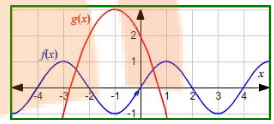
جزوات تشریحی

ریاضی یازدهم تجربی

دکتر علیرضا نورالدینی

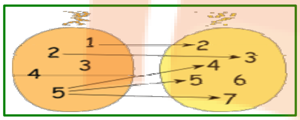


هندسه تحلیلی و جبر ۲

هندسه تحلیلی، معادله درجه دوم، نمودار تابع درجه دو، معادلات گویا و اصم

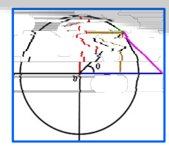
هندسه ۳۶

ترسیم هندسی، تناسب و خواص آن، استدلال ریاضی، تشابه مثلث‌ها



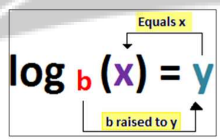
تـــابع ۷۰

مقدمات توابع، انواعی از تابع، توابع یک به یک و وارون، جبر توابع



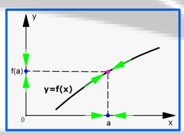
مثلثات ۹۸

واحدهای زاویه، روابط مثلثاتی، توابع مثلثاتی



تابع نمایی و لگاریتم ۱۱۹

تابع نمایی، لگاریتم، خواص لگاریتم، کاربرد لگاریتم



حد و پیوستگی ۱۴۳

فرآیند میل کردن، محاسبه حد تابع، حدهای مبهم، پیوستگی

آمار و احتمال ۱۶۳

مقدمات احتمال، احتمال شرطی، آمار توصیفی

یادآوری:

معادله‌ی هر خط بر حسب x و y از درجه‌ی ۱ یا صفر است، مانند:

$$2x+y=-3 \qquad \text{یا} \qquad x+2=1 \qquad \text{یا} \qquad 2y=-3$$

یک کار معمول در مورد هر خط نمایش هندسی آن است:

رسم خط:

چون از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد:

با تعیین مختصات دو نقطه از هر خط، آن خط رسم می‌شود.

مثال: خط به معادله‌ی $y=-2x+3$ را رسم کنید.

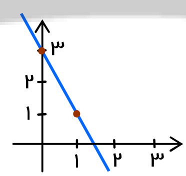
پاسخ

جای x دو عدد دلخواه قرار داده و y را مشخص می‌کنیم تا مختصات دو نقطه معلوم شود:

$$x=0: \quad y=-2(0)+3=3$$
$$x=1: \quad y=-2(1)+3=1$$

$\Rightarrow$

x	0	1
y	3	1



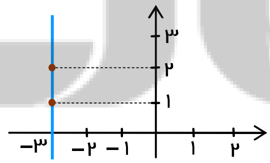
مثال: خطهای $x=-3$ و $2y-4=0$ را رسم کنید.

پاسخ

در معادله‌ی $x=-3$ حرف y وجود ندارد، یعنی:

مقدار x همیشه فقط -3 بوده و مقدار y هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد.

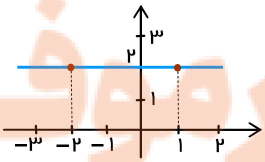
برای مثال، نقاط $(-3,1)$ و $(-3,2)$ روی خط قرار داشته و خط رسم می‌شود:



به صورت مشابه، در معادله‌ی $2y-4=0$ داریم:

$$2y-4=0 \rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

در معادله‌ی $y=2$ مقدار x هر عددی می‌تواند باشد، ولی y فقط ۲ است:



نقاط $(-2,2)$ و $(1,2)$ روی خط هستند.

شیب خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت (یعنی: تقسیم) تغییر عرض‌ها به تغییر طول‌ها را شیب آن خط می‌گویند.

یعنی:

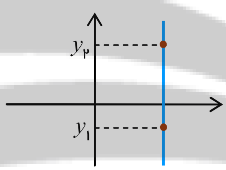
اگر دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط داده شوند، شیب خط چنین بدست می‌آید:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

توجه کنید:

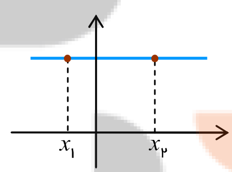
موارد زیر مهم هستند:

- اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_1 = x_2$، مقدار $m = \frac{y_2 - y_1}{0}$ تعریف نشده است. این حالت فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:



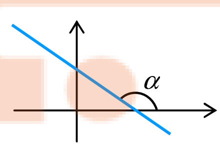
پس: در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

- اگر عرض‌ها برابر باشند: $y_1 = y_2$، آنگاه مقدار $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خط‌های افقی اتفاق می‌افتد:

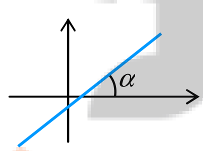


پس: شیب هر خط افقی برابر صفر است.

- شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:



شیب منفی $m = \tan\alpha$



شیب مثبت $m = \tan\alpha$

نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

مثال: خطی از دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۰,۲)$ عبور کرده است. شیب آن را بنویسید.

پاسخ

طبق فرمول شیب خط می‌نویسیم:

$$(\underbrace{۲}_{x_۱},\underbrace{-۱}_{y_۱}) \ , \ (\underbrace{۰}_{x_۲},\underbrace{۲}_{y_۲}) \Rightarrow \quad m=\frac{۲-(-۱)}{۰-۲}=\frac{۳}{-۲} \ \Rightarrow \ m=-\frac{۳}{۲}$$

مثال: خطی محورهای مختصات را در طول ۲ و عرض -۳ قطع کرده است. شیب آن را بنویسید.

پاسخ

نقطه‌ی به طول ۲ روی محور طول‌ها یعنی $(۲,۰)$ و نقطه‌ی با عرض -۳ روی محور عرض یعنی $(۰,-۳)$. پس شیب چنین است:

$$m=\frac{۰-(-۳)}{۲-۰}=\frac{۳}{۲} \ \Rightarrow \ m=\frac{۳}{۲}$$

مثال: خط l به معادله‌ی $l: \ ۳x-y=۱$ بوده و خط l' با آن موازی است. شیب l' را تعیین کنید.

پاسخ

شیب خط l را توسط انتخاب دو نقطه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$۳x-y=۱ \rightarrow \ y=۳x-۱ \begin{cases} x=۰ \rightarrow \ y=۳(۰)-۱=-۱ \rightarrow \ (۰,-۱) \\ x=۱ \rightarrow \ y=۳(۱)-۱=۲ \rightarrow \ (۱,۲) \end{cases} \Rightarrow \ m=\frac{۲-(-۱)}{۱-۰}=۳$$

چون $m_l=۳$ است، پس شیب خط موازی آن l' هم برابر ۳ خواهد بود.

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب: m و **مختصات یک نقطه روی آن:** $(x_۰,y_۰)$

با این اطلاعات:

معادله‌ی خط چنین نوشته خواهد شد:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)$$

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۰,۲)$ را بنویسید.

پاسخ

شیب خط را مشخص می‌کنیم:

$$m=\frac{۲-(-۱)}{۰-۲}=\frac{۳}{-۲} \ \Rightarrow \ m=-\frac{۳}{۲}$$

توسط مختصات یکی از نقاط، معادله نوشته می‌شود:

$$(\underbrace{۰}_{x_۰},\underbrace{۲}_{y_۰}),\ m=-\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ y-۲=-\frac{۳}{۲}(x-۰)$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲y-۴=-۳x\ \Rightarrow\ ۲y+۳x=۴$$

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۲,۰)$ را بنویسید.

پاسخ

توجه کنید:

طول‌های دو نقطه برابر است، یعنی خط عمودی بوده و شیب آن تعریف نشده است. اکنون:

چون خط عمودی است و باید از نقطه‌ای به طول ۲ عبور کند، معادله‌اش $x=۲$ است.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $(-۳,۱)$ گذشته و محور افقی را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

پاسخ

نقطه‌ی روی محور افقی $(۲,۰)$ است. پس مانند نمونه‌های قبلی: $m=\frac{۰-۱}{۲-(-۳)}=-\frac{۱}{۵}$ است و در نتیجه:

$$y-۰=-\frac{۱}{۵}(x-۲)\ \xrightarrow{\times ۵}\ ۵y=-x+۲\ \Rightarrow\ x+۵y=۲$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که با خط $l:\ ۳x-y=۱$ موازی بوده و از مبدأ عبور کند.

پاسخ

در یک مثال قبل‌تر دیدیم که شیب خط l برابر ۳ است و در نتیجه:

خط مورد نظر نیز دارای شیب ۳ بوده و باید از مبدأ $(۰,۰)$ عبور کند.

