




- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)



❖ **تعریف گزاره :** گزاره جمله ای خبری است به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هرچند در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

جملاتی که کامل نیستند و جمله های پرسشی ، امری و عاطفی و بیان کننده احساسات گزاره محسوب نمیشوند.

❖ **تعریف حدس یا انگاره:** گزاره ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضر معلوم نیست و تاکنون کسی نه این گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است (به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است)

❖ **تعریف گزاره نما:** هر جمله خبری که شامل یک یا چندمتغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن ها، یک متغیره، دومتغیره و ... می نامند.

❖ **نقیض یک گزاره:** عبارت است از ساختن یک گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی باشد
نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می دهند.

❖ **دو گزاره هم ارز:** دو گزاره p, q را هم ارز منطقی (هم ارزش) می گوئیم هرگاه ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی یکسان باشد.

📖 مثال ۶ : کدام جمله یک گزاره نیست؟

(۱) در پرتاب یک تاس سالم احتمال آنکه عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد برابر $\frac{1}{۳}$ است.

(۲) ای کاش میتوانستم در یک هوای پاک زندگی کنم

(۳) هر معادله درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی است

(۴) هر عدد زوج بزرگ تر از ۲ را میتوان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

📖 مثال ۷ : کدام یک از گزینه ها گزاره نما نیست؟

(۱) a عددی زوج است. (۲) در پرتاب یک تاس؛ احتمال رخداد پیشامد A برابر $\frac{1}{4}$ است.

(۳) همه اعداد اول فرد هستند. (۴) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۶ است.

گزاره های مرکب



۱- ترکیب عطفی: برای دو گزاره دلخواه p, q گزاره مرکب (p و q) را ترکیب عطفی میگوییم و با نماد $p \wedge q$ نمایش

میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی درست است که هر دو درست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲- ترکیب فصلی: برای دو گزاره دلخواه p, q گزاره مرکب (p یا q) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \vee q$ نمایش

میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

📖 مثال : ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید

(۱) عددی فرد است و $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

(۲) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

۳) عددی اول است و $a \in \{a, b, c\}$

۴) پاریس پایتخت انگلستان است یا تهران پایتخت ایران است.

۵) $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست.

۶) عدد π گویا است یا در مستطیل دو قطر برهم عمودند.

📖 مثال : ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

(۱) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$ (۲) $(5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$

(۳) $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$ (۴) $(\sqrt{2} \notin R) \wedge (\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\})$

📖 مثال : اگر گزاره $p \vee q \sim$ یک گزاره نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

(۱) q (۲) p (۳) $p \vee q$ (۴) $p \vee \sim q$


📖 مثال : اگر $p \wedge q \sim$ گزاره ای درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟


(۱) $p \vee \sim q$ (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee q$ (۴) $p \wedge \sim q$

📖 مثال : هرگاه ارزش گزاره $p \vee q$ درست و ارزش q نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره P چه می توان گفت؟

۳- ترکیب شرطی: برای دو گزاره دلخواه p, q گزاره مرکب (اگر p آنگاه q) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش میدهیم.

p را مقدم و q را تالی مینامیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

نکته: اگر مقدم نادرست باشد ($\square \Rightarrow$) ارزش این ترکیب شرطی همواره درست است. در این حالت میگوییم به **انتفای مقدم درست** است. 

نکته ۲: اگر تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی همواره درست است. یعنی $P \Rightarrow$ همواره درست است. 

📖 مثال: اگر عکس گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟


p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$\sim p \Rightarrow q$ (۴)

$p \wedge \sim q$ (۳)

$\sim p \vee q$ (۲)

$q \Rightarrow q$ (۱)

تبدیل یک گزاره شرطی به ترکیب فصلی 

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

📖 مثال ۱: با جدول نشان دهید $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

مثال: گزاره $p \vee (\sim(p \wedge q) \wedge \sim p)$ با کدام گزاره هم ارز است؟

(۱) p (۲) $p \vee q$ (۳) $\sim q \vee p$ (۴) همواره درست است.

مثال: گزاره $(\sim q \wedge p) \Rightarrow p$ معادل با کدام است؟

(۱) p (۲) $\sim p$ (۳) q (۴) همواره درست است.

مثال: به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره زیر همواره درست است. $p \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow p)]$

مثال: به کمک جدول، ارزش گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ را مشخص کنید.

مثال: گزاره $p \Rightarrow \sim [(q \Rightarrow p) \wedge \sim q]$ هم ارز است با:

(۱) $q \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow \sim q$ (۳) p (۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

📖 مثال : بدون استفاده از جدول و با کمک ویژگی ها هم ارزش مقابل را ثابت کنید.

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p)$$

📖 مثال : اگر ارزش گزاره $[\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$ درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim r$ را با ذکر دلیل بیان کنید.

📖 مثال : هرگاه $\sim p, q$ نادرست باشند، با ذکر دلیل و بدون استفاده از جدول ارزش گزاره $\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ را

تعیین کنید

📖 مثال : نشان دهید برای هر سه گزاره دلخواه r, q, p گزاره های زیر همواره درست اند.

الف) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$

ب) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

پ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

📖 مثال: برای سه گزاره p, q, r هم ارزی منطقی زیر را بدون جدول ثابت کنید.

الف) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

پ) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv r$

ت) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ث) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

📖 مثال: اگر p و q دو گزاره باشند ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ کدام است؟

(۱) T (۲) F (۳) T است اگر P درست باشد (۴) F است اگر P درست باشد

📖 مثال: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند ارزش گزاره $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ هم ارزش با کدام یک از گزاره های زیر

است؟

(۴) $q \Rightarrow p$

(۳) $p \vee q$

(۲) $p \Rightarrow q$

(۱) $p \vee q$

📖 مثال: اگر p درست q و گزاره های دلخواه باشند کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

$$(p \vee q) \Rightarrow r \quad (1) \quad (\sim p \wedge q) \Rightarrow r \quad (2) \quad (p \wedge q) \Rightarrow r \quad (3) \quad (p \vee q) \Rightarrow r \quad (4)$$

📖 مثال: اگر گزاره $X \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)]$ همواره درست باشد، گزاره X کدام است؟

$$p \quad (1) \quad q \quad (2) \quad \sim p \quad (3) \quad \sim q \quad (4)$$

📖 مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

$$(1) \quad (2+1=4) \vee (5 > 13) \quad (2) \quad 2 < 3 \Rightarrow -4 < -6$$

(3) اگر 4 فرد است آنگاه مجموع زوایای داخلی مثلث 180 است و برعکس

$$(4) \quad 3 < 5 \Rightarrow 4 \in \{1, 2, 3\}$$

عکس یک ترکیب شرطی: گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می گوئیم. یعنی برای عکس


ترکیب شرطی کافی است جای مقدم و تالی را عوض کنیم.

ارزش عکس یک ترکیب شرطی ربطی به ارزش ترکیب شرطی ندارد.

نقیض یک ترکیب شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه p, q نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$


$$p \wedge \sim q$$

مثال: با جدول نشان دهید: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ 

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید. 

(۱) عدد ۴ فرد است و ۳ عددی اول است.

(۲) قطرهای مستطیل برابرند یا π عددی گویاست.


مثال: کدام گزینه در مورد گزاره $(p \Rightarrow \sim(q \Rightarrow \sim p))$ درست است؟ 

(۱) هم ارز با $p \Rightarrow q$ است.

(۲) هم ارز با $\sim p \Rightarrow q$ است.

(۳) همواره نادرست است.

(۴) همواره درست است.


مثال: نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ کدام گزینه است؟ 

(۱) $p \Leftrightarrow q$

(۲) $p \Leftrightarrow \sim q$

(۳) $p \wedge \sim q$

(۴) $\sim p \wedge q$

مثال: نقیض گزاره $P \wedge Q$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟ 

(۱) $P \Rightarrow Q$

(۲) $\sim P \Rightarrow Q$

(۳) $Q \Rightarrow P$

(۴) $P \Rightarrow \sim Q$

📖 مثال: ارزش گزاره زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$(\forall x \in R; x^2 > 0) \Rightarrow (\forall x \in R; x^2 < 0)$$

📖 مثال: نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ کدام است؟

$p \wedge q$ (۱) $p \Rightarrow \sim q$ (۲) $p \wedge \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴)

📖 مثال: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره $(q \vee \sim p)$ هم ارز با کدام یک از گزاره ی زیر است؟

$p \wedge q$ (۱) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (۲) $p \wedge \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴)

📖 مثال: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره $(\sim p \vee (\sim p \Rightarrow q))$ هم ارز است با:

$p \wedge q$ (۱) $p \vee q$ (۲) $p \vee \sim p$ (۳) $\sim p \vee q$ (۴)

📖 مثال: نقیض گزاره "اگر a زوج باشد، $a+1$ فرد است." کدام است؟

(۱) نه a زوج است و نه $a+1$ فرد است. (۲) هم a زوج است و هم $a+1$ فرد است.

(۳) a زوج است ولی $a+1$ فرد نیست. (۴) a زوج نیست ولی $a+1$ فرد است.

✅ | عکس نقیض یک ترکیب شرطی: گزاره ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ میگوییم.

در واقع میتوان نشان داد که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

📖 مثال ۳: با جدول نشان دهید: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

📖 مثال: عکس نقیض گزاره ی "اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است." کدام گزینه است؟

(۱) اگر او درستکار باشد، آنگاه او متدین است.

(۲) اگر او متدین نباشد، آنگاه او درستکار نیست.

(۳) اگر او درستکار نباشد، آنگاه او متدین نیست.

(۴) او درستکار نیست ولی او متدین است.

📖 مثال: اگر q و p دو گزاره باشند، عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ با کدام یک از گزاره های زیر هم ارزش است؟

$$\sim p \Rightarrow q \text{ (۴)}$$

$$p \vee \sim q \text{ (۳)}$$

$$p \Rightarrow q \text{ (۲)}$$

$$\sim (p \vee q) \text{ (۱)}$$

ترکیب دو شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه q, p ، ترکیب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی



$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

می نامیم و با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می دهیم.


ارزش آن وقتی درست است که هر دو طرف \Leftrightarrow دارای ارزش یکسان باشند. یعنی اگر دو طرف \Leftrightarrow ارزش




متفاوت داشته باشند نادرست است.

برای اثبات درستی گزاره $p \Leftrightarrow q$ کافی است نشان دهیم $p \equiv q$. در این صورت گزاره درست دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ را قضیه

دوشروطی مینامیم.


مثال  : با جدول نشان دهید: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

مثال  : جدول زیر قسمتی از یک جدول ارزش گزاره ها را نشان می دهد. گزاره X کدام می تواند باشد؟

p	q	$p \Leftrightarrow q$	X
ن		د	ن

$$q \Rightarrow \sim p \quad (۲) \quad p \vee q \quad (۱)$$

$$p \Rightarrow q \quad (۴) \quad q \Rightarrow p \quad (۳)$$

مثال  : بدون استفاده از جدول هم ارزی ثابت کنید:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \Rightarrow r] \equiv \left(\forall x \in R; \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2 \right)$$

📖 مثال: برای سه گزاره دلخواه p, q, r بدون استفاده از جدول نشان دهید هر یک از گزاره های زیر یک قضیه

دوشرطی هستند. (راهنمایی: کافی است نشان دهید دو طرف هر گزاره دوشرطی هم ارز منطقی هستند).

$$\text{الف) } [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

$$\text{ب) } [\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

📖 مثال: به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره دو شرطی زیر یک گزاره همیشه درست است.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

صورت های مختلف بیان شرطی



در صورتی که گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آن را به صورت های زیر بیان میکنند:

❖ اگر q آنگاه p و برعکس

❖ اگر p آنگاه q و برعکس

❖ اگر و تنها اگر p


❖ اگر و تنها اگر q

❖ q یک شرط لازم و کافی برای p است.

❖ p یک شرط لازم و کافی برای q است.

❖ یک شرط لازم و کافی برای p عبارت است از q


❖ یک شرط لازم و کافی برای q عبارت است از p

نقیض ترکیب دو شرطی: 

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

برای دو گزاره دلخواه p, q داریم:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال: به کمک جدول رابطه بالا را ثابت کنید. 

سورها 

1 سور عمومی: گزاره ای که خاصیتی را در مورد همه عضوهای یک مجموعه بیان میکند را "گزاره کلی" یا "گزاره با سور عمومی" می گویند.

❖ اگر گزاره $p(x)$ نمایشی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به همه عضوهای دامنه نسبت می دهد سور عمومی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\forall x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: * همه x هایی که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

* به ازای هر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

2 سور وجودی: گزاره ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می کند را "گزاره با سور وجودی" می گویند.

❖ اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان می کند. گزاره ای که این خاصیت را به برخی از عضوهای دامنه نسبت می دهد سور وجودی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\exists x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: ❖ وجود دارد x ای که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

❖ به ازای بعضی مقادیر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

📖 مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } (\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 = 16) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > 1)$$

$$\text{ب) } \forall a, b \in \mathbb{Z}; (a > b \Rightarrow a^2 > b^2)$$

$$\text{پ) } \forall x \in \mathbb{R}; \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\text{ت) } (\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > 1) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 = 9)$$

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

1 نقیض سور عمومی:



نقیض "همه x ها در خاصیت $p(x)$ صدق میکنند" عبارت است از "وجود دارد x که در خاصیت $p(x)$ صدق

نمیکند."

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

2 نقیض سور وجودی:



نقیض گزاره "به ازای بعضی مقادیر x عبارت $p(x)$ برقرار است." عبارت است از "به ازای هر x ای عبارت $p(x)$

برقرار نیست."

گزاره با سور عمومی وقتی درست است که نتوان مثال نقضی برایش پیدا کرد به عبارتی $S = D$



گزاره با سور وجودی وقتی درست است که بتوانیم حداقل یک عضو از دامنه یافت که به ازای آن گزاره نما به



گزاره درست تبدیل شود.

مثال: ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

$$\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 \geq x \quad (2)$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}; x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; x + \frac{1}{x} = -2 \quad (4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \quad (3)$$

مثال: نقیض گزاره $\forall x > 0; x^2 > x$ را بنویسید.

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید

(1) عددی گویا است.

(2) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

(3) سعدی یک ریاضی دان است.

مثال: نقیض گزاره همه دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوشند، کدام است؟

(1) همه دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

(2) بعضی دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

(3) بعضی از دانشجویان هر دانشگاهی در تهران باهوش نیست.

(4) لا اقل یکی از دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیست.

📖 مثال : نقیض گزاره "مریم ریاضی دان است" ، کدام گزینه نیست؟

(۱) مریم ریاضی دان نیست. (۲) این طور نیست که مریم ریاضی دان است.

(۳) مریم ریاضی کار نمی کند. (۴) مریم ریاضی نمی داند.

📖 مثال : گزاره "این طور نیست که ۵ عددی اول نیست" معادل با کدام گزینه است؟

(۱) ممکن است ۵ عددی غیراول باشد. (۲) ۵ عددی اول است.

(۳) ۵ عددی مرکب است. (۴) ۵ عددی اول نیست.

📖 مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید. $(\exists x \in \mathbb{Z}; \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z}) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x} \in \mathbb{R})$

📖 مثال : نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید.

📖 مثال : ارزش گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}; x+y > 0$ را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : نقیض گزاره سوری $\exists x \forall y; p(x) \wedge \sim q(y)$ را بنویسید.

📖 مثال : گزاره سوری "عددی حقیقی وجود دارد که از هر عدد دیگر بزرگتر است" را به زبان ریاضی بنویسید.

سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : عکس نقیض گزاره شرطی زیر را بنویسید.

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}; a < b) \Rightarrow (\exists a, b \in \mathbb{Z}; a^2 > b^2)$$

📖 مثال : ثابت کنید گزاره های زیر همیشه درست اند.

الف) $\forall x; p(x) \Rightarrow \exists x; p(x)$

ب) $[\forall x; p(x)] \vee [\forall x; q(x)] \Rightarrow \forall x; [p(x) \vee q(x)]$

✅ **دامنه متغیر گزاره نما:** در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که میتوان آن ها را به جای متغیر(های) آن قرار

داد تا این گزاره نما تبدیل به گزاره شود؛ دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

✅ **مجموعه جواب گزاره نما:** در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه که به ازای آنها گزاره نما تبدیل به

گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و آن را با حرف K نمایش میدهند. بدیهی است که

$$S \subseteq D$$

📖 مثال: دامنه متغیر گزاره نمای $\sqrt{2-|x|} < 1$ کدام است؟

(۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $R - [-2, 2]$

📖 مثال: مجموعه جواب گزاره نمای $\frac{1}{\sqrt{2-|x|}} \leq 1$ کدام است؟

(۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $[-2, 2]$

📖 مثال: مجموعه جواب هر کدام از گزاره‌های زیر را با توجه به دامنه متغیر گزاره نما مشخص کنید.

(۱) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{4}$ است. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(۲) x مضرب ۷ است. $D = Z$

(۳) $x^2 + 4x = 2$ $D = R$

(۴) در پرتاب یک تاس $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(۵) $x+1 > 2$ $D = \{0, 1, 2, 3\}$

(۶) $\frac{2x+1}{3} \leq -1$ $D = Z$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

مثال: خاصیت شرکت پذیری را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

مثال: خاصیت توزیع پذیری (پخشی) را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

مثال: قانون جذب و شبه جذب (همپوشانی) را با کمک جدول نشان دهید.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

الف) جذب


$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

(ب) شبه جذب

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

مثال: قانون دمرگان را با جدول ارزش ثابت کنید. 

نشان بده که
تلاشی در مسیر موفقیت

مجموعه



❖ **تعریف مجموعه :** دسته ای از اشیا معین است که بدون هیچ ابهامی می توان معلوم کرد که یک شی معین در آن قرار

دارد یا نه

❖ نکات مهم :

(۱) اشیا یی که با هم مجموعه را تشکیل می دهند، عضو یا عضوهای آن مجموعه نامیده می شوند.

(۲) در مجموعه ترتیب مهم نیست و نباید اعضای تکراری وجود داشته باشد. بنابراین :

$$\{3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1\} =$$

(۳) اگر A یک مجموعه باشد در صورتی که عضوی مانند x در مجموعه A وجود داشته باشد، می نویسیم : $x \in A$

و در صورتی که x متعلق به مجموعه A نباشد می نویسیم : $x \notin A$

نماد \in به معنای عضویت است.

📖 مثال : کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند ؟

(۱) دسته اعداد فرد طبیعی کوچکتر از عدد ۲۰

(۲) دسته اعداد اول یک رقمی

(۳) دسته شامل اعداد بزرگ

(۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

📖 مثال : اگر $A = \{x, \{x\}, \{\{\{y\}\}\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است ؟

(۱) $x \in A$ (۲) $\{x\} \in A$ (۳) $\{y\} \in A$ (۴) $\{\{\{y\}\}\} \in A$

📖 مثال: کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند؟

(۱) دسته افراد فرد طبیعی کوچکتر از عدد ۲۰ (۲) دسته شامل اعداد بزرگ

(۳) دسته اعداد اول یک رقمی (۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

✅ **تعریف مجموعه مرجع:** در هر مجموعه معین، عناصری قرار می گیرند که همه آن ها عضوهای یک مجموعه به نام مرجع (عام، جهانی) می باشند. مجموعه مرجع را با حرف U نشان می دهیم.

❖ معمولاً مجموعه مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه های داخل مجموعه مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می دهیم.

