تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Subject:
Year: Month: Date:

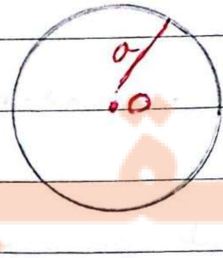
هندسه: شاخه‌ای از ریاضیات می‌باشد که پدیده‌های اطراف ما را شبیه‌سازی می‌کند.
و مفاهیم آن شهودی و ملموس می‌باشد.

مفاهیم هندسه: ۱- تعاریف: مفاهیمی هستند که به وسیله‌ی اسمی مشخص می‌شوند و پذیرفتن آنها نیاز به دلیل ندارد. ۲- اصول: مفاهیمی هستند که پذیرفتن درستی آنها نیاز به دلیل ندارد (بدیهی). ۳- قضایا: مفاهیم کلی‌ای هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند.

یادآوری: حالت هم‌نهشتی دو مثلث. (ض ز ض). (ض ض ض). (ز ض ز)
(و ز). (و ض) مخصوص مثلث‌های قائم‌الزاویه.

درس اول « ترسیم‌های هندسی و استدلال »

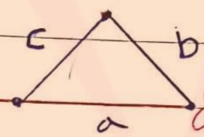
۱- نقاطی را تعیین کنید که از نقطه O به فاصله r باشد.



تمامی نقاط روی دایره‌ی به مرکز O و شعاع r قرار می‌گیرند.

Subject:
Year: Month: Date:

۲ـ روش رسم یک مثلث با طول اضلاع a و b و c را توضیح دهید.

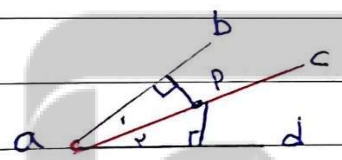


a را می‌کشیم و سپس با پرگار ۲ کمان از دو سر a به اندازه c و b می‌کشیم و بهم متصل

برخی خواص نیم ساز و ترسیم آن:

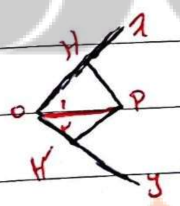
نیم ساز یک زاویه: نیم خطی که از راس زاویه رسم می شود و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

۱ـ ثابت کنید هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



$$\left.\begin{array}{l} aP = aP \\ a_1 = a_2 \end{array}\right\} \text{(وز)} \Rightarrow$$

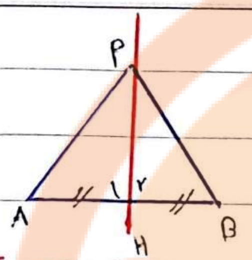
۲ـ ثابت کنید نقطه‌ای که فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی نیم ساز زاویه قرار دارد.



$$\left.\begin{array}{l} PH = PH' \\ OP = OP \end{array}\right\} \text{(وض)} \Rightarrow \triangle OPH \cong \triangle OPH'$$

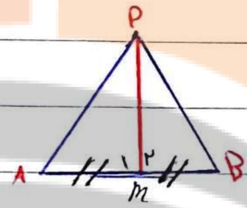
عمود منصف: به خطی که در وسط یک پاره خط بر آن عمود رسم می شود.

سؤال: ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک اندازه است؟



$PH = PH$
$H_1 = H_2$
$AB = HB$
} (ض ز ض) $\Rightarrow \overset{\Delta}{PAH} \cong \overset{\Delta}{PBH} \Rightarrow P' = PB$

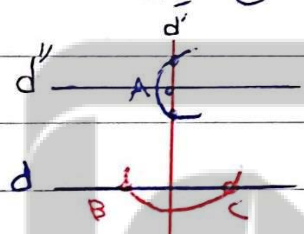
α سوال ۵: ثابت کنید اگر فاصله یک نقطه از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه روی



عمود منصف قرار دارد. از P به وسط AB وصل می‌کنیم.

$PA = PB$
$Am = Bm$
$Pm = Pm$
} (ض ض ض) $\Rightarrow \overset{\Delta}{PAm} \cong \overset{\Delta}{PmB} \Rightarrow m_1 = m_2$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.



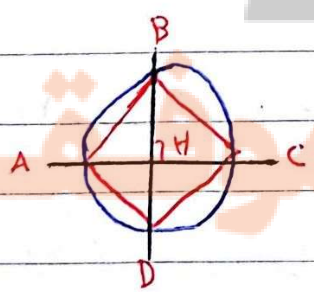
رسم ۵: از نقطه‌ی A خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم

و سپس در نقطه d'' بر d' عمود رسم می‌کنیم چون

دو خط d و d'' هر دو بر d' عمود هستند پس خودشان موازی اند.

B,

روش رسم مربعی که یک قطر آن داده شده.



رسم ۵: قطر AC را رسم می‌کنیم سپس عمود منصف AC را

رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه H قطع کند به مرکز H و شعاع AH

دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط به دست آمده را به یکدیگر متصل می‌کنیم.

Subject:
Year: Month: Date:

« فصل دوم »

« استدلال »

روش های استدلال در هندسه : استقرائی - استنتاجی - غیر مستقیم (برهان خلف)

استقرائی : نتیجه گیری کلی بر پایه ی مجموعه ای از مشاهدات و اندازه گیری کردن و تکرار یک آزمایش را استدلال استقرائی گوییم یا به عبارت دیگر استقراء یعنی از جزء به کل رسیدن .

نتایجی که از این روش به دست می آید کاملا قابل اعتماد نیست بلکه همراه با حدس و گمان است .

مثال) نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر ۴ ضلعی محدب ۳۶۰ است .

استدلال : می دانیم در ۴ ضلعی های مربع ، مستطیل ، لوزی و متوازی الاضلاع ، هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگر اند پس مجموع ۴ زاویه آنها ۳۶۰ می شود ، در نتیجه هر ۴ ضلعی محدب مجموع زاویه هایش ۳۶۰ است .

توجه : استدلال بکار رفته در مثال بالا استدلال استقرائی است چون از چند حالت خاص یک نتیجه کلی گرفته ایم . (از جزء به کل رسیدن)

Subject:
Year: Month: Date:

استنتاجی: استدلال بر پایه حقایقی که درستی آنها را قبول کرده ایم. (تعاریف و مفاهیمی که در هم نهشتی هم استفاده می شود) نتایجی که از این استدلال به دست می آید کاملا درست و قابل اعتماد هستند.

قضیه: مفاهیم کلی هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند و از آنها در حل مسائل دیگر استفاده می شوند.

قضیه شرطی: به قضیه ای که به صورت جمله شرطی بیان می شود قضیه شرطی گوییم. به جمله ای که بعد از اگر قرار می گیرد فرض و به جمله ی بعد از آنگاه حکم گفته می شود. $p \Rightarrow q$

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم به عبارت شرطی حاصل عکس قضیه گفته می شود که ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه ی در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبرو به ساق ها مساوی اند

الف) به صورت شرطی بیان کنید. ب) عکس قضیه را بنویسید.

الف) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های روبروی ساق ها با هم برابرند.

Subject:
Year: Month: Date:

ب) اگر در مثلثی دو زاویه باهم برابر باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین می باشد.

قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد به آن قضیه و عکس آن قضیه دو شرطی و به صورت $p \Leftrightarrow q$ نام گذاری می شود.

