دانش آموزان عزیز بهترین منبع برای خواندن، کتاب است لیکن جهت خلاصه برداری و کم بودن وقت برای بعضی از دوستان ! این مجموعه مطابق کتاب تهیه شده است.

وجود اشتباه محتمل است به دقت خود شک نکنید؟!

دنباله حسابی: $d = a_n - a_{n-۱}$ $a_n = a + (n - ۱)d$

a, b, c سه جمله متوالی $۲b = a + c$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n - ۱)d) = \frac{n}{۲}(a + a_n)$$

دنباله هندسی:

$a_n = aq^{n-۱}$ $q = \frac{a_n}{a_n - ۱}$

a, b, c سه جمله متوالی $b^۲ = ac$

$S_n = \frac{a(q^n - ۱)}{q - ۱}$ تعداد جملات متناهی

۱- در دنباله حسابی .... و ۱۴ و ۱۰ و ۶ و ۲ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۲۰۰ گردد؟

$$S_n > ۲۰۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲(۲) + (n - ۱) \times ۴) > ۲۰۰$$

$d = ۶ - ۲ = ۴$ $n(۲ + ۲n - ۲) > ۲۰۰ \rightarrow ۲n^۲ > ۲۰۰$

$n^۲ > ۱۰۰ \quad n = ۱۱$

۲- در یک دنباله حسابی، جمله دوازدهم برابر ۳۵ و مجموع هشت جمله اول برابر ۱۰۰ می باشد دنباله را مشخص کنید.

$a_{۱۲} = ۳۵ \rightarrow a + ۱۱d = ۳۵$

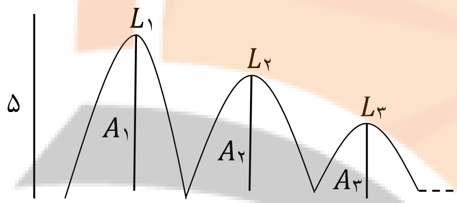
۴

$\Longrightarrow \begin{cases} a + ۱۱d = ۳۵ \\ \ldots \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -۲a - ۲۲d = -۷۰ \\ ۲a + ۷a = ۲۵ \end{cases}$

$a + ۱۱(۳) = ۳۵ \longrightarrow \propto = ۲$

۲ و ۵ و ۸ و ...

۳- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاع که رها شود، پس از برخورد با زمین ۰/۶ ارتفاع اولیه بالا می رود. فرض کنید این توپ از زمین به هوا پرتاب شود و تا ارتفاع ۵ متر بالا رود می خواهیم بدانیم از شروع پرتاب تا زمان ایستادن چه مسافتی را طی می کند؟



چون هر دفعه ارتفاع کم می شود و تا لحظه ایستادن نامتناهی است. لذا از جدول مجموع استفاده می شود.

$A_۱ = ۵ \quad A_۲ = ۵ \times ۰/۶ = ۳ \quad A_۳ = ۳ \times ۰/۶ = ۱/۸$

$L_۱ = ۱۰ \quad L_۲ = ۵ \quad L_۳ = ۳/۶ \quad q = ۰/۶ \quad S_n = \frac{a}{۱ - q} \rightarrow S_n = \frac{۱۰}{۱ - ۰/۶} = ۲۵$

۳- در دنباله هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.

$\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۹}$ و $\frac{۱}{۲۷}$ و $-\frac{۱}{۸۱}$ و ...

دنباله نامتناهی است و $|۹| = \left|-\frac{۱}{۳}\right| = \frac{۱}{۳} < ۱$ یعنی می توان از حد مجموع استفاده نمود.

$$S_n = \frac{{}^{۱}\!/_{۳}}{۱ - \frac{۱}{۳}} = \frac{{}^{۱}\!/_{۳}}{{}^{۲}\!/_{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۴- در دنباله حسابی زیر مجموع ۲۰ جمله اول چیست؟

-۵ و ۱ و $+۷$ و .... $\quad S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n - ۱)d)$ (نوشته شود)

$d = ۱ - (-۵) = ۶ \quad S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}\big(۲(-۵) + ۱۹(۶) = ۱۰(-۱۰ + ۱۱۴)\big) = ۱۰۴۰$

۵- جمله سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۸ و ۶۴- می باشد. مجموع چند جمله ی این دنباله با شروع از جمله اول برابر ۱۷۰- می شود.

$$\frac{a_{۳}}{a_{۳}} = \frac{aq^{۵}}{aq^{۲}} = q^{۳} = \frac{-۶۴}{۸} = ۸ \rightarrow q = -۲$$

$$a_{۳} = ۸ \rightarrow a(-۲)^{۲} = ۸ \rightarrow a = ۲$$

$$S_n = -۱۷۰ \rightarrow \frac{۲((-۲)^n - ۱)}{-۲ - ۱} = -۱۷۰ \rightarrow ۲((-\cancel{۲})^n - ۱) = ۳ \times \cancelto{۸۵}{۱۷۰}$$

$$(-۲)^n - ۱ = ۲۵۵ \rightarrow (-۲)^n = ۲۵۶ \rightarrow n = ۸$$

۶- ابتدا نیمی از مساحت مربعی را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم به همین ترتیب، پس از چند مرتبه حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

هر باز نصف مربع رنگ می شود پس قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شود.

$$\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۴} \text{ و } \frac{۱}{۸} \text{ و } \cdots \text{ و } \left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

$$S_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \left(\frac{۱}{۲}\right)^n = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\left(۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right)}{\underbrace{\cancel{۱ - \frac{۱}{۲}}}_{۱/۲}} > \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^n > \frac{۹۹}{۱۰۰} \rightarrow -\left(\frac{۱}{۲}\right)^n > -\frac{۱}{۱۰۰} \rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^n < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۲^n > ۱۰۰ \rightarrow n = ۷$$

۷- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیو اکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چندلایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد.

جواب مانند سؤال بالا می باشد.

$S_n > \frac{۹۹}{۱۰۰} \to n = ۷$

۸- مجموع هشت جمله اول یک دنباله هندسی ۸۲ برابر مجموع چهار جمله اول آن است. قدر نسبت را مشخص کنید.

$S_۸ = ۸۲S_۴$

$\frac{\cancel{a}(q^۸-۱)}{\cancel{q-۱}} = ۸۲\frac{\cancel{a}(q^۴-۱)}{\cancel{q-۱}}$ و $q \neq ۱$ با فرض $\cancel{(q^۴-۱)}(q^۴+۱) = ۸۲\cancel{(q^۴-۱)}$

$q^۴ + ۱ = ۸۲ \to q^۴ = ۸۱ \to q = ۳$

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری:

$P(x) = \quad q(x) \qquad Q(x) \qquad +R(x)$

باقی مانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

۱- در تقسیم بر $x - a$ ، باقی مانده همان $P(a) = R(a)$ است.

۲- درجه باقی مانده کمتر از درجه مقسوم علیه است.

مثال : ۱ مقدار k را چنان تعیین کنید که چند جمله ای $P(x) = ۲x^۳ - kx^۲ - x + ۳$ بر $x + ۱$ بخش پذیر باشد.

$x + ۱ = ۰ \longrightarrow x = -۱ \longrightarrow P(۱) = R(۱) = ۲(۱)^۳ - k(۱)^۲ - ۱ + ۳ = ۰$

$۲ - k + ۲ = ۰ \to k = ۴$

۲ مقادیر m و n را چنان بیابید که جمله ای $x^۲ + mx + n$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش پذیر باشد (یا بر $(x^۲x - ۲)$ بخش پذیر باشد.)

$x - ۲ = ۰ \longrightarrow x = ۲ \longrightarrow P(۲) = R(۲) = ۲^۲ + m(۲) + n = ۰ \qquad ۲m^{\circ} + n = -۴$

$\begin{cases}۲m+n=-۴\\ m-n=+۱\end{cases}$ $\quad ۳m=-۳ \quad m=-۱ \quad n-(-۱)=-۱ \quad n=-۲$

۳_ a را چنان بیابید که یک جواب معادله ی $x^۳-۲x^۲+ax+۲=۰$ برابر ۲ باشد سپس جواب های دیگر معادله را بدست آورید.

$x=۲ \longrightarrow ۲^۳-۲(۲)^۲+a(۲)+۲=۰ \longrightarrow ۸-۸+۲a+۲=۰ \longrightarrow a=-۱$

$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰$

	۱	-۲	-۱	۲
۲	۱	۰	-۱	۰

$x^۳-۱=۰ \longrightarrow x^۲=۱ \longrightarrow x=\pm۱$

۴_ اگر باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x+۲$ و $x-۳$ به ترتیب ۱ و ۲ باشد باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-x-۶$ چیست؟

$x^۲-x-۶=(x-۳)(x+۲)$

$P(x)=(x-۳)(x+۲)Q(x)+ax+b$

$x-۳=۰ \longrightarrow x=۳ \longrightarrow P(۳)=R(۳)=۳a+b=۲$

$x+۲=۰ \longrightarrow x=-۲ \longrightarrow P(-۲)=R(-۲)=-۲a+b=۱$

$\begin{cases}۳a+b=۲\\ ۲a-b=-۱\end{cases}$ $\quad ۵a=۱ \longrightarrow a=\frac{۱}{۵} \qquad b=۱+\frac{۲}{۵}=\frac{۷}{۵}$

بسط دو جمله ای:

$$(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲!}a^{n-۱}b^۲+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}a^{n-۳}b^۳+\cdots+b^n$$

جمله $(k+۱)$ ام $=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)^5 = 1-5(1)^4\left(\frac{2}{x}\right)+\frac{5(5-1)}{2!}(1)^3\left(\frac{2}{x}\right)^2-\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(1)^2\left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}\times 1\left(\frac{2}{x}\right)^4+\left(\frac{2}{x}\right)^5 = 1-\frac{10}{x}+\frac{40}{x^2}-\frac{80}{x^3}+\frac{90}{x^4}+\frac{32}{x^5}$$

۲- جمله سوم بسط دو جمله ای $\left(4x-\frac{1}{x}\right)^7$ چیست؟

$$\binom{7}{2}(4x)^{7-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{7\times 6}{2}\times 1024x^5\times\frac{1}{x^2} = 21504x^3$$

۳- عبارت $(2x+3y)^6$ را بسط دهید.

$$(2x+3y)^6 = 64x^6+6(2x)^5(3y)+\frac{6\times 5}{2}(2x)^4(3y)^2+\frac{6\times 5\times 4}{6}(2x)^3(3y)^3$$

$$+\frac{6\times 5\times 4\times 3}{4!}(2x)^2(4x)^4+\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{5!}(2x)(3y)^5+729y^2$$

۷۲ لیتر آب میوه و ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. حداقل تعداد شیشه ها را تعیین کنید.