📖 مثال: اگر مجموعه مرجع را اعداد طبیعی فرض کنیم، متمم مجموعه $A = \{x \in N; x^2 < 3^x\}$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

✅ **تعریف مجموعه تهی:** مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد. و با نماد \emptyset نمایش داده

میشود. بنابراین: $\emptyset = \{ \}$

📖 مثال: کدام مجموعه تهی است؟

$$B = \{x \in Z; x + 5 = 5\} \quad (۲)$$

$$A = \{x \in Z; x^2 = 4, 3x = 6\} \quad (۱)$$

$$D = \{x \in N; x^2 = 8x\} \quad (۴)$$

$$C = \{x \in Z; x > 3, 2^x < 10\} \quad (۳)$$



روش های مشخص کردن یک مجموعه: معمولاً به یکی از دو روش زیر عمل می کنیم:

❖ نام بردن (فهرست کردن) اعضای مجموعه

❖ معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه با زبان ریاضی (گزاره نما) توجه شود که در این روش باید مجموعه مرجع مشخص باشد.

📖 مثال: هریک از مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$$۳) A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq ۲\}$$

$$۴) B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^۳ = n\}$$

$$۵) C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۳ - x = ۰\}$$

$$۶) D = \{a \in S \mid \text{ای پرتاب یک تاس است}\}$$

$$۷) E = \{۲^x \times ۳^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = ۵\}$$

$$۸) F = \left\{ \frac{x^۲ + ۴}{۳x + ۲} \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{N}, x < ۵ \right\}$$

$$۹) G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ - ۱۲x + ۳۵ = ۰ \vee x^۲ \leq ۱۰\}$$

$$۱۰) H = \{x \in \mathbb{N} \mid x^۲ + ۱ = ۰\}$$

$$11) I = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(x^2 - 2)(2x + 1) = 0\} \quad 12) J = \{x \in \mathbb{Z} \mid n^3 + 2n = 3n^2\}$$

مثال: اگر $A = \{a, \{a\}, \{\{b\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

$$\{a\} \in A \quad (1) \quad a \in A \quad (2) \quad \{b\} \in A \quad (3) \quad \{\{b\}\} \in A \quad (4)$$

مثال: مجموع تمام عضوهای مجموعه $A = \{k^2 + 1; k \in \mathbb{N}, k < 5\}$ کدام است؟

$$34 \quad (1) \quad 35 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 37 \quad (4)$$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما (به زبان ریاضی) نمایش دهید.

$$13) A = \{-8, -1, 0, 1, 8, 27, \dots\}$$

$$14) B = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما نشان دهید.

$$B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

$$A = \{-1, 0, 1, 8, 27, \dots\}$$

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر ناتهی است؟

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = 8\} \quad (۲)$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 = 9) \wedge (2x = 4)\} \quad (۱)$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = -7x\} \quad (۴)$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\} \quad (۳)$$

مثال: دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ و $B = \{\{1, 2\}, \{-3\}, 3\}$ مفروضند. درستی یا نادرستی هر یک از

موارد زیر را مشخص کنید.

۱) $\{2\} \in A$

۲) $\{3\} \in A$

۳) $3 \in B$

۴) $\{1, 2\} \in B$

۵) $-3 \in B$

۶) $-2 \in A$

مثال: اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}, n \in \mathbb{N}$ انگاه مجموعه $(A_8 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

۷(۴)

۶(۳)

۵(۲)

۸(۱) (کنکور ریاضی ۹۶)



زیرمجموعه: مجموعه A را یک زیرمجموعه B مینامیم اگر و تنها اگر هر عضوی از A ، عضوی از B باشد که در این

صورت می نویسیم: $A \subseteq B$ پس: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

❖ چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو متعلق به مجموعه B نباشد، در این صورت A

زیرمجموعه B نیست و مینویسیم $A \not\subseteq B$ پس: $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$

📖 مثال: اگر $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}$ کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟ (با ذکر دلیل)

الف) $\{x\} \subseteq A$ ب) $\{\{x\}\} \in A$

📖 مثال: اگر $A = \{۲\}$ و $B = \{۲, \{۲\}\}$ و $C = \{\{۲\}, \{۲, \{۲\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$

📖 مثال: اگر چهار مجموعه $A = \{x \mid x \text{ مستطیل است}\}$ و $B = \{x \mid x \text{ لوزی است}\}$ و $C = \{x \mid x \text{ مربع است}\}$ و

$D = \{x \mid x \text{ متوازی الاضلاع است}\}$ مفروض باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \subseteq C$ (۲) $C \subseteq B$ (۳) $A \subseteq B$ (۴) $D = A \cap B$

📖 مثال: اگر $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ ، $C = \{a, b, \{b\}, \{a, b\}\}$ کدام گزینه درست است؟

$A \in B$ $A \subseteq B$ $A \in C$ $B \in C$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$ در هر یک از

حالت های زیر مشخص کنید X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟

$X \subseteq B$ عضو مشترکی ندارند. $X \subseteq A$ ولی $X \subseteq C$

$X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$ $X \subseteq C$ ولی $X \not\subseteq A$

مثال: مجموعه های A, B را طوری مشخص کنید که:

(الف) $A \subseteq B, A \in B$

(ب) $A \subseteq B, A \notin B$

(پ) $A \not\subseteq B, A \in B$

مثال: کدام گزاره نادرست است؟

$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ $\emptyset = \{\emptyset\}$ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

مثال: مجموعه های $A = \{2\}$, $B = \{3, 5, \{2\}\}$, $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض اند، کدام بیان در مورد آن ها

نادرست است؟

(۴) $A \subseteq C$

(۳) $B \in C$

(۲) $A \in C$

(۱) $A \in B$

✓ دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A, B با مرجع U را مساوی می‌گوییم اگر و تنها اگر هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر:

$$A = B \Leftrightarrow [\forall x; (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$$

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

📖 مثال: فرض کنید $A = \{1, 2\}$ با ذکر دلیل توضیح دهید کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه A مساوی است؟

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\} \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

📖 مثال: اگر $A = B, B = \{4, 5, x - y\}, A = \{2, x + 2y, 4\}$ در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

$$(3, 1) \quad (1, 3) \quad (2, 3) \quad (2, 1)$$

📖 مثال: اگر $A = B, B = \{4, 5, x - y\}, A = \{2, x + 2y, 4\}$ در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

$$(3, 1) \quad (4) \quad (1, 3) \quad (3) \quad (2, 3) \quad (2) \quad (2, 1) \quad (1)$$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه:



❖ اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های A برابر است با: 2^n

❖ اگر از زیر مجموعه های یک مجموعه، خود مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه ها را زیرمجموعه محض یا سره آن مجموعه می گوئیم.

📖 مثال: مجموعه $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ چند زیر مجموعه دارد؟ تمام آن ها را بنویسید.

📖 مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه های $(k+3)$ عضوی ۵۶ واحد بیشتر از زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی است. k را بیابید.

📖 مثال: اگر ۲ عضو به اعضای مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد. در این صورت مجموعه A دارای چند زیر مجموعه سره ناتهی است؟

📖 مثال: اگر تعداد زیرمجموعه های مجموعه A ، ۶۴ برابر تعداد زیرمجموعه های مجموعه B باشد و این دو مجموعه روی هم ۱۰ عضو داشته باشند، تعداد عضوهای این دو مجموعه به صورت دوتایی (A, B) کدام است؟

📖 مثال: اگر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $2k$ عضوی، ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $3k$ عضوی باشد، آنگاه برای k چند جواب وجود دارد؟

📖 مثال: اگر ۲ عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

📖 مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با 8^{3n-8} است. تعداد زیر مجموعه های محض مجموعه $n+2$ عضوی را بیابید؟

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه شامل عضو a و فاقد عضو b دارد؟

۳۲ ۶۲ ۱۶ ۱۴

مثال: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ، مجموعه $A - \{A\}$ چند زیرمجموعه سره غیرتهی دارد؟

۲ ۷ ۶ ۱۴

مثال: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ، $B = \{a, b\}$ مجموعه $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه ی سره ی غیر تهی دارد؟

۲(۱) ۱۴(۲) ۶(۳) ۷(۴) ریاضی ۸۹

مثال: اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ باشد مجموعه ی $A - \{A\}$ چند زیرمجموعه ی سره ی غیر تهی دارد؟ ریاضی

خارج ۸۹

۲(۱) ۱۴(۲) ۶(۳) ۷(۴)

مثال: چند زیر مجموعه از مجموعه $A = \{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\}$ عضو $\{a, b\}$ ندارد؟ ریاضی ۹۱

۱۲(۴)

۸(۳)

۶(۲)

۴(۱)

مثال: تعداد زیرمجموعه های محض مجموعه زیر را بنویسید.

$$A = \{\delta^x + 2^y \mid x, y \in N, x + y = 3\}$$

مجموعه توانی: مجموعه همه زیرمجموعه های مجموعه A را، مجموعه توانی A مینامیم و با $P(A)$ نمایش



$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

می دهیم:

واضح است که اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است. ❖

نتیجه: $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$ ❖

مثال: اگر $A = \{a, b\}$ مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

مثال: مجموعه های $B = \{\emptyset, 3\}$, $A = \{\emptyset, \{\emptyset, 3\}\}$ مفروض اند

الف) مجموعه $A \cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید (ب) مجموعه توانی A را بنویسید

مثال: اگر $B = \{\emptyset, \{\emptyset, 3\}\}$, $A = \{\emptyset, 3\}$ ، آنگاه مجموعه $P(A \cup B)$ دارای چند زیرمجموعه دارد؟

مثال: اگر $A = \{a\}$ باشد تعداد عناصر $p(p(A))$ و تعداد زیرمجموعه های آن را بیابید.

نزد ننگه بوک
تلاشی در مسیر موفقیت

♦ اجتماع و اشتراک تعدادی مجموعه با الگویی خاص:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

📖 مثال: اگر $A_i = [-i, 10-i]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ آنگاه مجموعه های A_i را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $A_n = (-n, n)$ ، $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ، $\bigcup_{i=1}^n A_i$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid (-n \leq m) \wedge (2^m \leq n)\}$ ، آنگاه تعداد عضوهای $A_4 \cup A_7$ چه تعداد بیشتر از تعداد


۴

۵


۶

۷


عضوهای $A_4 \cap A_7$ است؟

مثال: اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ را مشخص کنید. 

مثال: اگر $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $A_7 - (A_1 \cap A_7)$ را بیابید. 

مثال: اگر $A_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid -n < k, 2^k < 2^n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $\bigcup_{i=1}^3 A_i - \bigcap_{i=1}^3 A_i$ دارای چند زیر مجموعه است؟ 

۴ ۸ ۱۶ ۱

مثال: اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ، باشد، مجموعه $(A_8 - A_7) \cup A_1$ چند عضو دارد؟ (کنکور ۹۶) 

۵(۱) ۶(۲) ۷(۳) ۸(۴)

مثال: اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n, 2 \leq 2n\}$ انگاه مجموعه $(A_6 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟ (کنکور ریاضی ۹۴)

۷(۴)

۶(۳)

۵(۲)

۴(۱)

مثال: اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -n, 2^m \leq n\}, n \in \mathbb{N}$ انگاه مجموعه $A_7 \cap A_4$ چند زیر مجموعه دارد؟ (کنکور ریاضی ۸۸)

۳۶(۴)

۳۲(۳)

۱۶(۲)

۸(۱)

مثال: اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z}, -i \leq m \leq 8-i\}$ مجموعه $\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i$ چند عضو دارد؟ (کنکور ریاضی خارج ۸۷)

۱۶(۴)

۱۵(۳)

۱۴(۲)

۱۲(۱)

مثال: اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right], i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آن گاه مجموعه $(A_1 \cap A_7) - (A_1 \cap A_5)$ به کدام صورت است؟

(ریاضی ۹۲)

∅ (۴)

$[-1, 1]$ (۳)

$[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۲)

$[-2, -1] \cup (1, 2)$ (۱)

افراز یک مجموعه



بخش بندی یک مجموعه به زیر مجموعه های نا تهی، که دو به دو با هم اشتراک ندارند واجتماع همه آنها برابر با مجموعه اولیه است، افراز یک مجموعه است.

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی است و A_1, A_2, \dots, A_n زیر مجموعه های A باشند در این صورت میگوییم A به n زیر مجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall i \ 1 \leq i \leq n : A_i \neq \emptyset \quad (۱)$$

$$\forall i, j \ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \quad (۲)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \quad (۳)$$

مثال: فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ باشد، کدام یک از موارد زیر یک افراز برای مجموعه A نیست؟

$\{a, b, c, d, e, f, g\}$ (۲)

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$ (۱)

$\{a, e, g\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}$ (۴)

$\{a, b, e, g\}, \{c\}, \{d, f\}$ (۳)

❖ نکته: برای یافتن تمام افرازه‌های یک مجموعه n عضوی، کافی است افرازه‌های یک مجموعه ای (یک بخشی) افرازه‌های دو مجموعه ای (دوبخشی) و و افرازه‌های n عضوی آن مجموعه را بیابیم.

❖ برای پیدا کردن تعداد افرازه‌هایی که مجموعه را به k قسمت (زیرمجموعه) افراز می‌کند ابتدا حالت‌های کلی که می‌توان مجموعه را به k قسمت تقسیم کرد پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از آنالیز ترکیبی (شمارش بدون شمردن) مساله را حل و فصل می‌کنیم.

به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ را به سه زیر مجموعه افراز کنیم حالات کلی زیر ممکن است:



$$\frac{\binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1}}{2!} = 15$$



$$\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{3}}{2!} = 10$$

📖 مثال: تمام افرازه‌های مجموعه $A = \{1, 2\}$ را بیابید.

📖 مثال: تمام افرازه‌های مجموعه $B = \{a, b, c\}$ را تعیین کنید.

📖 مثال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ دارای چند افراز فاقد مجموعه یک عضوی است؟

۷(۴)

۶(۳)

۵(۲)

۴(۱)

❖ نکته:

مثال: اگر مجموعه $\{\{a\}, \{b\}, \{\{a,b\}\}, \{c\}\}$ یک افراز از مجموعه A باشد، آنگاه مجموعه A دارای چند افراز

دو عضوی است؟

۶(۱) ۷(۲) ۲(۳) ۵(۴)

مثال: برای مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، چند افراز مختلف وجود دارد به طوری که سه عضو c, b, a در یک مجموعه

قرار داشته باشند؟

۴ ۵ ۷ ۸

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ دارای چند افراز سه عضوی است؟

۴ ۵ ۷ ۶

مثال: یک مجموعه ۶ عضوی چند افراز ۲ عضوی و چند افراز ۳ عضوی و چند افراز ۴ عضوی دارد؟

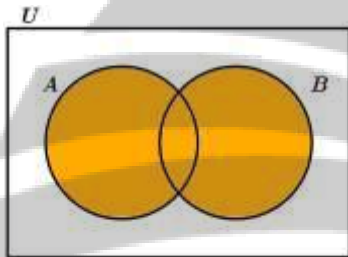
قوانین بین مجموعه ها



همان گونه که می توان در مجموعه اعداد حقیقی دو یا چند عدد را جمع، ضرب یا تفریق نمود و اعدادی جدید به دست آورد، در مورد مجموعه ها هم می توانیم مشابه این اعمال را انجام دهیم و مجموعه هایی جدید به دست آوریم.

❖ **اجتماع دو مجموعه:** مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو" می باشد. با

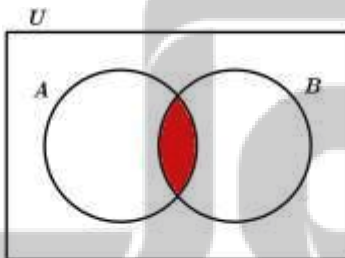
نماد $A \cup B$ نمایش داده میشود و عبارت است از $A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$



یعنی: $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

❖ **اشتراک دو مجموعه:** مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A و متعلق به B " می باشد. با نماد $A \cap B$

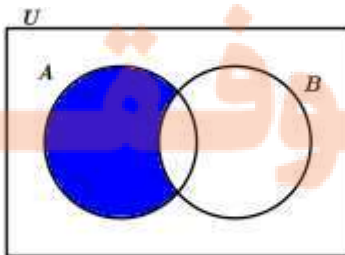
نمایش داده میشود و عبارت است از $A \cap B = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$ یعنی:



$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

❖ **تعریف تفاضل دو مجموعه:** تفاضل دو مجموعه A, B مجموعه ای است که اعضای آن متعلق به A می باشند ولی

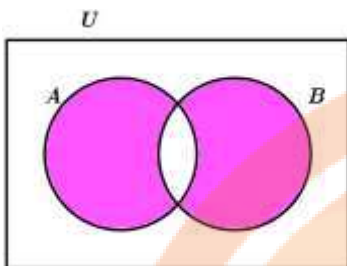
در مجموعه B قرار ندارند و آن را به صورت $A - B$ نشان می دهیم و داریم:



$A - B = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

به بیان دیگر: $x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$


❖ تعریف تفاضل متقارن دو مجموعه :



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

📖 مثال: اگر A, B, C سه مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه هریک از موارد زیر را به کمک نمودار ون نمایش دهید. و بیان جبری آنها را بنویسید.

الف) عضوهایی که فقط در A باشند.	ب) عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه ها باشند.
پ) عضوهایی که در A, C باشند ولی در B نباشند.	ت) عضوهایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.
ث) عضوهایی که فقط متعلق به دو مجموعه باشند.	ج) عضوهایی که حداقل به دو مجموعه تعلق داشته باشند.

مثال: در نمودارهای ون رسم شده، قسمت هاشورزده را به کمک جبر مجموعه ها مشخص کنید. 

قوانین جبر مجموعه ها 

۱) $(A')' =$

۲) $A \cup A' =$

۳) $A \cap A' =$

۴) $A \cup U$

۵) $A \cap U$

۶) $A \cup A =$

$A \cap A =$

۷) جا به جایی اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

اثبات:

۸) شرکت پذیری اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$

اثبات:

توزیع پذیری (پخششی) اجتماع و اشتراک نسبت به هم (۹)

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

اثبات:

قوانین جذب (۱۰) $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

اثبات:

قوانین دمورگان (۱۱) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

اثبات:

۱۲) $A - B = A \cap B'$ متتم دومی \cap اولی


اثبات:

📖 مثال: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.


الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$


پ) $A - B = B' - A'$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید. 


$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید. 


$$(A - B) - C = (A - C) - B$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید. 


$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید. 