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

حل: قضیه دو شرطی: یک مثلث قائم الزاویه است «اگر و تنها اگر» توان دوم یک ضلع برابر مجموعه توان دوم های دو ضلع دیگر باشد.

رفت: اگر مثلث قائم الزاویه باشد آنگاه توان دوم یک ضلع برابر مجموعه توان دوم دو ضلع دیگر.

برگشت: اگر در یک مثلث توان یک ضلع برابر مجموعه توان دوم های دو ضلع دیگر باشد آنگاه آن مثلث قائم الزاویه است.

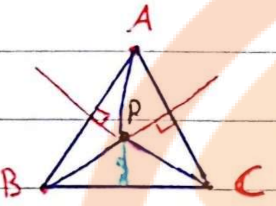
نوجه: برای اثبات یک قضیه دو شرطی هم رفت قضیه و هم برگشت آن را حساب کنیم.

خط های همرس: به چند خط که فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند و به آن نقطه، نقطه ی همرسی گفته می شود.

ALYAZ

قضیه ۱) در هر مثلث عمودمنصف‌های سه ضلع همرس اند.

فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث است. حکم: عمودمنصف‌ها همرس اند.



استدلال: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون AB و AC متقاطع اند پس عمودمنصف‌های آن‌ها هم در تقاطع می‌باشند و در P هم دیگر را قطع می‌کنند. سپس از P به C، A، B وصل می‌کنیم.

P روی عمودمنصف AB است پس: $PA = PB$

پس P روی عمودمنصف BC

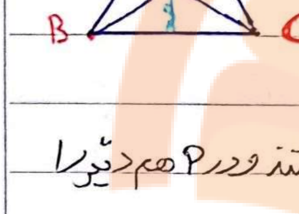
$PB = PC$

قرار دارد یعنی سه عمودمنصف در نقطه P همرس هستند.

P روی عمودمنصف AC است پس: $PA = PC$

قضیه ۲) سه ارتفاع هر مثلث همرس اند. حکم: ارتفاع‌ها همرس اند

فرض: ABC مثلث است



اثبات: از رأس‌های مثلث ABC سه خط موازی اضلاع ABC رسم می‌کنیم تا مثلث DEF به وجود آید.

$AD \parallel BC$، $AB \parallel DC$ ⇒ (با اضلاع متوازی) ABCD چهارضلعی ⇒ $BC = AD$

$AE \parallel BC$، $AC \parallel BE$ ⇒ (متوازی الاضلاع) AEBC چهارضلعی ⇒ $BC = AE$

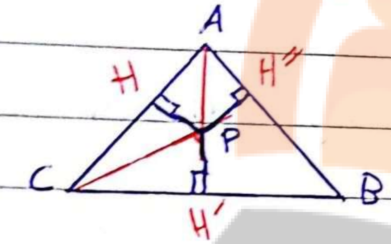
⇒ $AD = AE$

از طرفی $ED \parallel BC$ است و AH عمود بر BC می‌باشد پس بر ED عمود است. در نتیجه AH عمودمنصف ضلع ED می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد BH' عمودمنصف EF و CH'' عمودمنصف

روی عمود منصف های مثلث DEF می باشد چون

DF است یعنی ارتفاع های مثلث ABC

عمود منصف ها همرس اند پس ارتفاع های ABC نیز همرس اند.



قضیه ۳) در هر مثلث سه نیمساز زاویه های داخلی همرسند.

فرض: ABC مثلث است

حکم: سه نیمساز زاویه های داخلی همرسند

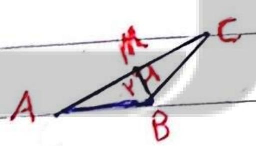
اثبات: نیمساز دو زاویه A و C را رسم می کنیم این دو نیمساز در نقطه P همدیگر را قطع می کنند.

سپس از نقطه P به سه ضلع عمود می کنیم. P روی نیمساز A است: $PH = PH''$ (1)

P روی نیمساز C است: $PH = PH'$ (2)

در نتیجه سه نیمساز در نقطه P همرسند ⇐ P روی نیمساز B قرار دارد ⇐ $PH' = PH''$ ⇐ ۱ و ۲

قضیه ۴) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند آنگاه زاویه روبرو به ضلع بزرگتر بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.



فرض: $AC > BC$

حکم: $\hat{B} > \hat{A}$

اثبات: روی ضلع AC پاره خط CM را طوری جدا کنیم که $CM = CB$ باشد و سپس M را به B وصل می کنیم:

$CM = CB \Rightarrow$ متساوی الساقین $\overset{\triangle}{CBM} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1$ (1)

می دانیم در هر مثلث اندازه ی هر زاویه خارجی از هر کدام از زاویه های داخلی غیر مجاور بزرگتر است یعنی:

$\hat{M}_1 > \hat{A} \xrightarrow{(1)} \hat{B}_1 > \hat{A}$

$\hat{B} > \hat{B}_1$ چون B_1 جزئی از B است $\Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$

Subject:
Year: Month: Date:

گزاره : به هر جمله‌ی خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد گزاره گوییم ، ممکن است ما از درست

بودن یا نادرست بودن آن جمله اطلاع نداشته باشیم ، مثال گزاره ← $7>3$

توجه : اگر یک گزاره از یک جمله‌ی خبری درست شده باشد به آن گزاره ساده گوییم و اگر ترکیبی از

چند گزاره ساده باشد به آن گزاره مرکب گوییم ، مثال : ساده ۱۰ عددی زوج است . مرکب ← ۷ عددی اول و از ۵ بزرگتر است .

نقیض یک گزاره : به عبارتی که ارزش آن دقیقاً خلاف ارزش یک گزاره باشد نقیض آن گزاره

گوییم ، مثال : ۵ عددی زوج است ← این چنین نیست که ۵ عددی زوج است .

توجه : در صورت نوشتن هر گزاره با استفاده از یک مثال نقض می‌توان نقیض را نوشت .

برهان خلف : در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و نقیض آن درست می‌باشد و

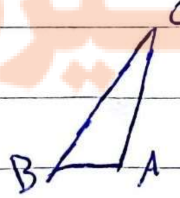
سپس از استنتاجی به یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیرممکن می‌رسیم که این

نشان دهنده این است که خلاف حکم نادرست است یعنی حکم درست است .

قضیه ۵) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشد آنگاه ضلع روبرو به زاویه بزرگتر بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر .

فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$



۵

اثبات: فرض کنیم $BC \not> AC$، یعنی $BC = AC$ یا $BC < AC$ است.

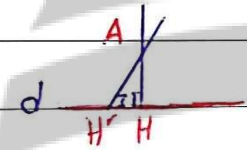
اگر $BC = AC$ باشد $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین است یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و این فرض خلف است.

اگر $BC < AC$ باشد بنابه قضیه ۲، $\hat{A} < \hat{B}$ و این فرض خلف است.

یعنی فرض خلف نادرست است در نتیجه حکم $BC > AC$ درست می باشد.

$AC > BC$ درست

سوال: از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه غیرواقع بر یک خط نمی توان بیش از یک خط



فرض: خط d و نقطه A خارج آن

بر آن عمود کرد. حکم: از A فقط یک عمود بر d کشیده می شود

اثبات: فرض کنیم از نقطه A دو عمود بر d رسم می شود. (فرض خلف)، در این حالت $AH'H$ یک مثلث خواهد بود که مجموع زاویه های داخلی آن از ۱۸۰ درجه بیشتر است و این غیرممکن است ... پس از نقطه A فقط یک خط می توان عمود رسم کرد.

