را که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ می شوند را می نویسیم:

$$A = \{(۱,۳), (۳,۱), (۲,۲), (۲,۶), (۶,۲), (۳,۵), (۵,۳), (۴,۴), (۶,۶)\} \quad P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

### عملیات روی پیشامد ها

الف) متمم یک پیشامد: اگر  $A$  یک پیشامد باشد متمم  $A$  آن است که  $A$  اتفاق نیوفتد و با  $\bar{A}$  نمایش داده می شود:  $P(\bar{A}) = ۱ - P(A)$

ب) اشتراک دو پیشامد: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد باشند،  $A \cap B$  زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  رخ دهند.

پ) اجتماع دو پیشامد: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد باشند،  $A \cup B$  زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  یا هر دو رخ دهند.

و داریم:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

تفاضل دو پیشامد: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد باشند،  $A - B$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی پیشامد  $B$  رخ ندهند.

و داریم:  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$        $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

تست: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند، به طوریکه  $P(A) = 0/6$  و  $P(B) = 0/7$  و  $P(A \cap B) = 0/2$  آنگاه حاصل  $P(\bar{A} \cap B)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) 0/1      (۲) 0/3      (۳) 0/4      (۴) 0/5

حل:  $P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow 0/2 = 0/6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0/4$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/7 - 0/4 = 0/3$

### انواع حالت های پیشامد

۱-  $A - B$  رخ دهد و  $B$  رخ ندهد.  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

۲-  $A$  و  $B$  رخ دهد ولی  $C$  رخ ندهد.  $n((A \cap B) - C) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

۳-  $A$  رخ دهد ولی  $B$  و  $C$  هم زمان رخ ندهند:  $n(A) - n(A \cap B \cap C)$

۴-  $A$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد و  $C$  رخ ندهد.

$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

۵- فقط  $A$  رخ دهد یا فقط  $B$  رخ دهد.  $n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

مثال تعداد ارقام دو رقمی که بر ۷ بخش پذیرند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند چقدر است؟

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = \left[ \left( \frac{99}{7} - \frac{9}{7} \right) \right] - \left[ \left( \frac{99}{77} - \frac{9}{77} \right) \right] = (14 - 1) - (1 - 0) = 12$

در مثال بالا برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۹ بر ۷ را بیابیم.

### تست های فصل دوم

۱- سکه ای را می اندازیم. اگر رو آمد دو تاس و یک سکه و اگر پشت آمد یک تاس و دو سکه دیگر را پرتاب می کنیم. فضای نمونه ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۷۲ (۴)

۶۰ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

۲- جدول مقابل تعداد لامپ های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از تولیدات دو کارخانه A و B است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود ، با کدام احتمال این لامپ ۱۰۰ وات است؟

		A	۲۰	۱۴
		B	۲۲	۳۴

۱۰۰ وات کارخانه ۶۰

(۱)  $\frac{7}{15}$  (۲)  $\frac{8}{15}$

(۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۳- از بین اعداد طبیعی یک رقمی به تصادف یک عدد انتخاب کرده و زوج یا فرد بودن آن را یادداشت می کنیم. اگر این آزمایش تصادفی به دفعات زیاد تکرار شود ، فراوانی نسبت پیشامد عدد زوج چگونه است؟

(۱) تقریباً  $\frac{4}{9}$  (۲) دقیقاً  $\frac{4}{9}$  (۳) کمتر از  $\frac{4}{9}$  (۴) بیش تر از  $\frac{4}{9}$

۴- در فضای نمونه ای هم شانس  $S = \{a, b, c, d, e\}$  ، اگر  $A = \{b, c\}$  و  $B = \{a, c, e\}$  آن گاه  $P(A \cup B)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{6}{25}$

۵- ۷ نفر که سه تایی آن ها برادر هستند در صف می ایستند . با کدام احتمال ۳ برادر در اول ، وسط و آخر صف قرار دارند؟