$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید. 

$$(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$$

مثال: برای سه مجموعه A, B, C از مرجع U ثابت کنید: 

$$(A - B)' \cap (A - C)' = (B - C) \cup A'$$

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، حاصل $(A' \cap B') \cap A$ برابر کدام است؟ 

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، مجموعه $(A \cap B) \cup (B' \cap A)$ برابر است با:

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، حاصل $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$ برابر کدام است؟

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، حاصل $(A \cup B) \cap (B' \cup A)$ برابر کدام است؟

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، مجموعه $A \cup (B \cup A')$ برابر کدام است؟

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، حاصل $[(A \cap B')' \cup (B \cap A)'] \cup (A \cap B)$ کدام است؟

U B A \emptyset

مثال: اگر A, B دو مجموعه باشند و داشته باشیم: $B - (B - A) = A$ آنگاه ثابت کنید: $A \subseteq B$

مثال: اگر A و B دو مجموعه ی غیر تهی و $A \cap B' = B \cap A'$ آن گاه مجموعه ی $(A \Delta B) - A$ کدام است؟ (ریاضی

خارج ۹۰)

B' (۴)

B (۳)

A (۲)

\emptyset (۱)

📖 مثال: ثابت کنید: (تفاضل از راست داریم)

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \quad \text{ب)}$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \quad \text{الف)}$$

📖 مثال: ثابت کنید: (تفاضل از چپ قانونی ندارد)

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad \text{ب)}$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \quad \text{الف)}$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

📖 مثال: توزیع پذیری اشتراک روی تفاضل را ثابت کنید:

📖 مثال: ثابت کنید رابطه های زیر همواره برقرارند:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = A \cup B \quad \text{ب)}$$

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \quad \text{ج)}$$

$$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B \quad \text{د)}$$

📖 مثال: اگر A و B دو مجموعه ی غیر تهی باشند مجموعه ی $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ برابر کدام

است؟ (ریاضی ۸۹)

$$(A - B)'$$

$$A'$$

$$\emptyset$$

$$A' - B'$$

مثال: اگر C, B, A سه مجموعه ی غیر تهی باشند به طوری که $A \subseteq B$ آن گاه مجموعه ی

$A \cap C'$ (۴) A (۳) $A \cap C$ (۲) B (۱) کدام است؟ $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$

ریاضی ۹۰

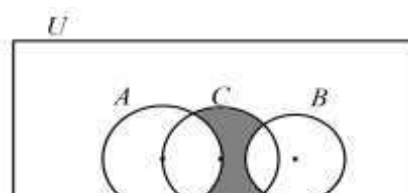
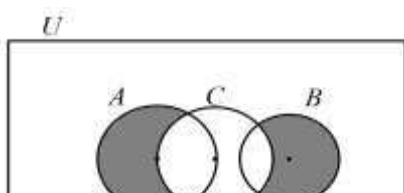
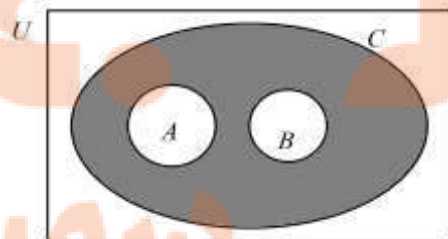
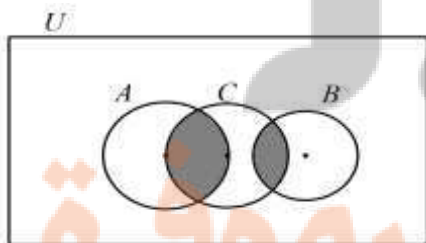
مثال: اگر A و B دو مجموعه ی غیر تهی باشند $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟ ریاضی خارج ۹۱

$A - B$ (۴) $A \cap B$ (۳) \emptyset (۲) B' (۱)

مثال: متمم مجموعه $(B - A)' - A$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

B (۴) A (۳) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۱)

مثال: نمودار ون مربوط به مجموعه $C - (A \cup B)'$ کدام میتواند باشد؟



تعریف زوج مرتب



هر دوتایی مانند (a, b) را که در آنها ترتیب هم مهم است زوج مرتب مینامیم. a را مولفه یا مختص اول و b را مولفه یا مختص دوم می نامیم.

♦ دو زوج مرتب در صورتی با هم برابرند که مولفه های نظیر آنها با هم برابر باشند یعنی:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

📖 مثال: اگر $(x, z + x) = (3, (y - 2)^2 + (x - 1)^2)$ باشد، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

📖 مثال: اگر $(27, 2^{2x+y}) = (128, 3^{2x-y})$ ، آنگاه $x + y$ برابر کدام است؟

$\frac{11}{2}$ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

📖 مثال: اگر $(xy, 13) = (6, x^2 + y^2)$ ، آنگاه مقادیر مثبت x, y را بیابید.

تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه



❖ برای دو مجموعه A, B ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B ، مجموعه ای است شامل تمام زوج های مرتبی که مولفه اول آنها از A و مولفه دوم آنها از B می باشد یعنی:

		$\{y \in B\}$	
		-1	2
A شود:	a	(a, -1)	(a, 2)
	b	(b, -1)	(b, 2)
		$\{x \in A\}$	

❖ در حالت خاص ضرب دکارتی یک مجمو

❖ در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی باشد داریم:

$$(x, y) \in (A \times B) \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in B)]$$

❖ در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی نباشد:

$$(x, y) \notin (A \times B) \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \notin B) \vee (x \notin A \wedge y \in B) \vee (x \notin A \wedge y \notin B)]$$

📖 مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{a, b\}$ باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی $B \times A$ و را تشکیل دهید. چه

نتایجی می گیرید؟

نتیجه مهم:



❖ ۵ ویژگی مهم ضرب دکارتی:

۱- اگر A مجموعه ای دلخواه از مرجع U باشد: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

۲- برای دو مجموعه A, B از مرجع U داریم:

۳- برای چهار مجموعه ناتهی A, B, C, D از مرجع U داریم: $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Leftrightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$

۴- ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای مجموعه ای $(\cup, \cap, -)$ توزیع پذیر است، هم از راست و هم از چپ.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

۵- برای چهار مجموعه ناتهی A, B, C, D از مرجع U داریم: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

📖 مثال: هرگاه $A = \{x - y, 3\}$, $B = \{x + y, 1\}$ داشته باشیم: $A \times B = B \times A$ مقادیر x, y را بیابید.

📖 مثال: اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 4\}$ و $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \wedge |k| \leq 1\}$ آنگاه $A \times B$ دارای چند عضو است؟

۶(۴)

۱۲(۳)

۹(۲)

۸(۱)

📖 مثال: مجموعه A دارای ۶۳ زیرمجموعه محض و B دارای ۵ عضو باشد $A \times B$ چند عضو دارد؟

📖 مثال: اگر $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\}$ (الف) عضوهای مجموعه $A^c - B^c$ را مشخص کنید.

(ب) $A^c - B^c$ چند زیرمجموعه دارد؟

📖 مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 50\}$, $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$ باشد تعداد زیرمجموعه های

$(A \times B) \cap (B \times A)$ کدام است؟ ریاضی ۹۳

۳۲(۴)

۱۶(۳)

۸(۲)

۴(۱)

📖 مثال: اگر $A = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$, $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k - 3| \leq 2\}$ باشد آنگاه مجموعه ی $(A \times B) \cap (B \times A)$

چند عضو دارد؟ ریاضی ۹۲

۱۶(۴)

۹(۳)

۸(۲)

۶(۱)

مثال: اگر $A = \{k : k \in \mathbb{N}; k \leq 5\}$, $B = \{k : k \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq 3\}$ باشد، مجموعه های $A \times A, B \times B$ چند عضو

مشترک دارند؟

۴(۴)

۹(۳)

۱(۲)

۵(۱)

مثال: $A = \{x^x | x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x^2 | x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \leq 2\}$ آنگاه مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ دارای چند

زیرمجموعه سره غیرتهی است؟

♦ نکته در مورد مساوی بودن ضرب دکارتی دو مجموعه

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

مثال: اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$, $B = \{x + 1, 4, -2\}$ در این صورت با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای

$x + y + z$ کدام است؟

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

مثال: اگر $A = \{512, 3^{2x+y}\}$ و $B = \{2^{3x-2y}, 81\}$ و $A \times B = B \times A$ ، آنگاه حاصل عبارت $5x + 4y$ کدام است؟

$$\frac{61}{7} \quad (4)$$

$$\frac{59}{7} \quad (3)$$

$$\frac{57}{7} \quad (2)$$

$$\frac{51}{7} \quad (1)$$

نمودار مختصاتی ضرب دکارتی دو مجموعه



❖ دو مجموعه A, B از مرجع U را در نظر میگیریم به کمک تعریف ضرب دکارتی، مجموعه $(A \times B)$ را تشکیل می دهیم.

(۱) در صورتی که عضوهای مجموعه $A \times B$ به صورت زوج مرتب باشد، هر عضو را همانند مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات نمایش می دهیم. (توجه کنید برای انجام این کار، عضوهای مجموعه اول، در اینجا مجموعه A ، روی محور افقی (X ها) و عضوهای مجموعه دوم، در اینجا مجموعه B ، روی محور عمودی مشخص می شود).

(۲) در صورتی که عضوهای مجموعه $(A \times B)$ به کمک بازه های حقیقی نمایش داده شوند، بازه متعلق به مجموعه A را روی محور X ها و بازه متعلق به مجموعه B را روی محور عمودی در نظر میگیریم. به این ترتیب معمولاً یک سطح حاصل میشود.

مثال: اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{-1, -2, 0\}$ آنگاه مجموعه های $A \times B$ ، $B \times A$ را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی

هر کدام را رسم کنید.

مثال: اگر $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 20 = 0\}$ آنگاه نمودار مختصاتی $B \times A$, $A \times B$ را رسم کنید.

کنید.

مثال: فرض کنیم $A = (1, 4]$, $B = \{1, 2\}$ در این صورت تعریف مجموعه های $A \times B$, $B \times A$, A^2 , B^2 را تشکیل و نمودار هندسی آنها را رسم کنید.

مثال: اگر $A = [0, 2]$, $B = [1, 3]$ باشند، نمودارهای $A \times B$, $B \times A$ را رسم کنید.

مثال: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{4\}$ آنگاه نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید.

📖 مثال: فرض کنیم $A = \{-1, 2\}$, $B = [-1, 2]$ تعریف مجموعه های $A \times B$, $B \times A$ را تشکیل و نمودار هندسی آنها را رسم کنید.

📖 مثال: در هر یک از موارد زیر نمودار مجموعه های $A \times B$, $B \times A$ را رسم کنید.

الف) $A = \mathbb{R}$, $B = \{2, 3\}$

ب) $A = \mathbb{N}$, $B = [1, 4]$

📖 مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ آنگاه نمودار مختصاتی A^2 را رسم کنید.

مثال: اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 4\}$ ، $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z} \wedge |k| \leq 1\}$ ، آنگاه $A \times B$ دارای چند عضو است؟

۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

مثال: اگر $A = [0, 1]$ ، $B = \{0, 1\}$ باشند، نمودار مختصاتی $B \times A, A \times B$ را رسم کنید.

مثال: اگر $A = [1, 4]$ ، $B = [3, 5]$ باشند، نمودارهای مختصاتی A^2, B^2 را رسم کنید.

مثال: اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A \cap B = \{2, 3\}$ ، $|(A-B) \times (B-A)| = 6$ ، تعداد عضوهای مجموعه B کدام است؟ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

مثال: اگر $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 2\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$ ، آنگاه مجموعه $(B^2 - A^2)$ چند عضو دارد؟ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

نزد ننگه بوک
تلاشی در مسیر موفقیت

علم آمار و علم احتمال



❖ علم آمار در پی شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه های جمع

آوری شده معلوم است.

پدیده هایی که با شمارش و تعداد سر و کار دارند مربوط به علم آمار

هستند



❖ علم احتمال در پی بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و

به نوعی در جهت عکس علم آمار است.

پدیده هایی که میخواهیم امکان و شانس آن ها را بررسی کنیم مربوط به علم

آمار هستند.

📖 مثال: "کارخانه هایی که سهام خود را در بورس عرضه کرده اند" و "امکان پایین آمدن شاخص داوجونز در بورس

وال استریت در سال آینده" هر کدام مربوط به کدام علم است؟

(۱) علم آمار - علم احتمال

(۲) علم احتمال - علم احتمال

(۳) علم آمار - علم احتمال

(۴) علم احتمال - علم آمار

📖 مثال: کدام گزینه مربوط به علم احتمال است؟

(۱) تعداد افراد حاضر در کلاس درس

(۲) بلندقدترین دانش آموز مدرسه

(۳) امکان ظاهر شدن ۲ رو در ۴ پرتاب

(۴) بالاترین نمره در کارنامه درسی

📖 مثال: "تعداد دانش آموزان علاقه مند به درس ریاضی" و "شانس گرفتن نمره بالاتر از ۱۸ در آزمون پایان ترم

درس آمار" به ترتیب مربوط به کدام علم میشود؟

(۱) آمار-آمار (۲) آمار-احتمال (۳) احتمال-آمار (۴) احتمال-احتمال

فضای نمونه ای



پدیده ای که قبل از رخ دادن، نتیجه اش معلوم نیست ولی مجموعه نتایج ممکن آن مشخص است آزمایش تصادفی نامیده میشود. مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، ... مجموعه همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می نامند و با S نشان می دهند و هریک از عضوهای آن را یک برآمد می نامند.

از آنجاییکه فضای نمونه یک مجموعه است، پس به دو روش زیر میتوان آن را مشخص کرد:

نام بردن (فهرست کردن) برآمدها معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره نما)

📖 مثال: یک راننده تاکسی در ایستگاه منتظر میماند تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند. البته ممکن است با کم تر از ۴ مسافر

هم حرکت کند. اما در مسیر برگشت هرگز خالی برنمیگردد. اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما

مهم باشد، فضای نمونه ای برای توصیف چنین پدیده ای چند عضو دارد؟

۲۰(۱) ۱۲(۲) ۹(۳) ۲۵(۴)

📖 مثال: برای هریک از پدیده های زیر فضای نمونه ای را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه

ب) خانواده تک فرزندی

پ) ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف از جعبه ای شامل ۵ لامپ با شماره های ۱ تا ۵

📖 مثال: فضای نمونه ای هر یک از پدیده های زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب دو سکه با هم (دوبار پرتاب یک سکه)

ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

📖 مثال: فضای نمونه ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دوبار پرتاب یک تاس) را مشخص کنید.

📖 مثال: در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم فضای نمونه ای چند برآمد دارد؟

📖 مثال: در یک ایستگاه هواشناسی در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص میشود:

• دمای هوا: سرد یا گرم

• رطوبت هوا: خشک یا مرطوب

• سرعت باد: باد میوزد یا باد نمیوزد

• وضعیت هوا: صاف، نیمه ابری، یا ابری

• مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی

الف) فضای نمونه را برای یک لحظه تصادفی در این ایستگاه هواشناسی مشخص کنید.

ب) این فضای نمونه چند برآمد دارد؟

📖 مثال: سکه ای را یک بار پرتاب میکنیم. اگر "پشت" بیاید آنگاه تاس را میریزیم. و اگر "رو" بیاید سکه را دوبار

دیگر پرتاب میکنیم.

فضای نمونه را مشخص کنید.

پیشامد



هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامند. یعنی پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مساله است. بنابراین اگر فضای نمونه آن دارای n عضو باشد، برای آن میتوان 2^n پیشامد در نظر گرفت.

یعنی هر عضو از فضای نمونه می تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نداشته باشد.

هر پیشامد تک عضوی را ساده مینامیم.

📖 مثال: تاسی را پرتاب میکنیم. پس از ظاهر شدن عدد روی تاس، به تعداد همان عدد سکه پرتاب میکنیم. فضای نمونه

ای این آزمایش چندعضوی است؟

۳۸۴ (۴)

۶۴۲ (۳)

۴۸۴ (۲)

۱۲۶ (۱)

📖 مثال: از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 11, 12, \dots, 49, 50\}$ عددی را به تصادف انتخاب و ارقام آن را درهم ضرب می

کنیم و از این حاصل ضرب ها یک مجموعه می سازیم. کدام عدد در فضای نمونه این آزمایش وجود ندارد؟

۳۰ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۳۲ (۱)

📖 مثال: اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه ای و $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ دو پیشامد در S باشند، پیشامد

$(A \cap B)' \cup (A \cap B)$ کدام است؟

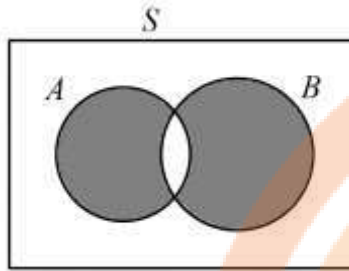
$\{3\}$ (۴)

$\{3, 4\}$ (۳)

$\{1, 2, 4\}$ (۲)

$\{1, 2, 3, 4\}$ (۱)

اگر A, B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه نمودار مقابل مربوط به کدام پیشامد است؟



(۱) $A \cup B'$

(۲) $A' \cap B'$

(۳) $(A \cap B) - (A \cap B)$

(۴) $(A - B') \cup (B - A')$

مثال: "پیشامد A رخ ندهد یا B رخ ندهد" به کدام صورت زیر نوشته میشود؟

(۱) $(A \cup B)'$

(۲) $(A - B) \cup (B - A)$

(۳) $(A' \cap B)'$

(۴) $A' \cup B'$

مثال: اگر A پیشامد زوج بودن یک عدد طبیعی و B پیشامد مضرب ۳ بودن یک عدد طبیعی باشد، پیشامد آن که

عدد مضرب ۶ باشد، کدام است؟

(۱) $A \cup B$

(۲) $A \cap B$

(۳) $A \cap B'$

(۴)

مثال: در فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، با ظاهر شدن عدد ۳ چند پیشامد رخ می دهد؟

(۱) ۵

(۲) ۳۶

(۳) ۳۲

(۴) ۶۴

مثال: در فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ اگر پیشامد $A = \{1, 2, 3\}$ رخ داده باشد، چند پیشامد در S رخ نداده

است؟

(۱) ۶۴

(۲) ۱۲۸

(۳) ۳۲

(۴) ۲۵۶

مثال: در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد "ظاهر شدن دست کم یک عدد ۳" و B پیشامد "آمدن مجموع زوج باشد"،

$A - B$ چند عضو دارد؟

۹(۴)

۸(۳)

۷(۲)

۶(۱)

مثال: سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو بیاید دو سکه دیگر را نیز پرتاب می کنیم. تعداد کل پیشامدهای ممکن کدام

است؟

۶۴(۴)

۳۲(۳)

۸(۲)

۵(۱)

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب میکنیم. پیشامد آنکه تاس کمتر از ۳ نیاید یا سکه رو بیاید چند عضو دارد؟

۹(۴)

۱۲(۳)

۱۰(۲)

۲(۱)

مثال: در پرتاب دو تاس سالم، اگر A پیشامد آمدن اعداد متمایز و B پیشامد مجموع بیش تر از ۷ باشد، پیشامد

$A \cap B$ چند برآمد دارد؟

۱۲(۴)

۱۴(۳)

۱۶(۲)

۱۸(۱)

مثال: در پرتاب دو سکه با هم، هر دو پشت آمده اند. چند پیشامد از فضای نمونه این آزمایش رخ داده است؟

۳(۴)

۸(۳)

۱(۲)

۱۶(۱)

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می آوریم.

الف) پیشامد A که در آن "عدد روی لامپ یک عدد اول باشد" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "عدد روی لامپ فرد و مضرب ۳ باشد" را مشخص کنید.

📖 مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس با هم :

الف) پیشامد A که در آن "مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ است" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "هر دو عدد ظاهر شده یکسان اند" را مشخص کنید.

پ) پیشامد C که در آن "مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است" را مشخص کنید.

نکته در مورد مجموع اعداد رو شده در دو تاس :



📖 مثال: در بازی سنگ کاغذ قیچی ، بین دو نفر به نام های a, b :

الف) فضای نمونه را مشخص کنید. ب) پیشامد آنکه شخص a برنده شود را مشخص کنید.

📖 مثال: فرض کنید C, B, A سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. هر کدام از پیشامدهای زیر را با جبرمجموعه ای نشان دهید.

الف) پیشامدهای B, A رخ بدهند و پیشامد C رخ ندهد

ب) فقط پیشامد A رخ بدهد.

پ) حداقل یکی از سه پیشامد رخ دهد.

ت) حداکثر یکی از سه پیشامد رخ دهد.