مثال نقض: به مثالی که کلیت درستی حکم را رد می کند.

مثال: درستی یا نادرستی احکام زیر را مشخص کنید، درصورت نادرستی مثال نقض را مشخص کنید. الف) همه‌ی اعداد صحیح مثبت می باشند. غلط ⟵ $-3 \in \mathbb{Z}$

ب) برای هر عدد طبیعی n عبارت 2^n+1 اول است. غلط ⟵ $n=3$ ، $2^3+1=9$

Subject:
Year: Month: Date:

فصل دوم: نسبت، تناسب، تشابه

نسبت و تناسب: نسبت بین دو عدد A و B یعنی کسر $\frac{A}{B}$ ، $b \neq 0$

تناسب یعنی به دو نسبت مساوی هم یک تناسب می‌گوییم یعنی اگر دو نسبت $\frac{A}{b}$ و $\frac{c}{d}$ متناسب باشند آنگاه: $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ است.

ویژگی‌های تناسب: الف) در هر تناسب حاصل ضرب جملات طرفین برابر حاصل ضرب جملات وسطین است. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = c.b$

ب) در هر تناسب می‌توان نسبت‌ها را معکوس کرد. $\frac{۳}{۶} = \frac{۶}{۱۲} \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{۱۲}{۶}$

ج) در هر تناسب می‌توان جای طرفین یا وسطین را عوض کرد. $\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۵} = \frac{۴}{۲}$

د) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب‌های $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می‌آید.

هـ) از تناسب‌های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب‌های $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ و $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

و) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بدست می‌آید. مثال:
$\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶} \rightarrow \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶}$

Subject:
Year: Month: Date:

واسطه هندسی: اگر بین سه عدد a و b و c تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ برقرار باشد

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow b^2=a.c \Rightarrow b=\sqrt{a.c}$ به عدد b واسطه هندسی گویند.

مثال: واسطه هندسی بین $4\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ را حساب کنید. $b=?$ $\quad b=\sqrt{a.c}$

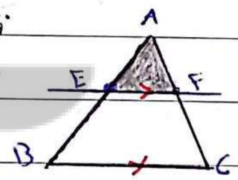
$b=\sqrt{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{4\sqrt{9}}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$

فصل دوم:

قضیه تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، آنگاه نسبت پاره خط‌های ایجاد شده روی یک ضلع با نسبت پاره خط‌های ایجاد شده روی ضلع دیگر برابر است.

فرض: $EF \parallel BC$

حکم: $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



نتایج تالس: اگر در مثلث ABC، $EF \parallel BC$ باشد

(۱) نتیجه: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ آنگاه داریم:
جزء به کل

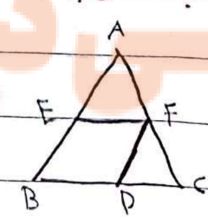
(۲) نتیجه: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$
تعمیم تالس

اثبات نتیجه یک تالس: فرض: $EF \parallel BC$ حکم: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

اثبات: $EF \parallel B \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AE}{AE+EB}=\frac{AF}{AF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

اثبات نتیجه دو تالس: فرض: $EF \parallel BC$ حکم: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

اثبات: FD را موازی AB رسم کنید:

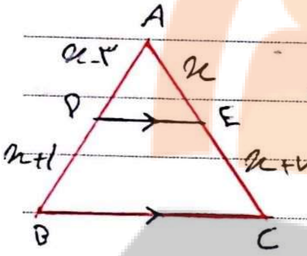


ALYAZ

$EF \parallel BD$, $FD \parallel EB$ } $\xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}}$ چهارضلعی $EFDB$ $\Rightarrow EF = BD$ و $FD = EB$

$EF \parallel BD \xrightarrow{\text{تالس ①}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$FD \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس ①}} \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$ } $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

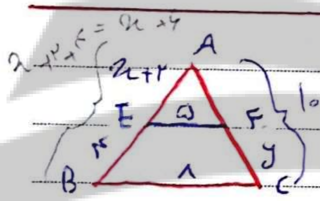


در شکل زیر $DE \parallel BC$ است. x را محاسبه کنید.

اثبات: $DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightsquigarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$

$(x-3)(x+7) = x(x+1) \rightsquigarrow x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + x$

$\rightsquigarrow 7x - 3x = 21 \rightsquigarrow 3x = 21 \rightsquigarrow x = \frac{21}{3} = 7$



در شکل زیر $EF = BC$ است. x و y را پیدا کنید.

توجه: اگر روی ضلع های موازی مقدار باشد، معمولاً از نتیجه ② تالس استفاده می‌شود.

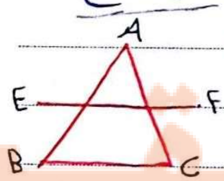
حل) $EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس ②}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \rightsquigarrow \frac{x+2}{x+6} = \frac{10-y}{10} = \frac{5}{8}$

$\frac{x+2}{x+6} = \frac{5}{8} \rightsquigarrow 8(x+2) = 5(x+6) \rightsquigarrow 8x + 16 = 5x + 30 = 8x - 5x = 30 - 16 = \frac{14}{3}$

$\frac{10-y}{10} = \frac{5}{8} \rightsquigarrow 8(10-y) = 50 \rightsquigarrow 80 - 8y = 50 \rightsquigarrow -8y = 50 - 80 \rightsquigarrow -8y = -30$

$y = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و نسبت پاره خط های ایجاد شده روی دو ضلع که متناسب باشد آنگاه که آن خط با ضلع سوم مثلث برابر است.



فرض: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

حکم: $EF \parallel BC$

اثبات: فرض کنیم EF موازی BC نباشد، از نقطه E پاره خط EF' را موازی BC رسم کنیم.

$EF' \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF'}{AC}$

$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{فرض تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ } $\Rightarrow \frac{AF'}{AC} = \frac{AF}{AC} \rightsquigarrow AF' = AF$

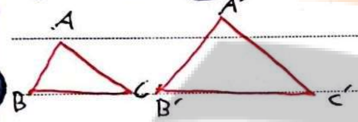
Subject :

Year. Month. Date. ( )

یعنی F و F´ روی هم منطبق هستند و چون EF´ موازی BC است پس EF نیز موازی BC می باشد.

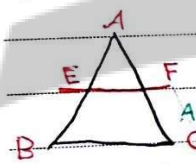
نکته: اگر در مسئله ای بخواهیم ثابت کنیم دو پاره برابر هستند یا پاره خطی با یک ضلع مثلثی موازی است که از عکس قضیه تالس یا عکس قضیه خطوط موازی استفاده می شود.

تشابه مثلث: دو مثلث را متشابه گوییم که اگر زاویه های آنها دو به دو مساوی باشند و ضلع های متناظر متناسب باشند.



$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} A = A' \text{ و } B = B' \text{ و } C = C' \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = 2 \leftarrow \text{نسبت تشابه} \end{cases}$$

قضیه اساسی تشابه: اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند (آنگاه) مثلثی ایجاد می شود با مثلث اصلی متشابه است.