(۱)  $\frac{1}{21}$  (۲)  $\frac{3}{7}$  (۳)  $\frac{1}{210}$  (۴)  $\frac{1}{35}$

۶- پدر ، مادر و ۴ فرزند آن ها در ردیف می ایستند تا عکس بگیرند . با کدام احتمال پدر و مادر کنار هم و در یکی از دو انتهای صف قرار دارند؟

(۱)  $\frac{2}{15}$  (۲)  $\frac{1}{30}$  (۳)  $\frac{1}{60}$  (۴)  $\frac{1}{20}$

۷- در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد . این مهره ها را به طور تصادفی ، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می کنیم . با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالی خارج نمی شوند؟

(۱)  $0/1$  (۲)  $0/15$  (۳)  $0/2$  (۴)  $0/25$

۸- رئیس ، منشی و ۴ کارمند دور یک میز گرد می نشینند ، با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می گیرد؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۹- اگر با ارقام ۶ ، ۴ ، ۱ و ۲ یک عدد ۴ رقمی بسازیم ، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۱

۱۰- روی هر یک از چند کارت یکسان ، اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  را نوشته ، به تصادف یک کارت از بین آن ها بیرون می آوریم . با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت ها فرد هستند؟

(۱)  $0/2$  (۲)  $0/25$  (۳)  $0/3$  (۴)  $0/4$

۱۱- از بین اعداد طبیعی سه رقمی ، به تصادف یک عدد برداشته ایم . با کدام احتمال ، لااقل یک بار رقم ۲ در این اعداد ظاهر شده است؟

(۱)  $0/24$  (۲)  $0/25$  (۳)  $0/26$  (۴)  $0/28$

۱۲- در طرفی ۱۰ گوی یکسان با شماره های  $0, 1, 2, \dots, 9$  قرار دارد . یک گلوله به تصادف خارج کرده و شماره آن را یادداشت می کنیم و دوباره به ظرف برمی گردانیم . سپس گوی دیگری خارج کرده ، شماره آن را در سمت راست رقم قبلی می نویسیم . با کدام احتمال عدد حاصل بزرگ تر ۵۵ است؟

۰/۴ (۱)

۰/۴۴ (۲)

۰/۴۵ (۳)

۰/۴۸ (۴)

۱۳- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایش برداشته شوند. با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟

$\frac{2}{7}$  (۱)

$\frac{2}{5}$  (۲)

$\frac{3}{7}$  (۳)

$\frac{3}{5}$  (۴)

۱۴- از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می شوند. با کدام احتمال دو نفر معرفی شده از گروه ریاضی هستند؟

$\frac{25}{56}$  (۱)

$\frac{15}{32}$  (۲)

$\frac{15}{28}$  (۳)

$\frac{9}{14}$  (۴)

۱۵- از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن ها در مورد تاریخ است، به طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده ایم. احتمال اینکه سه کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

$\frac{15}{66}$  (۱)

$\frac{17}{66}$  (۲)

$\frac{35}{132}$  (۳)

$\frac{37}{132}$  (۴)

۱۶- از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده اند. احتمال اینکه دو نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

$\frac{3}{14}$  (۱)

$\frac{2}{7}$  (۲)

$\frac{5}{14}$  (۳)

$\frac{3}{7}$  (۴)

۱۷- از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن ها معرفی شوند. با کدام احتمال از هر گروه ۱ نفر معرفی شده است؟

$\frac{1}{8}$  (۱)

$\frac{1}{7}$  (۲)

$\frac{3}{14}$  (۳)

$\frac{2}{21}$  (۴)

۱۸- احتمال اینکه سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه هر سه سفید باشند، کدام است؟

$\frac{1}{8}$  (۱)

$\frac{4}{33}$  (۲)

$\frac{5}{33}$  (۳)

$\frac{5}{33}$  (۴)

۱۹- ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف دو مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ اند؟