📖 مثال: سکه ای را سه بار متوالی پرتاب میکنیم:

الف) پیشامد A که در آن هر سه بار مشابه بیاید را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن زوج بار رو بیاید را مشخص کنید.

پ) $A \cap B'$ را تشکیل دهید.

📖 مثال: یک سکه سالم را سه بار می اندازیم، مطلوبست:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد A که در آن فقط دوبار رو بیاید.

ج) پیشامد B که در آن اقل "دو بار پشت بیاید.

د) پیشامد $A - B$ را مشخص کنید.

📖 مثال: یک تاس را ۳ بار پرتاب میکنیم.

الف) پیشامد A که در آن "تاس برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "تاس تا پرتاب سوم، دوبار ۶ بیاید" را مشخص کنید.

📖 مثال: فضای نمونه ای آزمایش پرتاب یک تاس شامل چندپیشامد است که دارای برآمدهایی (اعضای) فردهستند؟

۹ (۱) ۳۱ (۲) ۵۵ (۳) ۵۶ (۴)

📖 مثال: یک سکه را ۱۰ بار پرتاب میکنیم. پیش آمداینکه سکه موردنظر دقیقاً سه بار رو بیاید و در بار دهم نیز رو آمده

باشد، چندعضودارد؟

۳۶ (الف) ۶۴ (ب) ۸۱ (ج) ۱۰۸ (د)

📖 مثال: یک سکه رامی اندازیم اگر روییاید یک تاس رامی اندازیم واگر پشت بیاید سکه رادوباره می اندازیم. این پیشامد

چندعضودارد؟

۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

📖 مثال: تاسی رادوبار پرتاب میکنیم. پیش آمداینکه مجموع اعداد ظاهرشده بر ۵ بخش پذیر باشد چندعضودارد؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

نکته‌ی مجموع دو تاس فراموش نشود.

📖 مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس با هم دو پیشامد زیر را در نظر گرفته ایم.

A : مجموع دو عدد ظاهر شده فرد است.

B : مجموع دو عدد ظاهر شده اول است.

در این صورت پیشامد " A اتفاق بیفتد و B اتفاق نیفتد" چند عضو دارد؟

۱۴ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

احتمال و اصول آن



احتمال یک عدد حقیقی است که به یک پیشامد نسبت داده میشود و بیان گر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است.

برای هر پیشامد مانند A احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده میشود که عددی حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$ است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در واقع احتمال تعداد حالت های مطلوب به تعداد کل حالت هاست.

❖ اصول احتمال (اصول کولموگروف)

۱- احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱ است. یعنی: $P(S) = 1$

۲- برای دو پیشامد ناسازگار B, A داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

📖 مثال: احتمال مسافرت شخصی با هواپیما برابر $\frac{1}{5}$ و با قطار برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال این شخص با هواپیما یا قطار

مسافرت کند چقدر است؟

$\frac{11}{15}$ (۴)

$\frac{13}{15}$ (۳)

$\frac{3}{15}$ (۲)

$\frac{1}{15}$ (۱)

📖 مثال: یک عدد از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ به تصادف انتخاب میکنیم احتمال آنکه عدد انتخاب شده کمتر از ۷ یا زوج

باشد را بیابید؟

📖 مثال: ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف ۲ مهره را از ظرف خارج می کنیم. با کدام

احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟

(۱) $\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۴) $\frac{3}{5}$

نکته هم رنگ :



📖 مثال: از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آنها در مورد ادبیات و ۷ عدد آنها در مورد تاریخ است، به طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب

کرده ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{15}{66}$

(۲) $\frac{17}{66}$

(۳) $\frac{35}{132}$

(۴) $\frac{37}{132}$

📖 مثال: دو تاس را با هم می ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

📖 مثال: دو تاس را با هم پرتاب میکنیم. با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده مضرب ۴ است؟

📖 مثال: از میان ۹ نفر دانش آموز که ۵ نفر سال سوم و ۴ نفر سال دوم می باشند ۵ نفر انتخاب می کنیم، احتمال اینکه ۳ نفر سال سوم و دو نفر سال دوم باشند.

📖 مثال: در پرتاب دو مکعب باهم مشروط بر اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، احتمال اینکه هر دو عدد رو شده زوج باشند.

📖 مثال: در پرتاب سه سکه سالم با هم، احتمال آنکه زوج بار رو بیاید چند برابر احتمال رخ دادن پیشامد هر سه سکه مشابه بیاید است؟

📖 مثال: در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره ی خارج شده سفید است؟

📖 مثال: در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی و پی در پی و بدون جایگذاری خارج میکنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره های فرد متوالیا خارج نمیشود؟

$$0/25(4)$$

$$0/2(3)$$

$$0/15(2)$$

$$0/1(1)$$

📖 مثال: دو تاس را باهم می اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد بزرگتر از ۴ باشد.

نکته ی متمم :



📖 مثال: یک تاس همگن را سه بار می ریزیم. احتمال اینکه اولین بار در مرتبه سوم عدد ۶ ظاهر شود را $P(A)$ و

احتمال آنکه تا پرتاب سوم، ۲ بار عدد ۶ ظاهر شود را $P(B)$ می نامیم. حاصل $P(A)+P(B)$ کدام است؟

$$\frac{15}{54} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{54} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{27} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{27} \quad (۱)$$

📖 مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب میکنیم، مطلوبست احتمال اینکه

الف) سکه پشت و تاس عدد بزرگتر از ۳ ظاهر شود.

ب) سکه پشت یا عدد روبرو شده بزرگتر از ۳ باشد.

📖 تذکر: فرق اصل جمع (یا) و اصل ضرب (و) را دقت کنید



📖 مثال: از بین ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به تصادف دو کارت برمیداریم. احتمال اینکه مجموع شماره های روی

کارت برابر ۱۱ باشد چقدر است؟

📖 مثال: ظرفی شامل ۶ مهره یکسان به شماره های ۱ تا ۶ است. دومهره به تصادف از ظرف خارج می کنیم. احتمال

اینکه مجموع شماره های روی این دو مهره زوج باشد، چقدر است؟

📖 مثال: از بین دانش آموزان یک دبیرستان، ۳ نفر از کلاس دهم، ۴ نفر از کلاس یازدهم و ۳ نفر از کلاس دوازدهم داوطلب شرکت در یک مسابقه اند. اگر ۳ نفر از بین آنها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال از هر کلاس یک نفر انتخاب می شوند؟

📖 مثال: از کیسه ای محتوی ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. دومهره باهم وبدون جایگذاری بیرون می آوریم. احتمال اینکه این دومهره هم رنگ نباشند، چقدر است؟

📖 مثال: می خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۵ دهنده یک تیم ۴ نفره درست کنیم. احتمال اینکه در این تیم لااقل یک فوتبالیست حتما"حضور داشته باشد، چقدر است؟

📖 مثال: در سؤال قبل احتمال اینکه یک فوتبالیست خاص در این تیم حضور داشته باشد چقدر است؟

نکته اشیا خاص در انتخاب ها



📖 مثال: در کیسه ای ۳ مهره آبی و ۴ مهره زرد است. مهره ها را یکی پس از دیگری از کیسه بیرون می آوریم احتمال آنکه مهره ها یکی در میان آبی وزرد باشد.

📖 مثال: از یک جعبه محتوی ۹۵ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب، سه لامپ را به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه هر سه لامپ معیوب باشد.

ثانیا "حداکثر ۲ لامپ معیوب باشد.

ثالثا : حداقل ۲ لامپ معیوب باشد.

📖 مثال: در داخل کیسه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد. ۳ مهره از کیسه خارج میکنیم. مطلوبست احتمال آنکه

الف) هر سه مهره هم رنگ باشند.

ب) دو مهره هم رنگ باشند.

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۰ لامپ یکسان است که ۴ تای آنها معیوب است. به تصادف سه لامپ از جعبه خارج میکنیم. احتمال رخ دادن اینکه هر سه لامپ سالم باشند را بیابید.

📖 مثال: در یک کلاس ۳۲ دانش آموز در ۴ ردیف روی نیمکت نشسته اند. دو نفر به تصادف از دانش آموزان این کلاس

انتخاب میشوند. احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدهای زیر را بیابید.

(الف) هر دو نفر از ردیف اول باشند.

(ب) هر دو نفر یک ردیف باشند.

(پ) یکی از ردیف اول و یکی از ردیف دوم باشد.

📖 مثال: روی هر یک از چند کارت یکسان، ترکیب های چهارحرفی از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ را نوشته و به

تصادف یک کارت از بین آنها برمیداریم. احتمال اینکه حروف i, a با هم روی این کارت باشند چقدر است؟

📖 مثال: از ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه، به تصادف مهره ای برمیداریم و پس از مشاهده رنگ آن به کیسه

برمیگردانیم. سپس مهره دیگری انتخاب میکنیم. با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نمی باشند؟

نکته اشیا یی که میخواهیم کنار هم باشند:



📖 مثال: پنج نفر به نام های e, d, c, b, a به طور تصادفی در یک ردیف قرار می گیرند.

الف) احتمال اینکه b, a کنار هم باشند چقدر است؟

قضیه های احتمال



$$P(A') = 1 - P(A)$$

1 اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه:

2 قضیه دوم: برای هر دو پیشامد A, B از فضای نمونه داریم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

3 برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

📖 مثال: کیسه ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سبز است. اگر ۳ مهره به تصادف از این کیسه انتخاب کنیم، با کدام احتمال هر سه مهره هم رنگ نیستند؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ می باشد؟

$$(۱) \quad \frac{۱}{۶} \quad \frac{۱}{۳} \quad \frac{۵}{۶} \quad \frac{۲}{۳} \quad (۴)$$

📖 مثال: احتمال قبولی در درس آمار و احتمال برابر با $\frac{۰}{۸}$ و احتمال قبولی در درس هندسه برابر $\frac{۰}{۷}$ است. اگر احتمال قبولی در هر دو درس برابر $\frac{۰}{۶۵}$ باشد،

الف) احتمال قبولی در حداقل یکی از دو درس چقدر است؟

ب) احتمال قبولی فقط در درس آمار و احتمال چقدر است؟

پ) احتمال قبولی فقط در یکی از دو درس چقدر است؟

📖 مثال: درون جعبه ای ۹ گوی یکسان به شماره های ۱ تا ۹ قرار دارند. به طور تصادفی دو گوی از جعبه بیرون میآوریم.

احتمال آنکه شماره های روی هر دو گوی زوج باشند کدام است؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

📖 مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال

مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟

📖 مثال: دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. احتمال این که مجموع دو عدد ظاهر شده زوج بوده و حداقل در یک

تاس عدد ۶ آمده باشد کدام است؟

📖 مثال: دو تاس را با هم می ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

📖 مثال: اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع این دو کارت برابر ۱۱ است؟

📖 مثال: از اعداد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور متوالی و تصادفی تمام گوی ها را از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟ (سراسری ۹۴)

📖 مثال: در جعبه ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A-B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ آنگاه $P(A')$ کدام

است؟

📖 مثال: برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ، حاصل $P(A-B) - P(A \cup B)$ کدام است؟

(۱) $P(B)$ (۲) $P(B')$ (۳) $-P(B)$ (۴) $-P(B')$

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A \cap B') = 0.2$ و $P(B) = 0.4$ باشند،

$P(A' \cap B')$ کدام است؟ (۱) 0.4 (۲) 0.5 (۳) 0.6 (۴) 0.7

تذکر: گاهی اوقات در سوال لازم است به متمم چیزی که خواسته شده فکر کنید. این نکته در بسیاری از



سوالات و تست ها کاربرد دارد.

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A \cap B') = \frac{5}{7}$ ، $P(B \cap A') = \frac{1}{7}$ ، $P(A) = 3P(B)$ باشد،

حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{13}{14}$

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.6$ و $P(B) = 0.7$ و

$P(A \cap B') = 0.2$ باشند، آنگاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

(۱) 0.1 (۲) 0.3 (۳) 0.4 (۴) 0.5

📖 مثال: در یک مدرسه با ۶۰ دانش آموز، ۳۵ نفر مجله A ، ۳۰ نفر مجله B و ۱۵ نفر هر دو مجله را میخوانند. یک

دانش آموز به تصادف از این مدرسه انتخاب میکنیم. احتمال آنکه او هیچ مجله ای را نخواند کدام است؟

$$\frac{1}{10} (۴)$$

$$\frac{1}{2} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{6} (۱)$$

نکته مضرب ها:



📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر

باشد چقدر است؟

📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۴ یا ۶ بخش پذیر

باشد چقدر است؟

📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$ عددی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخابی مضرب ۴ یا مضرب ۷ است؟

📖 مثال: از مجموعه $\{100, 101, 102, \dots, 200\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟

📖 مثال: عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد.

(ب) عدد انتخابی نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیر باشد.

(ت) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

احتمال غیرهم شانس



هرگاه حداقل دو برآمد از فضای نمونه ای S دارای احتمال نابرابر باشند، آنگاه S را فضای نمونه ای غیرهم شانس می نامیم.

برای محاسبه احتمال در فضاهای نمونه ای غیر هم شانس دو موضوع زیر را در نظر می گیریم:

الف) تمام احتمال های نسبت داده شده به هر یک از عضوهای S اعداد حقیقی نامنفی اند

ب) مجموع تمام احتمال های نسبت داده شده برابر یک است.

❖ در حل این نوع سوالات احتمال یکی از برآمد ها را X می گیریم و سپس بقیه را بر حسب X به می آوریم. سپس جمع

تمام احتمال ها را برابر ۱ می گیریم.

📖 مثال: در صورتی که $S = \{a, b, c\}$ مطلوبست محاسبه $P(a)$ اگر $P(b) = \frac{1}{5}, P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$

📖 مثال: در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" است. در پرتاب این سکه؛ احتمال

ظاهر شدن "رو" و احتمال ظاهر شدن "پشت" را به دست آورید.

📖 مثال: سه دونده باهم مسابقه میدهند احتمال برد نفر اول نصف احتمال بردن فردوم و احتمال برد نفر دوم یک سوم احتمال

برد نفر سوم است. احتمال آنکه دونده اول برنده نشود، چقدر است؟

📖 مثال: سه دونه a, b, c باهم مسابقه میدهند، فرض کنیم احتمال برد a چهار برابر احتمال برد b و احتمال برد b

دو برابر احتمال برد c باشد.

(الف) احتمال بردهر کدام چقدر است؟

(ب) احتمال برد b یا c چقدر است؟

📖 مثال: پنج نفر دونه a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 در یک مسابقه شرکت میکنند. می دانیم: احتمال برد a_2 دو برابر a_1 و a_3 سه برابر

a_2 و a_4 چهار برابر a_3 و a_5 پنج برابر a_4 است، مطلوب است: (الف) احتمال آنکه دونه a_1 یا a_4 برنده شود. (ب) هیچ یک

از دونه های a_3, a_4, a_5 برنده نشوند.

📖 مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده که وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول باشد. اگر A پیشامد وقوع

عددی کوچکتر از ۴ باشد، $P(A)$ را بیابید.

📖 مثال: در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای $S = \{a, b, c, d, e\}$ است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{2}{7}$ ، $P(\{a, b, c, d\}) = \frac{3}{5}$

و پیشامد A به صورت $A = \{a, b, e\}$ تعریف شود، آنگاه $P(A')$ چقدر است؟

📖 مثال: در یک آزمایش تصادفی متشکل از سه برآمد، فضای نمونه ای به صورت $S = \{a, b, c\}$ است. اگر

$P(c), P(b), P(a)$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از برآمدها را بیابید.

📖 مثال: فضای نمونه ای یک پدیده تصادفی متناثر با سه برآمد به صورت $S = \{x, y, z\}$ است. اگر احتمال های متناظر با

این سه برآمد یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، $P(\{x, z\})$ کدام است؟

📖 مثال: اگر p یک تخصیص قابل قبول برای فضای نمونه ای $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ باشد و $P(\{a_1, a_2\}) = 3P(a_3)$ مقدار

$P(a_3)$ چقدر است؟

📖 مثال: احمد و علی و رضا به یک هدف تیراندازی می کنند. احتمال به هدف زدن علی ۲ برابر احمد و احتمال به هدف زدن

رضا $\frac{1}{3}$ علی است. احتمال آنکه احمد به هدف بزند چقدر است؟

📖 مثال: یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد متناسب با همان عدد است ۳ کدام است؟
در سؤال قبل احتمال آنکه عدد زوج باشد چقدر است؟

📖 مثال: فرض می کنیم $S = \{a, b, c\}$ مطلوبست $P(a), P(b)$ در صورتی که داشته باشیم:

$$P(a) = 2P(b), P(c) = \frac{1}{5}$$

📖 مثال: دو مرد و سه زن در یک مسابقه شطرنج شرکت می کنند. افراد هم جنس در برد مسابقه هم احتمال هستند، ولی احتمال برنده شدن هر مرد دو برابر هر زن است. احتمال برنده شدن یک زن را پیدا کنید.

📖 مثال: فرض می کنیم $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم:

$$P(a) = \frac{1}{10}P(b), P(b) = \frac{1}{10}P(c) \quad \text{مقدار } P(b') \text{ را محاسبه کنید. (دی ۸۳)}$$

📖 مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد غیر اول دو برابر احتمال آمدن هر عدد اول است

اگر در پرتاب این تاس پیشامد $A = \{2, 4, 5\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۸۳)

📖 مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد، پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج

است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید. (خرداد ۸۴)

📖 مثال: فرض می کنیم $s = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم:

$$P(d) = \frac{3}{8}, P(a) = P(b) = 7P(c)$$

مقدار $p(b)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۸۴)

📖 مثال: سه دانش آموز A, B, C باهم مسابقه دو میدانی می دهند. احتمال برنده شدن C, A یکسان ولی احتمال برنده

شدن هر کدام سه برابر احتمال برنده شدن B است. احتمال اینکه C یا B برنده شوند چقدر است؟ (خرداد ۸۵)

مثال: اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه و $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4}$ آنگاه $P(\{1, 4\})$ کدام است؟

$$0.19(4)$$

$$0.17(3)$$

$$0.15(2)$$

$$0.13(1)$$

احتمال شرطی



در برخی مسائل اعلام میشود که پیشامدی مثل B رخ داده است و از ما میخواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند A را با توجه به این که پیشامد B رخ داده است، محاسبه نماییم. به عبارت دیگر، احتمال رخ دادن پیشامد A به تنهایی مورد نظر نیست. در این صورت می‌گوییم احتمال رخ دادن A به شرط رخ داد B و مینویسیم: $P(A|B)$ که به آن احتمال شرطی می‌گوییم.

❖ قانون احتمال شرطی به لحاظ مفهومی عبارت است از:

(رخ دادن اولی | دومی رخ بدهد) P . (اولی رخ بدهد) P = (وقوع توام دو پیشامد) P

❖ توجه کنید نماد " | " در $P(A|B)$ به صورت "به شرط" خوانده می‌شود.

❖ در احتمال شرطی $P(A|B)$ چون اعلام شده است پیشامد B رخ داده است پس: $B \neq \emptyset$

❖ در برخی مسائل با کاهش فضای نمونه میتوان به سادگی مسائل را حل کرد.