فرض: $EF \parallel BC$ حکم: $AEF \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ مورب } EF \parallel BC \Rightarrow B = E \\ AC \text{ مورب } EF \parallel BC \Rightarrow C = F \\ \text{تعمیم تالس } \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

حالات تشابه دو مثلث: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند. قضیه اول (تساوی دو زاویه)

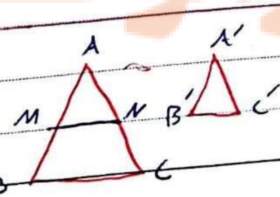
فرض: $A = A'$ و $B = B'$ حکم: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

اثبات: روی ضلع AB پاره خط AM را مساوی $A'B'$ و روی ضلع AC پاره خط AN را مساوی $A'C'$ جدا می کنیم و سپس از M به N وصل می کنیم. می دانیم:

$N = C'$

$\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$ (ض ز ض) $\Rightarrow MN = B'C'$ و $M = B'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض } B = B' \\ M = B' \end{array}\right\} \Rightarrow M = B \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس قضیه}} MN \parallel BC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} AMN \sim ABC \overset{①}{\Rightarrow} A'B'C' \sim ABC$$

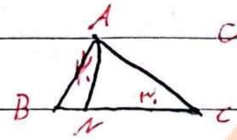


GRAPHIST

Subject:

Year: Month: Date:

در شکل زیر: الف) ثابت کنید دو مثلث متشابه‌اند. ب) نسبت تشابه آنها چند است



الف) (تساوی دو زاویه)

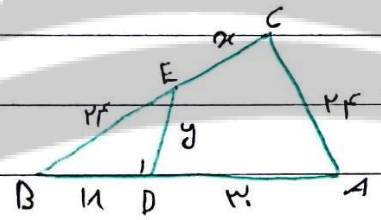
$A_1 = C = 30$ ، $B = B$ مشترک $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = ABN$

ب) نسبت تشابه: $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{AB}$ ابتدا باید تصمیم بگیریم نسبت کدام را با کدام را پایین که

ضلع‌هایی را صورت و مخرج قرار دهیم که روبروی زاویه مساوی قرار دارند. در نسبت سوم مشترک‌ها را

خط می‌زنیم.

در شکل زیر $C = D_1$ است. مقدار x و y را پیدا کنید.



$B = B$ مشترک ، $C = D_1$ فرض $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim BDE$ (تساوی دو زاویه)

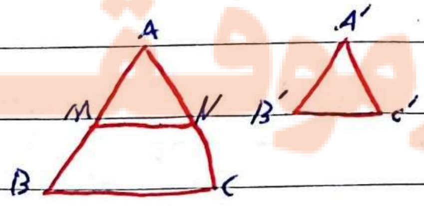
نسبت تشابه $= \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{24}{y} = \frac{48}{24} = \frac{24+x}{18}$

$\frac{24}{y} = \frac{\cancel{48}^{2}}{\cancel{24}_{1}} = \frac{24}{2} = 12 = y$

$\frac{\cancel{48}^{2}}{\cancel{24}_{1}} = \frac{24+x}{18} = 24 + x = 36 \Rightarrow x = 12$

قضیه دوم تشابه دو مثلث: اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین

آن دو ضلع در دو مثلث مساوی باشند آنگاه دو مثلث متشابه‌اند (تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین)



فرض: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $A = A'$

حکم: $ABC \sim A'B'C'$

اثبات: روی ضلع AB پاره خط AM را مساوی $A'B'$ و روی ضلع AC پاره خط AN را مساوی $A'C'$ جدا

Subject:

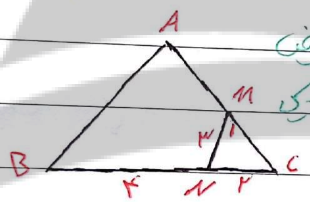
Year: Month: Date:

می کنیم و سپس از M به N وصل می کنیم. $\quad$ (1) $AMN \cong A'B'C'$ (فرض) $\overset{(1)}{\Rightarrow} MN = B'C'$

بنا به فرض $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{بنا به عکس}} MN \parallel BC \rightarrow$

بنا به قضیه اساسی تشابه $AMN \sim ABC \xrightarrow{\text{بنا به (1)}} ABC \sim A'B'C'$

در شکل زیر $\hat{M_1} = \hat{B}$ و M وسط AC است. طول اضلاع AC و AB را حساب کنید.



فرض $\hat{M_1} = \hat{B}$

مشترک $\hat{C} = \hat{C}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{MNC}$ (تشابه دو زاویه)

تشابه $\Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} = \frac{CM}{6}$

$\xRightarrow{\text{طرفین}} \frac{2}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{6}{1}} \rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{AC}{12} \rightarrow AC^2 = 24 \rightarrow AC = 2\sqrt{6}$

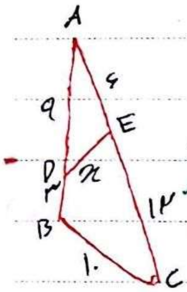
ALYAZ

Subject:
Date

$\frac{2}{AC}=\frac{3}{AB} \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{AB} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{3}{AB} \rightarrow AB=3\sqrt{6}$

در شکل زیر x را حساب کنید.

الف)



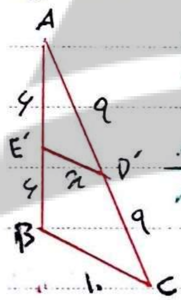
$A=A$ مشترک

$\frac{AD}{AC}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$

$\frac{AE}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین)

ب) روی AC ، AD' را و AD و AB ، AE' را هم اندازه AE جدا کنید و نشان دهید $D'E' \parallel BC$ است.



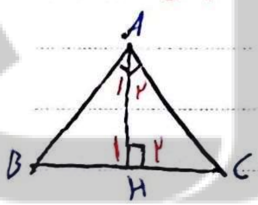
$\frac{AE'}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$\frac{AD'}{AC}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$

$\frac{AE'}{AB}=\frac{AD'}{AC} \xRightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} D'E' \parallel BC$

$K=\frac{1}{2} \quad \frac{BC}{2}=5 \leftarrow E'D'$

قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه: اگر ABC مثلث قائم الزاویه‌ای باشد که



در رأس A قائمه باشد که AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، روابط زیر را داریم:

(۱) $AB^2 = BC \cdot BH$ (۲) $AC^2 = BC \cdot CH$

فیثاغورس ← (۳) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (۴) $AH^2 = BH \cdot HC$

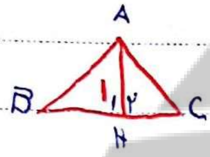
(۵) $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

PAPCO

Subject:
Date

اثبات رابطه شماره (۱):

$B = B$ مشترک
$90^\circ \quad H_1 = \hat{A}$
$\Rightarrow A\hat{B}C \sim ABH$ (تساوی دو زاویه)

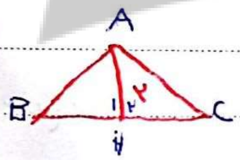


نسبت تشابه $\rightarrow \cancel{\frac{AC}{AH}} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$

مثلث ۱ با کل شکل

اثبات رابطه‌ی شماره (۲):

$C = C$ مشترک
$90^\circ \quad A = H_2$
$\Rightarrow ABC \sim ACH$ (تساوی دو زاویه)



نسبت تشابه $\rightarrow \cancel{\frac{AB}{AH}} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot HC$

۲ با کل شکل

اثبات رابطه شماره (۳) (فیثاغورس):

$AB^2 + AC^2 = \overbrace{BC \cdot BH}^{\text{رابطه‌ی ۱}} + \overbrace{BC \cdot HC}^{\text{رابطه ۲}} = BC(BH + HC)$

$BC \cdot BC = BC^2$

اثبات رابطه شماره (۴):

$ABC \sim ABH$
$ABC \sim ACH$
$\Rightarrow ABH \sim ACH$

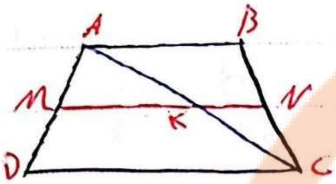
$A_1 + B = 90$
$C + B = 90$
$\Rightarrow A_1 = C$

نسبت تشابه $\rightarrow \cancel{\frac{AB}{AC}} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$

Subject:
Date

ص ۳۷ فرض: $MN \parallel AB \parallel CD$

حکم: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$



تمرین

اثبات: قطر AC را رسم کنید.