$72 = 2^3\times 3^2$

$40 = 2^3\times 5$ $\quad$ ب.م.م $= 2^3 = 8$ $\quad \frac{72}{8} = 9 \quad \frac{48}{8} = 6 \quad \frac{40}{8} = 5$

$48 = 2^3\times 6$ $\quad$ جواب $= 9+6+5 = 20$ شیشه

معادله درجه دوم:

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta > 0$ دو جواب $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ ریشه مضاعف $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$$a+b+c=0 \longrightarrow x=1 \text{ و } x=\frac{c}{a}$$

$$a+c=b \longrightarrow x=-1 \text{ و } x=-\frac{c}{a}$$

$\propto$ و β ریشه های معادله درجه دوم باشند.

$$\propto+\beta=S=-\frac{b}{a} \qquad \propto^2+\beta^2=(\propto+\beta)^2-2\propto\beta$$

$$\propto\beta=P=\frac{c}{a} \qquad \propto^3+\beta^3=(\propto+\beta)^3-3\propto\beta(\propto+\beta)$$

$$|\propto-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$X^2-SX+P=0$$

سهمی:

$$y=ax^2+bx+c$$

$x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن

$$S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a}\end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} a>0 & min \\ a<0 & max \end{array}$$

۱- معادله های زیر را حل کنید.

$$1)\ (x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$$

$$((x^2-1)^2+2)((x^2-1)^2-1)=0$$

$$(x^2-1)^2+2\neq 0 \qquad (x^2-1)^2-1=0 \longrightarrow (x^2-1)^2=1 \longrightarrow \begin{cases} x^2-1=1 \to x^2=2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-1=-1 \to x^2=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$۲)\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right)^۲-۷\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right)+۶=۰$$

$$\left(\frac{x^۲}{۳}-۲-۶\right)\left(\frac{x^۲}{۳}-۲-۱\right)=۰\begin{cases}\frac{x^۲}{۳}=۸\rightarrow x^۲=۲۴\rightarrow x=\pm\sqrt{۲۴}\\ \frac{x^۲}{۳}=۳\rightarrow x^۲=۹\rightarrow x=\pm ۳\end{cases}$$

۳- بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^۲+۴x+۱$ را تعیین کنید.

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-\left(۴^۲-۴(-۱)(۱)\right)}{۴\times -۱}=\frac{-(۱۶+۴)}{-۴}=۵$$

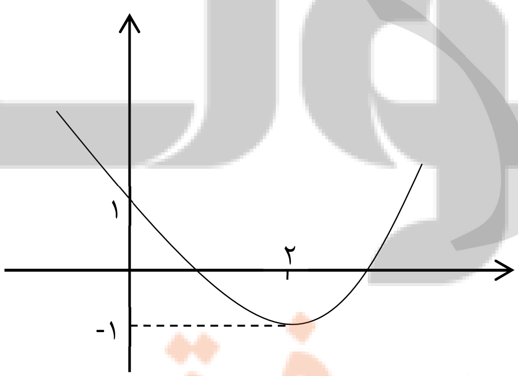
یا

$$x=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲\qquad f(۲)=-(۲)^۲+۴(۲)+۱=-۴+۹=۵$$

۴- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۳\pm ۲\sqrt{۲}$ باشد.

$$\begin{matrix}S=۳+۲\sqrt{۲}+۳-۲\sqrt{۲}=۶\\ P=\left(۳+۲\sqrt{۲}\right)\left(۳-۲\sqrt{۲}\right)=۹-۸=۱\end{matrix}\quad\Longrightarrow x^۲-۶x+۱=۰$$

۵- در شکل مقابل نمودار سهمی $P(x)=ax^۲+bx+c$ داده شده است. ضرایب $\propto$ و b و c را تعیین کنید.



$$x=۲\longrightarrow\frac{-b}{۲a}=۲\rightarrow b=-۴a$$

$$\Big|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\qquad \begin{matrix}-۱=۴a+۲b+c\\ \Longrightarrow ۴a-۸a+۱=-۱\rightarrow -۴a=-۲\end{matrix}$$

$$a=\frac{۱}{۲}$$

$$b=-۲$$

$$\Big|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\qquad ۱=۰+۰+c\longrightarrow c=۱$$

۶- در شکل زیر سهمی به معادله $P(x)=ax^۲+bx+c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد

جوابهای معادله $ax^۲+bx+c=۰$ را تعیین کنید.

$a<0$ $\max$ دارد

$\frac{c}{a}>0 \xrightarrow{a<0} c<0$ دو ریشه منفی اند

$\frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$ دو ریشه منفی اند

۷-اگر $\propto$ و β ریشه های معادله درجه دوم $۴x^{۲}-۵x-۵=۰$ باشد معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{۱}{\propto}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

روش اول

$$x_{۱}=\frac{۱}{\propto} \qquad S=x_{۱}+x_{۲}=\frac{۱}{\propto}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\propto+\beta}{\propto\beta}=\frac{۵/۴}{-\frac{۵}{۴}}=-۱$$

$$x_{۲}=\frac{۱}{\beta} \qquad P=x_{۱}\times x_{۲}=\frac{۱}{\propto}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\propto\beta}=\frac{۱}{-\frac{۵}{۴}}=-\frac{۴}{۵}$$

$$\left(x^{۲}-(-۱)x-\frac{۴}{۵}=۰\right)\times ۵ \rightarrow ۵x^{۲}+۵x-۴=۰$$

روش دوم

$$x=\frac{۱}{\propto} \rightarrow \propto=\frac{۱}{x} \rightarrow \left(۴\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}-۵\left(\frac{۱}{x}\right)-۵=۰\right)\times x^{۲}$$

$$۴-۵x-۵x^{۲}=۰ \longrightarrow ۵x^{۲}+۵x-۴=۰$$

۸- اگر $\propto$ و β ریشه های معادله $x^{۲}-۳x-۵=۰$ باشد بودن حل معادله حاصل $\frac{\beta}{\propto^{۲}+۱}+\frac{\propto}{\beta^{۲}+۱}$ را بیابید.

$$\frac{\propto^{۳}+\propto+\beta^{۳}+\beta}{\beta^{۲}\propto^{۲}+\beta^{۲}+\propto^{۲}+۱}=\frac{(\propto+\beta)^{۳}-۳\propto\beta(\propto+\beta)+\propto+\beta}{(\propto\beta)^{۲}+(\propto+\beta)^{۲}-۲\propto\beta+۱} \qquad \begin{array}{l}\propto+\beta=۳\\ \propto\beta=-۵\end{array}$$

$$=\frac{۳^{۳}-۳(-۵)(۳)+۳}{(-۵)^{۲}+(۳)^{۲}-۲(-۵)+۱}=\frac{۲۷+۴۵+۳}{۲۵+۹+۱۰+۱}=\frac{۷۵}{۴۵}=\frac{۵}{۳}$$

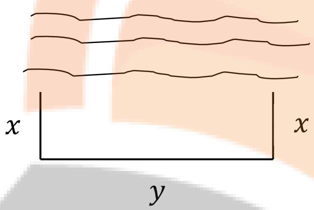
۹- m را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله $mx^{۲}-۴x+۱۵$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد.

$$\alpha+\beta=\frac{۴}{m}\longrightarrow ۳\beta+\beta=\frac{۴}{m}\rightarrow ۴\beta=\frac{۴}{m}\rightarrow\beta=\frac{۱}{m}\Longrightarrow\alpha=\frac{۳}{m}$$

$$\alpha\,\beta=\frac{۱}{m}\longrightarrow\frac{۳}{m}\times\frac{۱}{m}=\frac{۱}{m}\rightarrow m^{۲}=۳m$$

$$m(m-۳)=۰\begin{cases}m=۰ & \text{غ ق ق}\\ m=۳\end{cases}$$

۱۰- بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که با ۱۰۰ متر نرده می توان محصور کرد چقدر است.



$$۲x+y=۱۰۰\longrightarrow y=۱۰۰-۲x$$

$$S=xy=x(۱۰۰-۲x)=-۲x^{۲}+۱۰۰x$$

$$x=-\frac{۱۰۰}{۲(-۲)}=۲۵\longrightarrow y=۱۰۰-۲(۲۵)=۵۰$$

$$S=۲۵\times۵۰=۱۲۵۰$$

معادلات گویا و اصم :

معادلات زیر را حل نمایید .

$$/۱)\left(\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^{۲}-۴}\right)x(x+۲)(x-۲)$$

$$۳x(x-۲)+۲(x^{۲}-۴)=۴x^{۲}-۴x$$

$$۳x^{۲}-۶x+۲x^{۲}-۴=۴x^{۲}-۴x$$

$$x^{۲}-۲x-۴=۰\qquad\Delta=(-۲)^{۲}-۴(۱)(-۴)=۴+۱۶=۲۰$$

$$\frac{۲\pm\sqrt{۲۰}}{۲\times۱}\begin{cases}\frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۲}=۱+\sqrt{۵} & \text{ق ق}\\ \frac{۲-۲\sqrt{۵}}{۲}=۱-\sqrt{۵} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{x-۳}+\frac{۳}{x-۱}=۵\right)(x-۳)(x-۱)$$

$$x^۲-x+۳x-۹=۵(x^۲-۴x+۳)=۵x^۲-۲۰x+۱۵$$

$$۴x^۲-۲۲x+۲۴=۰\longrightarrow ۲(۲x^۲-۱۱x+۱۲)=۰$$

$$\Delta=(-۱۱)^۲-۴(۲)(۱۲)=|۲|-۹۶=۲۵$$

$$\frac{۱۱\pm۵}{۴}\begin{cases}\frac{۱۶}{۴}=۴\\ \frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

-۳

$$\sqrt{۱+x}-\sqrt{x}=۲$$

$$\left(\sqrt{۱+x}=۲+\sqrt{x}\right)^۲$$

$$۱+\cancel{x}=۲+\cancel{x}+۲\sqrt{x}$$

$$۲\sqrt{x}=-۱$$ غ ق ق

-۴ عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از ان برابر ۲۰ باشد.