$\frac{2}{5}$  (۱)

$\frac{4}{9}$  (۲)

$\frac{5}{9}$  (۳)

$\frac{3}{5}$  (۴)

۲۰- از میان ۶ زوج (زن و شوهر) ۲ نفر به تصادف بر می داریم. با کدام احتمال یک زوج انتخاب می شود؟

$\frac{1}{6}$  (۱)

$\frac{1}{11}$  (۲)

$\frac{1}{12}$  (۳)

$\frac{1}{15}$  (۴)

۲۱- از بین ۴ گوی سفید و ۵ گوی سیاه متمایز، بدون جای گذاری دو گوی بیرون می آوریم. با کدام احتمال اولی سیاه و دومی سفید است؟

$\frac{4}{9}$  (۱)

$\frac{20}{81}$  (۲)

$\frac{5}{18}$  (۳)

$\frac{7}{18}$  (۴)

۲۲- در بین ۴ نفر با کدام احتمال فقط یک نفر در شنبه متولد شده است؟

$\left(\frac{6}{7}\right)^4$  (۱)

$3 \cdot \frac{1}{7}$  (۲)

$\left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \frac{4}{7}$  (۳)

$\frac{1}{7}$  (۴)

۲۳- در ظرفی پنج مهره با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ قرار دارند. ۳ مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره های این سه مهره عدد فرد است؟

$\frac{4}{10}$  (۱)

$\frac{5}{10}$  (۲)

$\frac{3}{10}$  (۳)

$\frac{7}{10}$  (۴)

۲۴- احتمال اینکه از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟



$$\frac{7}{16} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

۲۵- در پرتاب ۴ سکه با هم ، احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{7}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{16} \text{ (۱)}$$

۲۶- در پرتاب ۶ سکه سالم ، احتمال آن که همه سکه ها یکسان ظاهر شوند ، چند برابر آن است که نصف سکه ها رو و نصف دیگر پشت بیاید؟

$$\frac{1}{10} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{30} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۱)}$$

۲۷- سه عدد تاس را با هم پرتاب می کنیم . با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{19}{27} \text{ (۳)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{8}{27} \text{ (۱)}$$

۲۸- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم ، احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد ، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۱)}$$

۲۹- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند .  $P(A \cap \bar{B})$  کدام است ؟

$$P(A) - P(A \cap B) \text{ (۴)} \quad 1 - P(A) \cdot P(B) \text{ (۳)} \quad P(A) \cdot P(\bar{B}) \text{ (۲)} \quad P(A) - P(B) \text{ (۱)}$$

۳۰- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند ، در کدام حالت  $P(B - A) = P(B) - P(A)$  درست است؟

$$P(A) < P(B) \text{ (۴)} \quad A \cap B = \emptyset \text{ (۳)} \quad \text{همواره (۲)} \quad A \subseteq B \text{ (۱)}$$

۳۱- اگر  $P(A - B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) = P(A \cap B)$  باشد ،  $P(A - B)$  کدام است؟

$$P(\bar{B} \cap A) \text{ (۴)} \quad P(A \cap B) \text{ (۳)} \quad \text{صفر (۲)} \quad P(A) \text{ (۱)}$$

۳۲- اگر  $P(A \cup B) = 4P(A \cap B)$  باشد ، حاصل  $\frac{P(A)P(B)}{P(A \cup B) - 3P(A \cap B)}$  کدام است؟

$$3 \text{ (۴)} \quad 4 \text{ (۳)} \quad 5 \text{ (۲)} \quad 2 \text{ (۱)}$$

۳۳-  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار و  $P(\bar{A}) = \frac{4}{3} - P(\bar{B})$  است با کدام احتمال حداقلی یک از آن ها رخ می دهد؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