پس معادله‌ی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y-۰=۳(x-۰)\ \Rightarrow\ y=۳x$$

برخورد خط با محورها:

دو عدد مهم در مورد خط‌ها را بیان می‌کنیم:

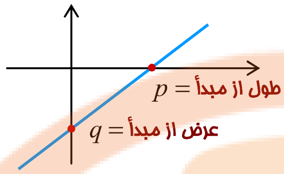
- **عرض از مبدأ:**

  این عدد عرض نقطه‌ای است که خط در آن محور y را قطع کرده.

- **طول از مبدأ:**

  این عدد طول نقطه‌ای است که خط در آن محور x را قطع کرده.

هر دو مقدار در شکل دیده می‌شوند:



روش محاسبه:

در معادله قرار می‌دهیم: $y=0$ $\Leftarrow$ جوابِ x، طول از مبدأ خط است.

در معادله قرار می‌دهیم: $x=0$ $\Leftarrow$ جوابِ y، عرض از مبدأ خط است.

مثال: عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $l: -5x+2y=4$ را مشخص کنید.

پاسخ

طبق روش بالا:

عرض از مبدأ $\quad x=0: \quad -5(0)+2y=4 \rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$

طول از مبدأ $\quad y=0: \quad -5x+2(0)=4 \rightarrow -5x=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{5}$

توجه کنید:

خط افقی طول از مبدأ نداشته و همچنین خط عمودی عرض از مبدأ ندارد.

تعیین شیب:

اگر شیب خط m و عرض از مبدأ خط، عدد q را داشته باشیم، معادله‌ی خط یکباره نوشته می‌شود:

$$y=mx+q$$

نتیجه:

اگر معادله‌ی خط را به صورت منظم بنویسیم، یعنی:

y با ضریب $+1$ در یک سمت و بقیه‌ی عبارات در سمت دیگر معادله باشند؛

در این صورت:

همیشه «ضریب x برابر شیب خط» و «عدد ثابت برابر عرض از مبدأ» خواهد شد.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $3x-6y=1$ را بیابید.

پاسخ

باید: y را در سمت چپ تنها کرده و ضریب آن به $+1$ تبدیل گردد:

$$۳x-۶y=۱ \rightarrow -۶y=-۳x+۱ \xrightarrow{\div(-۶)} y=\frac{-۳}{-۶}x+\frac{۱}{-۶}$$

معادله به صورت $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۶}$ ساده می‌شود و بنابراین: $m=\frac{۱}{۲}$ شیب خط و $q=-\frac{۱}{۶}$ عرض از مبدأ خط است.

مثال: معادله‌ی خطی موازی خط $l:\ -۲x-y=۳$ و دارای عرض از مبدأ -۵ را بنویسید.

پاسخ

شیب خط l را مشخص می‌کنیم:

$$-۲x-y=۳ \rightarrow -y=۲x+۳ \xrightarrow{\div(-۱)} y=-۲x-۳$$

شیب این خط و در نتیجه شیب خط مورد نظر $m=-۲$ بوده و با داشتن $q=-۵$ معادله‌ی آن نوشته می‌شود:

$$y=-۲x-۵$$

مثال: خطی گذرا از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ و موازی خط $l:\ ۳x-y=۱$، محور x را با کدام طول قطع می‌کند.

پاسخ

شیب خط l برابر $+۳$ است و در نتیجه خط مورد نظر هم شیب $+۳$ دارد. معادله‌ی آن:

$$y-۲=۳(x-(-۱)) \Rightarrow y=۳x+۵$$

در نقطه‌ی تقاطع خط با محور طول، باید $y=۰$ باشد:

$$y=۰:\ ۰=۳x+۵ \rightarrow ۳x=-۵ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

خط‌های عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m\times m'=-۱ \Rightarrow m'=-\frac{۱}{m}$$

به عبارت دیگر:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا شیب خط عمود: m' حاصل شود.

مثال: (از کتاب) خط l معادله‌ی $۲y-۳x=۱$ و خط d با عرض از مبدأ ۵ به معادله‌ی $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط d با خط l موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمود هستند؟

پاسخ

الف) چون $m_l=\frac{۳}{۲}$ و $m_d=m$ است، باید $m=\frac{۳}{۲}$ باشد.

ب) طبق شرط عمود بودن خط‌ها:

$$m_l \times m_d = -1 \to \frac{3}{2} \times m = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

مثال: خطی گذرنده از نقطه‌ی $(1,-2)$ و عمود بر خط $2y + x = 1$، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند.

پاسخ

شیب خط داده شده برابر $m = -\frac{1}{2}$ بدست می‌آید و در نتیجه شیب خط عمود بر آن چنین محاسبه می‌شود:

$$-\frac{1}{2} \times m' = -1 \to m' = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \to m' = 2$$

پس معادله‌ی آن خط با استفاده از نقطه‌ی داده شده نوشته می‌شود:

$$y - (-2) = 2(x-1) \to y + 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 4$$

در نقطه‌ی تقاطع این خط با محور عرض، باید $x = 0$ باشد:

$$x = 0: \quad y = 2(0) - 4 \Rightarrow y = -4$$

مثال: مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(5,1)$ و $B(10,4)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ضلع AB را بنویسید.

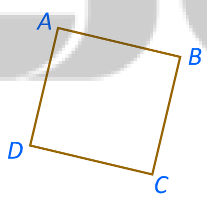
ب) با استفاده از قسمت قبل، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

پاسخ

الف) معادله‌ی ضلع توسط شیب و نقطه‌ی A نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{4-1}{10-5} = \dfrac{3}{5} \\ \\ (\underbrace{5}_{x_0}, \underbrace{1}_{y_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x-5) \xrightarrow{\times 5} 5y - 5 = 3x - 15 \Rightarrow -3x + 5y = -10$$

ب) چون ضلع AD بر ضلع AB عمود است، شیب آن با معکوس و قرینه کردن $\frac{3}{5}$ حاصل می‌شود:



$$m_{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

اکنون معادله‌ی ضلع AD:

$$y - 1 = -\frac{5}{3}(x-5) \xrightarrow{\times 3} 3y - 3 = -5x + 25 \Rightarrow 5x + 3y = 28$$

توجه کنید:

می‌توان نشان داد، اگر دو خط به صورت استاندارد $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ داده شوند، آنگاه آن‌ها:

- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خطها متقاطع‌اند.

- بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.
- بر هم عمودند، هرگاه: $aa'+bb'=0$.

فاصله‌ی دو نقطه:

اگر نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داده شوند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(دلیل این مطلب، با رسم شکل و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

بویژه:

- اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_1=x_2$، آنگاه:

$$AB=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$$

- اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_1=y_2$، آنگاه:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

- فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ آسان محاسبه می‌گردد:

$$OA=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

مثال: نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,2)$ داده شده‌اند.

الف) طول پاره‌خط AB را حساب کنید. ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ را بیابید.

پاسخ

الف) با استفاده از روش بالا:

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

ب) باید فاصله‌ی $A(2,-1)$ تا مبدأ $O(0,0)$ محاسبه شود:

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(1,2)$، $B(2,-1)$ و $C(-1,-1)$ داده شده است.

الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟ ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

پاسخ

الف) طول سه ضلع را تعیین می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$BC=\sqrt{(-1-2)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{9+0}=3$$

پس؛ ضلع‌ها نابرابرند.

ب) قائم‌الزاویه بودن مثلث، طبق رابطه‌ی فیثاغورس بررسی می‌شود؛ باید ضلع بزرگ‌تر وتر باشد:

$$(\sqrt{13})^2=13 \quad \text{و} \quad (\sqrt{10})^2+(3)^2=10+9=19$$

چون $19\neq 13$، در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه هم نیست.

مثال: (از کتاب) مثلث ABC با رأس‌های $A(2,0)$، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ داده شده است. به دو روش نشان دهید مثلث قائم الزاویه است و سپس مساحت آن را بیابید.