$$x-\sqrt{x}=۲۰\rightarrow\ \left(x-۲۰=\sqrt{x}\right)^۲\rightarrow x^۲-۴۰x+۴۰۰=x$$

$$x^۲-۴۱x+۴۰۰=۰\rightarrow(x-۱۶)(x-۲۵)=۰$$
$$x=۶\qquad x=۲۵$$

-۵

$$\sqrt{x^۲-۵x+۳}+x^۲-۵x=۱۹$$

$$\sqrt{x^۲-۵x+۳}+x^۲-۵x+۳=۱۲$$

$$\sqrt{x^۲-۵x+۳}=t\rightarrow x^۲-۵x+۳x=t^۲$$

$$(t+4)(t-3)=0 \begin{cases} t=-4 \to \sqrt{x^2-5x+3}=-4 \quad \text{غ ق ق} \\ t=3 \to \left(\sqrt{x^2-5x+3}=3\right)^2 \to x^2-5x+3=9 \end{cases}$$

$$x^2-5x-6=0 \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

۶- نقطه ای روی خط $y=2x$ بیابید که از دو نقطه $A(1,1)$ و $B(3,-1)$ به یک فاصله باشد.

$$M\left|\begin{matrix} x \\ 2x \end{matrix}\right. \qquad |AM|=|BM| \Longrightarrow \sqrt{(x-1)^1+(2x-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x+1)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2-2x+1+4x^2-4x+1}=\sqrt{x^2-6x+9+4x^2+4x+1}\right)^2$$

$$\cancel{5x^2}-6x+2=\cancel{5x^2}-2x+10 \qquad -4x=8 \longrightarrow x=-2$$

۷-

$$\sqrt{x+\sqrt{x-1}}-\sqrt{2x-2}=0$$

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x-1}}-\sqrt{2x-2}\right)^2 \longrightarrow x+\sqrt{x-1}=2x-2$$

$$\left(\sqrt{x-1}=x-2\right)^2 \longrightarrow x-1=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+5=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(1)(5)=25-20=5 \qquad \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

۸- $150kg$ محلول آب نمک ۴درصدی در اختیار داریم. چند کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم تا محلول حاصل ۱۰ درصد شود؟

$$\frac{4}{100}\times 150=6kg$$

$$\frac{6+x}{150+x}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10} \longrightarrow 60+10x=150+x$$

$$9x=90 \longrightarrow x=10 \ kg$$

۹- در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر باهم کار می کنند، کار نیشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می کرد هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را چند روزه تمام می کنند.

کارگر اول ۳۰

کارگر دوم ۴۵

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$\frac{x+۱۵+x}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸}\longrightarrow ۳۶x+۲۷۰=x^۲+۱۵x$$

$$x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰\longrightarrow (x-۳۰)(x+۹)=۰\begin{cases} x=۳۰ \\ x=-۹x\end{cases}$$

۱۰) $P(x)$ یک چند جمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۲ است. $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که $P(۱)=۴$ و $P(۲)=۱۳$

$$P(x)=۲x^۲+ax+b$$

$$\begin{matrix} P(۱)=۲(۱)^۲+a(۱)+b=۴ \longrightarrow a+b=۲ \\ P(۲)=۲(۲)^۲+a(۲)+b=۱۳ \longrightarrow ۲a+b=۵\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a=۳ \\ b=-۱\end{matrix}$$

۱۱- نامعادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

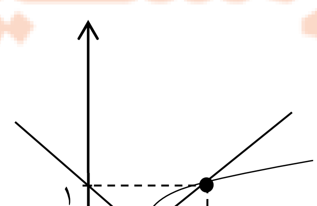
۲) $|x|<x^۲$

$y_۱=|x|$

$y_۲=x^۲$

از برخورد $y_۱$ و $y_۲$ نقاط $x=۲$ بدست می آید چون $y_۱<y_۲$.

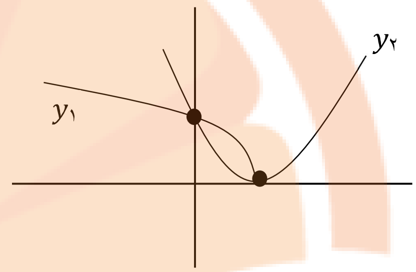
مجموعه جواب $[۲,+\infty]$



۳) $\sqrt{x-۱}\leqslant|x-۱|$

$y_۲ = |x - ۱|$

۱۲- معادله زیر را به روش هندسی حل نمایید.



$\sqrt{۱ - x} - ۱ = x^۲ - ۲x$

$\sqrt{۱ - x} = x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲$

$y_۱ = \sqrt{۱ - x}$

$y_۲ = (x - ۱)^۲$

با توجه به نمودار از برخورد $y_۱$ و $y_۲$ در طول $x = ۰$ و $x = ۱$ بدست می آید. $\{۱ و ۰\}$: جواب

۱۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید.

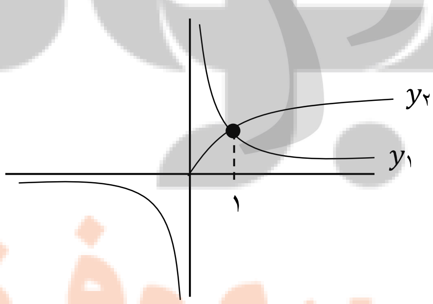
$۱)|ab| = |a||b|$

$|ab| = \sqrt{(ab)^۲} = \sqrt{a^۲b^۲} = \sqrt{a^۲}\sqrt{b^۲} = |a||b|$

$۲)|a + b| \leqslant |a| + |b|$

$$\begin{matrix} -|a| \leqslant a \leqslant |a| \\ -|b| \leqslant b \leqslant |b| \end{matrix} \longrightarrow -(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b| \Longrightarrow |a + b| \leqslant |a| + |b|$$

۱۴) نامعادله $\sqrt{x} \leqslant \frac{۱}{x}$ را به روش هندسی حل نمایید.



نقطه تقاطع $y_۱$ و $y_۲$، نقطه $x = ۱$

است و چون $y_۲ < y_۱$. جواب $[۱ و +\infty)$

$y_۱ = \frac{۱}{x}$ و $y_۲ = \sqrt{x}$

$x \geqslant ۰$

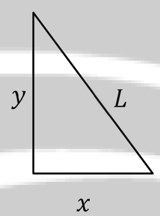
۱۵- نامعادله $|x + ۲| < |x - ۱|$ را حل نمایید.

$(x+۲+x-۱)(x+۲-x+۱)<۰$

$(۲x+۱)(۳)<۰ \longrightarrow ۲x+۱<۰ \longrightarrow ۲x<-۱ \longrightarrow x<-\frac{۱}{۲}$

« تابع »

۱- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۴ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن x به دست آورید.



$$S=\frac{۱}{۲}xy=۴$$

$$xy=۸ \longrightarrow y=\frac{۸}{x} \qquad L^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$$

$$L(x)=x^{۲}+\frac{۶۴}{x^{۲}}$$

۲- آیا دو تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}$ و $g(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}-۱$ باهم مساویند؟ چرا؟

$$D_f: ۱+\sqrt{۱+x^{۲}}\neq ۰ \Longrightarrow D_f: IR$$

$$\Longrightarrow D_f=D_g \qquad \Longrightarrow f=g$$

$$D_g: IR$$

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}\times\frac{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}=\frac{\cancel{x^{۲}}(۱-\sqrt{۱+x^{۲}})}{\cancel{۱-۱-x^{۲}}}=\sqrt{۱+x^{۲}}-۱=g(x)$$

۳- آیا دو تابع زیر باهم مساویند؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱-۹x^{۲}}{۱+۳x} & x\neq\frac{۱}{۳}\\ ۲ & x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{(۱-۳x)(۱+۳x)}{۱+۳x}=۱-۳x=g(x)\qquad D_f=D_g=IR\begin{cases}x\neq-\frac{۱}{۳}\\ x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

$$g(x)=۱-۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)=۱+۱=۲=f(x)$$

لذا $f=g$

۳- a را چنان تعیین کنید که دو تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq۳\\ a & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=x+۳$ باهم مساوی باشند.

$g(۳)=۳+۳=۶$

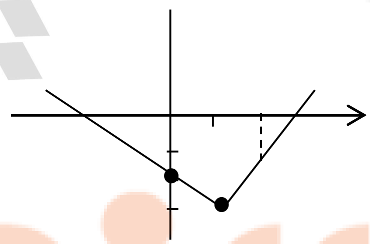
$f(۳)=a\quad\Longrightarrow a=۶$

۴- تابع $y=|۱-x|-۳$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار، بر آن را معلوم کنید.

$$y=\begin{cases}x-۱-۳=x-۴ & x\geqslant۱\\ ۱-x-۳=-x-۲ & x<۱\end{cases}$$

	۱	۲
	-۳	-۲

	۰	۱
	-۲	-۳



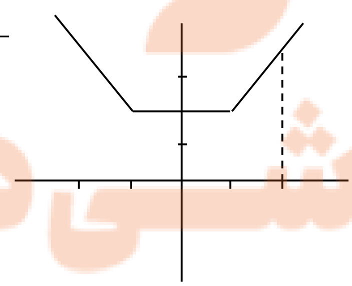
$y\geqslant-۳\ \Longrightarrow IR=[-۳,+\infty)$

۵- تابع $y=|x-۱|+|x-۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار، برد آن را معلوم کنید.

$$y=\begin{cases}-x-۱-x+۱=-۲x & x<-۱\\ x+۱-x+۱=۲ & -۱\leqslant x<۱\\ x+۱+x-۱=۲x & x\geqslant۱\end{cases}$$

	-۲	-۱
	۴	۲

	۱	۲
	۲	۴



$R:[۲,+\infty)$

۶-در زیر نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۳)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y=-۲f(x-۳)$ را رسم کنید.

۷- اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=۳x-۲$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(۳f+۲g)(۴)=۳f(۴)+۲g(۴)=۳\times\frac{۱}{۴-۳}+۲(۳(۴)-۲)=۱+۲۰=۲۱$

ب) $D_{fog}:\{x\in D_g | g|x\in D_f\}=\{IR|۳x-۲\neq ۳\}=\left\{IR\,\middle|\,x\neq\frac{۵}{۳}\right\}=IR-\left\{\frac{۵}{۳}\right\}$

۸- اگر $f=\{(۵ \text{ و } ۳) \text{ و } (۶ \text{ و } ۲) \text{ و } (۴ \text{ و } ۵)\}$ و $g=\{(۸ \text{ و } ۲) \text{ و } (۵ \text{ و } ۱) \text{ و } (۲ \text{ و } ۴)\}$ تابع fof و gof را حساب کنید.

$fof=\{(۴ \text{ و } ۳)\}\qquad gof=\{(۴ \text{ و } ۱) \text{ و } (۶ \text{ و } ۴)\}$

۹- اگر $f(x)=\frac{۵x}{۳x-۷}$ و $g(x)=\frac{x^۵-۱}{۵x-۱۵}$ ، تابع $\frac{f}{g}(x)$ و دامنه آن را بنویسید.