$\overset{\triangle}{ADC}: MK \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$

$\overset{\triangle}{ABC}: NK \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$

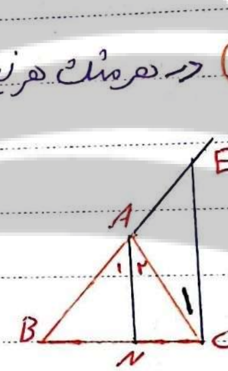
$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درس ۴ کاربردهای قضیه تالس و تشابه دو مثلث.

قضیه ۱) در هر مثلث هر نیمساز زاویه داخلی ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $A_1 = A_2$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$



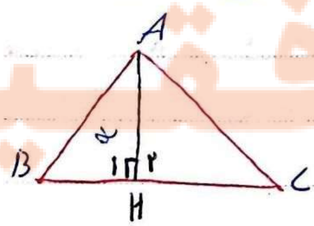
اثبات: ابتدا CE را موازی AN بر امتداد AB رسم می‌کنیم.

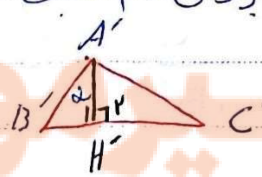
$AN \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{NC}$ (۱)

$NA \parallel CE$ و BE مورب $A_1 = E$
$AN \parallel CE$ و AC مورب $A_2 = C_1$
$\xrightarrow[A_1 = A_2]{\text{فرض}} E = C_1 \Rightarrow$ AEC متساوی الساقین $\Rightarrow AE = AC$ (۲)

$۱, ۲ \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

قضیه دوم) در هر دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر و نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.





فرض: $ABC \sim A'B'C'$ (یعنی ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابر است)

الف) ارتفاع‌ها:

حکم: $\frac{AH}{A'H'} = K$

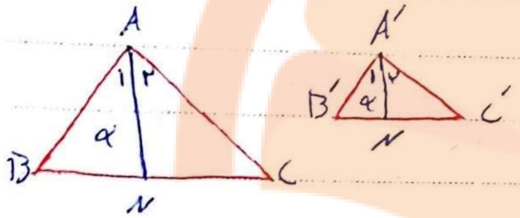
P4PCO

Subject:
Date

فرض K

اثبات: فرض $B = B'$ ، $90°$ $H_1 = H_1'$ $\Rightarrow ABH \sim A'B'H' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = K$

نیم‌سازها: همان فرض قبلی = فرض



حکم: $\frac{AN}{A'N'} = K$

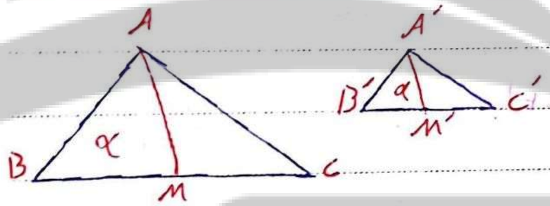
فرض K

$A_1 = A_1'$ بنا به فرض $A = A'$ ، $B = B'$

$A_1 = A_1'$ به سبب نصف ... بنابراین است

$\Rightarrow ABN \sim A'B'N'$ (تساوی دو زاویه) $\Rightarrow$ اثبات: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{BN}{B'N'} = K$

میانه‌ها: قبلی = فرض



حکم: $\frac{AM}{A'M'} = k$

اثبات: بنا به فرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'}$ ، $B = B'$ $\Rightarrow ABM \sim A'B'M'$

تناسب دو ضلع و زاویه بین

$\Rightarrow \overset{K}{\frac{AB}{A'B'}} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = K$

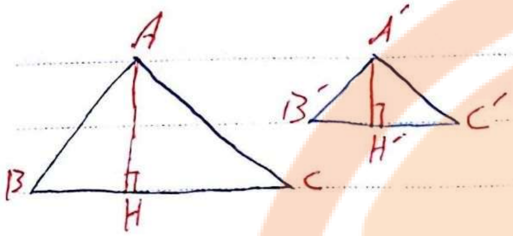
محیط: بنا به فرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \xRightarrow{\text{تناسب}} \overset{\text{محیط}}{\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}} = \overset{K}{\frac{AB}{A'B'}} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = K$

فرض = $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$

P4PCO

Subject :
Date

مساحت : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K$ = حکم (AH = ارتفاع)



اثبات : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \overbrace{\frac{BC}{B'C'}}^{K} \times \overbrace{\frac{AH}{A'H'}}^{K} = K \times K = K^2$

اگر دو چند ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها K باشد، نسبت محیط های آنها K و نسبت مساحت برابر K^2.

$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

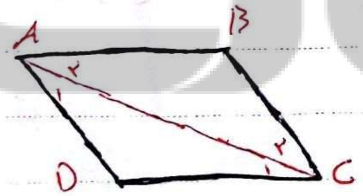
فصل ۳

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن دو برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \to n^2 - 3n = 4n \to n^2 - 3n - 4n = 0 \to n^2 - 7n = 0$

$n(n-7) = 0 \to n = 0$ غ ق ق ، $n = 7$ ✓

قضیه ۱) در هر متوازی الاضلاع زاویه های مقابل با هم برابرند: ۳



فرض : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم : $A = C$ و $B = D$

$AC = AC$

اثبات : قطر AC را رسم می‌کنیم : $ABC \cong ADC$ (ز ض ز) $\Rightarrow B = D$

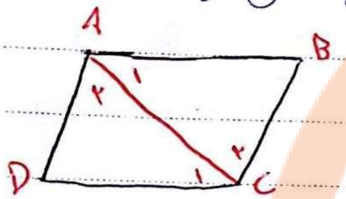
$AB \parallel DC$ و مورب $AC \to A_2 = C_1$

$AB \parallel DC$ و مورب $AC \to A_1 = C_2$

$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \to A = C$

Subject:
Date

عکس قضیه ۱) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل برابر باشند آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

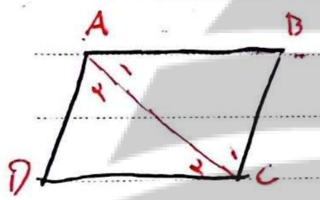


فرض: $A = C$ و $B = D$

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم.

قضیه ۲) در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های رو به رو مساوی اند.



فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم.

