فصل اول هندسه۲
پایه یازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- حل تمامی تمرینات فعالیت ها و کاردر کلاس ها

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل اول کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم رشته ریاضی و فیزیک نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

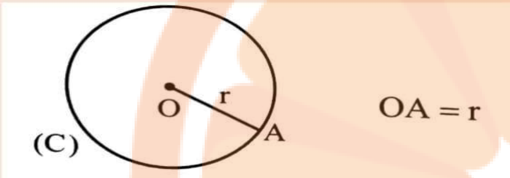
۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

تعریف دایره: فرض کنیم O نقطه ثابت و r عدد حقیقی مثبت باشد. دایره به مرکز O و شعاع r مجموعه نقطه هایی از صفحه است که فاصله ی آن ها از نقطه O برابر r باشد.

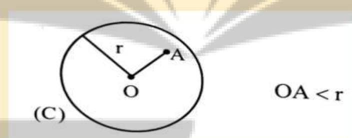


توجه : دایره C به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نمایش می دهیم.

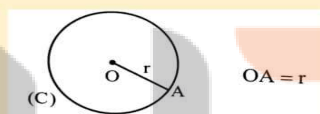
نکته : دو دایره با شعاع های مساوی با هم برابرند.

اوضاع نسبی نقطه و دایره

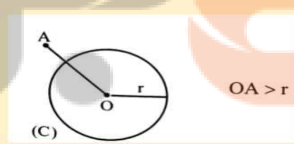
آ) اگر نقطه A درون دایره $C(O,r)$ باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، کم تر از شعاع دایره است.



ب)اگر نقطه A روی دایرهٔ $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است



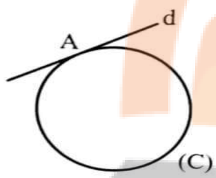
پ)اگر نقطه A بیرون دایره $C(O,r)$ باشد. فاصله آن تا مرکز دایره بیش تر از شعاع دایره است



خط مماس بر دایره و خط متقاطع با دایره

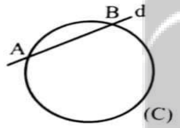
خط مماس بر دایره: اگر خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک باشند، می گوییم خط بر دایره مماس است.

در شکل مقابل خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



خط متقاطع با دایره: اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، می گوییم خط و دایره متقاطع اند .

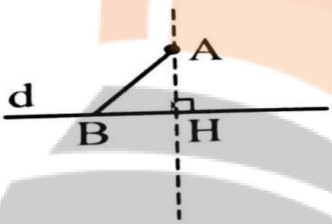
در شکل مقابل، خط d دایره (C) را در دو نقطه A و B قطع کرده است. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می نامیم.



فاصله یک نقطه از یک خط

اگر از یک نقطه خارج یک خط، عمودی بر آن رسم کنیم، فاصله آن نقطه تا پای عمود، کوتاه ترین فاصله بین نقطه A و نقاط خط می باشد.

در شکل مقابل، AH کوتاه ترین فاصه نقطه A تا نقاط خط d است (AB>AH) و به آن فاصله نقطه A تا خط d گفته می شود. اگر A روی خط d باشد، فاصله A تا خط d صفر است.

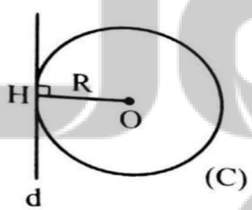


اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

یک خط و یک دایره در صفحه دارای **سه وضعیت** زیر هستند:

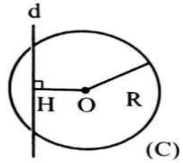
الف) خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد

$OH = R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) مماس است.



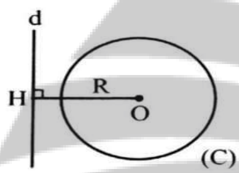
ب) خط با دایره متقاطع است.اگر و تنها گر فاصله مرکز دایره تا خط کم تر از شعاع دایره باشد.

$OH < R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) متقاطع اند.



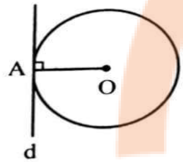
پ) خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند . اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط ، بزرگتر از شعاع دایره باشد.

$OH > R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) نقطه اشتراکی ندارند.



خاصیت مهم خط مماس

خاصیت ۱- اگر A نقطه ای روی دایره باشد شعاع OA و خط مماس بر دایره در نقطه ی A بر هم عمودند



$(d \perp OA)$

اثبات: فرض کنیم خط d در نقطه A بر دایره $C(O,R)$ مماس باشد. از نقطه O عمود OH را بر خط d رسم می کنیم.

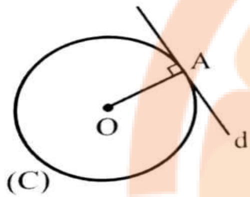
الف) اگر $OH>R$ باشد، خط d و دایره (C) متقاطع نیستند که با فرض مماس بودن خط d و دایره (C) تناقض دارد.

ب) اگر $OH<R$ باشد، خط d و دایره (C) در دو نقطه متقاطع می شوند که با فرض مماس بودن آن ها تناقض دارد.

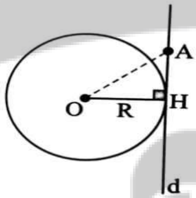
پ) اگر $OH = R$ باشد در این صورت H روی دایره (C) قرار دارد و چون H روی خط d نیز هست پس به جهت مماس بودن خط و دایره نتیجه می شود: H همان A است. بنابراین OA بر خط d عمود است.

چگونگی رسم خط مماس بر دایره در نقطه ی A بر دایره (به کمک خاصیت ۱)

مرکز دایره را به نقطه A وصل می کنیم . سپس در نقطه A خط d را عمود بر OA رسم می کنیم خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



خاصیت ۲ : اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره بر آن شعاع عمود باشد، آن گاه این خط بر دایره مماس است.



راه حل: در شکل روبه رو خط d در نقطه ی H بر شعاع OH عمود است باید ثابت کنیم خط d بر دایره مماس است.