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{۵x}{۳x-۷}}{\frac{x^۵-۱}{۵x-۱۵}}=\frac{۵x(۵x-۱۵)}{(۳x-۷)(x^۵-۱)}$$

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\left(x\neq\frac{۷}{۳}\right)\cap(x\neq ۳)-\left\{x\middle|\frac{x^۵-۱}{۵x-۱۵}=۰\right\}$$

$$=IR-\left\{۱ \text{ و } \frac{۷}{۳} \text{ و } ۳\right\}$$

۱۰- اگر $f(x)=\frac{۳}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\left(\frac{۲f}{g}\right)(۴)=\frac{۲f(۴)}{g(۴)}=\frac{۲\times\frac{۳}{۴-۲}}{۴/۴}=\frac{۳}{۱}=۳$

ب) $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq ۰ \middle| \frac{۴}{x} \neq ۲\right\} = IR - \{۰ \text{ و } ۲\}$

۱۱- اگر $f(x) = \frac{۱}{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x-۳}$ دو تابع باشند مطلوبست

الف) $۳(f-g)(۴) = ۳\big(f(۴) - g(۴)\big) = ۳\left(\frac{۱}{۴-۱} - \sqrt{۴-۳}\right)$

$= ۳\left(\frac{۱}{۳} - ۱\right) = ۱ - ۳ = -۲$

ب) $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geqslant ۳ | \sqrt{x-۳} \neq ۱\}$

$= \{x \geqslant ۳ | x \neq ۴\} = [۳, +\infty) - \{۴\}$

۱۲- اگر $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ و تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که $fog(x) = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$

$f(x) = \frac{x}{x+۱} \to f\big(g(x)\big) = \frac{g(x)}{g(x)+۱} = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$

$(x^۲+۱)g(x) = (x^۲-۱)g(x) + x^۲ - ۱ \to (x^۲+۱-x^۲+۱)g(x) = x^۲-۱$

$g(x) = \frac{x^۲-۱}{۲}$

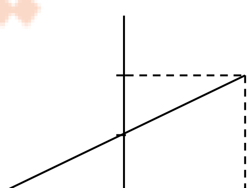
۱۳- اگر $f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$ و $fog(x) = x^۲ + ۴x + ۵$ باشد، $g(x)$ را بدست آورید.

$f(x) = x^۲ + ۲x + ۲ \to f\big(g(x)\big) = g^۲(x) + ۲g(x) + ۲ = x^۲ + ۴x + ۵$

$\big(g(x)\big)^۲ + ۲g(x) + ۱ = x^۲ + ۴x + ۴ \to (g(x)+۱)^۲ = (x+۲)^۲$

$g(x) + ۱ = |x+۲| \to g(x) = |x+۲| - ۱$

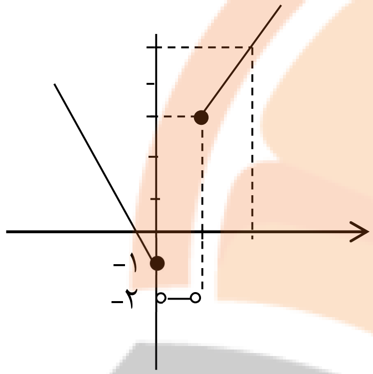
۱۴- با استفاده از نمودارهای g و f که در یک دستگاه مختصات رسم شده اند، عبارت های زیر را حساب کنید.



$\Rightarrow \quad (fog)(-۱) = f\big(g(-۱)\big) = f(-۲) = ۰$

$$(f.g)(۲) = f(۲).g(۲) = ۲ \times -۱ = -۲$$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \leqslant ۰ \\ -۲ & ۰ < x < ۱ \\ ۲x + ۱ & x \geqslant ۱ \end{cases}$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید .



$D_f: IR$

$R_f: \{-۲\} \cup [-۱\, , +\infty)$

۱۶- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید.

$$۱)\ f(x) = \frac{x^۳ - ۳x}{x^۲ - ۱}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^۳ - ۳(-x)}{(-x)^۲ - ۱} = \frac{-x^۳ + ۳x}{x^۲ - ۱} = -\frac{x^۳ - ۳x}{x^۲ - ۱} = -f(x)$$ فرد

$$۲)\ f(x) = x^۴ + ۲|x|$$

$$f(-x) = (-x)^۴ + ۲|-x| = x^۴ + ۲|x| = f(x)$$ زوج

$$۳)\ f(x) = x^۴ + \cos x$$

$$f(x) = (-x)^۲ + \cos(-x) = x^۲ + \cos x = f(x)$$ زوج

۴- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^۲ + ۴a^۲}\right)$ یک تابع فرد باشد.

$$f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{x^۲ + ۴a^۲}\right) \times \frac{x + \sqrt{x^۲ + ۴a^۲}}{x + \sqrt{x^۲ + ۴a^۲}} = \log\frac{x^۲ + x^۲ - ۴a^۲}{x + \sqrt{x^۲ + ۴a^۲}}$$

$$\Rightarrow \log ۴a^۲ = ۰ \rightarrow ۴a^۲ = ۱ \rightarrow a^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲}$$

۵- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد $f \times g$ و fog از نظر زوج یا فرد چگونه است؟

فرد $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times -g(x) = -f(x)g(x) = -(f \times g)(x)$

زوج $(fog)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = fog(x)$

۶- ثابت کنید تابع $f(x) = (x-۳)^۲ + ۲$ برای $x \geqslant ۳$ وارون پذیر است. سپس وارون آن را بدست آورید.

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow (x_۱ - ۳)^۲ + ۲ = (x_۲ - ۳)^۲ + ۲$$

$$\Rightarrow |x_۱ - ۳| = |x_۲ - ۳| \xrightarrow{x \geqslant ۳} x_۱ - ۳ = x_۲ - ۳ \rightarrow x_۱ = x_۲$$

وارون پذیر است.

$$y = (x-۳)^۲ + ۲ \rightarrow y - ۲ = (x-۳)^۲ \rightarrow x - ۳ = \sqrt{y-۲}$$

$$x = \sqrt{y-۲} + ۳ \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x-۲} + ۳$$

۷- وارون تابع $y = \frac{x-۵}{۲x+۳}$ را بدست آورید.

$$y = \frac{x-۵}{۲x+۳} \rightarrow ۲xy + ۳y = x - ۵$$

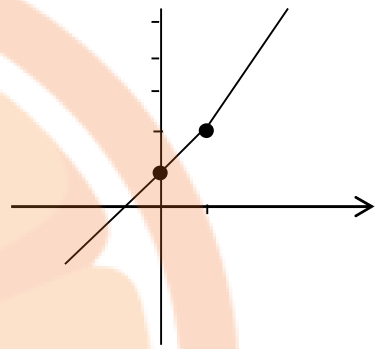
$$۲xy - x = -۵ - ۳y$$

$$x(۲y-۱) = -۵ - ۳y \rightarrow x = \frac{-۵-۳y}{۲y-۱} = \frac{۳y+۵}{۱-۲y} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۳x+۵}{۱-۲x}$$

۸- اگر $f(x) = ۴x - ۳$ و $g(x) = x + ۲$ تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید.

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + ۲ = ۴x - ۳ + ۲ = ۴x - ۱$$

۹- ابتدا نمودار تابع $y=۲x+|x-۱|$ را رسم کنید و با استفاده از آن وارون پذیری آن را بررسی کنید.



$$y=۲x+|x-۱|=\begin{cases}۳x-۱ & x\geqslant ۱ \\ x+۱ & x<۱\end{cases} \qquad \begin{array}{c|cc} & ۱ & ۲ \\ \hline & ۲ & ۵\end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & ۰ & ۱ \\ \hline & ۱ & ۲\end{array}$$

۱۰- ثابت کنید تابع $f(x)=۱-\sqrt{۴-x^۲}$ روی دامنه $[۰\ ,\ ۲]$ یک به یک است. وارون آن را بدست آورید.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۱-\sqrt{۴-x_۱^۲}=۱-\sqrt{۴-x_۲^۲}\rightarrow ۴-x_۱^۲=۴-x_۲^۲$$

$$x_۱^۲=x_۲^۲\rightarrow |x_۱|=|x_۲|\xrightarrow{[۰\ ,\ ۲]} x_۱=x_۲ \qquad \text{یک به یک است}$$

$$y=۱-\sqrt{۴-x^۲}\rightarrow \sqrt{۴-x^۲}=۱-y\rightarrow ۴-x^۲=(۱-y)^۲$$

$$x^۲=۴-(۱-y)^۲\rightarrow |x|=\sqrt{۴-(۱-y)^۲}\xrightarrow{[۰\ ,\ ۲]} x=\sqrt{۴-(۱-y)^۲}$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{۴-(۱-x)^۲}$$

۱۱- وارون پذیری تابع $f(x)=x^۳-۳x^۳+۳x+۵$ را بررسی کرده و سپس وارون آن را بدست آورید.

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۶=(x-۱)^۳+۶$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow (x_۱-۱)^۳+۶=(x_۲-۱)^۳+۶\rightarrow (x_۱-۱)^۳=(x_۲-۱)^۳\rightarrow x_۱=x_۲$$

$$y=(x-۱)^۳+۶\rightarrow y-۶=(x-۱)^۳\rightarrow x-۱=\sqrt[۳]{y-۶}\rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۶}+۱$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۶}+۱$$

۱۲- تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<-۲ \\ ۱ & -۲<x<۱ \\ -۲x & x>۱\end{cases}$ را رسم کنید و بازه هایی که در آنها صعودی، نزولی یا ثابت است را

-۳	-۲
-۲	-۱

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۲ \\ ۱ & -۲<x<۱ \\ -۲x & x>۱ \end{cases}$$

۱	۲
-۲	-۴

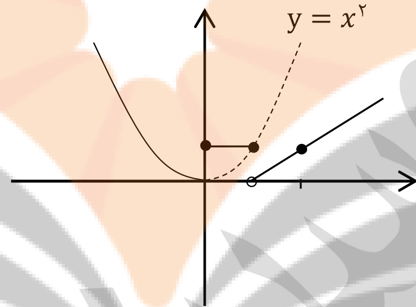
صعودی $\left(-\infty \text{ و } -۲\right)$

ثابت $\left(-۲ \text{ و } ۱\right)$

نزولی $\left(۱ \text{ و } +\infty\right)$

۱۳- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه هایی که تابع در آن بازه ها، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ ۱ & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ x-۱ & x>۱ \end{cases}$$



۱	۲
۰	۱

$\left(-\infty \text{ و } -۲\right)$ نزولی اکید

$\left[۰ \text{ و } ۱\right]$ ثابت

$\left(۱ \text{ و } +\infty\right)$ صعودی اکید

۱۴- دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{[x]}$ چیست؟

$$۴-x^۲\geqslant ۰\rightarrow -x^۲\geqslant -۴\rightarrow x^۲\leqslant ۴\rightarrow -۲\leqslant x\leqslant ۲$$

$$\Longrightarrow [-۲,۰)\cup[۱,۲]$$

$$[x]\neq ۰\rightarrow IR-[۰\ ,۱)$$

۱۵- نشان دهید تابع $f(x)=x-[x]$ متناوب است. سپس با رسم نمودار تابع در یک دوره متناوب آن، نمودار تابع را در تمام IR رسم کنید.

$$f(x+T)=f(x)$$

$$x+T-[x+T]=x-[x]\rightarrow T-[x+T]=-[x]$$

کوچکترین عدد طبیعی مثبت که در این رابطه صدق کند $T=۱$ است.