پاسخ

محاسبه‌ی طول اضلاع مانند قبل:

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$$
$$AC=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=5 \quad \text{و} \quad BC=\sqrt{(-2-5)^2+(3-4)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$$

روش اول: چون رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است:

$$BC^2=50\ ,\ AB^2+AC^2=25+25=50$$

روش دوم: توسط شیب‌ها نشان می‌دهیم ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند:

$$m_{AB}=\frac{4-0}{5-2}=\frac{4}{3}\ ,\ m_{AC}=\frac{3-0}{-2-2}=-\frac{3}{4}$$ **(شیب‌ها قرینه و معکوس هستند.)**

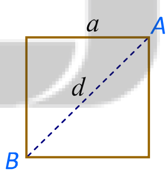
برای تعیین مساحت، AB و AC را به عنوان ارتفاع و قاعده بکار می‌بریم:

$$S=\frac{\sqrt{25}\times\sqrt{25}}{2}=\frac{25}{2}$$

مثال: اگر $A(4,4)$ و $B(1,1)$ دو رأس متقابل (روبروی) یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:



$$d=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

توجه کنید:

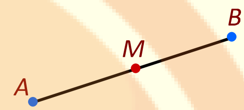
بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d=a\sqrt{2}$ وجود دارد و در نتیجه:

$$a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \Rightarrow S=a^2=\frac{18}{2}=9$$

وسط پاره‌خط:

اگر نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:

$$M(x_M,y_M):\begin{cases} x_M=\dfrac{x_۱+x_۲}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_۱+y_۲}{۲}\end{cases}$$



مثال: در مثلث با رئوس $A(۰,۳)$ ، $B(-۳,۱)$ و $C(۳,۱)$، فاصله‌ی نقطه‌ی A از وسط ضلع BC (یعنی طول میانه‌ی AM) را حساب کنید.

پاسخ

مختصات وسط ضلع BC چنین است:

$$M:\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{-۳+۳}{۲}=۰ \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۱+۱}{۲}=۱\end{cases} \Rightarrow M(۰,۱)$$

اکنون طول میانه حساب می‌شود:

$$AM=\sqrt{(۰-۰)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

مثال: نقاط $A(۳m-۱,۲m-۵)$ و $B(۳-m,۱-۴m)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی محور xها واقع باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ

باید عرض نقطه‌ی M برابر صفر باشد تا روی محور x قرار گیرد. بنابراین:

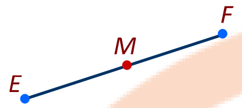
$$y_M=۰ \rightarrow \frac{۲m-۵+۱-۴m}{۲}=۰ \rightarrow \frac{-۲m-۴}{۲}=۰$$
$$\rightarrow -۲m-۴=۰ \Rightarrow m=-۲$$

در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $E(۱,۲)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-۱,۴)$ مشخص کنید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

✅ پاسخ



الف) اگر $F(a,b)$ قرینه‌ی E باشد، باید M نقطه‌ی وسط E و F باشد:

$$x_M=\frac{x_E+x_F}{۲}\rightarrow -۱=\frac{۱+a}{۲}\Rightarrow a=-۳ \quad و \quad y_M=\frac{y_E+y_F}{۲}\rightarrow ۴=\frac{۲+b}{۲}\Rightarrow b=۶$$

در نتیجه $F(-۳,۶)$ است.

ب) اگر قرینه را $Q(r,s)$ بگیرید، به صورت مشابه، باید $O(۰,۰)$ نقطه‌ی وسط P و Q باشد:

$$۰=\frac{\alpha+r}{۲}\rightarrow \alpha+r=۰\Rightarrow r=-\alpha \quad و \quad ۰=\frac{\beta+s}{۲}\rightarrow \beta+s=۰\Rightarrow s=-\beta$$

نتیجه:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ به صورت $Q(-\alpha,-\beta)$ تعیین می‌شود.

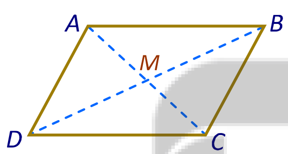
مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را نشان دهید:

$$x_A+x_C=x_B+x_D \quad و \quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

در نتیجه:

اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می‌توان مشخص کرد.

✅ پاسخ



از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

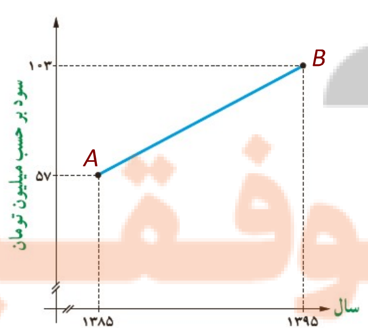
در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

پس نقطه‌ی M وسط هر دو قطر AC و BD بوده و بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} x_M&=\frac{x_A+x_C}{۲}\\ x_M&=\frac{x_B+x_D}{۲}\end{aligned}\right\}\rightarrow \frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\xrightarrow{\times ۲} x_A+x_C=x_B+x_D$$

به روش مشابه، عرض نقاط هم خاصیت گفته شده را دارد.

مثال: (از کتاب) سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار روبرو سیر صعودی داشته است.



الف) میانگین سود سالانه‌ی کارگاه در این دهه چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه چقدر باشد؟

پاسخ

الف) واضح است که میانگین: $۸۰ = \frac{۱۶۰}{۲} = \frac{۵۷+۱۰۳}{۲}$ میلیون تومان است.

ب) چون سیر صعودی سود کارگاه خطی است، میانگین سود در نقطه‌ی وسط اتفاق می‌افتد:

$$\frac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲} = ۱۳۹۰ \qquad \text{(سال ۱۳۹۰)}$$

ج) اگر روند همین گونه باشد، جواب مورد نظر، قرینه‌ی A نسبت به B است. اگر سود سالانه در آن سال را m بگیریم:

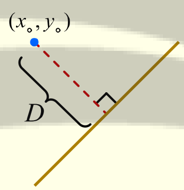
$$\frac{۵۷+m}{۲} = ۱۰۳ \Rightarrow m = ۲\times ۱۰۳ - ۵۷ = ۱۴۹ \qquad \text{(میلیون تومان)}$$

منظور از فاصله‌ی نقطه تا یک خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است. این فاصله برابر طول پاره‌خط عمود رسم شده از نقطه تا خط بوده و چنین محاسبه می‌شود:

فاصله‌ی نقطه تا خط:

باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax+by+c=۰$ نوشت. سپس:

فاصله‌ی یک نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ از این خط برابر است با:



$$D = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

بویژه:

فاصله‌ی مبدأ مختصات $(۰,۰)$ تا این خط برابر است با:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال: دو خط $l_۱ : ۲x+y=-۱$ و $l_۲ : -x+۲y=-۷$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید. ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(۷,۹)$ از خط $l_۲$ را بدست آورید.

پاسخ

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط از حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{r} ۲x+y=-۱ \\ -x+۲y=-۷ \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} ۲x+y=-۱ \\ -۲x+۴y=-۱۴ \end{array}\right\} \rightarrow ۵y=-۱۵ \Rightarrow y=-۳$$

جایگذاری -۳ در یکی از معادلات به جای y:

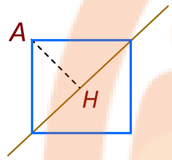
$$۲x-۳=-۱ \Rightarrow x=۱$$

ب) خط $l_۲$ را استاندارد کرده و فرمول بالا را در مورد نقطه‌ی $C(۷,۹)$ بکار می‌بریم:

$$-x+۲y+۷=۰ \Rightarrow \frac{|-(۷)+۲(۹)+۷|}{\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{|۱۸|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}$$

مثال: نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس مربعی است که خط $۲x+y-۲=۰$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ



با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از قطر مربع، نصف طول قطر را بدست می‌دهد:

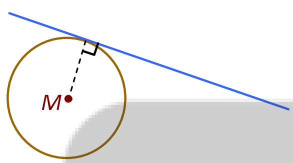
$$AH=\frac{|۲(۲)+۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{|۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

پس قطر مربع $d=۲\sqrt{۵}$ است. با استفاده از رابطه‌ی $d=a\sqrt{۲}$ بین ضلع و قطر، طول ضلع مربع $a=\frac{d}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$ بوده و بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^۲=\left(\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$$

مثال: دایره‌ی به مرکز $M(۲,-۱)$ بر خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۴}x-۱$ مماس است. شعاع دایره را حساب کنید.

پاسخ



می‌دانیم:

خط مماس بر دایره، بر شعاع متصل به نقطه‌ی تماس عمود است:

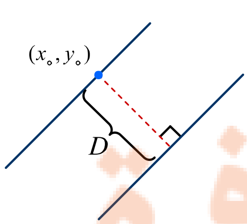
بنابراین:

شعاع برابر فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌باشد:

$$y=\frac{۳}{۴}x-۱ \xrightarrow{\times ۴} ۳x-۴y-۴=۰ \Rightarrow r=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)-۴|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۶}{۵}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $l_۱: ۲x+y=-۱$ و $l_۲: ۲y=-۴x+۳$ را بیابید.

پاسخ



چنان که از شکل می‌توان فهمید، کافی است:

یک نقطه دلخواه روی یکی از خطها انتخاب کرده و فاصله‌اش را تا خط دیگر حساب کرد.

نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی خط $l_۱$ است، فاصله‌ی آن تا خط $l_۲: ۴x+۲y-۳=۰$ را حساب می‌کنیم که در واقع همان فاصله‌ی بین این دو خط موازی است:

$$D=\frac{|۴(۰)+۲(-۱)-۳|}{\sqrt{(۴)^۲+(۲)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}$$

توجه کنید:

دو خط موازی را همیشه می‌توان با ضرایب یکسان به شکل $l_1: \ ax+by+c=0$ **و** $l_2: \ ax+by+c'=0$ **نوشت که در این صورت، فاصله‌ی آن‌ها مستقیماً چنین محاسبه می‌شود:**

$$D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

در این بخش، تعیین جواب‌های معادله‌ی درجه دوم و ارتباط بین آن‌ها بررسی می‌شود. ابتدا چند روش حل سریع این نوع معادله را یادآوری کرده و همچنین روش حل کلی را می‌آوریم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(۲x+۱)^۲-۹=۰$ ب) $x^۲-۴x+۴=۱$

پاسخ

الف) طبق قاعده‌ی « $x^۲=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ » می‌نویسیم:

$$(۲x+۱)^۲=۹ \rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۳ \rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱ \\ ۲x+۱=-۳ \rightarrow ۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

ب) سمت چپ معادله به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای است و در نتیجه می‌توان مانند قسمت قبل عمل کرد:

$$(x-۲)^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \rightarrow x=۳ \\ x-۲=-۱ \rightarrow x=۱ \end{cases}$$

توجه کنید:

سریع‌ترین روش حل معادله، در صورت امکان، روش تجزیه کردن و استفاده از قاعده‌ی زیر است:

$$P\times Q=۰ \Rightarrow P=۰ \quad \text{یا} \quad Q=۰$$

مثال: هر یک از معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲-۳x=۰$ ب) $x^۲-x=۶$ ج) $۳x^۲+۴x+۱=۰$

پاسخ

الف) با فاکتورگیری، تجزیه انجام می‌شود:

$$x^۲-۳x=۰ \rightarrow x(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

ب) جملات را به سمت چپ برده و تجزیه را طبق اتحاد جمله مشترک انجام می‌دهیم:

$$x^۲-x-۶=۰ \rightarrow (x+۲)(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

ج) چون $x^۲$ دارای ضریب است، باید ضریب را به مجذور تبدیل کرده و سپس طبق اتحاد جمله مشترک عمل کنیم:

$$۳x^۲+۴x+۱=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۹x^۲+۱۲x+۳=۰ \rightarrow (۳x)^۲+۴(۳x)+۳=۰$$

$$\rightarrow (۳x+۳)(۳x+۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} ۳x+۳=۰ \rightarrow ۳x=-۳ \Rightarrow x=-۱ \\ ۳x+۱=۰ \rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

روش دلتا:

معادله‌ای که پس از ساده شدن به شکل $ax^2+bx+c=0$ تبدیل شود، «**معادله‌ی درجه دوم**» گفته شده و اعداد a، b و c را **ضرایب معادله** می‌گوئیم.

در این معادله، جواب‌ها بر حسب عدد $\Delta=b^2-4ac$ تعیین می‌شوند:

- اگر $\Delta>0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) α و β دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- اگر $\Delta=0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مضاعف** (برابر یا تکراری) دارد که عبارتند از:

$$\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$$

- اگر $\Delta<0$ باشد، معادله **هیچ جوابی** ندارد.

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $4x^2-x-1=0$ ب) $3x^2-x=-6$

پاسخ

الف) در این معادله $a=4$، $b=-1$ و $c=-1$ بوده و در نتیجه مقدار دلتا بدست می‌آید:

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(4)(-1)=17$$

چون دلتا مثبت است، برای معادله دو جواب متمایز حاصل می‌شود:

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{17}}{2(4)}=\frac{1-\sqrt{17}}{8} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{17}}{2(4)}=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

ب) این معادله را نیز به صورت $3x^2-x+6=0$ مرتب کرده و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(3)(6)=1-72=-71$$

چون Δ است، معادله هیچ جوابی ندارد.

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $(2-t)x^2-x=3$:

الف) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.   ب) جواب حقیقی نداشته باشد.

پاسخ

معادله را به صورت استاندارد $(2-t)x^2-x-3=0$ می‌نویسیم تا $a=2-t$، $b=-1$ و $c=-3$ مشخص شوند. اکنون:

الف) تعیین مقدار دلتا:

$$\Delta=(-1)^2-4(2-t)(-3)=1+12(2-t)=25-12t$$

شرط ریشه‌های مضاعف این است که دلتا صفر شود:

$$25-12t=0 \to 12t=25 \Rightarrow t=\frac{25}{12}$$

ب) در این حالت لازم است دلتا منفی باشد:

$$۲۵-۱۲t<۰ \rightarrow -۱۲t<-۲۵ \Rightarrow t>\frac{-۲۵}{-۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

برخی حالت‌های ویژه:

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید:

❖ اگر a و c مختلف العلامت باشند، در این صورت، ac منفی و دلتا مثبت است:

$$\Delta=\underbrace{b^۲}_{\geq ۰}\underbrace{-۴ac}_{>۰} \Rightarrow \Delta>۰$$ **(معادله همیشه دو جواب دارد.)**

❖ در دو حالت زیر، جواب‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ در لحظه تعیین می‌شوند:

- اگر جمع ضرایب برابر صفر شود: $a+b+c=۰$، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.
- اگر $a-b+c=۰$ (یعنی: $b=a+c$) باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱− و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای نمونه:

در معادله‌ی $۳x^۲+۴x+۱=۰$ که بالاتر به روش تجزیه حل شد، شرط $b=a+c$ برقرار است: چون ۱+۳=۴. پس جواب‌ها فوری ۱− و $-\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$ بدست خواهند آمد.

مثال: طول و عرض مستطیلی به ترتیب $۷x+۱$ و $x+۳$ است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ واحد مربع باشد، مقدار x را بیابید.

پاسخ

مساحت مستطیل را برابر ۳۲ قرار می‌دهیم:

$$(x+۳)(۷x+۱)=۳۲ \rightarrow ۷x^۲+x+۲۱x+۳=۳۲ \Rightarrow ۷x^۲+۲۲x-۲۹=۰$$

می‌بینید که جمع ضرایب صفر است و در نتیجه جواب‌ها به روش سریع معلوم می‌شوند:

$$x_۱=۱ \quad و \quad x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۲۹}{۷}$$

چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد، فقط $x=۱$ قابل قبول است.

تبدیل به درجه دوم:

معادلاتی که ممکن است حتی درجه دوم نباشند، ولی ظاهر آن‌ها شبیه معادلات درجه دوم است، با تغییر کوچکی تبدیل به چنین معادلاتی شده و راحت حل می‌شوند. به چند نمونه توجه کنید:

مثال: در معادله‌ی $(۲x-۱)^۲+۲(۲x-۱)-۳=۰$ ریشه‌ها را مشخص کنید.

پاسخ

موقتاً قرار می‌دهیم: $t=۲x-۱$. با جایگزینی در معادله‌ی داده شده، باید جواب‌های $t^۲+۲t-۳=۰$ را مشخص کنیم. طبق روش تجزیه کردن می‌نویسیم:

$$(t+۳)(t-۱)=۰ \Rightarrow t=-۳\ ,\ t=۱$$

اکنون با جایگزینی در رابطه‌ی $2x-1=t$ جواب‌های x بدست خواهند آمد:

- $t=1: \quad 2x-1=1 \rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$
- $t=-3: \quad 2x-1=-3 \rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

مثال: معادله‌ی $(x^2-1)^2+(x^2-1)=6$ را با روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $x^2-1=t$ و در نتیجه معادله به صورت $t^2+t-6=0$ تبدیل می‌شود. طبق روش تجزیه کردن می‌نویسیم:

$$(t+3)(t-2)=0 \Rightarrow t=-3\ ,\ t=2$$

طبق تغییر متغیر بکار رفته:

- $t=2: \quad x^2-1=2 \rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$
- $t=-3: \quad x^2-1=-3 \rightarrow x^2=-2$ **غیر ممکن و جواب ندارد!**

پس معادله فقط دو جواب $\pm\sqrt{3}$ دارد.

در ادامه، ارتباط بین جواب‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم را ببینید:

روابط بین ریشه‌ها:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه:

- **مجموع ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- **حاصلضرب ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که می‌توانید رابطه‌ی $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را بکار ببرید.

تذکر مهم:

هر وقت در مورد ریشه‌های α و β از یک معادله‌ی درجه دوم صحبت می‌شود، باید شرط $\Delta\geq 0$ نیز برقرار باشد.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2-6x-1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ را بدست آورید.

پاسخ

طبق مطلب قبل داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3 \quad \text{و} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}=-6$$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $-3x^2+x+2=0$ باشند:

الف) مقادیر $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ را حساب کنید. ب) حاصل $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$ را بدست آورید.