❖ فرمول احتمال شرطی:

📖 مثال: تاسی را پرتاب کرده ایم. زوج آمده است. احتمال آمدن عدد بزرگتر از ۳ کدام است؟

$$\frac{1}{4} (۴)$$

$$\frac{1}{3} (۳)$$

$$\frac{2}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{2} (۱)$$

📖 مثال: میوه های باغی بر حسب نوع و کیفیت مطابق جدول زیر می باشند. میوه ای به تصادف از این باغ انتخاب می

شود. اگر از نوع B باشد، چقدر احتمال دارد دارای کیفیت متوسط باشد؟

نوع \ کیفیت	A	B
خوب	0/2	0/3
متوسط	0/3	0/2

📖 مثال: سازنده قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه میداند که احتمال این که سفارشی به موقع برای ارسال آماده

شود 0/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع به مشتری تحویل داده شود برابر 0/۶ است.

احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل مشتری شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد، چقدر است؟

📖 مثال: یک تولید کننده از روی تجربه میداند احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغاتش را بخواند برابر 0/۷ و احتمال اینکه

کسی محصول این تولید کننده را بخرد به شرط آنکه تبلیغاتش را خوانده باشد، برابر 0/۴۵ است. احتمال اینکه کسی آگهی

تبلیغات این تولید کننده را خوانده باشد و محصولاتش را بخرد چقدر است؟

📖 مثال: ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. دو مهره به طور تصادفی پی در پی و بدون جایگذاری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر مهره اول سفید باشد، با کدام احتمال دومی نیز سیاه است؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سبز و قرمز اگر بدانیم مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۱۰ است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

📖 مثال: در یک خانواده سه فرزندی، اگر دست کم یک فرزند آنها دختر باشد، با کدام احتمال هر سه فرزند آنها دختر است؟

📖 مثال: دو تاس سالم را انداخته ایم. اگر اعداد رو شده از دو تاس مساوی نباشند، احتمال این که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ باشد، کدام است؟

📖 مثال: در پرتاب یک تاس اگر برآمد حاصل؛ مضرب ۳ نباشد احتمال آنکه زوج بیاید کدام است؟

📖 مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. میدانیم مجموع اعداد ظاهر شده ۶ است، احتمال آن که هر دو تاس زوج آمده باشد کدام است؟

📖 مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. هیچ یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست. احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده ۹ باشد، چقدر است؟

📖 مثال: دو تاس همگن را پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده بزرگ تر از ۴ باشد، چقدر احتمال دارد تاس ها یکسان آمده باشد؟

📖 مثال: دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر اعداد رو شده یکسان نباشند، احتمال اینکه هر دو زوج باشند، کدام است؟

📖 مثال: دو تاس همگن را انداخته ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کم تر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره یکی از تاس های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

📖 مثال: در خانواده ای با ۴ فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، احتمال اینکه این خانواده حداقل ۳ پسر داشته باشد، کدام است؟

📖 مثال: در خانواده ای با ۳ فرزند، یکی از فرزندان پسر است. احتمال آنکه هر سه فرزند خانواده پسر باشد، کدام است؟

📖 مثال: پدر علی ۳ بچه دارد. احتمال آنکه تعداد دختران او بیشتر از پسرانش باشد، کدام است؟

📖 مثال: اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{3}$ ، آنگاه :
الف) $P(\{a\} | \{a, b, c\})$ را محاسبه کنید. ب) $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$ را بیابید.

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 0.2, P(B) = 0.22, P(B|A) = 0.7$ و آن گاه $P(A|B')$ و $P(B'|A')$ را بیابید.

نکته:



$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

اثبات :

📖 مثال: احمد و علی هر کدام با احتمال های به ترتیب 0.4 و 0.3 برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه می روند. اگر

احمد به ورزشگاه رفته باشد، علی با احتمال 0.7 به ورزشگاه می رود. فرض کنید احمد به ورزشگاه نرفته باشد، با چه

احتمالی علی نیز به ورزشگاه نرفته است؟

📖 مثال: کیسه ای شامل ۲ گوی سبز، ۴ گوی قرمز و ۵ گوی آبی است. از این کیسه به طور تصادفی سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری بیرون می آوریم. الف) احتمال اینکه گوی اول سبز، گوی دوم قرمز و گوی سوم آبی باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط گوی اول و سوم آبی باشد چقدر است؟

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳ تای آنها معیوب است. اگر به تصادف ۳ لامپ از جعبه، پی در پی و بدون جایگذاری بیرون آوریم، با کدام احتمال: الف) هر سه لامپ معیوب اند؟

ب) حداقل یک لامپ معیوب است؟

📖 مثال: جعبه ای شامل ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب است. اگر سه لامپ به طور پی در پی و بدون جایگذاری از این جعبه به تصادف خارج کنیم، با کدام احتمال به طور یک در میان سالم و معیوب اند؟

$$\frac{7}{10} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{15} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{10} \text{ (۲)}$$

$$\frac{8}{15} \text{ (۱)}$$

📖 مثال: یک بازیکن فوتبال در هنگام زدن ضربات پنالتی اگر روحیه خوبی داشته باشد، به احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیه خوبی نداشته باشد، به احتمال ۶۰ درصد گل میزند. اگر این بازیکن یک ضربه پنالتی را وارد دروازه کند، روحیه خوبی دارد و در غیراین صورت روحیه خوبی ندارد. اگر این بازیکن قبل از اولین ضربه، روحیه خوبی داشته باشد، با کدام احتمال از سه ضربه متوالی او :

(الف) دقیقا دو ضربه آخر گل میشود؟

(ب) فقط ضربه آخر گل میشود؟

(پ) فقط ضربه اول گل میشود؟

📖 مثال: علی و رضا عضو تیم ده نفری فوتبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر علی از رضا بلندتر باشد، با کدام احتمال از نظر بلندی قد، نفر چهارم تیم است؟

مثال: اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a) = \frac{1}{4}$, $P(\{d, e\}) = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل

$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

مثال: یک سکه سالم را ۵ بار پرتاب کرده ایم. اگر دقیقاً ۳ بار رو آمده باشد، احتمال اینکه در هیچ دو پرتابی متوالی رو

نیامده باشد، چقدر است؟

مثال: در تجربه پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل ضرب دو تاس زوج است، با کدام احتمال هر دو تاس زوج می آیند؟

(سراسری ۸۸)

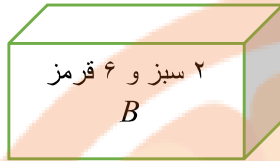
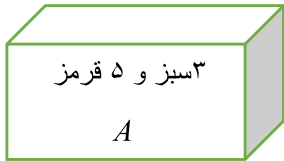
قانون احتمال کل (مسائل چند مرحله ای)



در بسیاری از مسائل احتمال، با بیش از چند تصادف مواجه ایم که پشت سرهم اتفاق می افتند مخصوصاً آزمایش هایی که نتیجه اولی روی دومی تاثیرگذار است. در چنین مواردی که نتایج آزمایش اول روی آزمایش دوم تاثیرگذار است و نتیجه آزمایش دوم منوط به آزمایش اول است، بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم. در این نوع مسائل بعد از پرکردن احتمال ها در درخت، اعداد سرشاخه های متوالی را در هم ضرب و اعداد شاخه های موازی را با هم جمع می کنیم.

📖 مثال: دو ظرف همانند، مطابق شکل مفروض است. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب و مهره ای از آن خارج

می کنیم. احتمال آنکه قرمز باشد، کدام است؟ (احتمال کل نوع اول)



📖 مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل 2 مهره سفید و 3 مهره سیاه و دومی شامل 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه است. یکی از دو ظرف را به تصادف انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. احتمال سفیدبودن این مهره چقدر است؟

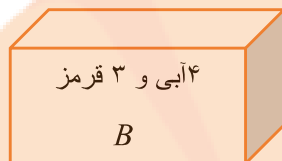
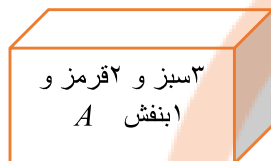
📖 مثال: در اولین ظرف از سه ظرف همانند، 3 مهره سفید و 5 مهره سیاه، در دومین ظرف 4 مهره سفید و 2 مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه وجود دارد. با چشم بسته از یکی از ظرف ها مهره ای به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال سیاه بودن این مهره چقدر است؟

📖 مثال: دو ظرف مشابه داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. به طور تصادفی از یکی از ظرف ها دو مهره با هم بیرون می آوریم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشند چقدر است؟

📖 مثال: در کارخانه ای سه دستگاه A, B, C به ترتیب ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می کنند. و می دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰ و ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب اند. احتمال اینکه محصولی که از این کارخانه انتخاب میشود سالم باشد چقدر است؟

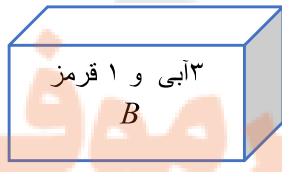
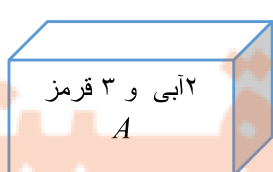
📖 مثال: تکمیل بنای یک ساختمان ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تاخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ بدهد برابر $\frac{۰}{۷}$ است. اگر اعتصاب رخ بدهد با احتمال $\frac{۰}{۴}$ و اگر اعتصاب نباشد با احتمال $\frac{۰}{۹}$ عملیات ساختمانی به موقع تکمیل می شود. با کدام احتمال تکمیل بنای این ساختمان به موقع صورت می پذیرد؟

📖 مثال: دو ظرف همانند مطابق شکل داریم. یک مهره به تصادف از ظرف A برداشته و در ظرف B می گذاریم و سپس از ظرف B مهره ای خارج می کنیم. احتمال آن که مهره خارج شده از ظرف B قرمز باشد، کدام است؟ (احتمال کل نوع دوم)



📖 مثال: دو ظرف داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و دوم شامل ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برداشته و بدون مشاهده، آن را در ظرف دوم قرار می دهیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم برمیداریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

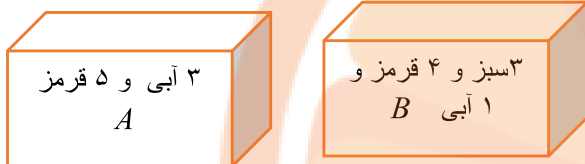
📖 مثال: در ظرف A ، ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در ظرف B ، ۳ مهره آبی و ۱ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف A سه مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف B قرار می دهیم. حال یک مهره به تصادف از ظرف B خارج می کنیم. احتمال



این که این مهره قرمز باشد کدام است؟ (احتمال کل نوع سوم)

مثال: دو ظرف همانند B, A مطابق شکل مفروضند. ۴ مهره از A و ۳ مهره از B برداشته و در یک ظرف خالی مانند C می ریزیم. سپس از ظرف C یک مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال قرمز بودن آن کدام است؟ (احتمال کل نوع

چهارم)



مثال: در دو جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۳ لامپ و از جعبه دوم ۵ لامپ به تصادف برمیداریم و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب باشد چقدر است؟

مثال: در یک کارخانه ۶۰ درصد محصولات را ماشین A ، ۳۰ درصد را ماشین B و باقی محصولات را ماشین C تولید می کند. اگر ماشین های C, B, A به ترتیب ۳ درصد، ۴ درصد و ۲ درصد محصول معیوب تولید کنند، احتمال آنکه محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب میشود معیوب باشد، کدام است؟ (احتمال کل درصدی)

۹٪ (۴)

۳/۲٪ (۳)

۳٪ (۲)

۳/۶٪ (۱)

📖 مثال: جمعیت یک روستا ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد هستند. می دانیم ۷۰ درصد زنان و ۶۰ درصد مردان در این روستا دفترچه سلامت دارند. اگر فردی به تصادف از ساکنان روستا انتخاب شود، با کدام احتمال دفترچه سلامت دارد؟

📖 مثال: در شهری ۹۰ درصد افراد واکسن زده اند. احتمال ابتلا به بیماری برای افرادی که واکسن زده اند 0.002 و برای افرادی که واکسن نزده اند 0.1 است. اگر شخصی به تصادف از این شهر انتخاب شود، با کدام احتمال به بیماری مبتلا می شود؟

📖 مثال: $\frac{3}{5}$ مردان و $\frac{7}{10}$ زنان یک روستا در انتخابات شورا شرکت کرده اند. اگر جمعیت مردان روستا دو برابر جمعیت

زنان روستا باشد، چقدر احتمال دارد شخصی که به تصادف از اهالی روستا انتخاب می شود در انتخابات شرکت کرده باشد؟ (احتمال کل نسبتی)

📖 مثال: سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو آمد یک تاس و درغیراینصورت دو سکه پرتاب می کنیم. احتمال آنکه دقیقا

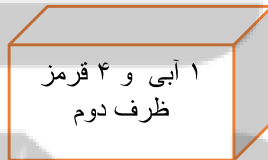
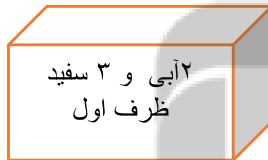
یک رو ظاهر شده باشد کدام است؟ (احتمال کل اگر... درغیراینصورت ...)

$$\frac{3}{4} (1) \quad \frac{3}{8} (2) \quad \frac{7}{8} (3) \quad \frac{5}{8} (4)$$

📖 مثال: دو ظرف با محتویات زیر مفروضند. یک تاس همگن را میریزیم. اگر ۱ بیاید ظرف اول و در غیر این صورت ظرف

دوم را انتخاب میکنیم. سپس از ظرف انتخابی مهره ای به تصادف خارج می کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر

است؟



یک توضیح خیلی خیلی مهم



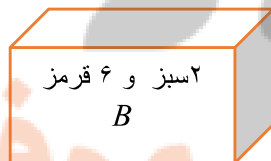
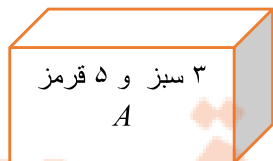
اگر مهره یا مهره هایی را بدون دیدن رنگ آنها از یک جعبه کنار بگذاریم، این اتفاق هیچ تاثیری روی احتمال مهره هایی که بعد از آن از جعبه خارج می کنیم نخواهد داشت و می توانیم این طور فرض کنیم که هیچ اتفاقی برای جعبه نیفتاده است و

همه مهره ها درون جعبه هستند } چون فضای نمونه همه حالت های ممکن است و تا زمانی که یک برآمد لو نرفته باشد همچنان جزو فضای نمونه است و هنگامی که افشا شود آن را از فضای نمونه کنار میگذاریم}

📖 مثال: در ظرفی ۵ مهره قرمز و ۸ مهره سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از این ظرف خارج کرده و بدون دیدن رنگ آن، آن را کنار میگذاریم. سپس مهره ای دیگر خارج می کنیم. احتمال آن که این مهره قرمز باشد، کدام است؟

📖 مثال: کیسه ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. به تصادف سه مهره بیرون می آوریم و بدون مشاهده رنگ آن ها مهره چهارمی خارج می کنیم. احتمال آن که مهره آخر سفید باشد کدام است؟

📖 مثال: دو ظرف همانند، مطابق شکل مفروضند. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر مهره خارج شده قرمز باشد، چقدر احتمال دارد از ظرف A خارج شده باشد؟




$$(1) \frac{5}{11} \quad (2) \frac{3}{10} \quad (\text{فرم شرطی احتمال کل})$$

$$(3) \frac{3}{8} \quad (4) \frac{5}{16}$$

قانون بیز



در برخی مسائل همانند آنچه که در قانون احتمال کل بیان شد، فضای نمونه ای به پیشامدهایی افراز شده است. اما نتیجه آزمایش در مرحله آخر اعلام می شود و احتمال رخ دادن یکی از افرازاها با توجه به این که نتیجه آزمایش معلوم است، مورد نظر می باشد. یعنی مطلوب مساله یک احتمال شرطی است، که برای یافتن آن، با توجه به شرط داده شده (همان نتیجه آزمایش که اعلام شده است) روی نمودار درختی، حالت های ممکن را مشخص می کنیم و سپس به محاسبه احتمال مطلوب می پردازیم. این موضوع را **قانون بیز** می نامیم. \blacklozenge یادتان باشد همواره مخرج احتمال کل است.

 مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از دو ظرف را انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟

📖 مثال: سه جعبه مشابه هر کدام شامل ۱۰ مهره یکسان است. مهره های جعبه اول آبی و مهره های جعبه دوم قرمز و مهره های جعبه سوم ۲ عدد آبی و ۸ عدد قرمز اند. به تصادف یک جعبه انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر این مهره آبی باشد، چقدر احتمال دارد که از جعبه اول انتخاب شده باشد؟

📖 مثال: در یک کارخانه وقتی خط تولید سالم است، ۲ درصد محصولات و وقتی خط تولید دچار نقص است، ۱۰ درصد محصولات معیوب اند. به طور تجربی مشخص شده است که احتمال آن که خط تولید در این کارخانه دچار نقص فنی شود، ۵ درصد است. اگر محصولی به تصادف از این کارخانه انتخاب کنیم و مشاهده شود که معیوب است، با کدام خط تولید دچار نقص میشود؟

📖 مثال: دانش آموزی در ۲۵ درصد موارد پیاده و در ۷۵ درصد مواقع سواره به مدرسه می رود. اگر پیاده برود در ۵۰ درصد مواقع به موقع به مدرسه میرسد و اگر سواره برود در ۲۵ درصد مواقع دیر می رسد. اگر روزی دیر رسیده باشد، با کدام احتمال پیاده رفته است؟

📖 مثال: در یک دبیرستان ۷۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۸۰ درصد دانش آموزان کلاس B در انتخابات دانش آموزی شرکت کرده اند. اگر تعداد افراد کلاس A سه برابر تعداد افراد کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین رای دهندگان این دو کلاس انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از دانش آموزان کلاس A است؟

📖 مثال: در جامعه ای ۱۰ درصد افراد تحصیلات دانشگاهی دارند که ۲ درصد آنها بیکارند. درصد بیکاری سایر افراد جامعه ۲۰ درصد است. یک نفر به تصادف از این جامعه انتخاب میکنیم. اگر بیکار باشد، با کدام احتمال تحصیلات دانشگاهی دارد؟

📖 مثال: احتمال ارسال صفر و یک در یک دکل مخابراتی به ترتیب 0.7 و 0.3 است. چون خطا وجود دارد. احتمال اینکه صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد، 0.9 و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت شود، 0.8 است. اگر در گیرنده صفر دریافت شده باشد، با کدام احتمال صفر نیز ارسال شده است؟

$0.6(4)$

$0.5(3)$

$0.2(2)$

$0.4(1)$

پیشامدهای مستقل و وابسته:



❖ دو پیشامد را **مستقل** گوئیم هرگاه رخ دادن یکی تاثیری در رخ دادن دیگری نداشته باشد، به عبارت دیگر نتیجه این دو پیشامد ربطی به هم ندارند.

در واقع دو پیشامد A, B با احتمال های غیرصفر از فضای نمونه ای S مستقل اند اگر و تنها اگر :

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{و} \quad P(B|A) = P(B)$$

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سالم قرمز و آبی با هم:

الف) اگر بدانیم تاس قرمز زوج آمده است، با کدام احتمال در تاس آبی عدد ۶ ظاهر شده است؟

ب) اگر بدانیم تاس آبی آمده است، با کدام احتمال در تاس قرمز عددی زوج ظاهر شده است؟

📖 مثال: در آزمایش پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم،

الف) اگر سکه "رو" شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می آید؟

ب) اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه "رو" می آید؟

📖 مثال: یک سکه سالم را صدبار انداخته ایم و هر صدبار رو آمده است. احتمال اینکه در پرتاب صد و یکم "رو" بیاید

چقدر است؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم، با کدام احتمال سکه "رو" و تاس ۶ می آید؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیستند؟

📖 مثال: دو نفر با نام های A, B با احتمال های قبولی به ترتیب 0.7 و 0.8 در یک آزمون شرکت می کنند. با کدام

احتمال:

الف) هر دو قبول می شوند؟
ب) دست کم یکی قبول می شود؟

پ) هیچ کدام قبول نمی شوند؟
ت) فقط A قبول می شود؟

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A|B) = 0.2$, $P(A \cup B) = 0.4$ ، آنگاه $P(B)$ را بیابید.