۳۴- با فرض  $P(A - B) = \cdot/41$  و  $P(A \cap B) = \cdot/17$  ، مقدار  $P(\bar{A})$  کدام است؟

$$\cdot/59 \text{ (۴)} \quad \cdot/42 \text{ (۳)} \quad \cdot/58 \text{ (۲)} \quad \cdot/24 \text{ (۱)}$$

۳۵- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند ، به طوری که  $P(A) = 2P(B) = \cdot/8$  و  $P(A - B) + P(B - A) = \cdot/6$  آن گاه  $P(\bar{B} \cap A)$  کدام است؟

$$\cdot/5 \text{ (۴)} \quad \cdot/4 \text{ (۳)} \quad \cdot/3 \text{ (۲)} \quad \cdot/2 \text{ (۱)}$$

۳۶- اگر  $P(A \cap B) = \frac{P(\bar{B})}{3} = \frac{P(A)}{2} = \frac{P(A \cup B)}{4}$  باشد ،  $P(A)$  کدام است؟

$$\frac{1}{5} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۱)}$$

۳۷- اگر  $\frac{P(\bar{A})}{6} = P(A - B) = P(B - A) = P(A \cap B)$  باشد ،  $\frac{P(\bar{B})}{P(A \cup B)}$  کدام است؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۳۸- اگر  $P(A - B) = \frac{2}{5}$  و  $P(B - A) = \frac{1}{3}$  باشد، بیشترین مقدار  $P(A) + P(B)$  کدام است؟

۱ (۱)  $\frac{11}{15}$  (۲)  $\frac{19}{15}$  (۳)  $\frac{23}{15}$  (۴)

۳۹- کسانی که به یک پرسش مطرح شده پاسخ درست داده اند، مطابق جدول زیر از لحاظ جنسیت و سن دسته بندی شده اند. اگر فقط یک جایزه به یکی از آن ها داده شود، با کدام احتمال فرد انتخاب شده مرد است و بیش تر از ۳۰ سال سن دارد؟

بیشتر از ۳۰ سال		۰/۱۲ (۳)

زن	مرد		
۳۸	۴۸	۰/۱۸ (۲)	۰/۱۶ (۱)
کم تر از ۳۰ سال	۷۵	۸۲	۰/۲۵ (۴)

۴۰- احتمال قبول شدن دانش آموزی در درس فیزیک  $0/55$  و در شیمی  $0/6$  است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود  $0/75$  باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟

۰/۳۵ (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۴۵ (۳) ۰/۵ (۴)

۴۱- تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آن ها تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده اند. . . اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود با کدام احتمال این فرد نه تاجر است نه اولین بار سفر کرده است؟

$\frac{4}{9}$  (۱)  $\frac{5}{9}$  (۲)  $\frac{5}{8}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)

۴۲- از مجموعه  $\{201, 202, 203, \dots, 500\}$  یک عدد به طور تصادفی انتخاب کردیم. با کدام احتمال، این عدد نه مضرب چهار و نه مضرب پنج است؟

۰/۴۵ (۱) ۰/۵۴ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۶۴ (۴)

۴۳- اگر  $A, B, C$  سه پیشامد دو به دو ناسازگار از فضای نمونه ای  $S$  باشند و پیشامد  $A \cup B \cup C$  حتمی باشد، با فرض  $P(A) = 2P = 3P(C)$  مقدار  $P(A \cup C)$  کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۱)  $\frac{5}{6}$  (۲)  $\frac{8}{11}$  (۳)  $\frac{7}{11}$  (۴)

۴۴- مقدار یک متغیر از میان (( سفید، مشکی، قره ای و بژ )) انتخاب می شود. نوع آن کدام است؟

(۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۴۵- کم ترین مقدار یک متغیر ۱ و بیشترین آن ۶ است. کدام نتیجه گیری درست است؟

(۱) مقدار این متغیر حتما عددی از بازه (۱,۶) است.  
 (۲) این متغیر حتما مقادیر پیوسته دارد  
 (۳) این متغیر حتما مقادیر گسسته دارد  
 (۴) مقدار این متغیر حتما در فاصله [۱,۶] خواهد بود.