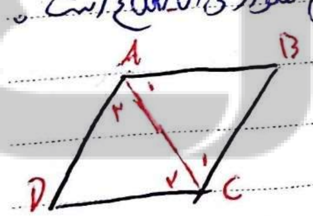
$AB \parallel DC$ مورب AC $\rightarrow A_1 = C_2$

$AD \parallel BC$ مورب AC $\rightarrow A_2 = C_1$

مشترک $AC = AC$

$\Rightarrow ABC \cong ADC$ (ز ض ز) $\Rightarrow AB = DC$ و $AD = BC$

عکس قضیه ۲) اگر در یک چهارضلعی ضلع‌های رو به رو برابر باشند آنگاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $AB = DC$ و $BC = AD$

اثبات:

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

$AB = DC$

$AD = BC$

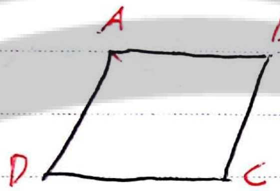
$AC = AC$

$\Rightarrow$ (ض ض ض) $\Rightarrow ABC \cong ADC \Rightarrow A_1 = C_2 \xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس خطوط}} AB \parallel DC$

$A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

Subject :
Date

قضیه ۲) در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.



۲

فرض : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم : $A+B=180$ $D+C=180$ $A+D=180$ $B+C=180$

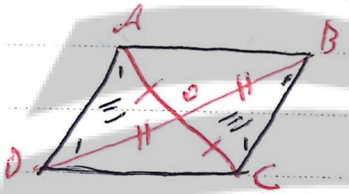
اثبات : کافیست یکی را اثبات کنیم :

$A+B+C+D=360$

$A=C$ و $B=D$: قضیه ۱)

$$A+A+B+B=360$$

$$2A+2B=360 \xrightarrow{\div 2} A+B=180$$



قضیه ۴) در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $BO = OD$ و $AO = OC$

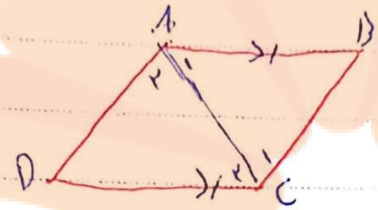
$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ و مورب } \overset{D}{A} \parallel \overset{B}{C} \Rightarrow A_1 = C_1 \\ BD \text{ و مورب } AD \parallel BC \Rightarrow D_1 = B_1 \\ \text{قضیه قبل می دانیم} \longrightarrow AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AOD \cong OBC \Rightarrow BO = OD ,\ AO = OC$$

قضیه (۵) چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند، متوازی الاضلاع است.

فرض: $AB \underline{\parallel} DC$

$(A_2 = C_1)$

حکم: $AD \parallel BC$



اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم:

فرض $AB = DC$

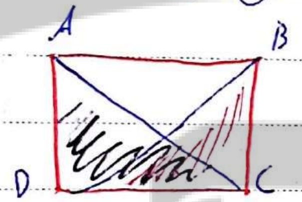
مشترک $AC = AC$

AC مورب $AB \parallel DC$ $A_1 = C_2$

$\left.\right\}$ $ABC \cong ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

در وقت حکم تساوی ضلع و تساوی زاویه‌ها را هم نشان دادیم.

ویژگی های مستطیل و لوزی: ویژگی ۱: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.



فرض: $A+B+C+D=90$

$AD = BC$

$DC = DC$

$D = C = 90$ $\left.\right\}$ $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D \Rightarrow AC = BD$

حکم: $AC = BD$

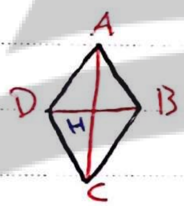
سوال: اگر دو قطر یک چهار ضلعی باهم مساوی باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ چرا؟

خیر - ذوزنقه متساوی الساقین دو قطر باهم مساوی اند ولی مستطیل نیست.

مربع نوعی مستطیل است پس قطرهای آن هم برابرند.

Subject:
Date

ویژگی 2) در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگر اند و قطرها نیم‌سازهای زاویه‌های لوزی اند.



فرض: $AB = BC = DC = AD$

حکم: $DH = HB$, $AH = HC$ (منصف)، $H_1 = H_2 = 90$ (عمود) و $A_1 = A_2$ (نیم‌ساز)

اثبات: لوزی یک متوازی‌الاضلاع است پس قطرهایش منصف یکدیگر اند. (۱)

فرض $AD = AB$
مشترک $AH = AH$
منصف $DH = HB$

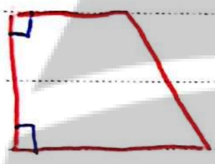
$ADH \cong AHB$ (ضضض) $\Rightarrow H_1 = H_2 = 90$ (۳)

(۲) $A_1 = A_2$

(۱و۲) پس قطرها عمود منصف اند. ۳) قطرها نیم‌سازند.

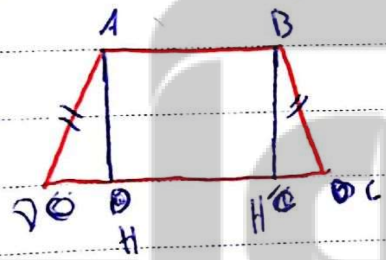
ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند گوییم - به دو ضلع موازی قاعده‌ها و به دو ضلع غیرموازی ساق‌ها گفته می‌شود.

ذوزنقه متساوی الساقین: به ذوزنقه‌ای که ساق‌های آن باهم مساوی باشند ذوزنقه متساوی الساقین گوییم.



ذوزنقه قائم الزاویه: به ذوزنقه‌ای که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد.

ویژگی ۱) در هر ذوزنقه‌ی متساوی الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم اندازه‌اند.



فرض: $AC = BD$ و $AB \parallel DC$

حکم: $A = B$ و $D = C$

اثبات: دو ارتفاع AH و BH' را رسم می‌کنیم.

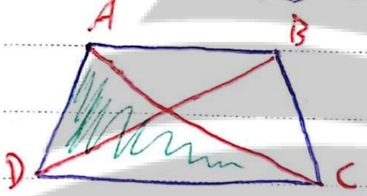
$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ (فرض)} \\ AH = BH' \end{array}\right\} \Rightarrow ADH \cong BCH' \text{ (و ض)} \Rightarrow D = C$$

چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است

هر وقت نیمسازهای یک متوازی الاضلاع را رسم کنیم یک مستطیل به دست می‌آید و

" " " " مستطیل " " " مربع " " " .

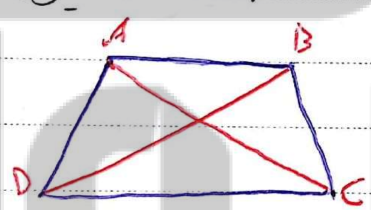
ویژگی ۲) در هر ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطرها با هم برابراند و برعکس.



فرض: $AD = BC$ حکم: $AC = BD$

اثبات برهان

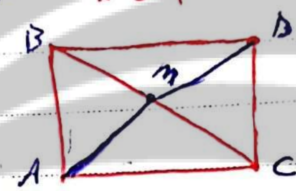
$$\left.\begin{array}{ll} AD = BC & \text{فرض} \\ DC = DC & \text{مشترک} \\ D = C & \text{ویژگی 1} \end{array}\right\} \Rightarrow ADC \cong BCD \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$



برگشت: فرض: $AC = BD$

حکم: $AD = BC$

ویژگی مهم مثلث قائم الزاویه: در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.