مثلثات :

فرمولهای بسط $\propto \pm \beta$:

۱) $\sin(\propto \pm \beta) = \sin \propto \cos\beta \pm \cos \propto \sin\beta$

۲) $\cos(\propto \pm \beta) = \cos \propto \cos\beta \pm \sin \propto \sin\beta$

۳) $\tan(\propto \pm \beta) = \dfrac{\tan \propto \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan \propto \pm \tan\beta}$

فرمولهای بسط $۲\propto$:

۱) $\sin ۲\propto = ۲\sin \propto \cos \propto = \dfrac{۲\tan \propto}{۱ + \tan^{۲} \propto}$

۲) $\cos ۲\propto = \cos^{۲} \propto - \sin^{۲} \propto = ۲\cos^{۲} \propto - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲} \propto = \dfrac{۱ - \tan^{۲} \propto}{۱ + \tan^{۲} \propto}$

۳) $\tan ۲\propto = \dfrac{۲\tan \propto}{۱ - \tan^{۲} \propto}$

۴) $۱ + \cos ۲\propto = ۲\cos^{۲} \propto$ و $۱ - \cos ۲\propto = ۲\sin^{۲} \propto$

فرمولهای کمان $\frac{\pi}{۴}$:

۱) $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$

۲) $\sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{۲}\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$

فرمولهای تبدیل جمع به ضرب:

$\sin p \pm \sin q = ۲\sin\dfrac{p \pm q}{۲}\cos\dfrac{p \mp q}{۲}$

$\cos p + \cos q = ۲\cos\dfrac{p + q}{۲}\cos\dfrac{p - q}{۲}$

$\cos p - \cos q = -۲\sin\dfrac{p + q}{۲}\sin\dfrac{p - q}{۲}$

فرمولهای تبدیل ضرب به جمع:

$$۱)\ \sin a \cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$۲)\ \cos a \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$۳)\ \sin a \sin b = -\frac{۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

اثابت ها :

$$۱)\ \sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$$

طرف دوم : $\sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\left[\sin x \cos\frac{\pi}{۴} + \cos x \sin\frac{\pi}{۴}\right]$

$$= \sqrt{۲}\left[\sin x \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cos x \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = \sin x + \cos x$$

$$۲)\ \cos ۲x = ۲\cos^{۲} \propto -۱$$

طرف اول : $\cos(\propto + \propto) = \cos \propto \cos \propto - \sin \propto \sin \propto = \cos^{۲} \propto - \sin^{۲} \propto$

$$\cos^{۲} \propto -(۱ - \cos^{۲} \propto) = \cos^{۲} \propto -۱ + \cos^{۲} \propto = ۲\cos^{۲} \propto -۱$$

$$۳)\ \sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}$$

طرف دوم : $\frac{۲\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos^{۲} x}} = ۲\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^{۲} x = ۲\sin x \cos x = \sin ۲x$

$$۴)\ \frac{۲\sin x \cos ۳x}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x - ۱$$

طرف اول $= \frac{\sin(x+۳x) + \sin(x-۳x)}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۴x - \sin ۲x}{\sin ۲x}$

$$= \frac{۲\sin ۲x \cos ۲x}{\sin ۲x} - ۱ = ۲\cos ۲x - ۱$$

$$\cos ۳x = \cos(۲x + x) = \cos ۲x \cos x - \sin ۲x \sin x$$

$$= (۲\cos^۲ x - ۱)\cos x - ۲\cos x\, \overset{\sin^۲ x}{\cancel{\sin x \sin x}}$$

$$= ۲\cos^۳ x - \cos x - ۲\cos x\,(۱ - \cos^۲ x) = ۲\cos^۳ x - \cos x - ۲\cos x + ۲\cos^۳ x$$

$$= ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$$

مسائل :

۱- اگر $\propto$ و β زوایای در ربع دوم و سوم بوده و $\sin \propto = \frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = \frac{-۵}{۱۳}$ مقدار $\sin(\propto + \beta)$ و $\sin ۲\propto$ و $\cos ۲\beta$ چیست؟

$$\sin(\propto + \beta) = \sin\propto \cos\beta + \cos\propto : \sin\beta = \frac{۴}{۵} \times \left(-\frac{۵}{۱۳}\right) + \left(-\frac{۳}{۵}\right) \times -\frac{۱۲}{۳} = \frac{۱۶}{۶۵}$$

$$\cos\propto = -\sqrt{۱ - \left(\frac{۴}{۵}\right)^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\beta = -\sqrt{۱ - \left(\frac{-۵}{۱۳}\right)^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = -\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = -\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin ۲\propto = ۲\sin\propto \cos\propto = ۲ \times \frac{۴}{۵} \times -\frac{۳}{۵} = \frac{-۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\beta = ۲\cos^۲\beta - ۱ = ۲ \times \left(\frac{-۵}{۱۳}\right)^۲ - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = \frac{۵۰ - ۱۶۹}{۱۶۹} = \frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$$

۲- اگر $\propto$ زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم و $\sin\propto = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$ مقدار $\tan(\propto + \beta)$ چیست؟

$$\tan(\propto + \beta) = \frac{\tan\propto + \tan\beta}{۱ - \tan\propto + \tan\beta} = \frac{\frac{۳}{۴} + \frac{۱۲}{۵}}{۱ - \frac{۳}{۴} \times \frac{۱۲}{۵}} = \frac{\frac{۶۳}{۲۰}}{\frac{-۱۶}{۲۰}} = -\frac{۶۳}{۱۶}$$

$$\cos\propto = \sqrt{۱ - \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲} = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \frac{۴}{۵} \qquad \tan\propto = \frac{۳/۵}{۴/۵} = \frac{۳}{۴}$$

$$\sin\beta = -\sqrt{۱ - \left(-\frac{۵}{۱۳}\right)^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = -\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = -\frac{۱۲}{۱۳} \qquad \tan\beta = \frac{-۱۲/۱۳}{-۵/۱۳} = \frac{۱۲}{۵}$$

۳- sin و cos و tan زاویه ۷۵ و ۱۵ و ۱۰۵ را بدست آورید.

$$\sin ۷۵ = \sin(۴۵ + ۳۰) = \sin ۴۵ \cos ۳۰ + \cos ۴۵ \sin ۳۰ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۷۵ = \cos(۴۵ + ۳۰) = \cos ۴۵ \cos ۳۰ - \sin ۴۵ \sin ۳۰ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\tan ۷۵ = \tan(۴۵ + ۳۰) = \frac{\tan ۴۵ + \tan ۳۰}{۱ - \tan ۴۵ \tan ۳۰} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ - ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۳ - \sqrt{۳}}$$

توجه : $۱۵ = ۴۵ - ۳۰$ و $۱۰۵ = ۶۰ + ۴۵$

۴- اگر $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$ و $\sin \alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{۲}$ را حساب کنید.

$$\tan \frac{\alpha}{۲} = \frac{\sin \alpha/۲}{\cos \frac{\alpha}{۲}} \times \frac{۲ \cos \frac{\alpha}{۲}}{۲ \cos \frac{\alpha}{۲}} = \frac{\sin \alpha}{۲ \cos^{۲} \frac{\alpha}{۲}} = \frac{\sin \alpha}{۱ + \cos \alpha}$$ (مهم)

$$\cos \alpha = -\sqrt{۱ - \left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right)^{۲}} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = -\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$\tan \frac{\alpha}{۲} = \frac{-\frac{۱۲}{۱۳}}{۱ - \frac{۵}{۱۳}} = \frac{-\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{۸}{۱۳}} = -\frac{۳}{۲}$$

۵- اگر $\tan \alpha = \frac{۱}{۲}$ حاصل $\frac{\sin ۳\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos ۳\alpha}$ را بیابید.

$$\frac{۲ \sin \frac{۳\alpha - \alpha}{۲} \cos \frac{۳\alpha + \alpha}{۲}}{-۲ \sin \frac{\alpha + ۳\alpha}{۲} \sin \frac{\alpha - ۳\alpha}{۲}} = \frac{۲ \sin \alpha \cos ۲\alpha}{-۲ \sin ۲\alpha \times -\sin \alpha} = \cot ۲\alpha = \frac{۱}{\tan ۲\alpha}$$

$$= \frac{۱ - \tan^{۲} \alpha}{۲ \tan^{۲} \alpha} = \frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{۲ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

۶- سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه ۲۲/۵ را بدست آورید.

$$\cos ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵ = ۱ - ۲\sin^{۲} ۲۲/۵ \rightarrow ۲\sin^{۲} ۲۲/۵ = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \sin ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\tan ۲۲/۵ = \frac{\sin ۲۲/۵}{\cos ۲۲/۵} = \frac{\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}$$

۷- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos ۲x = \frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}$$

$$\text{طرف دوم} = \frac{۱-\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}}{۱+\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}} = \frac{\frac{\cos^{۲} x - \sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}}{\frac{\cos^{۲} x + \sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}} = \frac{\cos^{۲} x - \sin^{۲} x}{\cos^{۲} x + \sin^{۲} x} = \frac{\cos ۲x}{۱} = \cos ۲x$$

معادلات مثلثاتی:

$$۱)\ \sin x = \sin \propto \longrightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \propto \\ x = ۲k\pi + \pi - \propto \end{cases}$$

$$\sin x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \qquad \sin x = ۰ \longrightarrow x = k\pi \qquad \sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$۲)\ \cos x = \cos \propto \longrightarrow\ x = ۲k\pi \pm \propto$$

$$\cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \ \text{و}\ \cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \qquad \cos x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

$$۳)\ \tan x = \tan \propto \rightarrow x = k\pi + \propto$$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\tan x - \tan ۲x = ۰$

$$\tan ۲x = \tan x \rightarrow ۲x = k\pi + x \rightarrow x = k\pi$$

$$۲\cos\frac{۲x+\frac{x}{۲}}{۲}\cos\frac{۲x-\frac{x}{۲}}{۲}=۰\rightarrow ۲\cos\frac{۵x}{۴}\cos\frac{۳x}{۴}=۰$$

$$\cos\frac{۵x}{۴}=۰\rightarrow \frac{۵x}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۵}+\frac{۲\pi}{۵}$$

$$\cos\frac{۳x}{۴}=۰\rightarrow \frac{۳x}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}$$