برای این کار کافی است ثابت کنیم خط d و دایره ی C (O,R) فقط در نقطه ی H مشترک اند.

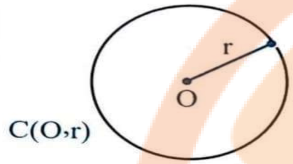
فرض کنید نقطه یa نقطه ای غیر از H و روی خط d باشد. چون مثلث OAH قائم الزاویه است و OA وتر آن است.

پس OA >OH یعنی R<O . بنابراین A خارج داریه است. در نتیجه خط d و دایره فقط در یک نقطه ی H مشترک هستند و این نتیجه می دهد که خط d بر دایره مماس است.

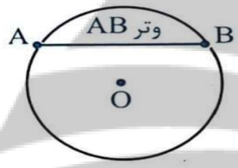
نتیجه خاصیت ۱ و ۲: در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

تعاریف و مفاهیم اولیه

الف) **شعاع دایره:** پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره است.

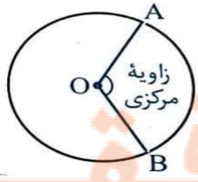


ب) **وتر دایره:** پاره خطی که دو نقطهٔ متمایز از دایره را به هم وصل می کند. به عبارت دیگر پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.



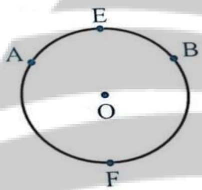
پ) **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره می گذارد.

ت) **زاویه مرکزی:** زاویه ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.

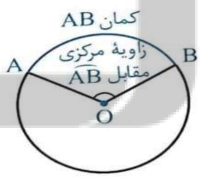


ث) **زاویه محاطی:** زاویه ای است که راس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.

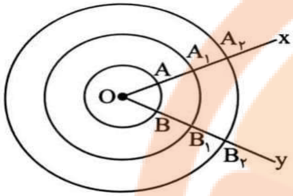
ج) **کمان:** دو نقطه A و B واقع بر یک دایره دو کمان AB را روی آن دایره مشخص می کند. در این حالت برای مشخص کردن هر یک از آنها از نقطه ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می شود. مانند کمان های AEB و AFB در شکل مقابل. معمولا منظور از AB کمان کوچکتر است.



چ) **اندازه کمان :** هر یک از زاویه های مرکزی یک کمان از دایره جدا می شود به آن کمان، کمان نظیر آن زاویه مرکزی گفته می شود. اندازه کمان نظیر هر زاویه مرکزی، همان اندازه زاوایه مقابل به آن کمان تعریف می شود که واحد آن درجه است.



تذکر: دقت کنید که نباید اندازه ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل رو به رو نگاه کنید.



در این شکل سه دایره ی هم مرکز رسم کرده ایم. با توجه به مطلب بالا، اندازه ی کمان ها AB، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند. یعنی

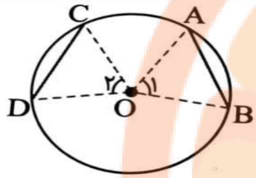
$$x\hat{O}y = AB = A_1B_1 = A_2B_2$$

اما طول این کمان ها با هم برابر نیستند.

طول کمال A_2B_2 > طول کمان A_1B_1 > طول کمان AB

خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (یا دو دایره به شعاع های مساوی) دو وتر برابرند اگر و تنها اگر کمان های نظیر آن ها برابر باشند.



$$AB = CD \Leftrightarrow AB = CD$$

راه حل اثبات دو بخش دارد.

بخش اول فرض می کنیم AB=CD و ثابت می کنیم $AB = CD$ (شکل را ببینید) از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می کنیم.

دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی سه ضلع هم نهشت اند:

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ AB = CD \end{cases}$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ در نتیجه $AB = CD$

بخش دوم فرض می کنیم $AB = CD$ و ثابت می کنیم $AB = CD$

چون دو کمان AB و CD با هم بابرند ،پس زاویه های مرکزی رو به رو با آن ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

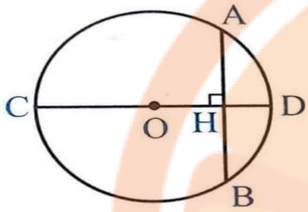
اکنون دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین آن ها با هم همنشت اند:

$$\begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{cases}$$

و در نتیجه $AB = CD$

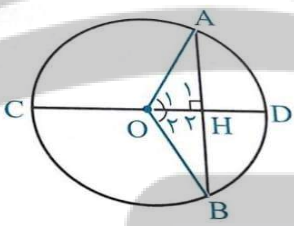
چگونه نصف شدن وتر به وسیله قطر دایره

۱ – در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.



$$\begin{cases} AD = BD \\ AC = BC \end{cases} , AH = BH \Rightarrow$$ قطر CD عمود بر وتر AB

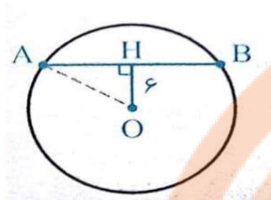
فرض : $CD \perp AB$ حکم : $AD = BD$ ، AH=BH



$$\left.\begin{aligned} OA &= OB = R \\ H_1 &= H_2 = 90^\circ \\ OH &= OH \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}$$

$$\begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} AD = BD$$

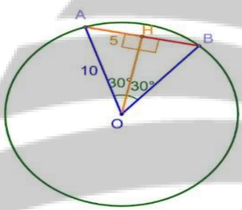
مثال: دایره $C(O,۱۰)$ داده شده است اگر فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۶ باشد طول وتر AB را بدست آورید.