فرض: $A = 90^\circ$

حکم: $AM = \frac{BC}{2}$

اثبات: AM را به اندازه ی خودش از نقطه M امتداد می دهیم تا نقطه D حاصل شود و سپس D را به B و C وصل می کنیم. چون چهارضلعی $ABDC$ قطرهایش همدیگر را نصف کرده اند:

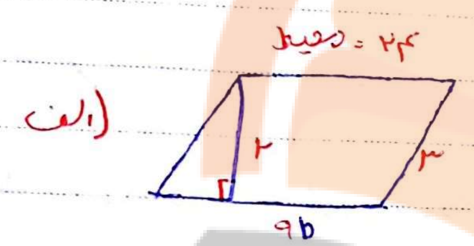
متوازی الاضلاع $ABDC \xrightarrow{A=90}$ مستطیل است $ABCD \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AD = 2AM \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2AM = BC \\ AM = \frac{BC}{2} \end{array}$$

توضیح این درس در جزوه نیامده

مثال ۵: مساحت شکل های زیر را حساب کنید.

الف)

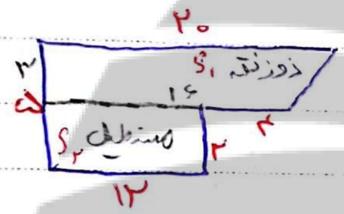


محیط = ۲۴

$P = ۲(۳) + ۲b$

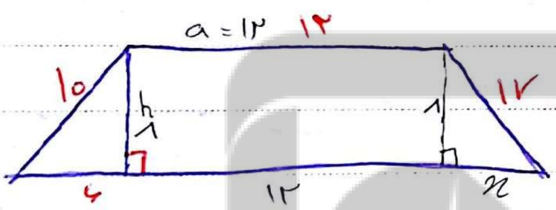
$۲۴ = ۶ + ۲b \rightarrow \frac{۱۸}{۲} = ۹$

$S = b \times h = ۲ \times ۹ = ۱۸$



$S_1 = \frac{(۲۰+۱۶)۳}{۲} = ۵۴$

$S_۲ = ۲ \times ۱۲ = ۲۴ \rightarrow S = S_1 + S_۲ = ۵۴ + ۲۴ = ۷۸$

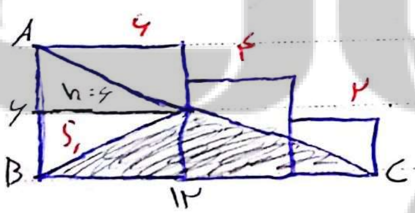


$۱۰^۲ = ۶^۲ + h^۲ \rightarrow h^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \rightarrow h = ۸$

$۱۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ \rightarrow ۲۸۹ = x^۲ + ۶۴ \rightarrow x^۲ = ۲۲۵$

$x = ۱۵$ $\quad S = \frac{(a+b)h}{۲} = \frac{(۱۲+۳۳)۸}{۲} = ۱۸۰$

مساحت قسمت هاشور خورده را محاسبه کنید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند)

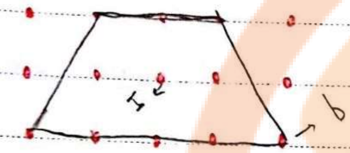


$S_{ABC} = \frac{۱۲ \times ۶}{۲} = ۳۶$

S هاشور خورده $= S_{ABC} - S_1 = ۳۶ - ۱۸ = ۱۸$

$S_1 = \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸$

نقاط شبکه‌ای : به نقاطی که روی خط‌های افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی یک واحد می‌باشد را نقاط شبکه‌ای گوییم.

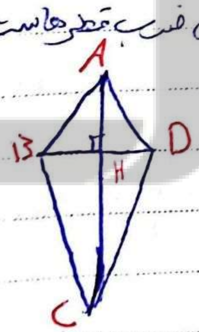


چند ضلعی شبکه‌ای : به چند ضلعی که تمام رأس‌های آن روی نقاط شبکه‌ای قرار داشته باشند. در هر چند ضلعی شبکه‌ای به نقاطی از شبکه که روی اضلاع چند ضلعی قرار دارد، نقاط مرزی گفته می‌شود و با b نام‌گذاری می‌شود و نقاطی از شبکه که درون چند ضلعی قرار می‌گیرند نقاط درونی گفته می‌شود و با I نام‌گذاری می‌شود.

مثلاً در چهارضلعی شبکه‌ای ABCD داریم : $I = ۳$ $b = ۸$

فرمول پیک در محاسبه مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای : اگر b نقاط مرزی یک چند ضلعی باشند و I نقاط درونی آن باشد، مساحت چند ضلعی از راه زیر به دست می‌آید : $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

نکته : در هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند مساحت برابر نصف حاصل ضرب قطرهاست.



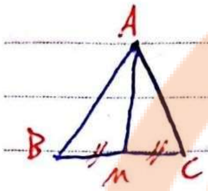
فرض : $AC \perp BD$

حکم : $S = \frac{AC \times BD}{2}$ ①

$S_{کل} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{BD \times AH}{2} + \frac{BD \times CH}{2} = \frac{BD}{2}(AH + CH) = ①$

کاربردهای مساحت :

سؤال (۱) : نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

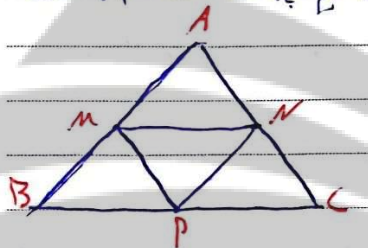


فرض: AM میانه (BM = MC)

حکم: $S_{ABM} = S_{ACM}$ ①

اثبات: ① $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow[BM=MC]{\text{فرض}} \frac{BM}{BM} = 1 \rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{1}{1}$

سوال ۵: نشان دهید اگر وسط های هر سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم ۴ چهار مثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های مساوی ایجاد می شود.



فرض: M, N, P وسط اضلاع

حکم: ① مثلث های چهارگانه $\overset{\triangle}{AMN} \cong M\hat{N}P \cong N\hat{P}C \cong M\hat{B}P$

② $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

③ و به همین ترتیب می توان ثابت کرد

۴

$MN \parallel BC$ ، $NP \parallel AB$ ⟵ چهارضلعی MNBP متوازی الاضلاع است. $\rightarrow M\hat{N}P \cong M\hat{B}P$

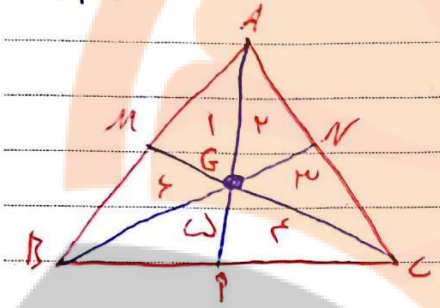
و به همین ترتیب می توان ثابت کرد چهار مثلث باهم هم نهشتند.

و داریم که اگر دو مثلث هم نهشت باشند مساحت های آنها برابر است

$S_{AMN} = S_{NPC} = S_{MNP} = S_{MBP}$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

سوال ۳ـ نشان دهید سه میانه هر مثلث آن را به شش مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می کنند.