پاسخ

الف) مشابه قبل:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow s=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3} \quad و \quad p=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow p=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

ب) باید عبارت $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$ را بر حسب $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ نوشته و سپس مقادیر آن‌ها را جایگزین سازیم:

$$3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3ps \Rightarrow 3(-\frac{2}{3})(\frac{1}{3})=-\frac{2}{3}$$

مثال: به ازای چه مقداری از m در معادله‌ی $x^2-mx+8=0$، یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

پاسخ

شرط داده شده را به صورت $\beta=\alpha^2$ در نظر گرفته و فرمول ضرب ریشه‌ها را بکار می‌بریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \to \alpha\alpha^2=8 \to \alpha^3=8 \to \alpha=2$$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله عدد ۲ است و می‌توانیم آن را در معادله جایگزین x سازیم:

$$2^2-m\times 2+8=0 \to 2m=12 \Rightarrow m=6$$

عبارات خاص:

با داشتن عددهای: $\alpha+\beta=s$ و $\alpha\beta=p$، محاسبه‌ی برخی عبارت‌های خاص بر حسب s و p:

- **جمع مجذورات:** $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=s^2-2p$
- **جمع معکوس‌ها:** $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}$
- **جمع معکوس مجذورات:** $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$
- **جمع مکعبات:** $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=s^3-3ps$

مثال: مقدار m را طوری حساب کنید که مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله‌ی $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ باشد.

پاسخ

باید: $\alpha^2+\beta^2=s^2-2p=4$ باشد. چون $s=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2}$ و $p=\frac{c}{a}=\frac{m-1}{2}$؛

$$(\frac{m}{2})^2 - 2(\frac{m-1}{2}) = 4 \rightarrow \frac{m^2}{4} - m + 1 = 4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = -2\ ,\ m = 6$$

توجه کنید:

معادله‌ی داده شده برای $m = 6$ دارای دلتای منفی است و در نتیجه فقط $m = -2$ قابل قبول خواهد بود.

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|$ را حساب کنید.

پاسخ

توان دوم عبارت $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|$ را با توجه به خاصیت $|a|^2 = a^2$ و استفاده از اتحاد اول تعیین کرده و در پایان از آن جذر می‌گیریم:

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|^2 = (\sqrt{x'} - \sqrt{x''})^2 = x' + x'' - 2\sqrt{x'x''} = 4 - 2\sqrt{1} = 2$$

در نتیجه $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{2}$ است.

گاهی لازم است با داشتن ریشه‌ها یا حتی فقط با داشتن جمع و ضرب آن‌ها، معادله‌ی مربوطه را نوشت:

نوشتن معادله:

هر گاه **مجموع** ریشه‌ها s و **حاصل‌ضرب** ریشه‌ها p معلوم باشند، آن معادله به صورت:

$$x^2 - sx + p = 0$$

نوشته می‌شود.

دلیل:

اگر x' و x'' را ریشه‌های معادله بگیریم، باید $x - x' = 0$ و $x - x'' = 0$ باشند. در نتیجه:

$$(x - x')(x - x'') = 0 \rightarrow x^2 - x'x - xx'' + x'x'' = 0 \Rightarrow x^2 - \underbrace{(x' + x'')}_{s}x + \underbrace{x'x''}_{p} = 0$$

برای نمونه؛

اگر جواب‌های معادله‌ای $2 - \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{3}$ باشند، چون:

$$s = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \qquad و \qquad p = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

این معادله به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادله‌ای که ریشه‌های آن عددهای $\frac{1}{2}$ و -3 باشند را به دو روش بنویسید:

الف) به روش مستقیم. ب) به روش فرمولی بالا.

پاسخ

الف) باید معادله به صورت زیر باشد:

$$(x-\frac{۱}{۲})(x-(-۳))=۰ \to (x-\frac{۱}{۲})(x+۳)=۰ \to x^۲+۳x-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

ب) با توجه به مقادیر $s=\frac{۱}{۲}+(-۳)=-\frac{۵}{۲}$ و $p=(\frac{۱}{۲})(-۳)=-\frac{۳}{۲}$ طبق فرمول:

$$x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

گاهی لازم می‌شود:

اگر x' و x'' ریشه‌ها بوده و a هم معلوم باشد، معادله باید به صورت زیر نوشته شود:

$$a(x-x')(x-x'')=۰$$

مثال: (از کتاب) آیا مستطیلی با محیط $۱۱\,cm$ و مساحت $۶\,cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

پاسخ

اگر طول و عرض را α و β بنامیم، باید:

$$۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲} \quad و \quad \alpha\beta=۶$$

پس طول و عرض باید جواب‌های معادله‌ی $x^۲-\frac{۱۱}{۲}x+۶=۰$ یا $۲x^۲-۱۱x+۱۲=۰$ باشند.

$$\Delta=۱۲۱-۹۶=۲۵ \to \begin{cases} \alpha=\frac{۱۱+\sqrt{۲۵}}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴ \\ \beta=\frac{۱۱-\sqrt{۲۵}}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

(می‌بینید که مستطیل وجود دارد.)

مثال: معادله‌ای با دو شرط زیر بنویسید:

الف) یکی از جواب‌های آن $۱-۲\sqrt{۳}$ باشد. ب) ضرایب آن عددهای گویا باشند.

پاسخ

چون یکی از جواب‌ها $۱-۲\sqrt{۳}$ است، برای این‌که s و p عددهای گویا (غیر رادیکالی) بدست آیند، لازم است جواب دیگر مزدوج جواب اول باشد، یعنی: $۱+۲\sqrt{۳}$. بنابراین:

$$p=(۱-۲\sqrt{۳})(۱+۲\sqrt{۳})=۱^۲-(۲\sqrt{۳})^۲=۱-۱۲=-۱۱ \quad و \quad s=۱-۲\sqrt{۳}+۱+۲\sqrt{۳}=۲$$

و معادله به صورت $x^۲-۲x-۱۱=۰$ نوشته می‌شود.

در ادامه، با داشتن یک معادله، معادله‌ای مرتبط با آن می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $۴x^{۲}-x-۱=۰$ دو واحد کوچک‌تر باشد.

پاسخ

در این معادله، $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۴}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۴}$ است و باید ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر $\alpha-۲$ و $\beta-۲$ باشند. مجموع و ضرب ریشه‌ها:

$$s=\alpha-۲+\beta-۲=\alpha+\beta-۴=\frac{۱}{۴}-۴=-\frac{۱۵}{۴}$$

$$p=(\alpha-۲)(\beta-۲)=\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۴=-\frac{۱}{۴}-۲(\frac{۱}{۴})+۴=\frac{۱۳}{۴}$$

پس معادله چنین نوشته خواهد شد:

$$x^{۲}-(-\frac{۱۵}{۴})x+\frac{۱۳}{۴}=۰\xrightarrow{\times ۴}۴x^{۲}+۱۵x+۱۳=۰$$

روش کوتاه:

در سؤالاتی مانند مثال قبل، برای پاسخ دهی سریع‌تر، طبق مراحل زیر عمل کنید:

- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y در نظر بگیرید.
- با توجه به شرط داده شده بین ریشه‌ها، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.
- از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y بدست آورده و در معادله‌ی اولیه جایگزین کنید.
- معادله‌ی بدست آمده را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم بدست آید.

نمونه: پاسخ مثال قبل به این روش:

باید $y=x-۲$ باشد؛ پس $x=y+۲$ بوده و در نتیجه:

$$۴(y+۲)^{۲}-(y+۲)-۱=۰\rightarrow ۴y^{۲}+۱۶y+۱۶-y-۲-۱=۰\Rightarrow ۴y^{۲}+۱۵y+۱۳=۰$$

که همان معادله‌ی $۴x^{۲}+۱۵x+۱۳=۰$ است.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۳x-۱=۰$ یک واحد کمتر باشد.

پاسخ

طبق شرط داده شده می‌نویسیم: $y=\frac{۱}{x}-۱$ و بنابراین $\frac{۱}{x}=y+۱\rightarrow x=\frac{۱}{y+۱}$. عبارت $\frac{۱}{y+۱}$ را در معادله جایگزین x می‌کنیم:

$$۲\times\frac{۱}{(y+۱)^{۲}}-۳\times\frac{۱}{y+۱}-۱=۰\xrightarrow{\times(y+۱)^{۲}}۲-۳(y+۱)-(y+۱)^{۲}=۰$$

$$\rightarrow ۲-۳y-۳-y^{۲}-۲y-۱=۰\rightarrow -y^{۲}-۵y-۲=۰$$

$$\Rightarrow y^{۲}+۵y+۲=۰$$

در این بخش نمودار تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن بررسی می‌شود.