پاسخ: در مثلث AHB از رابطه فیثاغورس استفاده می کنیم.

$$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} \Rightarrow ۱۰^{۲} = ۶^{۲} + AH^{۲} \Rightarrow AH^{۲} = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$
$$AB = ۲AH = ۱۶$$

مسئله : در دایره C(O.R) و $AB = ۶۰$ و AB = ۱۰ فاصله O از وتر AB را به دست آورید. (تمرین ۷ ص ۱۷)



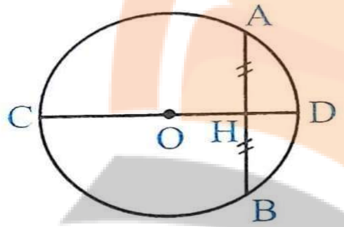
می دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است چون ۳ زاویه ۶۰ درجه دارد. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم ، قطر عمود بر وتر و وتر را نصف می کند بنابراین AH = ۵ پس در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OA^{۳} = OH^{۲} + AH^{۲} \rightarrow ۱۰^{۲} = OH^{۲} + ۵^{۲} \rightarrow OH^{۲} = ۷۵ \rightarrow OH = \sqrt{۷۵} \Rightarrow OH = ۵\sqrt{۳}$$

۲) در هر دایره اگر قطری از آن یک وتر را نصف کند. آن گاه بر آن وتر عمود است و کمان های نظیر وتر را نصف می کند.

فرض: AH=BH

حکم: AB: $CD \perp AB \ , \ \widehat{AD} = \widehat{BD}$



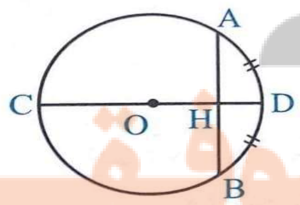
فرض: $AH = BH$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ و $CD \perp AB$

$$\left.\begin{matrix} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} H_۱ = H_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

۳) در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند.

$\widehat{AD} = \widehat{BD}$ یا $\widehat{AC} = \widehat{BC} \Rightarrow CD \perp AB \ , AH = BH$

فرض: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ حکم: $CD \perp AB$ و $AH = BH$

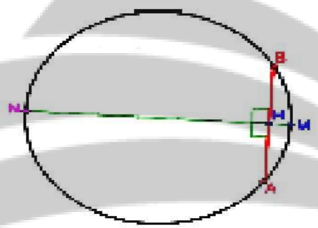


$$AD = BD \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}$$

$$\begin{cases} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases}$$

نتیجه: عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.

مثال: اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم،چگونه می توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



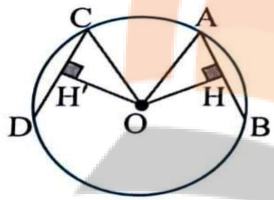
اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند با MN قطر عمود بر این وتر است.

فاصله ی دو وتر مساوی از مرکز دایره:

در یک دایره (یا دو دایره با شعاع های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن ها برابر باشد.

$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$

راه حل: فرض می کنیم AB =CD می خواهیم ثابت کنیم OH =OH' و بر عکس (شکل را ببینید)



از نقطه ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم می کنیم. در دو مثلث قائم الزاویه ی OAH و OCH' بنابر قضیه ی فیثاغورس.

$$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲}\ ,\ \ OC^{۲} = OH'^{۲} + CH'^{۲}$$

یعنی

$$AH = \frac{AB}{۲} \Rightarrow R^{۲} = OH^{۲} + \frac{AB^{۲}}{۴},\ \ CH' = \frac{CD}{۲}\ ,\ \ R^{۲} = OH'^{۲} + \frac{CD^{۲}}{۴}$$

چون AB = CD پس

$$OH^{۲} = R^{۲} - \frac{AB^{۲}}{۴} = R^{۲} - \frac{CD^{۲}}{۴} = OH'^{۲}$$

در نتیجه

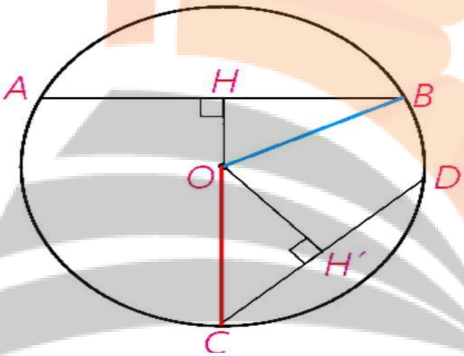
OH=OH'

با عمل بازگشتی می توان عکس این مطلب را ثابت کرد.

خواص وترهای نامساوی در دایره:

در یک دایره اگر دو وتر نامساوی باشند آن گاه وتری که بزرگ تر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس.

به عبارت دیگردر دایره C(O,R) – AB > CD اگر و تنها اگر OH<OH′ (OH و OH′ فاصله O از دو وتر AB و CD هستند) (تمرین ۸ صفحه ۱۸)



حل) از O به B و C وصل می کنیم

می دانیم اگر از مرکز دایره عمودی بر وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می کند.

فرض : AB> CD   حکم: OH< OH′

$$OB = OC = R \quad , BH = \frac{AB}{۲} , \; CH' = \frac{CD}{۲} \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBH} : H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow BH^{۲} = R^{۲} - OH^{۲}$$

$$\overset{\Delta}{OCH'} : H' = ۹۰^{\circ} \Rightarrow CH'^{۲} = R^{۲} - OH'^{۲}$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^{۲} > CH'^{۲}$$

$$\Rightarrow R^{۲} - OH^{۲} > R^{۲} - OH'^{۲} \Rightarrow -OH^{۲} > -OH'^{۲} \xrightarrow{\times(۱)} OH^{۲} < OH'^{۲} \xrightarrow[OH' > ۰]{OH > ۰}$$

$$OH < OH'$$

فرض : OH < OH'　　　　حکم : AB >CD

$$OB = OC = R \qquad ۲BH = AB \qquad ,۲CH = CD$$

$$\overset{\Delta}{OBH} \Rightarrow OH^{۲} = R^{۲} - BH^{۲}$$

$$\overset{\Delta}{OCH'} : H' = ۹۰^{\circ} \Rightarrow OH'^{۲} < R^{۲} - CH'^{۲}$$

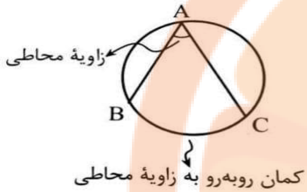
$$OH < OH' \Rightarrow R^{۲} - BH^{۲} < R^{۲} - CH'^{۲}$$

$$\Rightarrow -BH^{۲} < -CH'^{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} BH^{۲} > CH'^{۲} \xrightarrow[CH' > ۰]{BH > ۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$$

زاویه محاطی و اندازه آن

زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

شکل زیر زاویه محاطی BAC را نشان می دهد..