۴۶- کدام متغیر کمی و پیوسته است؟

(۱) مقام ورزشکار در مسابقه (۲) تعداد فرزندان (۳) سال تولید خودرو (۴) سرعت خودرو

# تلاشی در مسیر موفقیت

آزمون فصل هفتم

۱- یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۴۰۰ انتخاب می‌کنیم. اگر  $A$  پیشامد آن باشد که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد و بر ۵ بخش پذیر نباشد

تعداد اعضای پیشامد  $A$  چه قدر است؟

(۱) ۱۳۳ (۲) ۵۳ (۳) ۱۰۷ (۴) ۸۹

۲- دو تاس را پرتاب می‌کنیم و اعداد آمده را به جای  $a, b$  در معادله  $ax^2 + bx + c$  قرار می‌دهیم. احتمال اینکه این معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد چقدر است؟

(۱)  $\frac{25}{36}$  (۲)  $\frac{19}{36}$  (۳)  $\frac{17}{36}$  (۴)  $\frac{13}{36}$

۳- یک تاس را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که حداقل یک بار ۵ یا ۶ بیاید، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{8}{27}$  (۲)  $\frac{20}{27}$  (۳)  $\frac{19}{27}$  (۴)  $\frac{11}{27}$

۴- در پرتاب سه تاس احتمال آن که مجموع سه عدد آمده از ۱۶ بیشتر نباشد، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{211}{216}$  (۲)  $\frac{35}{36}$  (۳)  $\frac{53}{54}$  (۴)  $\frac{107}{108}$

۵- از میان هشت نفر به نام های  $a_1, a_2, \dots, a_8$  چهار نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. تعداد اضای پیشامدی که دو نفر

$a_1$  و  $a_2$  با هم جزو انتخابی‌ها نباشند، چه قدر است؟

- ۵۵(۱)      ۶۰(۲)      ۶۵(۳)      ۷۰(۴)

۶- در ردیف اول صفحه‌ی شطرنج، ۲ رخ، ۲ اسب، ۲ فیل، یک وزیر و یک شاه وجود دارد. اگر آن‌ها را به تصادف در ردیف اول بچینیم، احتمال آن که درست چیده شده باشند چقدر است؟

- $\frac{1}{8!}$  (۱)       $\frac{2}{7!}$  (۲)       $\frac{3}{6!}$  (۳)       $\frac{4}{5!}$  (۴)

۷- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل بوده و  $P(A) = 0.2$  و  $P(B) = 0.3$  باشد، حاصل  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  کدام است؟

- ۰/۸۴(۱)      ۰/۵۶(۲)      ۰/۷۲(۳)      ۰/۴۸(۴)

۸- از بین اعداد ۱ تا ۵۰۰ عددی به طور تصادفی انتخاب می‌شود. پیشامد  $A$  که در آن عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر بوده و بر ۵ بخش پذیر نباشد، چند عضو دارد؟

- ۱۳۳(۱)      ۱۶۷(۲)      ۲۶۶(۳)      ۲۹۳(۴)

۹- در شکل مقابل، شخصی در نقطه‌ی  $A$  قرار دارد و در جهت نشان داده شده شروع به حرکت می‌کند. در اولین دو راهی احتمال خروج از راهرو

$\frac{1}{4}$  در دومین دو راهی احتمال خروج از راهرو  $\frac{1}{3}$  و در سومین دو راهی احتمال خروج از راهرو  $\frac{1}{4}$  است. با چه احتمالی این شخص در سومین دور از این راهرو خارج می‌شود؟

- $\frac{1}{24}$  (۱)       $\frac{5}{64}$  (۲)

- $\frac{7}{24}$  (۳)       $\frac{3}{64}$  (۴)