پ) $\sin x-\cos x=۱$

$$\sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۱\rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$x\cancel{-\frac{\pi}{۴}}=۲k\pi+\pi\cancel{-\frac{\pi}{۴}}\rightarrow x=۲k\pi+\pi$$

ث) $۲\sin^۲ x=۳\cos x$

$$۲(۱-\cos^۲ x)-۳\cos x=۰\rightarrow ۲-۲\cos^۲ x-۳\cos x=۰$$

$$۲\cos^۲ x+۳\cos x-۲=۰$$

$$\Delta=۳^۲-۴(۲)(-۲)=۹+۱۶=۲۵$$

$$\cos x=\frac{-۳\pm ۵}{۴}\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\\ x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=-۲ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

ج) $\sin x+\sin ۳x=۰$

$$\sin ۳x=-\sin x=\sin(-x)$$

$$۳x=۲k\pi-x\rightarrow ۴x=۲k\pi+\pi\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$۳x=۲k\pi+\pi+x\rightarrow ۲x=۲k\pi+\pi\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

چ) $\cos ۲x-۵\cos x+۳=۰$

$۲\cos^۲ x-۵\cos+۲=۰ \to \Delta=۲۵-۱۶=۹$

$\cos x=\frac{۵\pm ۳}{۴}\begin{cases}\frac{۸}{۴}=۲ & \text{غ ق ق}\\ \frac{۱}{۲} & x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$

ح) $\tan x-\cot x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

$-۲\cot ۲x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\to \cot ۲x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\to \tan ۲x=-\sqrt{۳}$

$۲x=k\pi-\frac{\pi}{۳}\to x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$

خ) $\frac{\sqrt{۳}}{\sin x}+\frac{۱}{\cos x}=۴$

$\sqrt{۳}\cos x+\sin x=۴\sin x\cos x=۲\sin ۲x$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\sin ۲x\to \sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=\sin ۲x$

$۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۳}\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$

$۲x=۲k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{۳}\to ۳x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۹}$

د) معادله $\sin ۲\theta+\sqrt{۲}\cos\theta=۰$ را در بازه $[-\pi \text{ و } \pi]$ تعیین کنید.

$۲\sin\theta\cos\theta+\sqrt{۲}\cos\theta=۰$

$\sqrt{۲}\cos\theta\left(\sqrt{۲}\sin\theta+۱\right)=۰\begin{cases}\cos\theta=۰\to \theta=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\theta=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$

$\theta=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۴}$ $\left\{-\frac{۳\pi}{۴} \text{ و } -\frac{\pi}{۴} \text{ و } \frac{۵\pi}{۴}\right\}$

ذ) معادله $\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x = ۰$ را حل کنید و جواب هایی که در بازه $[۰ \text{ و } ۲\pi]$ هستند تعیین کنید.

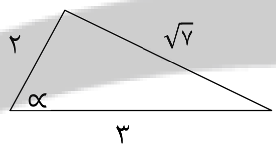
$$۲\sin\frac{x+۳x}{۲}\cos\frac{x-۳x}{۲} + \sin ۲x = ۰$$

$$۲\sin ۲x \cos x + \sin ۲x = ۰$$

$$۲\sin ۲x\left(\cos x + \frac{۱}{۲}\right) = ۰ \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \to ۲x = k\pi \to x = \dfrac{k\pi}{۲} \\ x = ۰ , x = \pi , x = ۲\pi \\ \cos x = -\dfrac{۱}{۲} \qquad x = ۲k\pi \pm \dfrac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

$$x = \frac{۲\pi}{۳} \text{ و } \frac{۴\pi}{۳}$$

د) در مثلثی که طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{۳}$ باشد، زاویه ی روبروی ضلع به طول $\sqrt{۷}$ چقدر است؟



$$(\sqrt{۷})^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ - ۲ \times ۱ \times \sqrt{۳}\cos \propto$$

$$۷ = ۱ + q - ۲\sqrt{۳}\cos \propto$$

$$-۳ = -۲\sqrt{۳}\cos \propto \to \cos \propto = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\propto = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \qquad \propto = \frac{\pi}{۶}$$

معکوس مثلثاتی:

$$f(x) = \sin^{-۱} x \qquad \begin{cases} D_f : [-۱ , ۱] \\ R_f : \left[-\dfrac{\pi}{۲} , \dfrac{\pi}{۲}\right] \end{cases} \qquad \sin^{-۱}(-\propto) = -\sin^{-۱} \propto$$

$$f(x) = \cos^{-۱} x \qquad \begin{cases} D_f : [-۱ , ۱] \\ R_f : [۰ , \pi] \end{cases} \qquad \cos^{-۱}(-\propto) = \pi - \cos^{-۱} \propto$$

$$f(x) = \tan^{-۱} x \qquad \begin{cases} D_f : IR \\ R_f : \left(-\dfrac{\pi}{۲} , \dfrac{\pi}{۲}\right) \end{cases} \qquad \tan^{-۱}(-\propto) = -\tan^{-۱} \propto$$

۱۰- برای هر x که $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ نشان دهید:

$$\sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x = \frac{\pi}{۲}$$

$$\sin(\sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x) = \sin(\sin^{-۱} x)\cos(\cos^{-۱} x) + \sin(\cos^{-۱} x)\cos(\sin^{-۱} x)$$

$$\Longrightarrow \sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x = \frac{\pi}{۲}$$

۱۱- نشان دهید.

$$۱)\ \cos(\tan^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$\tan^{-۱} x = \propto \to \tan \propto = x \to \ \cos^{۲} \propto = \frac{۱}{۱ + \tan^{۲} \propto} = \frac{۱}{۱ + x^{۲}}$$

$$\cos \propto = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} \to \cos(\tan^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

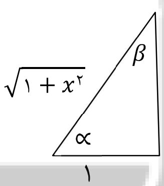
$$۲)\ \sin(\tan^{-۱} x) = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$\tan^{-۱} x = \propto \to \ \tan \propto = x \to \sin^{۲} \propto = \frac{\tan^{۲} \propto}{۱ + \tan^{۲} \propto} = \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}$$

$$\sin \propto = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$۳)\ \tan^{-۱} x + \tan^{-۱} \frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\sin\left(\tan_{\propto}^{-۱} x + \tan_{\beta}^{-۱} \tfrac{۱}{x}\right) = \sin \propto \cos \beta + \cos \propto \sin \beta = \tfrac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}} \times \tfrac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}} + \tfrac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}} \times$$



$$\frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} = \frac{۱ + x^{۲}}{۱ + x^{۲}} = ۱$$ اثبات برقرار است

$$\tan \propto = x \to \tan^{-۱} x = \propto \qquad \sin \propto = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} \quad و \quad \cos \propto = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$\cot \beta = x \to \tan \beta = \frac{۱}{x} \to \tan^{-۱} \frac{۱}{x} = \beta \quad \sin \beta = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} \quad \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$۱)\ \tan^{-۱}(-۱) + \tan^{-۱}\left(\sin\frac{\pi}{۲}\right) = -\tan^{-۱}(۱) + \tan^{-۱} ۱ = -\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴} = ۰$$

$$۲)\ \cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \pi - \cos^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$۳)\ \cos(\tan^{-۱}(-\sqrt{۳})) = \cos(-\tan^{-۱}\sqrt{۳}) = \cos\left(\frac{\pi}{\ }\right) = \frac{۱}{\ }$$

$$4)\ \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)=\cos\left(-\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)=\cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{5}$$

$$\tan^{-1}\frac{4}{3}=\propto\ \Longrightarrow\ \tan\propto=\frac{4}{3}\to\ \cos^{2}\propto=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}=\frac{9}{25}\to\cos\propto=\frac{3}{5}$$

$$5)\ \tan(\tan^{-1}2+\tan^{-1}3)=\frac{\tan(\tan^{-1}2)+\tan(\tan^{-1}3)}{1-\tan^{-1}2\times\tan^{-1}3}=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1$$

$$6)\ \tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\propto\to\sin\propto=\frac{3}{5}\qquad \frac{3}{5}=\frac{\tan^{2}\propto}{1+\tan^{2}\propto}\to 3+3\tan^{2}\propto=5\tan^{2}\propto$$

$$2\tan^{2}\propto=3$$

$$\tan^{2}\propto=\frac{3}{2}\to\tan\propto=\frac{3}{2}$$

$$7)\ \cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)=\cos^{-1}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

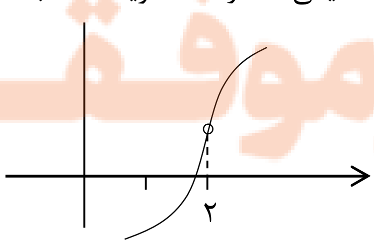
$$8)\ \cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$$

$$9)\ \sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}\qquad\left(\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

حد :

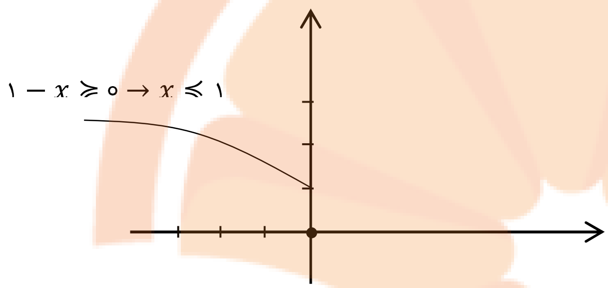
۱- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد، ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد، در این نقطه حد داشته باشد.