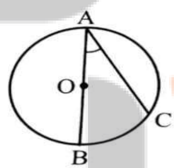


اندازه زایه محاطی :

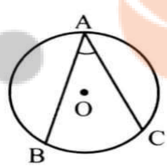
اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان روبه رو آن است یعنی در هر سه حالت زیر داریم:

$$\hat{A} = \frac{BC}{۲}$$

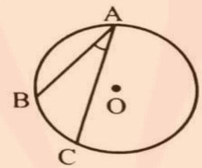
حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی وتری ازدایره باشد



حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز قرار باشند.

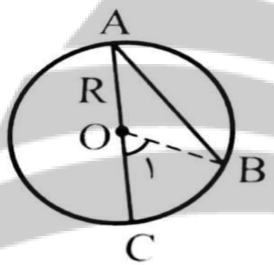


حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز باشند.



اثبات: این قضیه را در سه حالت اثبات می کنیم:

حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد.



از O به B وصل می کنیم تا مثلث متساوی الساقین OAB(OA = OB) ایجاد شود. یعنی زاویه محاور ساق با هم برابرند $\hat{A} = \hat{B}$ بنابراین:

از طرفی $\hat{O}$ زاویه مرکزی است، و هر زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است یعنی

$$\hat{O}_۱ = BC \qquad (۲)$$

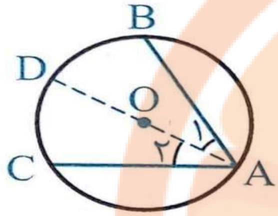
طبق (۱) و (۲) داریم

$$\widehat{A} = \frac{BC}{۲}$$

یادآوری: هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.

حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد.

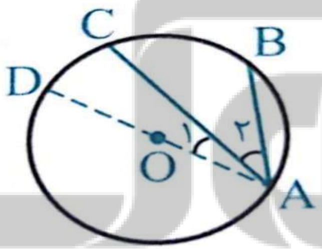
ابتدا مطابق شکل قطری از دایره را که از رأس A می گذرد، با توجه به حالت اول داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_{۱} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \\ \hat{A}_{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{\hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۲}}_{\hat{A}} = \underbrace{\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{۲}}_{\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \Rightarrow \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده باشند.

قطر AD را رسم می کنیم طبق حالت اول داریم:

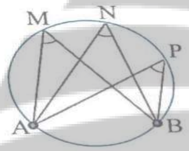


$$\left.\begin{aligned}\overset{\frown}{A} &= \frac{BD}{۲}\\ \overset{\frown}{A}_{۱} &= \frac{DC}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}} \underbrace{\overset{\frown}{A} + \overset{\frown}{A}_{۱}}_{\hat{A}_{۲}} = \underbrace{\frac{BD}{۲} + \frac{DC}{۲}}_{\frac{BC}{۲}} \Rightarrow \hat{A}_{۲} = \frac{BC}{۲}$$

نتیجه:

۱)در هر دایره اندازی زاویه های محاطی روبه روی یک کمان، با هم برابرند.

در شکل رو به رو اندازه ی زاویه های M , N و P با هم برابر است. چون همگی مقابل به یک کمان هستند.

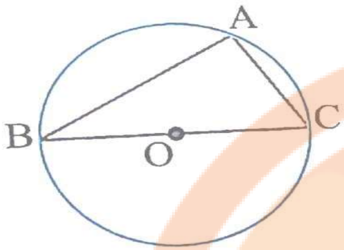


$$M = \hat{N} = \hat{P} = \frac{۱}{۲}AB$$

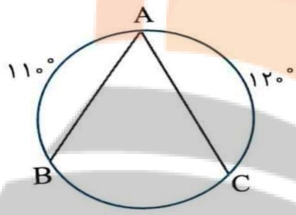
۲) زاویه ی محاطی رو به رو به قطر دایره ۹۰° است. چون قطر دایره، دیاره را به دو کمان ۹۰ درجه تقسیم می کند.

به عبارت دیگر در شکل رو به رو اگر BC قطر دایره باشد، آن گاه

$$BAC = \frac{BC}{۲} = \frac{۱۸۰^{\circ}}{۲} = ۹۰^{\circ}$$



مثال: در دایره ی شکل مقابل، اندازه ی زاویه A را به دست آورید.



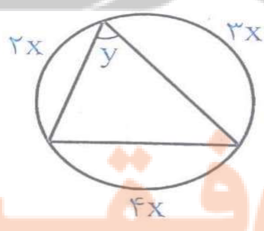
راه حل: دایره در حالت کلی کمان با اندازه ی ۳۶۰ درجه است. از این مطلب استفاده کرده و اندازه ی کمان BC را به دست آوریم.

$$AB + AC + BC = ۳۶۰° \Rightarrow ۱۱۰° + ۱۲۰° + BC = ۳۶۰° \Rightarrow BC = ۱۳۰°$$

از طرفی می دانیم اندازه ی یک زاویه ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{A} = \frac{BC}{۲} = \frac{۱۳۰°}{۲} = ۶۵°$$

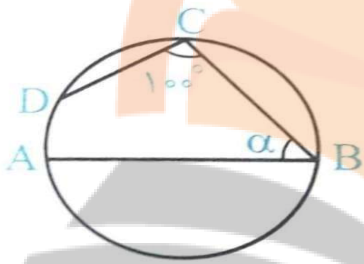
در شکل مقابل X و y را محاسبه کنید.



$$2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow 9x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \quad , y = \frac{4x}{2} = 2x = 80^\circ$$