حکم: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ ★

اثبات:

$\overset{\triangle}{AGC}$: میانه $GN \Rightarrow S_2 = S_3$ (۲)

BGC: میانه $GP \Rightarrow S_5 = S_4$ (۳)

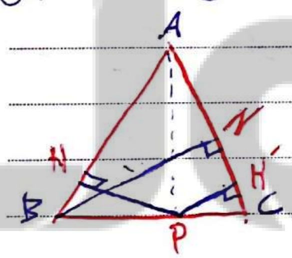
AGB: میانه $GM \Rightarrow S_1 = S_6$ (۱)

$S_1 + S_6 + \cancel{S_5} = S_2 + S_3 + \cancel{S_4}$

$2S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ (۴)

(۱)(۲)(۳)(۴) ⇒ ★

سوال ۴) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین مجموع فاصله ی هر نقطه روی قاعده از ساق های برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.



فرض: $AB = AC$

حکم: $PH + PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می کنیم.

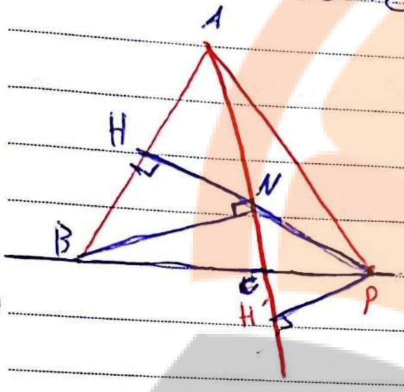
$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} \to \frac{AC\times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{AB}\times PH}{2} + \frac{AC\times PH'}{2} \xrightarrow{AB=AC \text{ فرض}} \cancel{\frac{AC\times BN}{2}} =$

$\frac{AC}{2}(PH + PH') \to PH + PH' = BN$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

سؤال ۵) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین قدر مطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتدادهای هر قاعده از دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.



فرض: $AB = AC$

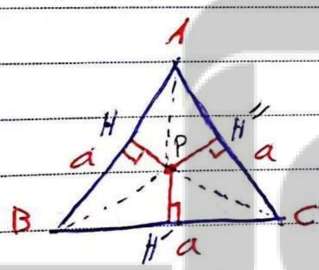
حکم: $PH - PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABP} - S_{ACP} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{\cancel{AB}} \times PH}{2} - \frac{AC \times PH'}{2}$$

$$\xrightarrow{AC = AB} \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH - PH') \rightarrow PH - PH' = BN$$

سؤال ۶) ثابت کنید مجموع فاصله‌ی هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.



فرض: $AB = AC = BC = a$

حکم: $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

اثبات: از P به A و B و C وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{APC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a \times PH}{2} + \frac{a \times PH'}{2} + \frac{a \times PH''}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^{\cancel{2}} = \frac{a}{2}(PH + PH' + PH'') \rightarrow PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

GRAPHIST

مثال ۵: اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌ی نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند اندازه‌ی ضلع مثلث و مساحت مثلث است.

$PH = 2$, $PH' = 4$, $PH'' = 6$

$a = ?$, $S = ?$

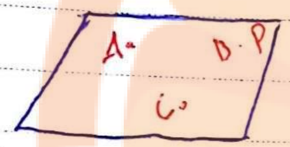
$$PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a \rightarrow 2+4+6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow 12 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

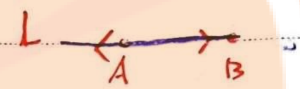
$$\rightarrow \sqrt{3} a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a = 8\sqrt{3}$$ ضلع مثلث

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} (8\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (64(3)) = 48\sqrt{3}$$

فصل ۴ : تجسم فضایی (هندسه فضایی)

خط و صفحه :





نمایش صفحه ۳ نقطه نیاز هست

نمایش خط ← ۲ نقطه نیاز هست

نکته : از یک خط بیشمار صفحه تولید می‌شود . روی هر خط بینهایت نقطه و روی هر صفحه بینهایت خط وجود دارد.

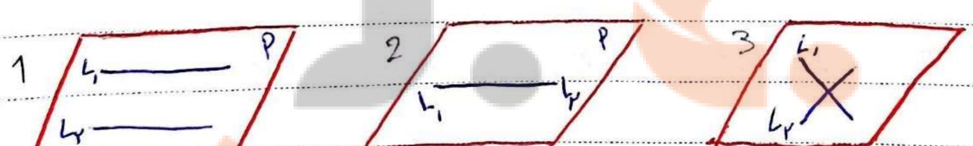
وضعیت دو خط در فضا :

1. موازی : به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند دو خط موازی گوییم.

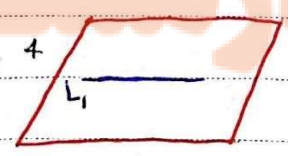
2. منطبق : به دو خط که در یک صفحه باشند و در بیشمار نقطه مشترک هستند را دو خط منطبق گویند.

3. متقاطع : به دو خط که در یک صفحه و در یک نقطه باهم مشترک اند را دو خط متقاطع گویند.

4. متنافر : به دو خط که در یک صفحه قرار نداشته باشند دو خط متنافر گوییم.



$L_1 \parallel L_2$ $L_1 = L_2$ $L_1 \nparallel L_2$



L_2 = روی دیوار بغلی است

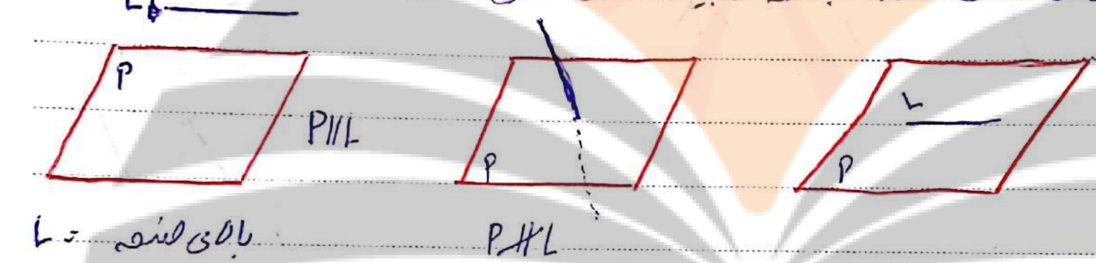
P = اسم صفحه

وضعیت خط و صفحه در فضا:

1. موازی: به خطی که با صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشد.

2. متقاطع: به خط و صفحه ای که در یک نقطه مشترک اند. خط و صفحه متقاطع می گویند.

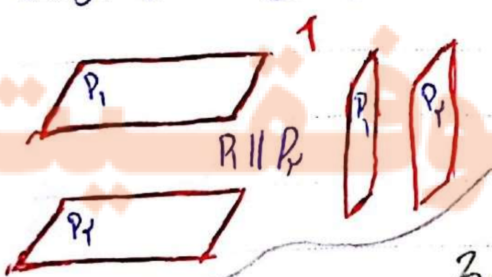
3. منطبق: به هر خط درون صفحه که با صفحه در بیشمار نقطه مشترک است.



وضعیت دو صفحه در فضا:

موازی: به دو صفحه که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، دو صفحه موازی می گوییم.

2. متقاطع: به دو صفحه که در یک خط با هم مشترک اند. و به آن خط، فصل مشترک دو صفحه گفته می شود.



3. منطبق: به دو صفحه که در بیشمار نقطه مشترک اند.