📖 مثال: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی بیمار A برابر 0.6 و روی بیمار B برابر 0.8 است. اگر این عمل پیوند

روی این دو نفر انجام شود، مطلوبست احتمال اینکه: الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.

ب) روی حداقل یکی موفقیت آمیز باشد.

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = 0.1, P(A \cap B') = 0.4, P(A \cup B')$ حاصل را

بیابید.

📖 مثال: در جعبه A ، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B ، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از

این دو جعبه یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آن که مهره های خارج شده هم رنگ باشند چقدر است؟

📖 مثال: در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. به تصادف از

هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره هم رنگ خارج شده است؟

📖 مثال: نشان دهید اگر A, B دو پیشامد مستقل و $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(A) = 0$ یا $P(B) = 1$

📖 مثال: نشان دهید اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A|B) = P(A|B')$ ، آنگاه A, B دو

پیشامد مستقل هستند.

📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ عددی به تصادف انتخاب میشود. فرض می کنیم A پیشامد "عدد انتخابی زوج

است" و B پیشامد "عدد انتخابی مضرب ۳ است" در نظر گرفته شود. آیا B, A مستقل اند؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس به طورمتوالی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳

در تاس اول باشد، مستقل بودن B, A را بررسی کنید.

📖 مثال: جعبه ای شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است. به طور پی در پی دو مهره به تصادف و با

جایگذاری بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو مهره قرمز باشند

ب) حداقل یک مهره آبی باشد

پ) هر دو مهره هم رنگ باشند

ناسازگاری و استقلال



می دانیم دو پیشامد ناسازگار، هیچ برآمد مشترکی ندارند. به عبارت دیگر دو پیشامد B, A ناسازگارند هرگاه

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{یا} \quad P(A \cap B) = 0$$

یعنی رخ دادن توام آنها غیرممکن است.

بنابراین واضح است که ناسازگاری دو پیشامد ربطی به مستقل بودن آنها ندارد. چون اگر B, A دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، یعنی رخ دادن توام آنها قابل قبول است.

حال اگر فرض کنیم دو پیشامد ناسازگار و مستقل اند آنگاه: $P(A) \cdot P(B) = 0$ و لذا $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$

و به عبارت دیگر حداقل یکی از این دو پیشامد غیرممکن (نشده) است. پس ناسازگاری پیشامدها ربطی به مستقل بودن آنها ندارد و برعکس.

❖ **متمم گیری استقلال** پیشامدها را حفظ می کند.

قضیه: اگر B, A دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای باشند آنگاه:

الف) B, A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

ب) B', A نیز دو پیشامد مستقل اند.

پ) B', A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

سه پیشامد مستقل:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

سه پیشامد A, B, C از یک فضای نمونه ای مستقل هستند هرگاه:

این چهار شرط باید همگی برقرار باشند. ممکن است سه تای اول برقرار باشد یعنی دو به دو مستقل باشند اما سه تا با هم مستقل نباشند.

مثال: در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه A به هدف بزند، $\frac{5}{7}$ و احتمال اینکه B به هدف بزند برابر $\frac{7}{10}$ است.

اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند، با کدام هدف:

(الف) هر دو به هدف می زنند؟

(ب) فقط A به هدف می زند؟

(پ) فقط یکی به هدف می زند؟

(ت) هیچ کدام به هدف نمی زنند؟

مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل با احتمال های به ترتیب $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ باشند، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

📖 مثال: سه تیم کوهنوردی A, B, C با احتمال موفقیت به ترتیب 40% و 45% و 50% درصد به طور جداگانه به جهت صعود

به قله دماوند، اعزام می شوند. احتمال اینکه حداقل یکی از این تیم ها موفق به صعود شوند چقدر است؟

📖 مثال: یک سکه و دو تاس همگن را به طور هم زمان پرتاب می کنیم. احتمال اینکه این سکه "رو" و هر دو تاس 6

ظاهر شوند، چقدر است؟

📖 مثال: خانواده ای دارای 4 فرزند است.

(الف) احتمال اینکه هر 4 فرزند این خانواده دختر باشد چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

📖 مثال: احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، 0.9 است. اگر این دارو بر روی 10 نفر امتحان شود، با کدام احتمال

روی همه آنها جواب منفی می دهد؟

📖 مثال: در یک کلاس 10 نفری احتمال اینکه

(الف) همگی روز شنبه متولد شده باشند، چقدر است؟ (ب) همگی در یک روز هفته متولد شده باشند، چقدر است؟



هر آزمایشی که فقط دو نتیجه موفقیت و شکست برای آن در نظر گرفته شود، آزمون برنولی نامیده می شود.

* اگر احتمال موفقیت در هر بار تکرار یک آزمون برنولی برابر α در نظر گرفته شود، آنگاه احتمال k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون برنولی عبارت است از:

$n-k$ بار شکست k بار پیروزی انتخاب k بار موفقیت از n بار تکرار

$$P = \binom{n}{k} \alpha^k \cdot (1-\alpha)^{n-k}$$

(دقیقا k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون برنولی)

📖 مثال: یک سکه سالم را ده بار می اندازیم. احتمال این که نیمی از پرتاب ها "رو" ظاهر شود چقدر است؟

📖 مثال: در یک خانواده ۶ فرزندی با کدام احتمال ۴ فرزند پسر است؟

📖 مثال: در پرتاب چهار سکه سالم با هم، با کدام احتمال ۳ بار "رو" یا "پشت" ظاهر می شود؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم، اگر رو بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند و اگر پشت بیاید ۳ تیر رها می کند.

احتمال اصابت هر تیر رها شده به هدف برابر $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر به هدف اصابت می کند؟

مثال: ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان مرد و ۴۰ درصد آنان زن هستند. می دانیم ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر از بین آن ها ۳ نفر انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند؟

$$0/141(4)$$

$$0/156(3)$$

$$0/172(2)$$

$$0/189(1)$$



فصل دوم آمار و احتمال

اصطلاحات اولیه



واقعیت هایی درباره یک شیء یا فرد که در محاسبه ، برنامه ریزه و پیش بینی به کار می روند **داده** نام دارد.

❖ هر ویژگی از اشیا یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند، **متغیر** نام دارد.

❖ عددی که به آن ویژگی یک عضو از جامعه نسبت داده می‌شود **مقدار متغیر** یا به اصطلاح **مشاهده** می‌گویند.

❖ به مجموعه تمام افراد یا اشیا که می‌خواهیم در مورد آنها داده‌ها را گردآوری کنیم **جامعه آماری** گفته می‌شود و به تعداد افراد یا تعداد اعضای یک جامعه آماری **اندازه جامعه** می‌گوییم.

❖ به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، **نمونه** می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، **اندازه نمونه** گفته می‌شود.

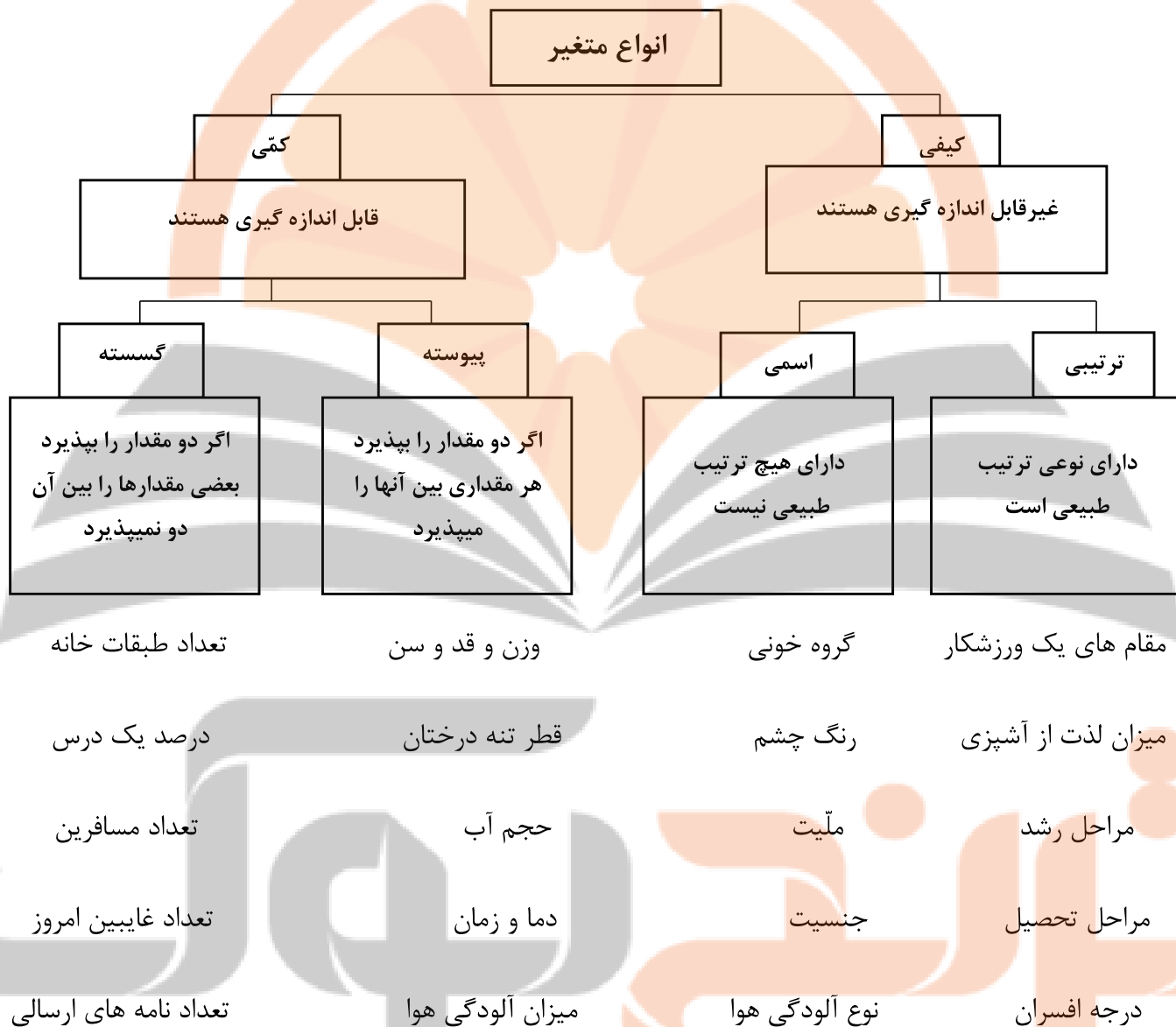
📖 مثال: هر ویژگی از اشیا یا افراد که در اعضای یک جامعه یکسان نیستند و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر میکند چه نامیده می‌شود؟

الف) داده ب) نمونه پ) متغیر ت) مقدار متغیر

📖 مثال: کدام یک از تعاریف زیر صحیح نیست؟

داده‌ها: واقعیت‌هایی درباره یک شی یا فرد هستند که در محاسبه، برنامه ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.
متغیر: هر ویژگی از اشیا یا اشخاص که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.
فراوانی یک داده: تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

انواع متغیر



مثال: قطر تنه درختان یک باغ یک متغیر تصادفی است. نوع متغیر کدام است؟

۱) کمی گسسته (ب) کمی پیوسته (پ) کیفی ترتیبی (ت) کیفی اسمی

مثال: میزان بارش باران چه نوع متغیری است؟

۱) کمی گسسته (ب) کمی پیوسته (پ) کیفی ترتیبی (ت) کیفی اسمی

📖 مثال: نوع کدام متغیر با سایرین فرق دارد؟

الف) نوع آلاینده های هوا ب) مقام های یک ورزشکار پ) میزان لذت از آشپزی ت) درجه سربازان در ارتش

فرآوانی و فرآوانی نسبی



❖ تعداد دفعاتی که هر داده تکرار می شود را فرآوانی می گوئیم و با f نمایش می دهیم

❖ با تقسیم فرآوانی هر داده به تعداد کل داده ها، فرآوانی نسبی به دست می آید. که با F نمایش می دهیم $F = \frac{f}{n}$

❖ مجموع همه فرآوانی ها برابر تعداد کل داده هاست. $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$

❖ مجموع همه فرآوانی نسبی ها برابر ۱ است. $F_1 + F_2 + \dots + F_k = 1$

اگر فرآوانی نسبی ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم درصد داده ها به دست می آید که اصطلاحاً درصد فرآوانی گفته می شود.

درصد فرآوانی را با P نمایش می دهیم و داریم: $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 100$

📖 مثال: اگر فرآوانی نسبی یک داده 0.5 و فرآوانی آن 40 باشد، تعداد کل داده های چند تاست؟

📖 مثال: یک موسسه 60 کارمند دارد که 15 نفر دارای مدرک دکتری و 30 نفر کارشناسی ارشد و 6 نفر کارشناسی و 9

نفر دیپلم هستند. اطلاعات مربوط به فرآوانی و فرآوانی نسبی و درصد فرآوانی نسبی را در یک جدول نشان دهید.

مثال: جدول فراوانی نسبی گروه خونی ۸۰ دانش آموز به صورت روبرو است. گروه خونی چند دانش آموز از نوع A

است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی نسبی	x	۰.۳	۰.۱۵	۰.۱

مثال: از n نفر کارمند یک اداره ۱۲ نفر دارای گروه خونی A، تعدادی دارای گروه خونی B، ۱۰ نفر دارای گروه

خونی AB و ۳ نفر دارای گروه خونی O هستند. اگر $\frac{۳۷}{۵}$ درصد افراد دارای گروه خونی B باشند، تعداد کل کارمندان

کدام است؟

مثال: اگر ۷۰ درصد از ۱۱۹ داده آماری دارای یک ویژگی باشند، فراوانی نسبی این داده های کدام است؟

الف) $\frac{۵}{۸}$ ب) $\frac{۶}{۷}$ پ) $\frac{۷}{۸}$ ت) $\frac{۴}{۸}$

مثال: در یک نمونه گیری از اتومبیل های در حال حرکت، اطلاعاتی مطابق جدول زیر به دست آمده است؟ چند درصد

تعداد سرنشینان	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۹۰	۱۹۰	۲۲۰	۲۶۰	۴۰

اتومبیل ها بیش از سه سرنشین دارند؟

مثال: جدول زیر مربوط به ارقام تصادفی حاصل از ۴۰ بار پرتاب یک تاس است. چند بار عدد رو شده عددی اول است؟

عدد تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۸(ت)	۲۰(پ)	۲۱(ب)	۱۵(ف)
درصد داده ها	۲۲.۵	۱۵	a	۲۲.۵	۱۰	۱۰				

نمودارها



۱ برای متغیرهای کمی گسسته یا متغیرهای کیفی می توان نمودار میله ای رسم کرد

روی محور افقی با فاصله های مساوی متغیرها را نشان می دهیم و روی محور عمودی فراوانی یا فراوانی نسبی یا درصد داده ها را نشان می دهیم

۲ برای متغیرهای کمی گسسته و متغیرهای کیفی می توان نمودار دایره ای بر اساس درصد داده ها رسم کرد

دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم که هر قسمت نشان دهنده ۱۰ درصد داده هاست. مثلا اگر داده های ۱۵ درصد بود یک و نیم قسمت را رنگ می کنیم.

۳ نمودار بافت نگاشت (هیستوگرام) برای داده های کمی پیوسته کاربرد دارد

روی محور افقی حدود دسته های داده شده و روی محور عرض ها به اندازه فراوانی آن دسته این مستطیل را بالا می بریم.

در این روش معمولا چند مستطیل رنگی به هم چسبیده به دست می آید.

مثال: جدول روبرو مربوط به داده های ۲۵ بار پرتاب یک تاس است. نمودار میله ای را برای فراوانی داده ها رسم کنید.

عدد روبرو شده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۳	۵	۲	۶	۴	۵

مثال: نمودار میله ای را برای فراوانی نسبی داده های مثال قبل رسم کنید.

مثال: در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان به صورت روبرو است. نمودار دایره ای را رسم کنید.

نوع مدرک	دیپلم	کارشناسی	کارشناسی ارشد	دکترای
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰

مثال: جدول زیر، زاویه مرکزی ۹۰ داده آماری در نمودار دایره ای است. فراوانی دسته سوم چقدر است؟

داده	A	B	C	D	E
زاویه مرکزی	77°	45°	x°	90°	80°

📖 مثال: رسم نمودار دایره ای که ترتیب کنار هم قرار دادن نواحی آن اهمیت نداشته باشد، برای کدام یک از متغیرها مناسب است؟

الف) قد افراد ب) وزن افراد پ) تعداد تصادفات ت) گروه خونی افراد

📖 مثال: در یک نمودار دایره ای تعداد هر یک از داده هارا ۱۰ برابر می کنیم. چه تغییری در نمودار به وجود می آید؟

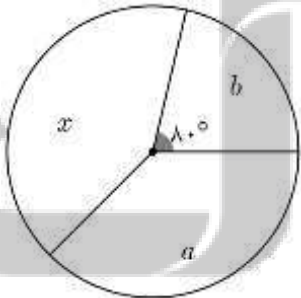
الف) هر قسمت از نمودار، ده برابر می شود. ب) هر قسمت از نمودار $\frac{1}{10}$ برابر میشود.

پ) هر قسمت نمودار ۳۶ برابر می شود. ت) تغییری نمی کند.

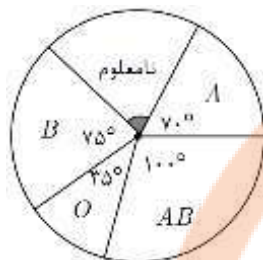
📖 مثال: دو نفر با نام های a, b به جشن تولد x دعوت شده اند. این سه نفر قرار گذاشته اند که

یک را به نسبت سن شان، بین خود تقسیم کنند. اگر a ، ۱۳ سال و ۲ ماه و

b ، ۸ سال و ۴ ماه داشته باشد و کیک تولد به شکل زیر تقسیم شده باشد، x چند ساله شده است؟



مثال: نمودار دایره ای روبه رو متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنها



تعیین نشده است. چند نفر از آن ها دارای نوع خون B هستند؟

الف) ۳۵

ب) ۳۰

پ) ۳۶

ت) ۴۰

مثال: جدول زیر مربوط به فراوانی و درصد داده های شاخص کیفیت هوای تهران (AQI) در چند روز متوالی در سال

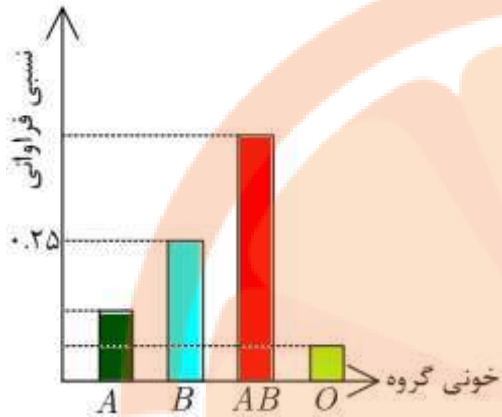
درصد داده ها	فراوانی	کیفیت شاخص هوا	وضعیت هوا
y	۷	$0 \leq AQI \leq 100$	سالم یا پاک
۲۰	x	$100 \leq AQI \leq 200$	ناسالم
۴۵	z	$200 \leq AQI \leq 300$	خطرناک

۹۷ در تهران است. مقدار x کدام است؟

مثال: نمودار بافت نگاشت مربوط به فراوانی جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

دسته ها	۲-۴	۴-۶	۶-۸	۸-۱۰
فراوانی	۴	۷	۵	۲

مثال: نمودار میله ای زیر برای گروه خونی یک نمونه ۴۰ نفری از افراد یک شرکت رسم شده است. اگر تعداد افراد حاضر



در نمونه گیری دو برابر شود، بلندی گروه میله مربوط به AB به 0.35 می

چند نفر به این گروه اضافه شده است؟

الف) ۱۵

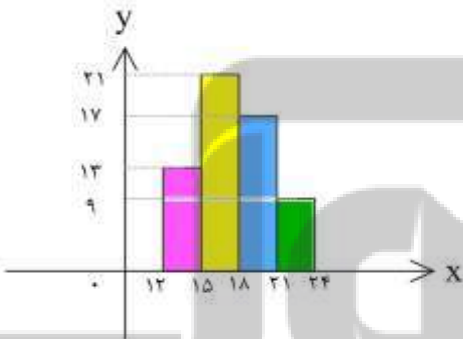
ب) ۱۸

ت) ۲۲

پ) ۱۲

مثال: از داده های آماری با نمودار بافت نگاشت مقابل سه داده ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است.