تست: در دایره مقابل AB قطر و CD = BC است. مقدار α چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۵ ۳) ۶۰ ۴) ۵۵



پاسخ:

زاویه محاطی $B\hat{C}D = \frac{BAD}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{AD + 180^\circ}{2} \Rightarrow AD = 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$

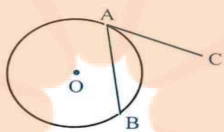
$$AD + CD + BC = 180^\circ \xrightarrow{CD=BC} 20 + 2CD = 180^\circ \Rightarrow CD = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$$

زاویه محاطی $\alpha = \frac{ADC}{2} = \frac{AD + CD}{2} = \frac{20^\circ + 80^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow$ گزینه (۱) درست است

زاویه ظلی و اندازه آن

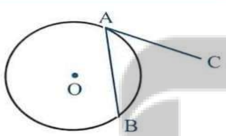
زاویه ظلی: زاویه ای است که راس آن روی دایره می باشد یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است.

مانند BAC در شکل مقابل:



قضیه: اندازه هر زاویه ظلی، برابر نصف کمان رو به روی آن است. یعنی در شکل مقابل:

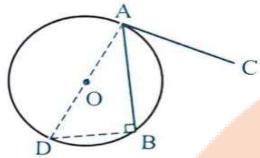
$$C\hat{A}B = \frac{AB}{۲}$$



اثبات روش اول: $C\overset{\Delta}{A}B$ زاویه ظلی است: فرض

$C\hat{A}B = \frac{AB}{۲}$:حکم

قطر AD را رسم می کنیم.



سپس از D به B وصل می کنیم. B زاویه محاطی مقابل به قطر است. در نتیجه $\hat{B} = \frac{AD}{۲} = ۹۰$

بنابر این:

$$A\hat{D}B + D\hat{A}B = ۹۰^\circ \qquad (۱)$$

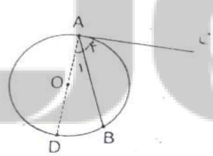
$$D\hat{A}B + B\hat{A}C = ۹۰^\circ \qquad (۲)$$

چون خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره (OA) عمود است: پس از (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = A\hat{D}B \\ A\hat{D}B = \frac{AB}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{AB}{۲}$$

اثبات به روش دوم

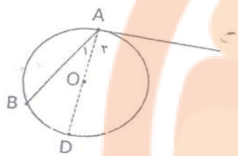
حالت اول)اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:



شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}C = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}C = \frac{۱}{۲}ABD \\ A_۱ = \frac{۱}{۲}BD \end{array}\right\} \Rightarrow D\hat{A}C - A_۱ = \frac{۱}{۲}\left(AD - BD\right) \Rightarrow A_۲ = \frac{۱}{۲}AB$$

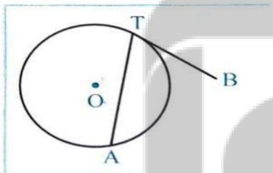
حالت دوم) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:



$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}C = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}C = \frac{۱}{۲}AD \\ \hat{A}_۱ = \frac{۱}{۲}BD \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{D\hat{A}C + \hat{A}_۱}_{\hat{A}} = \frac{۱}{۲}\underbrace{\left(AD + BD\right)}_{A\hat{D}B} \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}ADB$$

مثال: اگر اندازه زاویه ظلی ATB برابر $(۲\alpha - ۶)^\circ$ و اندازه کمان AT برابر $(۳\alpha + ۳۲)^\circ$ باشد،

مقدار α و اندازه زاویه ATB را به دست آورید.



پاسخ: چون اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان $A\hat{T}B = \frac{AT}{۲}$

مقابل است ، داریم:

$$۲\alpha - ۶ = \frac{۳\alpha + ۳۳}{۲} \Rightarrow ۴\alpha - ۱۲ = ۳\alpha + ۳۳ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

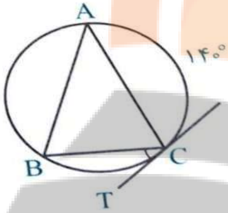
طبق فرض $A\hat{T}B = (۲\alpha - ۶)^{\circ}$, $AT = (۳\alpha + ۳۳)^{\circ}$

بنابراین $2\alpha - 6 = \frac{3\alpha + 33}{2} \Rightarrow 4\alpha - 12 = 3\alpha + 33 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$

$\Rightarrow A\hat{T}B = (۲ \times ۴۵ - ۶) = ۸۴^{\circ}$

مثال: در شکل رو به رو CT . AB = AC مماس بر دایره در نقطه C و $AC = ۱۴۰$ است اندازه زاویه

BCT را بیابید.



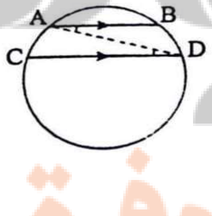
حل : برای بدست آوردن زاویه BCT کافی است اندازه کمال BC را به دست آوریم.

طبق فرض $AB = AC \Rightarrow AB = AC \xrightarrow{AC=۱۴۰^{\circ}} AB = AC = ۱۴$

$\Rightarrow BC = ۳۶۰ - (AB + AC) = ۳۶۰^{\circ} - ۲۸۰^{\circ}$

(ظلی) $B\hat{C}T = \frac{BC}{۲} = \frac{۸۰^{\circ}}{۲} = ۴۰^{\circ}$

مسئله: ثابت کنید کمان های محصور بین دو وتر موازی از یک دایره برابرند



راه حل: در شکل بالا AB||CD می خواهیم ثابت کنیم.

$AC = BD$

وتر AD را رسم می کنیم چون AD||CD و AD مورب است پس:

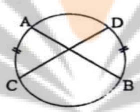
$$A\hat{D}C = D\hat{A}B$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲}BD$$

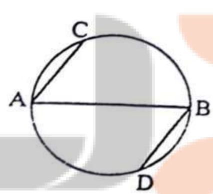
پس $AC = BD$

تذکر: عکس مسئله ی بالا لزوما درست نیست یعنی در شکل رو به رو دو کمان AC , BD با هم برابرند اما وترهای AB , CD موازی نیستند.