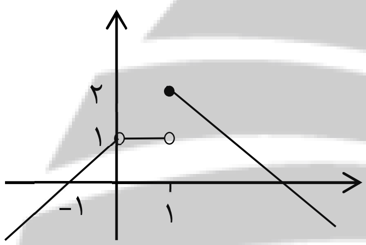
۲- نمودار تابعی را ریم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد

۳- با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{۱ + x} + ۱$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه $a = ۱$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \sqrt{۱ - ۱^-} + ۱ = ۱$$



۴- با توجه به شکل مقابل حدود زیر را تعیین کنید.



$$\lim_{x \to -۱} f(x) = ۰ \qquad \lim_{x \to ۰} f(x) = ۱$$

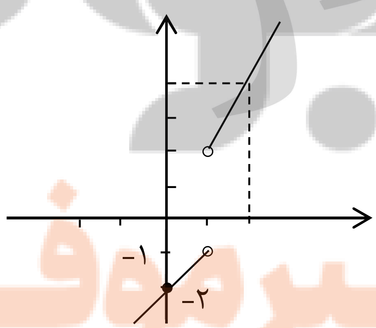
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱ \qquad \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲ \qquad \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} f(x) = ۱$$

۵- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه ی داده شده، وجود حدو حد راست و حد چپ را در نقطه $x_۰ = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۲ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$$

۰	۱
-۲	-۱

۱	۱
۲	۴



$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = -۱$$

$\lim_{x \to ۱} f(x) =$ وجود ندارد

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱)\ \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x - ۳)}{(x - ۱)(x + ۱)} = \frac{۱ - ۲}{۱ + ۱} = -\frac{۱}{۲}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(۴x+۳)}{(x-۱)(x+۱)\left(۲x+\sqrt{x+۳}\right)} = \frac{۴+۳}{(۱+۱)(۲+۲)} = \frac{۷}{۸}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱} \frac{۴x^۳-۵x+۱}{۳x-۳} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(۴x^۲+۴x-۱)}{۳(x-۱)} = \frac{۴+۴-۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & ۴ & ۰ & -۵ & ۱ \\ \hline ۱ & ۴ & ۴ & -۱ & ۰ \end{array}$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۳x-۴۰} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۸}{(x-۸)(x+۵)\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}$$

$$= \frac{۱}{(۱+۵)(۴+۴+۴)} = \frac{۱}{۷۲}$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{(۱-\cos x)}(۱+\cos x)}{\cancel{۱-\cos x}} = \cancel{۱+\cos}\overset{۱}{} \ ۰ = ۲$$

$$۶)\ \text{olim}_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{\sin\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۲}\,\overset{\sin x}{|\cancel{\sin x}|}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cancel{\cos\frac{x}{۲}}}{\cancel{\sin\frac{x}{۲}}} = ۲\cos \overset{۱}{\cancel{۰}} = ۲$$

$$۷)\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x}{\sqrt{۱-\cos x}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x}{\sqrt{۲\sin^۲ x/۲}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x}{\sqrt{۲}\left(\sin\frac{x}{۲}\right)}$$

$$= \lim \frac{۲x/۲\times ۲}{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}} = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} = -۲\sqrt{۲}$$

$$۸)\ \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{۳x^۲} = \frac{۱}{۳} \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{x^۲} = \frac{۲}{۳} \lim_{x\to ۰} \overset{۱}{\cancel{\frac{\sin x}{x}}} \times \overset{۱}{\cancel{\frac{\sin x}{x}}} = \frac{۲}{۳}$$

$$۹)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x-\cos x}{۱-\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x-\cos x}{۱-\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos x\,(\sin x-\cos x)}{-(\sin x-\cos x)} = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{x\ \tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{x+۳x}{۲}\sin\frac{x-۳x}{۲}}{x\ \tan x}$$

$$=-۲\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin ۲x}{۲\times x}\times\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=+۴\overset{۱}{\cancel{\cos}}\ ۰=۴$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{\cos x-\sin x}}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$۱۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(۲x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\left(۲\left(\frac{\pi}{۲}+t\right)-\pi\right)}{t}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲t-\pi)}{t}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳t}{t\times ۲}\times ۲=۲$$

$$x-\frac{\pi}{۲}=t\to x=\frac{\pi}{۲}+t \text{ و } t\to ۰$$

$$۱۳)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=-\lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{۲}+t\right)}{t}=+\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin t}{t}=۱$$

$$x-\frac{\pi}{۲}=t\to x=\frac{\pi}{۲}+t \text{ و } t\to ۰^+$$

$$۱۴)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{[x]+[-x]}=\frac{۱-۱}{-۱}=۰$$

$$۱۵)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۱}{x-۲}=\frac{[۲^-]-۱}{۲^--۲}=\frac{۱-۱}{۰^-}=\frac{۰}{۰^-}=۰$$

$$۱۶)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-[x]x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-[x]x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x+[x])\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\frac{۲+۱}{۲+۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$۱۷)\lim_{x\to ۱}(x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱}=۰$$

$$\left(-۱\leqslant\sin\frac{۱}{x-۱}\leqslant ۱\right)(x-۱)\to -(x-۱)\leqslant(x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱}\leqslant x-۱$$

$$\lim_{x\to ۱}-\underset{۰}{\cancel{(x-۱)}}\leqslant\lim_{x\to ۱}(x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱}\leqslant\lim_{x\to ۱}\underset{۰}{\cancel{x-۱}}$$

$$\left(-۱ \leqslant \cos\frac{۱}{x} \leqslant ۱\right) \times x \to -x \leqslant x\cos\frac{۱}{x} \leqslant x - |x| \leqslant \ x\cos\frac{۱}{x} \leqslant |x|$$

$$\left|x\cos\frac{۱}{x}\right| \leqslant |x|$$

$$\lim_{x\to ۰}\left|x\cos\frac{۱}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to ۰}|x| \Longrightarrow \lim_{x\to ۰} x\cos\frac{۱}{x} = ۰$$

$$۱۹)\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x - \sin x}{x^{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x\left(\frac{۱-\cos x}{\cos x}\right)}{x^{۲}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} \times \frac{۲\sin^{۲} x/_{۲}}{x\cos x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x/_{۲}}{\frac{x}{۲}\times ۲} \times \frac{\sin x/_{۲}}{\cos x} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$۲۰)\ \lim_{x\to ۳^{+}} x - [x] = ۳ - [۳^{+}] = ۳ - ۳ = ۰$$

$$۲۱)\ \lim_{x\to ۲^{-}} x - [x] = ۲ - [۲^{-}] = ۲ - ۱ = \ ۱$$

پیوستگی :

پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$۱)f(x) = \begin{cases} x^{۲}(x-۲) & x \leqslant ۲ \\ ۴ - ۲x & x > ۲ \end{cases} \qquad x = ۲$$

$f(۲) = ۲^{۲}(۲-۲) = ۰$ پیوسته است .

$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x) = ۲^{۲}(۲-۲) = ۰$ و $\lim_{x\to ۲^{-}} f(x) = ۴ - ۲(۲) = ۰$

$$۲)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲}+۲x-۳}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۴ & x = ۱ \end{cases} \qquad x = ۱$$

$f(۱) = ۴$

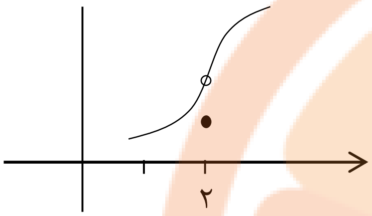
$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x) = \lim_{x\to ۱^{-}} f(x) = \lim_{x\to ۱}\frac{(x+۳)(x-۱)}{x-۱} = ۱ + ۳ = ۴$ پیوسته است .

$$x - ۳ \geqslant ۰ \to x \geqslant ۳ \Longrightarrow \begin{array}{l} f(۳) = ۰ \\ \lim_{x\to ۳^{+}} f(x) = \sqrt{۳^{+} - ۳} = ۰ \end{array}$$

۴) $f(x) = \frac{x^{۲} - ۴}{\ldots}$

پیوسته نیست زیر مقدار تابع در $x=۲$ تعریف شده نمی باشد.

۵- نمودار تابع را رسم کنید در $x=۲$ ناپیوسته باشد ولی در این نقطه حد داشته باشد.



مقادیر a و b را طوری بدست آورید که توابع زیر در نقاط داده شده پیوسته باشند.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x\geqslant ۲\\ x^۲+۱ & -۲\leqslant x<۲\\ ۳x+b & x<-۲\end{cases} \qquad x=۲,-۲$$

$$f(-۲)=(-۲)^۲+۱=۵ \qquad b-۶=۵$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=۵ \qquad \lim_{x\to -۲^+} f(x)=۳(-۲)+b=b-۶ \qquad b=۱۱$$

$$f(۲)=a(۲)+۱=۲a+۱ \qquad ۲a+۱=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲a+۱ \qquad \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲^۲+۱=۵ \qquad ۲a=۴\to a=۲$$

$$۲)\ f(x)=\begin{cases} [x]+bx & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ \dfrac{|x-۱|}{x^۲-۱}+a & x<۱\end{cases}$$

$$f(۱)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]+b(۱)=۱+b \qquad ۱+b=۲ \qquad b=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}+a=-\frac{۱}{۲}+a \qquad -\frac{۱}{۲}+a=۲\to a=\frac{۵}{۲}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقدار برای a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{|x|} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ پیوسته نخواهد شد.

$$f(۰)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\frac{ax}{x}=a \qquad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{ax}{-x}=-a \qquad a\neq -a$$

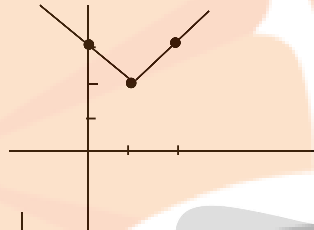
$$۴)\ f(x)=\begin{cases} a-|x-۱| & x\geqslant ۱\\ x^۳-۱ & \end{cases}$$

$f(1) = a - |1-1| = a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a - (1-1) = a \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = 1+1+1 = 3$

$a = 3$

۵- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید در چه نقطه ای ناپیوسته است.