در نمودار دایره ای داده های جدید، بزرگترین زاویه مرکزی چند درجه است؟



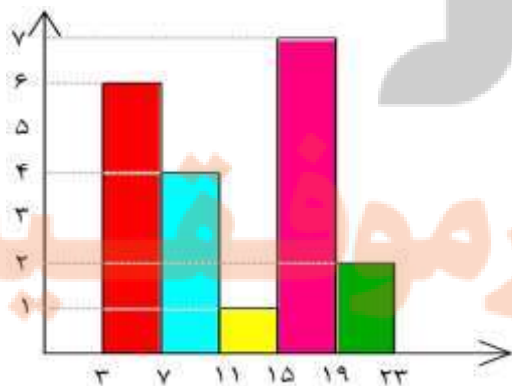
مثال: با توجه به نمودار بافت نگاشت مقابل، فراوانی نسبی دسته وسط کد

الف) 0.5

ب) 0.05

ت) 0.4

پ) 0.04



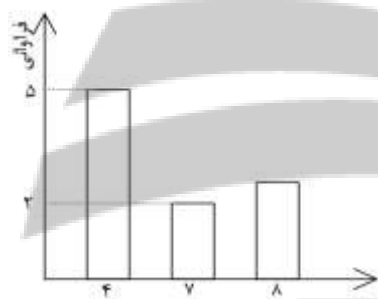


میانگین: اگر n داده ی X_1, X_2, \dots, X_n داشته باشیم میانگین (متوسط یا معدل) داده ها را با \bar{X} نمایش دهیم و داریم:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

میانه: عدد وسط داده ها را میانه می گوئیم. اگر تعداد داده ها زوج باشد دقیقاً عدد وسطی میانه است و اگر تعداد داده ها فرد باشد میانگین دو عدد وسطی میانه خواهد بود.

مثال: در نمودار میله ای رو به رو، اگر میانگین داده ها برابر ۶ باشد، در آن صورت میانه کدام است؟



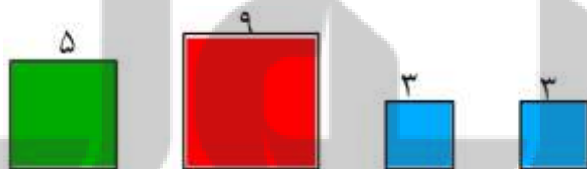
الف) ۱۱

ب) ۷

پ) ۴

ت) نمیتوان چیزی گفت

مثال: میانگین مساحت های مربع های شکل زیر چقدر از مربع میانگین اندازه اضلاع آنها بزرگ تر است؟



مثال: علی برای شروع یادگیری زبان روز اول ۳ لغت و روز دوم ۴ لغت و همین طور هر روز یک لغت بیشتر یاد می

گیرد. او در پایان ماه n ام میانگین تعداد تمام لغت هایی را که یاد گرفته است محاسبه می کند و ۱۸ به دست می آید. n را بیابید.

مثال: در جدول زیر، قطر خارجی یک لوله بر حسب میلی متر توسط ۶ کولیس که از ۶ شرکت مختلف تهیه شده است ، ثبت گردیده است. میانگین قطر خارجی این لوله کدام است؟

نام شرکت	A	B	C	D	E	F
عددا اندازه گیری شده	۱۱.۵	۱۱.۱	۱۱.۲	۱۱.۶	۱۱.۴	۱۱.۳

مثال: نمرات اختصاصی یک دانش آموز سال یازدهم به صورت زیر است. معدل دروس اختصاصی او را با احتساب ضرایب حساب کنید.

نام درس	شیمی	فیزیک	هندسه	آمارو احتمال	حسابان
نمره درس	۱۶	۱۸	۱۷	۱۹	۲۰
ضریب	۲	۳	۴	۴	۴

مثال: جدول زیر فراوانی نسبی تعداد سرنشینان تاکسی های گذری در مسیر ونک به تجریش را نشان می دهد. میانگین

تعداد سرنشینان	۵	۴	۳	۲	۱
فراوانی نسبی	۰.۱	۰.۳	a	۰.۲	۰.۱۵

تعداد سرنشینان این تاکسی ها کدام است؟

مثال: اگر میانگین داده های $1 - 2x_1, 1 - 2x_2, \dots, 2x_8 - 1$ برابر ۹ باشد، در این صورت میانگین داده های

$2 + 3x_1, 2 + 3x_2, \dots, 3x_8 + 2$ کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۶ پ) ۱۸ ت) ۱۳

مثال: میانگین ۸ داده آماری ۱۴ است. اگر داده های ۸ و ۲۰ را به این داده ها اضافه کنیم، میانگین جدید کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ پ) ۱۵ ت) ۱۶

مثال: میانگین ۸ داده آماری ۱۴ است. اگر داده های ۱۸ و ۲۰ را به این داده ها اضافه کنیم، میانگین جدید کدام است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۵ پ) ۱۶ ت) ۱۵/۵

مثال: اگر میانگین داده های ۲۰ و ۲۳ و a و ۲۴ و ۱۴ و ۲۴ و ۱۵ برابر با ۱۹ است. a کدام است؟

الف) ۱۵ ب) ۱۲ پ) ۱۳ ت) ۱۴

مثال: جدول زیر نمرات درس یک دانشجوی ترم ۶ مهندسی عمران در دانشگاه تهران را نشان می دهد. اگر معدل او اکنون ۱۸ باشد و او با اعتراض به برگه های امتحانی خود نمره درس فاضلاب را ۲ نمره و نمره درس بتن را ۳ نمره افزایش دهد، معدل او چقدر خواهد شد؟

نام درس	بتن	تحلیل سازه	هیدرولیک	خاک	فاضلاب
نمره درس	۱۰	x	۱۹	y	۱۷
تعداد واحد	۳	۲	۳	۳	۲

مثال: اگر میانگین داده ها در جدول مقابل، برابر ۴ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته آخر کدام است؟

حدود دسته	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی	۵	۷	۴	x

مثال: میانه های ۷ و ۱۱ و ۱۱ و ۲۳ و ۱۷ و ۱۵ و ۲ از میانه های ۲ و ۷ و ۹ و ۳ و ۱۱ و ۵ و ۹ و ۸ چقدر بزرگ تر است؟

مثال: اگر میانه داده های a, b, c, d, e برابر ۷ باشد، میانه داده های $1 - a, 2b - 1, 2c - 1, 2d - 1, 2e - 1$ کدام است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ پ) ۱۵ ت) ۷

مثال: اگر میانه داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۱۸ باشد و داده های ۲۱, ۲۰, ۸, ۷ را به داده ها اضافه کنیم، میانه داده های

جدید کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۹/۵ پ) ۱۹ ت) ۱۸

مثال: در داده های ۹, ۸, ۱۰, ۸, ۹, ۱۳, ۱۲, ۹, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۳ مجموع چارک اول و چارک سوم کدام است؟

مثال: اگر در داده های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ دامنه میان چارکی برابر ۱۲ باشد در داده های $1 + x_1, 1 + 2x_2, \dots, 1 + 2x_n$

دامنه میان چارکی کدام است؟

الف) ۱۲ ب) ۲۴ پ) ۲۵ ت) ۱۳

مثال: در داده های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$ تعداد داده های بزرگتر از چارک اول و کوچک تر از چارک سوم کدام است؟

الف) ۱۰ (ب) ۱۱ (پ) ۱۲ (ت) ۱۳

مثال: در نمودار جعبه ای زیر دامنه میان چارکی کدام است؟



مثال: در نمودار جعبه ای ۲۳ داده آماری، میانگین دنباله های سمت چپ و سمت راست به ترتیب $21/6$ و ۳۳ و

میانگین داده های داخل جعبه و روی جعبه ۲۵ می باشد. میانگین کل داده ها کدام است؟

الف) $27/8$ (ب) ۲۶ (پ) $26/1$ (ت) $26/2$

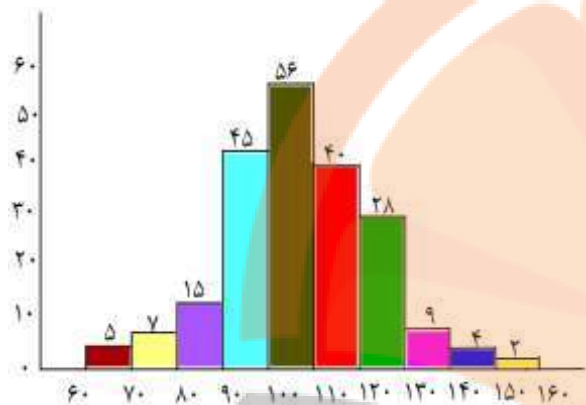
مثال: در نمودار جعبه ای ۳۶ داده آماری، میانگین داده های دو طرف جعبه، جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می باشد. اگر

میانگین تمام داده ها $27/5$ باشد، آنگاه میانگین داده های داخل جعبه کدام است؟

الف) $29/5$ (ب) $28/5$ (پ) ۲۹ (ت) ۲۸

مثال: نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت روبرو است. با توجه به این نمودار، به سوالات

زیر پاسخ دهید:



الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها مورد بررسی قرار گرفته است، چند

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین 110 تا 140 هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.

مثال: جدول فراوانی روبرو مربوط به وزن 80 ورزشکار است. این جدول را کامل کنید.

وزن افراد	فراوانی	فراوانی نسبی
50 - 60	5	?
60 - 70	?	0.25
70 - 80	?	?
80 - 90	5	?
90 - 100	15	?

معیارهای پراکندگی

واریانس یکی از بهترین شاخص ها در تشخیص پراکندگی داده هاست

$$\delta^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

جذر واریانس یعنی δ را انحراف معیار می گوئیم.

مثال: واریانس داده های آماری ۳, ۴, ۵, ۴, ۱, ۶ کدام است؟

الف) $1/75$ ب) ۲ پ) $2/25$ ت) $2/5$

مثال: اگر انحراف معیار داده های $a, b, c, d, 4$ کوچک تر از واحد بوده و با واریانس آنها برابر باشد، میانگین داده های

$9, \frac{d}{4}, \sqrt{c}, \sqrt{b}, a^2$ کدام است؟

الف) ۷ ب) ۶ پ) ۴ ت) ۳

مثال: واریانس داده های ۱۷, ۲۶, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۱۴, ۲۳ کدام است؟

الف) ۱۲ ب) ۶ پ) ۴ ت) ۳۶

مثال: جدول زیر مربوط به تعداد بانه های ۵ بانک مختلف و تعداد افراد در انتظار هر کدام از آنها می باشد. واریانس

افراد در انتظار چقدر است؟

نام بانک	علی	ملت	پاسارگاد	سپه	پارسیان
افراد در انتظار هر بانه	۱۱	۹	۷	۵	۳
تعداد بانه	۶	۵	۴	۳	۲

مثال: اگر واریانس داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار داده های $\frac{3}{4}x_1 + 1, \frac{3}{4}x_2 + 1, \dots, \frac{3}{4}x_n + 1$ کدام

است؟

مثال: انحراف معیار ۱۲ داده آماری ۳ و میانگین آنها ۷ است. اگر دو داده آماری ۱۱ و ۳ را از میان داده ها حذف کنیم،

واریانس داده های جدید کدام است؟

ت) $\frac{7}{8}$

پ) $\frac{7}{4}$

ب) $\frac{7}{6}$

الف) $\frac{7}{5}$

مثال: واریانس داده های $a, b, c, 6$ برابر ۵ و میانگین آنها ۳ است. واریانس داده های a, b, c کدام است؟

ت) $\frac{8}{3}$

پ) ۴

ب) $\frac{7}{3}$

الف) ۳

آمار استنباطی



📖 مثال: می خواهیم وزن ماهی های یک حوضچه پرورش ماهی را تخمین بزنیم. بدین منظور ۵ ماهی از میان آنها صید می کنیم و وزن آنها را اندازه گیری می کنیم. این ۵ ماهی معرف و هر ماهی درون حوضچه و کل ماهی های درون حوضچه معرف و وزن تک تک ماهی های درون حوضچه است.

الف) واحد آماری - داده - جامعه آماری - متغیر

ب) نمونه - واحد آماری - جامعه آماری - داده های آماری

پ) نمونه - متغیر - جامعه آماری - واحد آماری

ت) نمونه - واحد آماری - جامعه آماری - اندازه جامعه

📖 مثال: در بررسی ویژگی های مگسهای سفید مزاحم تهران، هر مگس یک است و ۲۰۰ مگس جمع آوری شده معرف یک است.

📖 مثال: در هر سال تقریباً ۱۵ درصد قبول شدگان کنکور از شهر A هستند. در این گزارش آماری، جامعه آماری کدام

است؟

الف) دانش آموزان شهر A که به دانشگاه می روند. ب) دانش آموزان شهر A که در کنکور شرکت می کنند.

پ) کل دانش آموزانی که در کنکور شرکت می کنند. ت) کل دانش آموزانی که در کنکور قبول می شوند.

📖 مثال: کدام دلیل برای استفاده از نمونه گیری به جای سرشماری، دلیل مناسبی نیست؟

الف) هزینه بر بودن سرشماری ب) بزرگ بودن اندازه جامعه آماری

پ) در دسترس نبودن همه اعضای جامعه ت) گسسته نبودن متغیر مورد مطالعه

📖 مثال: نمونه گیری روشی است که در آن همه واحدهای نمونه گیری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان

دارند.

الف) تصادفی ساده ب) خوشه ای پ) طبقه ای ت) سامانمند

تصادفی ساده:

خوشه ای:

طبقه ای:

سیستماتیک:

📖 مثال: کدام یک از گزینه های زیر نا درست است؟

- الف) نمونه گیری تصادفی ساده زمانی که اندازه جامعه بزرگ باشد ممکن است هزینه بر باشد
 ب) دسترسی به اعضای انتخاب شده زمانی که اندازه جامعه بزرگ باشد و نمونه گیری تصادفی ساده باشد، ساده و راحت است.
 پ) در روش نمونه گیری تصادفی ساده همه واحد های نمونه گیری شانس انتخاب شدن برابر دارند.
 ت) احتمال انتخاب شدن همه واحدهای نمونه گیری در نمونه گیری تصادفی ساده برابر است.

📖 مثال: روش نمونه گیری که در آن واحدهای نمونه گیری در گروه ها باشند، نمونه گیری است.

- الف) تصادفی ساده ب) خوشه ای پ) طبقه ای ت) سامانمند

📖 مثال: در مورد مزایای روش نمونه گیری خوشه ای به روش نمونه گیری تصادفی ساده کدام گزینه درست است؟

- الف) سریع تر است ب) دقیق تر است پ) کم هزینه تر است ت) هیچکدام

📖 مثال: زمانی که برای نمونه گیری از یک جامعه، آن را به زیرجامعه های مجزا طبقه بندی کنیم و از هر زیرجامعه یک

نمونه تصادفی ساده انتخاب کنیم، از روش نمونه گیری استفاده کرده ایم.

- الف) تصادفی ساده ب) خوشه ای پ) طبقه ای ت) سامانمند

📖 مثال: زمانی از روش نمونه گیری طبقه ای استفاده می کنیم که بخواهیم

- الف) احتمال انتخاب شدن تمام اعضای نمونه برابر باشد. ب) به سرعت نمونه گیری را انجام دهیم.
 پ) تمام اعضای یک گروه را بررسی کنیم. ت) از تمامی گروه ها عضوی در نمونه باشد.

📖 مثال: در مورد نمونه گیری سامانمند یا سیستماتیک کدام گزینه نا درست است؟

- الف) نوعی نمونه گیری طبقه ای است. ب) در این روش نمونه گیری اندازه طبقات با هم برابر است.
 پ) در طبقه اول واحد آماری به تصادف انتخاب می شود. ت) در همه طبقات هریک از واحدها به تصادف انتخاب میشوند.

📖 مثال: کمیته ملی المپیک میخواهد از چند ورزشکار اعزامی به المپیک تست دوپینگ بگیرد، این کمیته لیست

ورزشکاران هر رشته ورزشی را در اختیار دارد. مناسب ترین روش برای نمونه گیری کدام است؟

الف) تصادفی ساده ب) خوشه ای پ) طبقه ای ت) سامانمند

📖 مثال: اگر برای بررسی وضعیت درس ریاضی در تهران بخواهیم نمونه ای از دانش آموزان پایه یازدهم انتخاب کنیم و

مطمئن باشیم از تمامی مناطق تهران به تعداد یکسان دانش آموز در نمونه وجود دارد، از کدام روش نمونه گیری باید استفاده

کنیم؟

الف) تصادفی ساده ب) خوشه ای پ) طبقه ای ت) سامانمند

📖 مثال: می خواهیم از بین ۹۰ مسافر یک پرواز، ۲۰ نفر را به طور تصادفی انتخاب کنیم و یک پرسش نامه در مورد

وضعیت پرواز تکمیل کنیم. بهتر است از چه نوع نمونه گیری استفاده کنیم؟ این نمونه گیری چه مزیت و چه محدودیت

هایی دارد؟

📖 مثال: در کلاسی ۶۰ دانش آموز وجود دارد و این دانش آموزان در ردیف های ۱۰ نفری نشسته اند. فرض کنید می

خواهیم نمونه های از ۱۰ دانش آموز داشته باشیم. برای این کار یک تاس سالم را پرتاب می کنیم و با توجه به عدد ظاهر

شده تاس، ردیف مورد نظر را انتخاب می کنیم. در این جا با روش نمونه گیری تصادفی عمل کرده ایم. چون هر یک از دانش

آموزان دارای احتمال های برابر $\frac{1}{6}$ برای انتخاب شدن هستند. اما چرا این روش نمونه گیری ساده نیست؟

📖 مثال: می خواهیم از میان ۲۰۰ دانش آموز یک مدرسه، ۲۵ نفر را به عنوان نمونه به روش تصادفی ساده انتخاب کنیم.