مسئله : در شکل زیر AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.

ثابت کنید AC = BD (تمرین ۵ صفحه ۱۷)



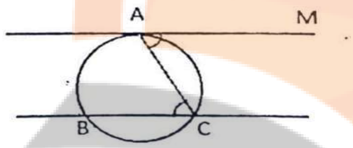
راه حل : چون AB قطر دایره است، پس (۱) $AC + BC = BD + AD = ۱۸۰^\circ$

از طرف دیگر کمان های محصور بین دو وتر موازی مساوی اند، پس

$BC = AD \qquad (۲)$

با کم کردن تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $AC = BD$ می دانیم وترهای نظیر کمان های برابر در یک دایره با هم مساوی اند پس AD = BD

مسئله : ثابت کنید که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره با هم برابرند(تمرین ۱ صفحه ۱۷)



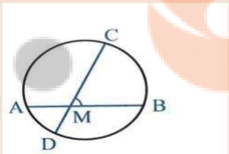
در شکل بالا بنا بر قضیه خطوط موازی $MAC = BCA$

$$\left.\begin{array}{l} MAC = \frac{۱}{۲} AC \\ ACB = \frac{۱}{۲} AB \end{array}\right\} \xrightarrow{MAC = ACB} \frac{۱}{۲} AC = \frac{۱}{۲} AB \Rightarrow AC = AB$$

زاویه بین دو وتر در دایره

۱) اگر مطابق شکل دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند ، آن گاه

$$A\hat{M}D = B\hat{M}C = \frac{AD + BC}{۲}$$



اثبات:

AB , CD دو وتر متقاطع از دایره : فرض

حکم : $A\hat{M}D = \dfrac{AD + BC}{۲}$

از نقطه C خطی موازی با وتر AB رسم می کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

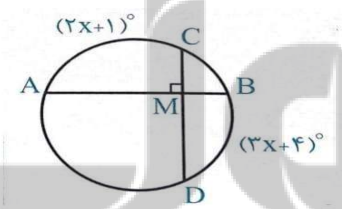
$E\hat{C}D$ یک زاویه محاطی است. بنابراین $E\hat{C}D = \dfrac{ED}{۲} = \dfrac{EA + AD}{۲}$

قبلا ثابت کردیم که کمان های محصور بین دو وتر موازی برابرند یعنی:

$AB \parallel EC \Rightarrow AE = BC$ در نتیجه

$$E\hat{C}D = \frac{BC + AD}{۲} \Rightarrow A\hat{M}D = \frac{BC + AD}{۲}$$

مثال: مقدار x را در شکل مقابل به دست آورید.

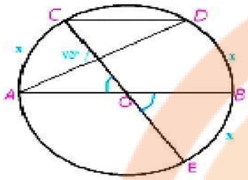


پاسخ

$$C\hat{M}A = \frac{AC + BD}{۲} \xrightarrow{C\hat{M}A = ۹۰^\circ} ۹۰^\circ = \frac{AC + BD}{۲} \Rightarrow \frac{(۲x + ۱)^\circ + (۲x + ۴)^\circ}{۲}$$

$$= ۹۰^\circ \Rightarrow ۵x + ۵ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۵^\circ$$

مسئله : در شکل O مرکز نیم دایره است و AB||CD اندازه کمان CD را بدست آورید.

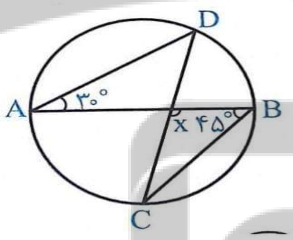


$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$CD = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow CD = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

تست : در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۰



پاسخ:

$$\hat{A} = \frac{BD}{۲} \Rightarrow BD = ۲ \times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

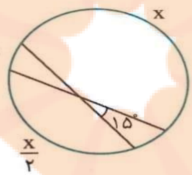
زاویه محاطی $\hat{B} = \frac{AC}{۲} \Rightarrow AC = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$

$$AD + BC + AC + BD = ۳۶۰^\circ \Rightarrow AD + BC + ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow AD + BC = ۲۱۰$$

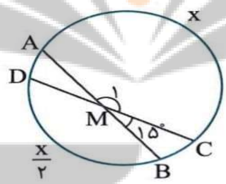
$$x = \frac{AD + BC}{۲} = \frac{۲۱۰^\circ}{۲} = ۱۰۵^\circ \Rightarrow$$ گزینه (۳) درست است.

تست : در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۳۰ ۴) ۲۴۰



پاسخ: از نماد گذاری شکل رو به رو استفاده می کنیم.



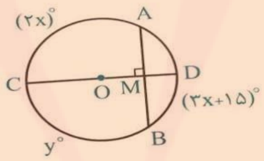
توجه کنید که $\hat{M}_{۱} = ۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۶۵^\circ$

از طرف دیگر $\hat{M}_{۱} = \frac{AC + BD}{۲}$

در نتیجه: $۱۶۵^\circ = \frac{x + \frac{x}{۲}}{۲}$

بنابر این $x = ۲۲۰^\circ$ بنابر این گزینه (۲) درست است.

مثال: در شکل مقابل قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $AC = (۲x)^\circ$ و $BC = y^\circ$ آن گاه X و y رامحاسبه کنید.