صفرهای تابع:

در مورد یک تابعِ $y=f(x)$:

هر نقطه‌ی برخورد نمودار با محور طول را یک «صفر» برای تابع گویند.

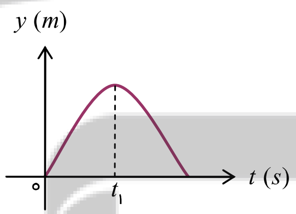
توجه کنید:

صفرهای تابع دقیقاً جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ هستند.

بنابراین:

صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ همان ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ هستند که در بخش قبل بررسی گردید.

مثال: اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $30\frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب شود، ضابطه‌ی مکان (ارتفاع) آن بر حسب زمان (t) به صورت $y=-5t^2+30t$ و نمودار مکان - زمان به صورت زیر است:



الف) نقاط برخورد نمودار با محور افقی چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) نقطه‌ی به طول t_1 چه معنایی دارد؟

پاسخ

الف) چنان که می‌بینید، در نقاط برخورد با محور طول، ارتفاع گلوله برابر صفر است؛ نقطه‌ی سمت چپ شروع پرتاب $t=0$ و نقطه‌ی سمت راست، لحظه‌ی بازگشت گلوله به سطح زمین را نشان می‌دهد:

$$y=0 \rightarrow -5t^2+30t=0 \rightarrow -5t(t-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$$

پس گلوله بعد از ۶ ثانیه به زمین برگشته است.

ب) نقطه‌ی به طول t_1 دقیقاً لحظه‌ای را نشان می‌دهد که گلوله به بالاترین ارتفاع خود رسیده است.

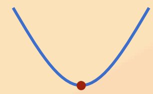
اکنون کلیت نمودار تابع درجه دوم را بیان می‌کنیم:

نمودار درجه دوم:

نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ همیشه یک **«سهمی»** با شکل و مشخصات زیر است:

- نمودار برای $a > ۰$ دارای می‌نیمم (کمترین y نمودار) و برای $a < ۰$ دارای ماکزیمم (بیشترین y نمودار) است. به نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم **«رأس»** سهمی گفته می‌شود.

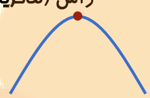
اگر $a > ۰$ باشد:



رأس (می‌نیمم)

اگر $a < ۰$ باشد:

رأس (ماکزیمم)



- طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{۲a}$ و عرض آن با جایگذاری آن در ضابطه مشخص می‌شود.

بویژه:

خط عمودی به معادله‌ی $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی را مشخص می‌کند.

مثال: در تابع $y = x(۲-x) + ۴x - ۱$ موارد زیر را پاسخ دهید:

الف) نمودار این تابع دارای می‌نیمم یا ماکزیمم است؟

ب) طول نقطه‌ی می‌نیمم یا ماکزیمم و سپس عرض آن را بدست آورید.

ج) معادله‌ی محور تقارن نمودار را بنویسید.

پاسخ

الف) معادله را به صورت درجه دوم می‌نویسیم:

$$y = x(۲-x) + ۴x - ۱ = ۲x - x^۲ + ۴x - ۱ \Rightarrow y = -x^۲ + ۶x - ۱$$

چون ضریب $x^۲$ منفی است، نمودار دارای ماکزیمم است.

ب) طول نقطه‌ی ماکزیمم که همان رأس سهمی هم هست، چنین است:

$$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{۶}{۲(-۱)} = ۳$$

عرض این نقطه برابر مقدار ماکزیمم نمودار است:

$$y = -۳^۲ + ۶(۳) - ۱ = -۹ + ۱۸ - ۱ = ۸$$

ج) طبق نکات بالا، خط $x = ۳$ محور تقارن نمودار است.

مثال: نمودار تابع $y = x^۲ + mx - ۳$ نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است. این منحنی محور xها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

پاسخ

طبق رابطه‌ی $x = -\frac{b}{۲a}$، محور تقارن به صورت $x = -\frac{m}{۲(۱)} = -\frac{m}{۲}$ است. در نتیجه:

$$-\frac{m}{2}=1 \rightarrow m=-2$$

پس تابع به صورت $y=x^2-2x-3$ بوده و تقاطع نمودار با محور طول از حل معادله‌ی $y=0$ بدست می‌آید:

$$x^2-2x-3=0 \rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1\,,\,3$$

مثال: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل‌ضرب آن‌ها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو کدام است؟

پاسخ

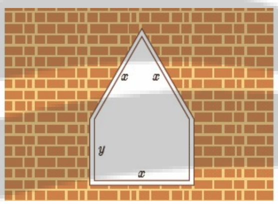
عددها را با x و y نشان می‌دهیم و شرط داده شده به صورت $2x=y+6$ نوشته خواهد شد. پس می‌دانیم که $y=2x-6$ است. ضرب آن‌ها را بر حسب x بیان می‌کنیم:

$$xy \Rightarrow x(2x-6)=2x^2-6x$$

می‌نیمم در $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2(2)}=\frac{3}{2}$ اتفاق می‌افتد. پس $y=2(\frac{3}{2})-6=-3$ بوده و مجموع دو عدد برابر است با:

$$x+y=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

مثال: (از کتاب) یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



پاسخ

با استفاده از اندازه‌ی محیط:

$$x+y+x+x+y=4 \rightarrow 3x+2y=4 \Rightarrow y=2-\frac{3}{2}x$$

مساحت پنجره مجموع مساحت‌های یک مستطیل و یک مثلث متساوی الاضلاع است:

$$S=xy+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=x(2-\frac{3}{2}x)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+2x$$

چون $\frac{\sqrt{3}-6}{4}$ منفی است، S دارای ماکزیمم است (یعنی: بیشترین مساحت و نوردهی!) که در رأس: $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد:

$$x=-\frac{2}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}\cong 0/94\,m \Rightarrow y=2-\frac{3}{2}(0/94)=2-1/41=0/59m$$

وضعیت نمودار:

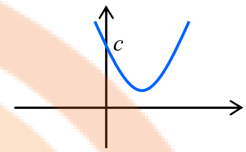
در مورد وضع نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ در دستگاه مختصات به مواردی مهم توجه کنید:

- ❖ نمودار همواره محور y ها را به عرض c قطع می‌کند:

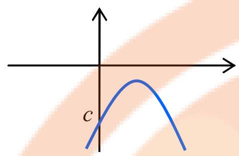
$$x=0 \Rightarrow y=c$$

- ❖ اگر $\Delta<0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. به‌طور دقیق:

- اگر $a>0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند.
- اگر $a<0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.



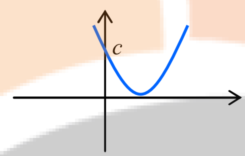
$(a>0)$



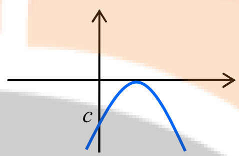
$(a<0)$

❖ اگر $\Delta=0$ باشد، نمودار بر محور طول‌ها مماس است. به‌طور دقیق:

- اگر $a>0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.
- اگر $a<0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.

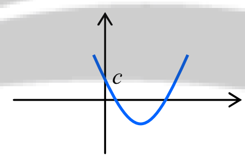


$(a>0)$

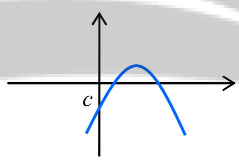


$(a<0)$

❖ اگر $\Delta>0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



$(a>0)$



$(a<0)$

مثال: محدوده‌ی m را طوری مشخص کنید که نمودار تابع $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره زیر محور xها باشد.

پاسخ

باید $\Delta<0$ و $a<0$ باشد. شرایط را اعمال کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$a<0: \quad m-1<0 \ \rightarrow \ m<1$$

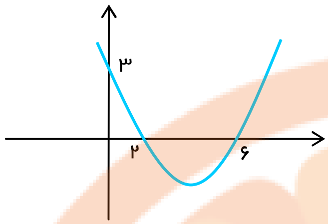
$$\Delta<0: \quad (\sqrt{3})^2-4(m-1)(m)<0$$

نامعادله‌ی دوم به صورت $-4m^2+4m+3<0$ نوشته می‌شود که با رسم جدول تعیین علامت، جواب آن به صورت:

$$m<-\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad m>\frac{3}{2}$$

حاصل می‌شود. اشتراک این جواب با شرط اول $m<1$ به صورت $m<-\frac{1}{2}$ است.

مثال: ضابطه‌ی سهمی نمودار مقابل را بنویسید.