احتمال انتخاب هر کدام از واحدهای آماری کدام است؟

- الف) $\frac{1}{200}$ ب) $\frac{1}{8}$ پ) $\frac{1}{25}$ ت) نامشخص است

📖 مثال: کدام گزینه در مورد نمونه گیری خوشه ای درست نیست؟

الف) احتمال انتخاب خوشه ها با هم برابر است.

ب) در جوامع بزرگ کم هزینه تر از نمونه گیری تصادفی ساده است.

پ) زمانی استفاده می شود که فهرست افراد جامعه در دسترس باشد.

ت) خوشه ها از تنوعی شبیه کل جامعه برخوردارند.

📖 مثال: می خواهیم نمرات درس حسابان کل دانش آموزان پایه یازدهم شهر شیراز را بررسی کنیم. می دانیم در این شهر

۱۰۰۰ نفر در مدارس غیرانتفاعی، ۳۰۰ نفر در مدارس تیزهوشان، ۲۰۰۰ نفر در مدارس دولتی و ۴۲۰۰ نفر در مدارس

دولتی در رشته ریاضی پایه یازدهم در حال تحصیل هستند. برای انتخاب یک نمونه ۱۵۰ نفری به روش نمونه گیری طبقه

ای چند نفر از مدارس تیزهوشان باید انتخاب کنیم؟

- الف) ۶ ب) ۸ پ) ۵ ت) ۷

📖 مثال: برای رای گیری نهایی اهدای جایزه اسکار به اصغر فرهادی ۵۰۰ نفر از منتقدان سینمای امریکا روی ۵۰۰ صندلی با شماره های ۱ تا ۵۰۰ نشسته اند. در انتخاب یک نمونه ۲۰ نفری از آنها با روش سیستماتیک، نفر سومی که انتخاب می شود روی صندلی شماره ۶۸ نشسته است. نفردهمی که انتخاب می شود روی کدام صندلی نشسته است؟

۲۴۳(ت)

۲۴۸(پ)

۲۳۸(ب)

۲۵۴(الف)

📖 مثال: می خواهیم میانگین نمرات زبان انگلیسی همه دانش آموزان پایه دوازدهم شهر اصفهان را محاسبه کنیم. اگر فهرست همه دانش آموزان را نداشته باشیم ولی فهرست مدارس موجود باشد، کدام نوع نمونه گیری مناسب است؟

(ت)سیستماتیک

(پ)طبقه ای

(ب) خوشه ای

(الف) تصادفی ساده

📖 مثال: فرض کنید که محله ای دارای ۲۵۰ خانوار است که ۲۵، ۱۷۵ و ۵۰ خانوار به ترتیب درآمد کم، متوسط و زیاد دارند. توضیح دهید چگونه میتوانیم نمونه ای متشکل از ۲۰ خانوار انتخاب کنیم؟ از هر قشر چند نفر انتخاب می شوند؟

📖 مثال: کدام نمونه گیری ناریب است؟

(الف) نمونه گیری از ماهی های سطح یک دریاچه به منظور بررسی وزن ماهی ها

ب) نمونه گیری از دانش آموزان شهر تهران به منظور بررسی میانگین نمره ریاضی کشور

پ) نمونه گیری از دانشجویان برای بررسی تاثیر تحصیلات دانشگاهی بر هوش هیجانی

ت) نمونه گیری از تاکسی های تهران برای بررسی میانگین عمر وسایل نقلیه شهری

📖 مثال: کدام نمونه گیری ناریب است؟

الف) بررسی میزان مطالعه غیردرسی دانش آموزان یک مدرسه با نمونه گیری از تعدادی دانش آموز حاضر در کتابخانه

ب) بررسی آلاینده های خودروهای در حال تردد در شهر با نمونه گیری از خودروهای یک تعمیرگاه

پ) بررسی تعداد اعضای خانواده با نمونه گیری از سرپرستان خانواده

ت) بررسی میانگین درآمد افراد با نمونه گیری از کارمندان یک سازمان

📖 مثال: در کدام گزینه، نمونه گیری مناسبی وجود دارد؟

الف) موضوع مورد مطالعه: سطح نمرات ریاضی کلاس های پایه دهم

نمونه: کلاسی از یک منطقه آموزش و پرورش که به طور تصادفی انتخاب شده است.

ب) موضوع مورد مطالعه: کیفیت پخت یک نوع برنج

نمونه: پخت ۵۰۰ گرم از آن نوع برنج

پ) موضوع مورد مطالعه: میزان اهمیت نقش پدر و مادر در اداره خانواده

نمونه: افسران یک پادگان نظامی

ت) موضوع مورد مطالعه: کیفیت محصولات یک کارخانه

نمونه: خانواده کارکنان آن کارخانه

📖 مثال: کدام یک از گزینه های زیر نا درست است؟

الف) در نمونه گیری خوشه ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

ب) در نمونه گیری خوشه ای احتمال انتخاب خوشه ها برابر است.

پ) نمونه گیری خوشه ای یک روش نمونه گیری احتمالی است.

ت) در نمونه گیری خوشه ای تمام اعضای خوشه ی انتخاب شده، در نمونه حضور دارند.

📖 مثال: کدام یک از عبارت های زیر نا درست است؟

الف) احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه گیری طبقه ای برابر است.

ب) احتمال انتخاب هر طبقه در نمونه گیری طبقه ای برابر است.

پ) نمونه گیری به روش طبقه ای یک نمونه ای احتمالی است.

ت) در نمونه گیری طبقه ای، طبقات اشتراک ندارند.

📖 مثال: به گرد آوری داده ها گفته می شود و کسی که این کار را انجام می دهد گویند.

📖 مثال: فرآیند انتخاب همه واحدهای آماری را گویند.

📖 مثال: مرسوم ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است.

📖 مثال: جمع آوری داده ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

الف) مصاحبه ب) مشاهده پ) دادگان ت) پرسش هدایت کننده

📖 مثال: کدام طریق برای جمع آوری داده مناسب نیست؟

الف) مصاحبه ب) الگوی خاص پ) مشاهده ت) پرسش نامه

📖 مثال: در موضوع های "قرمز، رنگ مورد علاقه بیش تر مردم است" و "میزان رضایت دانش آموزان یک کلاس از معلم

ریاضی خود" بهترین روش جمع آوری داده کدام است؟

الف) پرسش نامه - دادگان ب) پرسش نامه - مشاهده
پ) مشاهده - پرسش نامه ت) پرسش نامه - پرسش نامه

📖 مثال: "میزان بارندگی در شهر A در سالهای ۱۳۷۰ تا ۱۳۸۰ تقریباً ۳۰٪ کاهش یافته است"، در این گزارش روش

جمع آوری داده ها کدام است؟

الف) پرسش نامه کتبی ب) مشاهده
پ) استفاده از دادگان ت) انجام آزمایش

📖 مثال: کدام روش برای گردآوری اطلاعات در مورد زمان خواب دانش آموزان سال دوازدهم یک دبیرستان مناسب است؟

الف) مشاهده ب) مصاحبه پ) پرسش نامه ت) دادگان

📖 مثال: کدام گزینه زیر متغیر نیست؟

الف) تعداد غایبین یک کلاس مشخص در یک هفته ب) بیماران مراجعه کننده به یک پزشک
پ) میزان آلودگی هوا در ساعت ده صبح جمعه ت) وزن دانش آموزان یک کلاس

📖 مثال: کدام یک از گزینه های زیر متغیر نیست؟

- الف) رنگ پیراهن دبیران مدرسه شما
 ب) مراحل تحصیلی دانش آموزان
 پ) افرادی که از مقابل مدرسه شما عبور می کنند.
 ت) تعداد دانش آموزان کلاس شما

📖 مثال: در کدام گزینه زیر تمام متغیرها کمی هستند؟

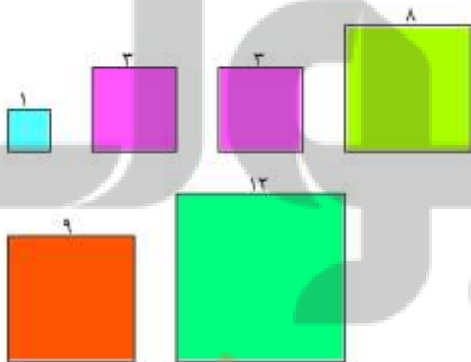
- الف) مزه غذا - میزان آلودگی هوا
 ب) مقاومت یک ترانزیستور - مراحل تحصیل یک فرد
 پ) سن دانش آموزان یک کلاس - رنگ اتومبیل ها
 ت) دمای هوای اتاق - تعداد مکالمات تلفنی یک اداره

📖 مثال: کدام گزینه نادرست است؟

- الف) پارامترهای یک جامعه همیشه ثابت اند
 ب) در ۳ نمونه با اندازه یکسان میتوان ۳ آماره متفاوت به دست آورد
 پ) در هیچ دو نمونه ای از یک جامعه آماره ها یکسان نیستند.
 ت) از آماره ها برای تخمین پارامتر استفاده می شود.

📖 مثال: در یک کتاب هندسه تعدادی مربع رسم شده است. اگر ضلع یک نمونه شش تایی از آنها مطابق شکل زیر باشد،

برآورد نقطه ای میانگین محیط مربع های به کار رفته در این کتاب را بیابید.



📖 مثال: داده های یک جامعه به صورت $0, 1, 3, 4$ هستند. اگر بخواهیم میانگین این جامعه را با انتخاب نمونه های دوتایی برآورد کنیم، چندبرآورد مختلف برای پارامتر جامعه پیدا می شود؟

📖 مثال: فرض کنیم می خواهیم میانگین در آمد یک جامعه را پیدا کنیم. اگر در آمد افراد جامعه $0, 1, 2, 4, 5, 6$ میلیون تومان باشد، در این صورت چند نمونه دوتایی از این جامعه میانگین را 3 برآورد می کند؟

📖 مثال: فرض کنید می خواهیم بعد چند خانوار را که در جدول زیر تعداد عضوهای آن ها آمده است، بررسی کنیم. چند

A	B	C	D	E	F	G
۲	۵	۳	۳	۱	۴	۴

نمونه دو عضوی بعد خانوار را 3 برآورد می کند؟

📖 مثال: در یک جامعه با اندازه 6 مجموعه مقادیر متغیرها $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ می باشد، از این جامعه یک نمونه به اندازه 2 انتخاب می کنیم. پارامتر جامعه میانگین مقادیر متغیر است. چه قدر احتمال دارد برآورد نقطه ای ما از پارامتر جامعه با

پارامتر جامعه برابر باشد؟

الف) صفر ب) $\frac{1}{15}$ پ) $\frac{2}{15}$ ت) ۳

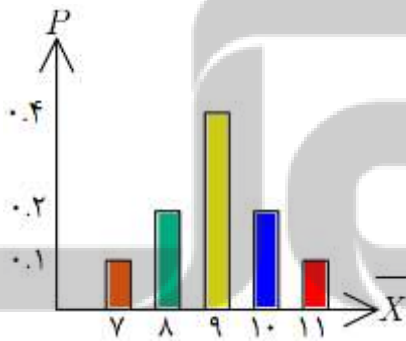
📖 مثال: تعداد فرزندان ۶ خانواده به صورت ۷ و ۴ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ می باشد. برای محاسبه میانگین این جامعه آماری

نمونه گیری سه تایی از این جامعه انجام می شود. کدام نمونه برآورد دقیق تری از پارامتر جامعه ارائه می دهد؟

الف) ۷ و ۴ و ۲ ب) ۴ و ۲ و ۲ پ) ۴ و ۳ و ۳ ت) ۷ و ۲ و ۳

📖 مثال: در یک نمونه گیری ۲ تایی از جامعه ۶ نفری، نمودار زیر برای برآوردهای میانگین رسم شده است. دقیق ترین

برآورد برای پارامتر جامعه کدام است؟



الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{2}$

پ) ۹ ت) ۸ یا ۱۰

مثال: در اعداد صحیح ۰ تا N ، پنج عدد ۸ و ۵ و ۲ و ۶ و ۴ به تصادف انتخاب شده اند. برآورد نقطه ای از N با

کمک پارامتر میانگین کدام است؟

۱۲(ت)

۱۰(پ)

۸(ب)

۵(ا)

مثال: در یک جامعه با اندازه ۶ مجموعه مقادیر متغیرها $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ می باشد. از این جامعه یک نمونه به اندازه ۳

انتخاب می کنیم. پارامتر جامعه میانگین مقادیر متغیرهاست. چه قدر احتمال دارد برآورد نقطه ای ما از پارامتر جامعه با پارامتر جامعه برابر باشد؟

$\frac{3}{20}$ (ت)

$\frac{2}{20}$ (پ)

$\frac{1}{20}$ (ب)

الف) صفر

مثال: اگر انحراف معیار برآورد میانگین جامعه ای با یک نمونه ۱۰۰ عضوی، $\frac{2}{7}$ باشد، انحراف معیار جامعه کدام

است؟

۲۷۰(ت)

۲۷(پ)

$\frac{2}{7}$ (ب)

الف) $\frac{0}{27}$

مثال: اگر اندازه نمونه را ۱۰۰ برابر کنیم، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می شود؟

$\frac{1}{100}$ (ت)

$\frac{1}{10}$ (پ)

۱۰ (ب)

الف) ۱۰۰

📖 مثال: اگر در یک نمونه ۲۰۰ عضوی انحراف معیار برآورد میانگین جامعه $\frac{8}{1}$ باشد و بخواهیم انحراف معیار برآورد ما ۳ باشد، نمونه ما باید چه اندازه ای داشته باشد؟

الف) ۲۴۳ (ب) ۴۸۶

پ) ۷۲۹ (ت) ۱۴۵۸

📖 مثال: اگر انحراف معیار برآورد میانگین جامعه $\frac{9}{1}$ باشد، اندازه نمونه را باید چند برابر کنیم تا این انحراف معیار $\frac{1}{3}$ شود؟

الف) ۷ (ب) ۴۹ (پ) $\frac{1}{7}$ (ت) $\frac{1}{49}$

📖 مثال: اگر بداتیم واریانس وزن افراد یک شهر $\frac{4}{41}$ است، با انتخاب یک نمونه ۴۰۰ نفره از این جامعه، انحراف معیار برآورد میانگین وزن افراد جامعه چقدر است؟

الف) $\frac{0}{12}$ (ب) $\frac{0}{18}$

پ) $\frac{0}{15}$ (ت) $\frac{0}{1}$

📖 مثال: می دانیم انحراف معیار حقوق کارکنان یک شرکت ۳ میلیون تومان است. اگر ۹ نفر از آنها را به عنوان نمونه

انتخاب کنیم و حقوق آنها ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۶ و ۷ میلیون باشد، بازه ای که میانگین حقوق کل کارکنان شرکت با اطمینان بالای ۹۵ درصد در آن قرار دارد، کدام است؟

الف) $[2/5, 6/5]$ (ب) $[1, 5]$ (پ) $[2, 6]$ (ت) $[2/4, 6/4]$

📖 مثال: برآورد بازه ای دقیق تر است اگر

الف) فاصله دو عدد بازه بیشتر و ضریب اطمینان کمتر باشد.

ب) فاصله دو عدد بازه کمتر و ضریب اطمینان بیشتر باشد.

پ) فاصله دو عدد بازه بیشتر و ضریب اطمینان بیشتر باشد.

ت) فاصله دو عدد بازه کمتر و ضریب اطمینان بیشتر باشد.

📖 مثال: اگر با اطمینان بیش از ۹۵٪ بدانیم برآورد ما از میانگین جامعه در بازه $(۰/۶, ۲/۲)$ قرار دارد، برآورد نقطه ای ما

از میانگین جامعه کدام است؟

الف) $۲/۸$

ب) $۱/۴$

پ) $۱/۶$

ت) $۰/۸$

📖 مثال: اگر برآورد نقطه ای ما از میانگین جامعه ای $۲/۳$ باشد و انحراف معیار برآورد میانگین جامعه $۰/۷$ باشد، برآورد ما

از بازه میانگین جامعه با اطمینان بیش از ۹۵٪ کدام است؟

الف) $(۱/۶, ۳)$

ب) $(۰/۹, ۳/۷)$

پ) $(۱/۹۵, ۲/۶۵)$

ت) $(۰/۵, ۵/۱)$

📖 مثال: رئیس یک دانشگاه علاقه مند است متوسط سن دانشجویانی که در موقع فوق لیسانس ثبت نام کرده اند را بداند. او یک نمونه ۱۰۰ تایی از دانشجویان ثبت نام شده انتخاب میکند و میانگین سن آنها را ۲۴ سال برآورد می کند. اگر از بررسی های گذشته انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر $5/7$ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه کدام است؟

الف) $(12/6, 35/4)$ (ب) $(23/43, 24/57)$

پ) $(21/72, 26/28)$ (ت) $(22/86, 25/14)$

📖 مثال: انحراف معیار جامعه چقدر بزرگ باشد تا برآورد ما با اطمینان بیش از ۹۵٪ از میانگین جامعه با یک نمونه ۱۰۰ عضوی در بازه $(5/76, 6/88)$ قرار بگیرد؟

ت) $1/12$

پ) $5/6$

ب) $2/8$

الف) $1/4$

📖 مثال: اگر یک برآورد بازه ای با اطمینان بیش از ۹۵٪ برای میانگین جامعه داشته باشیم، اندازه نمونه را چند برابر کنیم تا طول بازه برآورد نصف شود؟

ت) ۸

پ) ۶

ب) ۴

الف) ۲

📖 مثال: اگر با اطمینان بیش از ۹۵٪ میانگین جامعه در بازه (۴,۱۰) قرار داشته باشد و اندازه نمونه را ۱۰۰ برابر کنیم

آنگاه با همان ضریب اطمینان، میانگین جامعه در چه بازه ای قرار می گیرد؟

الف) (۶/۷, ۷/۳) ب) (۰/۴, ۱) پ) (-۲۳, ۳۷) ت) (۴۰, ۱۰۰)

📖 مثال: اگر برآورد از میانگین جامعه با اطمینان بیش از ۹۵٪ بازه (۸, ۱۴) باشد، اندازه نمونه را حداقل چند برابر کنیم تا

با همین ضریب اطمینان برآورد ما از میانگین جامعه بزرگتر از ۱۰ باشد؟

الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴ ت) ۹

📖 مثال: اگر واریانس وزن افراد یک جامعه ۲/۵۶ باشد، با انتخاب یک نمونه ۲۵۰۰ نفره از این جامعه، طول بازه اطمینان

بالای ۹۵ درصدی میانگین وزن افراد جامعه، کدام خواهد بود؟

الف) ۰/۱۲۸ ب) ۰/۱۵۶

پ) ۰/۱۴۴ ت) ۰/۱۱۲

📖 مثال: اگر با یک نمونه گیری ۱۰۰ تایی از یک جامعه آماری، بازه اطمینان بالای ۹۵ درصدی میانگین به صورت

$[۵/۲, ۶/۸]$ به دست آمده باشد، انحراف معیار این جامعه چقدر بوده است؟

📖 مثال: از یک جامعه یک نمونه ۶ نفری با درآمدهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۳ میلیون انتخاب شده است. اگر انحراف معیار

جامعه را همان انحراف معیار نمونه فرض کنیم، بازه اطمینان بالای ۹۵ درصدی برای خط فقر در این جامعه کدام است؟

$$(\sqrt{۱۰} = ۳/۱۵)$$

الف) $[۱/۵, ۲/۵]$

ب) $[۲/۵, ۳/۵]$

پ) $[۱/۲۵, ۲/۲۵]$

ت) $[۱/۴۵, ۲/۰۵]$


نشان بده که بزرگترین تلاش در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)