حل

$$\hat{M} = \frac{AC + BD}{۲} \Rightarrow ۹۰^\circ = \frac{(۲x)^\circ + (۳x + ۱۵)^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x = ۱۶۵^\circ \Rightarrow x = ۳۳^\circ$$

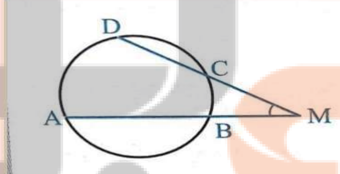
$$y = BC'$$

اما $BC = AC$ (به دلیل آن که قطر CD وتر AB و کمان های نظیر آن را نصف می کند) بنابراین:

$$y = ۲x = ۶۶^\circ$$

۲) اگر مطابق شکل امتداد دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کنند آنگاه

$$\hat{M} = \frac{AD + BC}{۲}$$

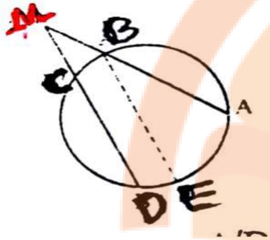


اثبات :

M نقطه تقاطع امتداد دو وتر AB , DC بیرون از دایره : فرض

حکم: $\hat{M} = \frac{AD + BC}{۲}$

از نقطهB خطی موازی با وتر CDرسم می کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.



$$A'D \parallel BB' \xrightarrow{M \quad A \quad \text{ورب مّ}} A\overset{\frown}{M}B = A\overset{\frown}{A'}D$$

$$BE \parallel DC \xrightarrow{M \quad A \quad \text{ورب مّ}} \overset{\frown}{M} = A\hat{B}E$$

زاویه ABEمحاطی است بنابراین

$$AA'D = \frac{AD}{۲} = \frac{AB - BD}{۲}$$

$$ABE = \frac{AE}{۲} = \frac{AD - DE}{۲}$$

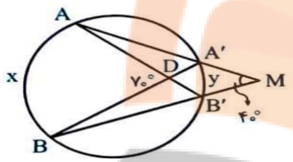
قبلا ثابت کردیم کمان های محصور بین دو وتر موازی برابرند پس

$$A'D \,||\, B'B \Rightarrow A'B = BD$$

$$BE \parallel DC \Rightarrow BC = DE$$

$$A\hat{B}E = \frac{AD - BC}{۲} \Rightarrow M = \frac{AD - BC}{۲}$$

مثال: مقادیر x و y را در شکل روبه رو تعیین کنید.



پاسخ:

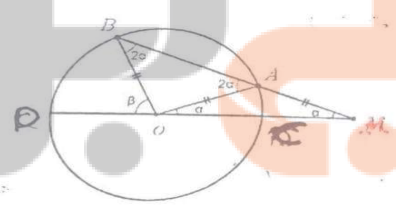
$$A\hat{D}B = \frac{x+y}{2} \to 70^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x+y = 140^\circ, \hat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow$$

$$40^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x - y = 80^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = ۱۴۰^\circ \\ x - y = ۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۱۰^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ \end{cases}$$

مسئله: دایره C(O,R) مفروض است از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسمی کرده ایم که دایره

را در دو نقطه A و B قطع کرده است و MA = R نشان دهید $\beta = ۳\alpha$



طبق فرض OA = MA = R بنابر این مثلث MAO متساوی الساقین است. پس $A\hat{O}M = \hat{M} = \alpha$

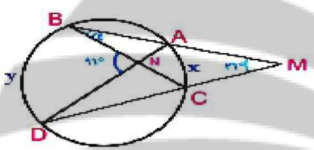
(مرکزی) $A\hat{O}M = AC = \alpha$ (۱)

(مرکزی) $B\hat{O}D = BD = \beta$ (۲)

از طرفی

$$\hat{M} = \frac{BD - AC}{۲} \xrightarrow[M=\alpha]{\text{ق ۱.۲ ب ط}} \alpha = \frac{\beta - \alpha}{۲} \to \beta = ۳\alpha$$

مثال : در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

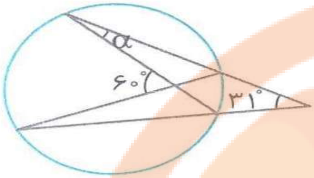


$$\hat{M} = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۳۱^\circ = y - x$$

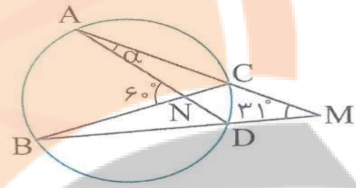
$$\hat{N} = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۹۱^\circ = y + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲^\circ \\ y + x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y - ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

مسئله: در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی αرا به دست آورید.



راه حل: از نماد گذاری شکل مقابل استفاده می کنیم.



توجه کنید که

$$A\hat{M}B = ۳۱^\circ = \frac{AB - CD}{۲}$$

و

$$A\hat{N}B = ۶۰^\circ = \frac{AB + CD}{۲}$$

بنابر این

$$\begin{cases} AB - CD = ۶۲^\circ \\ AB + CD = ۱۲۰^\circ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا به دست می آید.

$$CD = ۲۹^\circ$$

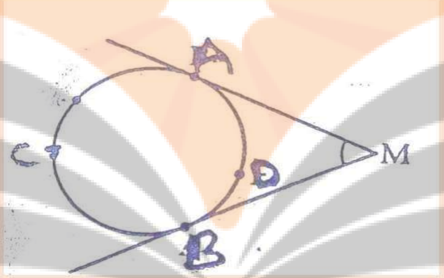
زاویه ی CAD محاطی است.پس

$$C\hat{A}D = \alpha = \frac{CD}{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲۹°$$

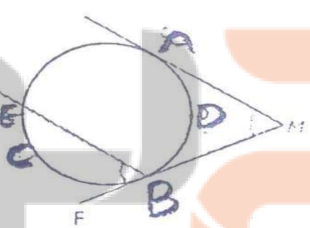
زاویه بین دو مماس

اگر مطابق شکل از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شود، آن گاه زاویه بین دو مماس برابر است

$$\hat{M} = \frac{ACB - ADB}{۲}$$



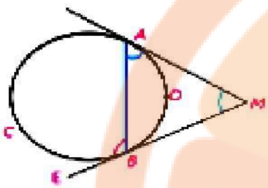
اثبات: راه حل اول : از B خطی موازی AM رسم می کنیم تا دایره را از نقطه ی E قطع کند.