پاسخ

با توجه به صفرهای تابع، ضابطه باید چنین باشد:

$$f(x)=a(x-۲)(x-۶)$$

بعلاوه، نقطه‌ی $(۰,۳)$ روی نمودار است و بنابراین:

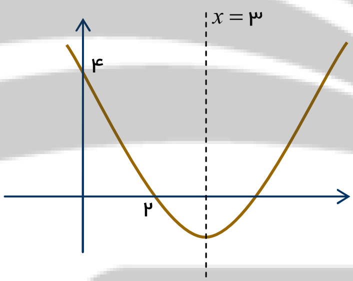
$$f(۰)=۳ \rightarrow a(-۲)(-۶)=۳ \rightarrow a=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}\underbrace{(x-۲)(x-۶)}_{x^۲-۸x+۱۲} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲-۲x+۳$$

روش دوم:

می‌توانستید ضابطه را به صورت $y=ax^۲+bx+b$ گرفته و با جایگزینی نقاط $(۰,۳)$، $(۲,۰)$ و $(۶,۰)$ ضرایب را مشخص کنید.

مثال: (تمرین کتاب) ضابطه‌ی جبری سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ

چون تقاطع سهمی با محور عرض در ۴ است، ضابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$y=ax^۲+bx+۴$$

- چون عدد ۲ یک صفر تابع است:

$$۰=a(۲)^۲+b(۲)+۴ \rightarrow ۴a+۲b=-۴$$

- چون $x=۳$ محور تقارن نمودار است:

$$-\frac{b}{۲a}=۳ \rightarrow -b=۶a$$

از حل دستگاه $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-۳$ بدست آمده و ضابطه‌ی سهمی $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۴$ است.

در پایان این بخش، تعیین نوع ریشه‌های تابع سهمی بر حسب ضرایب معادله را می‌آوریم. معادلـه‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\Delta \geq ۰$ باشد. در این صورت همواره دو ریشه‌ی α و β وجود داشته و اطلاعات دقیق‌تری از آن‌ها در دو حالت بعدی (بر حسب علامت $\frac{c}{a}$) تعیین می‌گردد.

حالت ۱: $\frac{c}{a}>0$

ضرب ریشه‌ها مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی هم علامت داشته و به علاوه:

- اگر $-\frac{b}{a}>0$ باشد، آنگاه هر دو ریشه مثبت‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت مثبت شده است.)
- اگر $-\frac{b}{a}<0$ باشد، آنگاه هر دو ریشه منفی‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت منفی شده است.)

برای نمونه؛

معادله‌ی $-2x^2+5x-1=0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد. زیرا:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{5}{-2}=\frac{5}{2}>0 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}>0$$

حالت ۲: $\frac{c}{a}<0$

ضرب ریشه‌ها منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مثبت و منفی دارد. با فرض $\alpha<0<\beta$ می‌توان گفت:

- اگر $-\frac{b}{a}>0$ باشد، آنگاه $|\alpha|<|\beta|$؛ یعنی ریشه‌ی مثبت اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند -3 و ۴.)
- اگر $-\frac{b}{a}<0$ باشد، آنگاه $|\alpha|>|\beta|$؛ یعنی ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند -3 و ۲.)

در حالت خاص؛

اگر $-\frac{b}{a}=0$ (یعنی: $b=0$) باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی قرینه است: $\alpha=-\beta$.

(توجه: در حالت $\frac{c}{a}<0$ شرط $\Delta>0$ خود به خود برقرار است.)

برای نمونه؛

معادله‌ی $2x^2+5x-1=0$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد و ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. زیرا:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}<0 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}<0$$

توجه کنید:

اگر $\frac{c}{a}=0$ باشد، باید داشته باشیم: $c=0$. در این حالت یکی از جواب‌ها صفر است و جواب دیگر باید $-\frac{b}{a}$ باشد.

مانند نمونه‌ی زیر:

$$-۲x^۲+۳x=۰ \rightarrow x(-۲x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

مثال: وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-x-۱-m^۲=۰$ را مشخص کنید.

پاسخ

چون $۰<\overbrace{\frac{۱+m^۲}{۲}}^{>۰}$ $\frac{c}{a}=\frac{-۱-m^۲}{۲}=-$ است، معادله دارای دو ریشه‌ی مثبت و منفی است. بعلاوه، چون $۰>\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۲}-=\frac{b}{a}-$ است، باید ریشه‌ی مثبت اندازه‌ی بزرگ‌تری داشته باشد.

معادله‌ای کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای، را یک معادله‌ی گویا گوئیم. مانند:

$$\frac{x+1}{2-x}=1+2x$$

در حل معادلات گویا، پذیرش جواب‌ها بستگی به مفهوم زیر دارد:

دامنه عبارت گویا:

در یک عبارت گویا، دامنه شامل تمام عددهای حقیقی، به جز ریشه‌های مخرج است:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

توجه کنید:

اگر عبارت شامل چند عبارت گویا باشد، باید ریشه‌های تمام آن‌ها از $\mathbb{R}$ کم شود.

مثال: دامنه‌ی معادله‌ی زیر را مشخص کنید.

$$\frac{x}{x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x-2}$$

پاسخ

ریشه‌های هر سه مخرج:

$$x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=0 \quad \text{و} \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

پس دامنه برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{0,2,-2\}$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی گویا:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و سپس آن را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله‌ای که بدست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که در دامنه قرار داشته باشند.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است جایگذاری آن در تمام مخرج‌ها، هیچ کدام از آن‌ها را صفر نکند.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

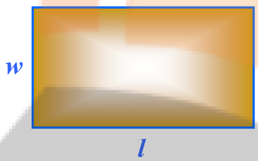
چون $x^2-2x=x(x-2)$، همین عبارت ک.م.م مخرج‌ها است. طبق روش بالا می‌نویسیم:

$$x(x-2)\times\frac{x-1}{x-2}=x(x-2)\times\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-x(x-2)\times\frac{x+1}{x}$$

$$\rightarrow\ x^2-x=x^2-2x+2-x^2-x+2x+2\ \rightarrow\ x^2=4\ \rightarrow\ x=\pm 2$$

چون عدد ۲ مخرج دوتا از کسرها را صفر می‌کند، قابل قبول نبوده و فقط ۲− پذیرفته می‌شود.

مستطیل طلایی:



اگر در یک مستطیل به طول l و عرض w داشته باشیم:

$$\frac{l}{w}=\frac{l+w}{l}$$

گوئیم: «مستطیل طلایی است» و «نسبت طول به عرض»، یعنی $\frac{l}{w}$ را عدد طلایی گویند.

مثال: (از کتاب) با انتخاب مستطیل طلایی با عرض ۱، طول آن $l=\frac{l}{1}=\frac{l}{w}$ که همان نسبت طلایی است را مشخص کنید.

کنید.

پاسخ

طبق تناسب مربوطه به ازای $w=1$ داریم:

$$\frac{l}{1}=\frac{l+1}{l}\ \rightarrow\ l^2=l+1\ \rightarrow\ l^2-l-1=0\ \xrightarrow{\Delta=5}\ l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

عدد $1/618=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طلایی است.

مطلب بعدی در سؤالات نسبتاً قوی و برای حل سریع مورد نیاز است:

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a+\frac{1}{a}$، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مطلب بسیار مهم زیر وجود دارند:

- اگر a مثبت باشد، همواره داریم $a+\frac{1}{a}\geq 2$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{1}{a}=2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=1$ باشد.

- اگر a منفی باشد، همواره داریم $a+\frac{1}{a}\leq -2$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{1}{a}=-2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=-1$ باشد.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

با مشاهده‌ی دو عبارت معکوس، نکته‌ی قبل را به یاد آورید:

$$\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲} \rightarrow \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}+\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}=۲ \Rightarrow \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۱$$

معادله‌ی جدید را با طرفین وسطین جواب می‌دهیم:

$$x^۲-۲=۲x+۱ \rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \rightarrow x=-۱\ ,\ ۳$$

جواب‌های بدست آمده ریشه‌ی هیچ مخرجی از معادله نبوده و هر دو قابل قبول هستند.

مثال: (از کتاب) اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ

فرض کنید ماشین (۱) دو برابر سریع‌تر از ماشین (۲) باشد. پس:

اگر ماشین (۱) در x ساعت کل کار را انجام دهد، ماشین (۲) در $۲x$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

اکنون اگر هر ماشین تنهایی یک ساعت کار کند، طبق اطلاعات بالا:

ماشین (۱) اندازه‌ی $\frac{۱}{x}$ از کل کار و ماشین (۲) اندازه‌ی $\frac{۱}{۲x}$ از کل کار را انجام خواهد داد.