۱۰- در پرتاب سه تاس مجموع اعداد تاس‌ها برابر ۱۵ شده است. احتمال آن که این سه عدد برابر نباشند، چه قدر است؟

- $\frac{4}{5}$  (۱)       $\frac{7}{10}$  (۲)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $\frac{9}{10}$  (۴)

۱۱- اگر  $P(A \cap B) = 2P(A \cup B)$  باشد، حاصل  $\frac{P(A)+P(B)}{5P(A \cup B) - 2P(A \cap B)}$  کدام است؟

- $\frac{2}{7}$  (۱)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $\frac{4}{5}$  (۴)

۱۲- اگر  $3P(A \cup B) = 4P(B - A) + 5P(A - B)$  باشد، حاصل  $\frac{P(B - A)}{P(B)}$  کدام است؟

- $\frac{1}{4}$  (۱)      ۲(۲)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{2}{3}$  (۴)

۱۳- از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال

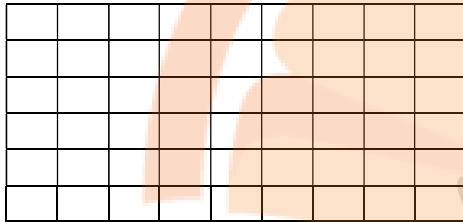
آن که حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد، چه قدر است؟

- ۰/۷۵(۱)      ۰/۷۴(۲)      ۰/۷۳(۳)      ۰/۷۲(۴)

۱۴- روی وجوه مکعب  $A$  اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و روی وجوه مکعب  $B$  اعداد ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ نوشته شده است. دو مکعب را پرتاب می کنیم ، احتمال آن که  $A$  از  $B$  ببرد چقدر است؟ (کسی برنده است که عدد مکعب آن بزرگ تر باشد).

(۱)  $\frac{1}{12}$       (۲)  $\frac{1}{9}$       (۳)  $\frac{1}{36}$       (۴)  $\frac{1}{18}$

۱۵- از بین مستطیل هایی که در شبکه ی مقابل وجود دارند، یکی را به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال اینکه مربع انتخاب شود چقدر است؟  
( طول و عرض مستطیل به ترتیب ۹ و ۶ واحد می باشد)



(۱)  $\frac{7}{45}$       (۲)  $\frac{22}{135}$

(۳)  $\frac{8}{45}$       (۴)  $\frac{23}{135}$

۱۶- با ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۷، یک عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام نوشته ایم، احتمال آن که این عدد بر ۳ بخش پذیر باشد ، کدام است؟

(۱)  $\frac{53}{147}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{57}{140}$       (۴)  $\frac{61}{119}$

۱۷- دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل و  $P(A - B) = \frac{1}{3}$  و  $P(B - A) = \frac{1}{6}$  می باشد.

$P(A \cup B)$  کدام می تواند باشد؟

(۱)  $\frac{5}{6}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{5}$       (۴) ۱

۱۸- ۶ نفر به نام های  $a, b, c, d, e, f$  می خواهند در یک مهمانی سخنرانی کنند . احتمال اینکه بین  $a, b$  دقیقاً دو نفر سخنرانی کنند ، چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۹- اگر  $P(A \cap B) = \frac{P(\bar{A})}{2} = \frac{P(\bar{B})}{3} = P(A \cup B)$  باشد ،  $P(A)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$       (۲)  $\frac{2}{5}$       (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{1}{5}$

۲۰- در یک مسابقه تیر اندازی احتمال آن که تیر فرد  $A$  به هدف بخورد  $\frac{3}{5}$  و احتمال آنکه تیر فرد  $B$  به هدف بخورد  $\frac{1}{3}$  است. احتمال آنکه حداقل یکی از آن ها تیر را به هدف بزند چقدر است؟

(۱)  $\frac{4}{5}$       (۲)  $\frac{2}{5}$       (۳)  $\frac{4}{9}$       (۴)  $\frac{5}{9}$


# تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)