همواره پیوسه است

$1)\ y = x + [x]$

$0 \leqslant x < 1 \qquad y = x + 0 = x$

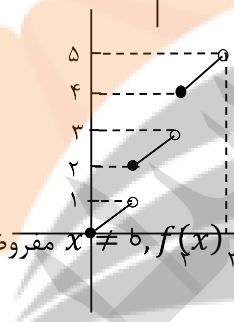
x	0	1
y	0	1

$1 \leqslant x < 2 \qquad y = x + 1$

x	1	2
y	2	3

$2 \leqslant x < 3 \qquad y = x + 2$

x	2	3
y	4	5



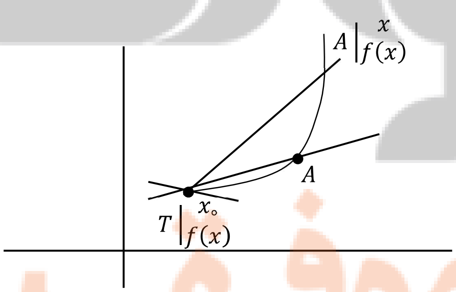
در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۶- تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ ، $x \neq 0$ مفروض است. $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+8-8}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}$$

$$= \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

مشتق:



$$M_{AT} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{شیب خط مماس در T} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تعریف مشتق : $f'(a) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $\qquad h = x - x_0$

مشتق چپ : $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{h - a}$

مشتق راست : $f'_{+}(a) = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{h - a}$

اثبات دو فرمول:

۱) $\left(f(x_0) \times g(x_0)\right)' = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$

$$\left(f(x_0) \times g(x_0)'\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times g(x) + \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \times f(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

۲) $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = \dfrac{-f'(a)}{f^2(a)}$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}}{x - a} = \lim_{x\to a} -\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{1}{f(x)f(a)}$$

$$= -f'(a) \times \frac{1}{f(a)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

فرمولهای مشتق گیری

۱) $f(x) = k \to f'(x) = 0$

۲) $f(x) = ax \to f'(x) = a$

۳) $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$

۴) $f(x) = u + v \to f'(a) = u' + v'$

۵) $f(x) = uv \to f'(x) = u'v + v'u$

۶) $f(x) = u^n \to f'(x) = nu'u^{n-1}$

۷) $f(x) = \dfrac{u}{v} \to f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

۸) $f(x) = \sqrt{u} \to f'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\qquad f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

۹) $f(x) = \sqrt[m]{u^n} \to f'(x) = \dfrac{nu'}{\ldots}$ $\qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{\ldots}$

۱۰) $f(x)=\sin u \to f'(x)=u'\cos u$

۱۱) $f(x)=\cos u \to f'(x)=-u'\sin u$

۱۲) $f(x)=\tan u \to f'(x)=-u'(1+\tan^2 u)$

۱۳) $f(x)=\cot u \to f'(x)=-u'(1+\cot^2 u)$

۱۴) $f(x)=\sin^n u \to f'(x)=nu'\cos u\ \sin^{n-1} u$

۱۵) $f(x)=\cos^n u \to f'(x)=-nu'\sin u\ \cos^{n-1} u$

۱۶) $f(x)=\tan^n u \to f'(x)=nu'(1+\tan^2 u)\tan^{n-1} u$

۱۷) $f(x)=\cot^n u \to f'(x)=-nu'(1+\cot^2 u)\cot^{n-1} u$

۱۸) $(fog)'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)$

۱۹) $f(x)=\sin^{-1} u \to f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۲۰) $f(x)=\cos^{-1} u \to f'(x)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۲۱) $f(x)=\tan^{-1} u \to f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$

به کمک تعریف مشتق توابع را در نقاط داده شده بدست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{x-1} \qquad x=2$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Longrightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

۲) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 1\\ x^3 & x\leqslant 1\end{cases} \qquad x=1$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=1+1=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=1+1+1=3$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-1)[x]-0}{x-2}=[2^+]=2$$

مشتق پذیر نیست.

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-1)[x]-0}{x-2}=[2^-]=1$$

$$4)\, f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}=|x|\sqrt{x+1}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+1}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x+1}-0}{x}=1$$

مشتق پذیر نیست.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{x+1}-0}{x}=-1$$

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$1)\, f(x)=\frac{(3x^2-1)^3}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{3\times 6x(3x^2-1)^2(x+1)-1\times(3x^2-1)^3}{(x+1)^2}$$

$$2)\, f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^2-1)-2x\sqrt{x+1}}{(x^2-1)^2}$$

$$3)\, f(x)=\frac{(x-2)(x^2+1)^5}{\sqrt{x}+1}$$

$$f'(x)=\frac{[1\times(x^2+1)^5+5\times 2x(x^2+1)^4(x-2)](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^5}$$

$$\Rightarrow\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2)(x^2+1)^5}{(\sqrt{x}+1)^5}$$

$$4)\, f(x)=\frac{\sin x}{x^3+2x}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(x^3+2x)-(3x^2+2)\sin x}{(x^3+2x)^2}$$

$$5)\, f(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2\cos x\sin x)(H\cos^2 x)+2\sin x\cos x\,(x^2-\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}$$

$$6)\, f(x)=\tan^3 x+\sin^{-1} x$$

$$f'(x)=3(1+\tan^2 x)\tan^2 x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7)\, f(x)=\sqrt[3]{x^5-\cos 2x}$$

$$f'(x)=\frac{1\times(5x^4+2\sin 2x)}{3\sqrt[3]{(x^5-\cos 2x)^2}}$$

$۸)\ f(x) = (۱ + \tan x)\cos^{-} x$

$$f'(x) = (۱ + \tan^{۲} x)\cos^{-۱} x + \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}(۱ + \tan x)$$

$۹)\ f(x) = (x^{۳} - x^{۲} - ۱)(x - \sqrt{x})$

$$f'(x) = (۳x^{۲} - ۲x)(x - \sqrt{x}) + \left(۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(۳x^{۲} - x^{۲} - ۱)$$

$۱۰)\ f(x) = ۲\tan^{-۱} x + ۳\sin^{-۱} x + \frac{۴}{x}$

$$f'(x) = \frac{۱}{۱ + x^{۲}} + ۳ \times \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} + \frac{۰ \times x - ۱ \times ۴}{x^{۲}}$$

$۱۱)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(۲x+۱)^{۳}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times (۲x + ۱)^{۳} - ۳ \times ۲(۲x + ۱)^{۲}\sqrt{x}}{(۲x + ۱)^{۶}}$$

$۱۲)\ f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{۱+x^{۲}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos x\,(۱ + x^{۲}) - ۲x \times \sin\sqrt{x}}{(۱ + x^{۲})^{۲}}$$

$۱۳)\ y = \left(\sqrt{x} + \frac{۱}{x} + x^{۳}\right)^{۴}$

$$y' = ۴\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۰ \times x - ۱ \times ۱}{x^{۲}} + ۳x^{۲}\right)\left(\sqrt{x} + \frac{۱}{x} + x^{۳}\right)^{۳}$$

$۱۴)\ y = \sqrt{۲x - ۳\cos ۵x}$

$$y' = \frac{۲ + ۱۵\sin ۵x}{۲\sqrt{۲x - ۳\cos ۵x}}$$

$۱۵)\ y = \sqrt[۳]{x} + \cos^{-۱} x$

$$y' = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

$۱۶)\ y = \frac{۱}{x + ۱} + \tan^{-۱}(۲x)$

$$y' = \frac{۰ \times (x + ۱) - ۱ \times ۱}{(x + ۱)^{۲}} + \frac{۲}{۱ + ۴x^{۲}}$$

$۱۷)\ y = (۲x + ۳)^{۵}\sin^{-۱} x$

$$y' = ۵ \times ۲(۲x + ۳)^{۴}\sin^{-۱} x + \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \times (۲x + ۳)^{۵}$$

۱۸- آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۹ واحد است به دست آورید.

$$s = x^{۲} \rightarrow x = \sqrt{s} \qquad p = ۴x \quad \Longrightarrow p(s) = ۴\sqrt{s}$$

$$\acute{p}(s) = \frac{۴}{۲\sqrt{s}} = \frac{۲}{\sqrt{s}}$$

$$\acute{p}(۹) = \frac{۲}{\sqrt{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

۱۹- آهنگ تغییر مساحت مربعی را نسبت به محیط آن برای مربعی به محیط ۸ چیست؟

$$p = ۴x \longrightarrow x = \frac{p}{۴} \qquad s = x_{۰}^{۲} \quad \Longrightarrow s(p) = \frac{p^{۲}}{۴} \longrightarrow \acute{s}(p) = \frac{p}{۲} \qquad \acute{s}(۸) = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۲۰- معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-۲}$ را در نقطه ای به طول ۳ $x_{۰} =$ بدست آورید.

$y_\circ = \dfrac{۳}{۳-۲} = ۱ \qquad \Big|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}$

$y = \dfrac{+۱(x-۲) - ۱\times x}{(x-۲)^۲} \qquad m = \dfrac{(۳-۲)-۳}{(۳-۲)^۲} = \dfrac{-۲}{۱} = -۲ \Rightarrow \begin{matrix} y-۳ = -۲(x-۳) \\ y = -۲x + ۹ \end{matrix}$

۲۱- نقطه ای از نمودار تابع $y = x^۲ + ۳x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

شرط موازی بودن : $m = \acute{m}$

$\acute{y} = ۲x + ۳ = m \qquad \Rightarrow ۲x + ۳ = ۱ \longrightarrow ۲x = ۲ \longrightarrow x = ۱$

$y = x \longrightarrow m^۱ = ۱ \qquad y = ۱^۲ + ۳(۱) = ۴ \qquad \begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}$

۲۲- نقاطی از نمودار تابع $y = x^۳ + ۲x - ۱$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد؟ موازی محور x ها باشد؟

شرط موازی بودن : $m = \acute{m}$

$y^۱ = ۳x^۲ + ۲x = m \qquad ۳x^۲ + ۲x = -۱$

$y = -x \longrightarrow m^۱ = -۱ \qquad ۳x^۲ + ۲x + ۱ = \circ \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$

$x = -۱ \longrightarrow y = (-۱)^۳ + ۲(-۱) - ۱ = -۴ \qquad \begin{bmatrix}-۱\\-۴\end{bmatrix}$

$x = -\dfrac{۱}{۳} \longrightarrow y = \left(-\dfrac{۱}{۳}\right)^۳ + ۲\left(-\dfrac{۱}{۳}\right) - ۱ = -\dfrac{۱}{۲۷} - \dfrac{۲}{۳} - ۱ = \dfrac{-۱-۱۸-۲۷}{۲۷} = -\dfrac{۴۶}{۲۷}$

حالت سوم $\acute{m} = \circ \qquad x = \circ \rightarrow y = -۱ \qquad \begin{bmatrix}\circ\\-۱\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-\dfrac{۱}{۳}\\-\dfrac{۴۶}{۲۷}\end{bmatrix}$

$۳x^۲ + ۲x = \circ \rightarrow x = -\dfrac{۲}{۳} \rightarrow y = -\dfrac{۸}{۲۷} - \dfrac{۴}{۳} - ۱ = \dfrac{-۸-۳۶-۲۷}{۲۷} = \dfrac{-۸۱}{۲۷} = -۳ \qquad \begin{bmatrix}-\dfrac{۲}{۳}\\-۳\end{bmatrix}$

۲۳- معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = ۲x^۳ - x$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید.

$\acute{y} = ۶x^۲ - ۱ \qquad m = ۶(۱)^۲ - ۱ = ۵ \;\rightarrow\; \acute{m} = -\dfrac{۱}{۵}$

$y - 1 = -\frac{1}{5}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$ $x = 1 \rightarrow f(1) = 2(1)^3 - 1 = 1$