پس اگر هر دو ماشین یک ساعت با هم کار کنند، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}$ از کار انجام می‌شود که طبق فرض سؤال برابر $\frac{۱}{۴}$ از آن است:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴x} ۴+۲=x \Rightarrow x=۶\ ,\ ۲x=۱۲$$

در پایان این فصل، روش حل معادلات رادیکالی مانند نمونه‌های زیر را ببینیم:

$$۲\sqrt{۱-x}+x=۱ \qquad \text{یا} \qquad \sqrt{x-۲}=۲+x$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی اصم:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رساننده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است که آن در معادله صدق کند.

مثال: معادله‌ی $2x+\sqrt{2x-1}=1$ را حل کنید.

پاسخ

طبق روش بالا می‌نویسیم: $\sqrt{2x-1}=1-2x \rightarrow 2x-1=(1-2x)^2 \rightarrow 2x-1=1-4x+4x^2$

معادله به صورت $4x^2-6x+2=0$ مرتب شده و در نتیجه طبق روش تجزیه حل می‌شود:

$$(2x)^2-3(2x)+2=0 \rightarrow (2x-1)(2x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x-2=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

جواب‌ها را در معادله آزمایش می‌کنیم:

$x=\frac{1}{2}: \quad 2(\frac{1}{2})+\sqrt{2(\frac{1}{2})-1}=1 \Rightarrow 1=1$ **قابل قبول:**

$x=1: \quad 2(1)+\sqrt{2(1)-1}=1 \Rightarrow 3\neq 1$ **غیرقابل قبول:**

پس فقط یک جواب $x=\frac{1}{2}$ مورد قبول خواهد بود.

مثال: معادله‌ی $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{-x}=0$ را حل کنید.

پاسخ

چون دو عبارت رادیکالی داریم، یکی را در سمت چپ و دیگری را به سمت راست برده و مانند قبل:

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{-x} \rightarrow x^2+x=-x \rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

با آزمایش جواب‌ها می‌بینید که هر دو قابل قبول هستند:

$x=0: \quad \sqrt{0^2+0}-\sqrt{-0}=0 \Rightarrow 0=0$ **قابل قبول**

$x=-2: \quad \sqrt{(-2)^2-2}-\sqrt{-(-2)}=0 \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ **قابل قبول**

مثال: (از کتاب) توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه‌ی حقیقی هستند.

الف) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$ ب) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

پاسخ

الف) اگر معادله را به صورت $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=-1$ بنویسید، سمت راست منفی است، ولی سمت چپ نمی‌تواند منفی شود.

ب) معادله را به صورت روبرو بنویسید: $\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\geq 0}=\underbrace{-\sqrt{x-2}}_{\leq 0}$

تساوی فقط برای عددی برقرار است که هر دو طرف را صفر کند، ولی سمت چپ با عدد ۱ و سمت راست با عدد ۲ صفر می‌شود.

تمرینات:

۱– معادله خطی که از مبدأ مختصات و محل برخورد دو خط به معادله‌های $2x+3y+8=0$ و $2x-7y+12=0$ می‌گذرد، را بنویسید.

۲– نقطه‌ی $P(4-3m,2m-6)$ روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد. فاصله‌ی P از مبدأ را بیابید.

۳– فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $2y=mx+b$ گذرنده بر نقطه‌ی $(1,2)$ برابر ۱ است. m را بیابید.

۴– سه خط $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-4y+10=0 \\ (k+1)x-ky=0 \end{cases}$ در یک نقطه متقارب‌اند (یعنی هر سه در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند!). k را بیابید.

راهنمایی: نقطه‌ی تقاطع دو خط اول را تعیین کنید؛ خط سوم نیز باید از این نقطه عبور کند!

۵– مثلث با رأس‌های $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ب) طول این ارتفاع را حساب کنید.

ج) معادله‌ی میانه‌ی AM را نوشته و طول آن را حساب کنید.

۶– اگر $A(4,4)$ و $B(1,1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را بیابید.

۷– فاصله‌ی دو خط موازی به معادله‌های $y=x+1$ و $y=x+2$ را حساب کنید.

۸– هرگاه $A(2,-2)$ و $C(3,2)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، معادله‌ی قطر BD را بنویسید.

۹– به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-1 \\ 3x+(m-2)y=4-2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟ (تجربی ۹۳)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 3 ۴) هیچ مقدار m

۱۰– نمودار $y=x^2-2x+1+a\ ,\ (a>0)$ محور طول‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱۱– اگر منحنی تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با چه طول مثبتی قطع می‌کند؟

۱۲– معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2-\sqrt{4-a}$ و $2+\sqrt{4-a}$ باشند.

۱۳– در معادله‌ی $2x^2-mx+5m=0$ مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های معادله عکس و قرینه‌ی هم باشند؟

۱۴– در معادله‌ی درجه دوم $x^2-4x+1=0$ حاصل عبارت $(x_2^2-4x_2+4)(x_1^2-4x_1+2)$ را حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱۵– در معادله‌ی $x^2-mx=2$ رابطه‌ی $x_1(1+x_2)=2$ بین ریشه‌ها وجود دارد. m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

۱۶– ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ را مشخص کنید.

۱۷– ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$ را بیابید.

۱۸– اگر $k^2-3k+7=0$ و $k'^2-3k'+7=0$ باشد، $k+k'$ چقدر است؟

۱۹– ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$ **(تجربی ۸۷)**

۲۰– برای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ است؟ **(تجربی ۹۳)**

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) 1 ۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

۲۱– هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{-x}$

ب) $2x+\sqrt{2x-1}=1$

ج) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2$

۲۲– هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x}=\frac{x-1}{x-2}$

ب) $\frac{x+2}{x-1}=1-\frac{3}{x+5}$

۲۳– اگر معادلات $\frac{2}{x^2-2x}=\frac{x+2}{x-2}-\frac{1}{x}$ و $\frac{2k}{x+2}=6+kx$ جواب مشترک داشته باشند، مقدار k را بیابید.

تمرینات منتخب کتاب درسی

۱– نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1,2)$، $B(2,5)$ و $C(4,1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

۲– دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2,-2)$ و $B(6,4)$ هستند.

الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

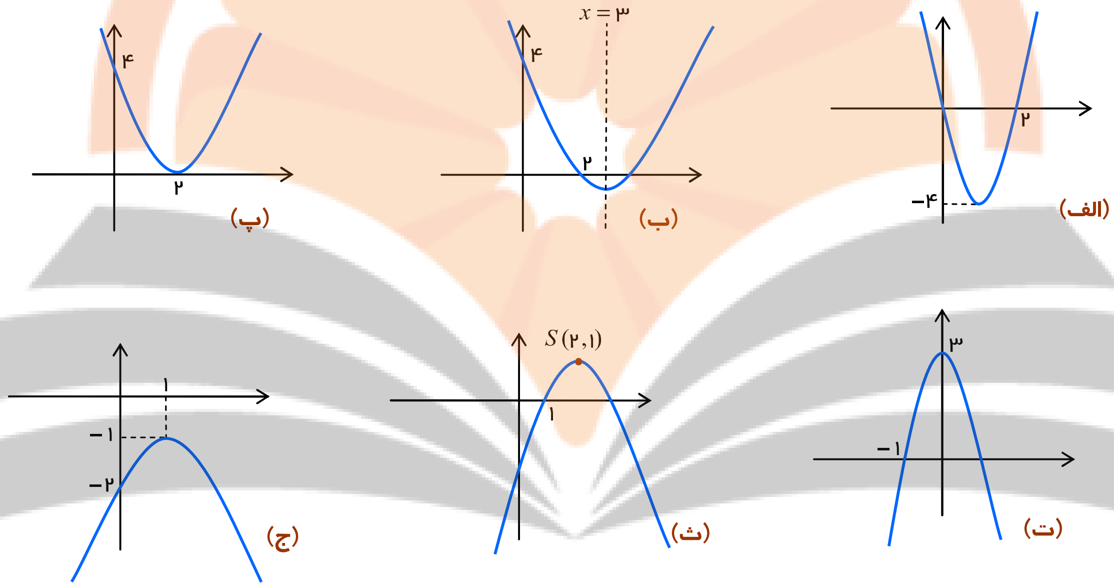
ب) آیا نقطه‌ی $C(7,3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۳– یکی از اضلاع مربعی بر خط $L:\ y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

۴– مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم توابع با ضابطه‌های زیر را بدست آورید:

الف) $f(x)=-۲x^۲+۸x-۵$ ب) $g(x)=۳x^۲+۶x+۵$

۵– معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید:



۶– هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\dfrac{۲x}{x-۳}+\dfrac{x+۱}{x+۴}=\dfrac{x-۱}{x-۳}$ ب) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$ ج) $\sqrt{m}+\dfrac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

۷– علی به همراه چند نفر از دوستان خود ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۸– الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