بنابر قضیه خطوط موازی $AMB = EBF$

$$AMB = EBF = \frac{FB}{2} = \frac{ACB - AE}{} \xrightarrow{AE=ADB} AMB\,EBF = \frac{ACB - ADB}{2}$$

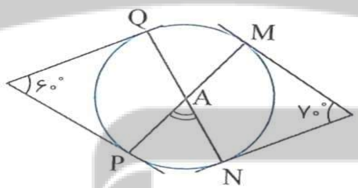
راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث AMB زاویه $E\hat{B}A$ خارجی است:



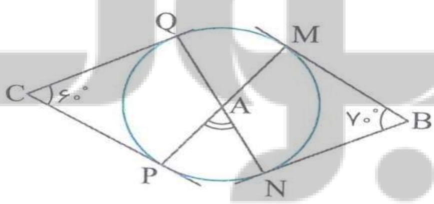
$$E\hat{B}A = M\hat{A}B + \hat{M} = E\hat{B}A - M\hat{A}B \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2}ACB - \frac{1}{2}ADB \Rightarrow \hat{M} = \frac{\left(ACB - ADB\right)}{2}$$

ظلی ظلی

مثال: در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی A چند درجه است؟



راه حل : از نماد گذاری شکل مقابل استفاده می کنیم .



با توجه به مسئله ی قبل می توان نوشت:

$$M\widehat{B}N = ۷۰^\circ = \frac{MQN - MN}{۲}$$

$$= \frac{MQ + OP + PN - MN}{۲}$$

همچنین:

$$Q\widehat{C}P = ۶۰^\circ = \frac{QMP - PQ}{۲} = \frac{QM + MN + NP - PQ}{۲}$$

با جمع کردن این دو تساوی به دست می آید

$$۱۳۰^\circ = \frac{۲MQ + ۲NP}{۲}$$

یعنی

$$MQ + NP = ۱۳۰^\circ$$

اکنون می توان نوشت

$$P\widehat{A}N = \frac{MQ + NP}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ}{۲} = ۶۵^\circ$$

مثال: در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است. (تمرین ۳ صفحه ۱۷)

$$۷۰° = \frac{(y + z + t) - x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰° = (y + z + t) - z$$

$$۸۰° = \frac{(y + x + t)}{۲} \Rightarrow ۱۸۰° = (y + x + ۱) - z$$

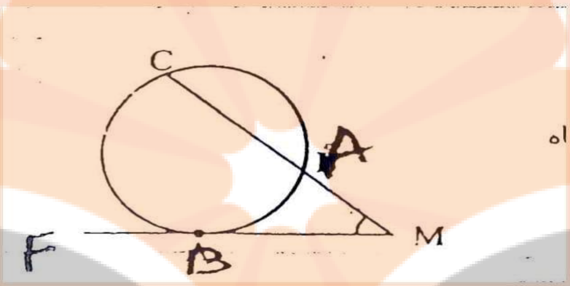
$$\left\{ \begin{array}{l} ۱۴۰° = y + z + t - x \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow ۳۰۰° = ۲(y - t) \Rightarrow y + t = ۱۵۰° \\ ۱۶۰° = y + x + t - z \end{array} \right.$$

$$\widehat{A} = \frac{y + t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰°}{۲} = ۷۵°$$

زاویه بین مماس و امتداد یک وتر

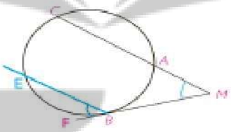
اگر مطابق شکل، امتداد وتر BC و خط مماس بر دایره در نقطه A یکدگیر را در نقطه M قطع کنند،

آن گاه $\widehat{M} = \dfrac{BC - AB}{۲}$



(تمرین ۱ صفحه ۱۷)

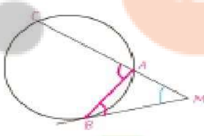
اثبات راه اول: از نقطه ی B موازی MCخطی رسم می کنیم تا در نقطه ی E دایره ای رسم کنیم.



بنا بر قضیه خطوط موازی

$$CMB = EBF = \frac{EB}{۲} = \frac{BC - CE}{۲} \xrightarrow{CE = AB} CMB = EBF = \frac{BC - AB}{۲}$$

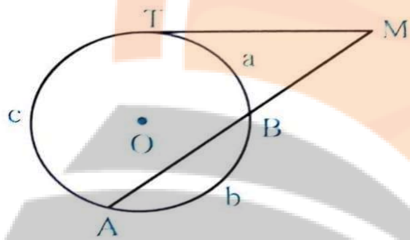
راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث AMB زاویه $B\widehat{A}C$ خارجی است پس:



$$\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{MBA} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{MBC} \Rightarrow \hat{M} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC} - \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \hat{M} \; \frac{\left(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}\right)}{۲}$$

مثال: خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطع اند.

فرض $\overset{\frown}{TB} = a$, $\overset{\frown}{BA} = b$, $\overset{\frown}{AT} = c$ و $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۵}$ اندازه زاویه M را تعیین کنید.



حل) طبق تناسب a , b و c داریم:

$$\begin{aligned} b &= ۴a \\ c &= ۵a \end{aligned} \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$a + b + c = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{(۱)} a - ۴a + ۵a = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۱۰a = ۳۶۰^\circ \Rightarrow a = ۳۶۰^\circ \Rightarrow c = ۱۸۰^\circ$$

بنا $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TA} - \overset{\frown}{TB}}{۲} = \frac{c - a}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ}{۲} = \frac{۱۴۴^\circ}{۲} = ۷۲^\circ$

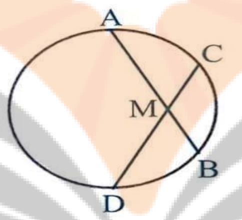
درس دوم :روابط طولی در دایره

الف) **وترها ی متقاطع**

در وتر AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطه ی M قع کنند می خواهیم به بررسی روابط بین اندازه ی پاره خط های حاصل می پردازیم.

قضیه ۱: اگر دو وتر CD , AB در داخل دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه

$$AM \,.\, MB = MC.MD$$



اثبات:

A را به D و B را به

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.