

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

درس ۱

شماره ۱

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۲۰ کتاب متفاوت درباره روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $۳۰ + ۲۵ = ۵۵$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا بیاده روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت های ممکن را که او می تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسد: $۲ + ۳ = ۵$

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

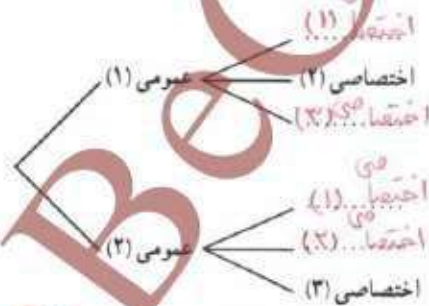
مثلاً شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار یا چهار رنگ مختلف و پنج مداد یا رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟
 حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیاء می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = 5 + 4 + 3 = 12$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ۳ راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $3 \times 2 = 6$ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

حل: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

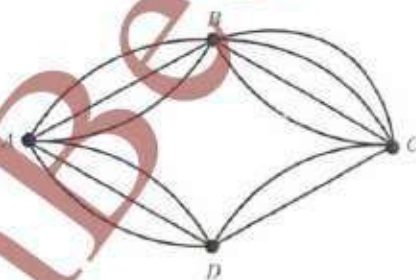
راه حل:

الف) از اصل جمع استفاده می کنیم؛ زیرا مدیرعامل می تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه رو، میان چهار شهر A، B، C و D راه هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:
 الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین:
 تعداد راه های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه های سفر از A به C به

$$= 3 \times 4 + 3 \times 4 = 12 + 12 = 24$$

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:

$$3 \times 3 + 3 \times 3 = 9 + 9 = 18$$

نماد فاکتوریل

همان طور که برای ضرب یک عدد، مانند « \cdot » در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $a \times a = a^n$ »، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل « $!$ » استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1)}{(3 \times 2 \times 1)} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 1!}{7! \times 1!} = \frac{6 \times 120 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم».

فعالیت

۱- اگر افراد A, B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\begin{array}{c} 3 \qquad 2 \qquad 1 \\ \hline C \text{ یا } B \text{ یا } A \quad \text{یکی از ۲ نفر باقی مانده} \quad \text{۱ نفر باقی مانده} \end{array} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B ، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\rightarrow 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها} \quad \text{تعداد اعداد ۵ رقمی} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۲- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های «نای» از «سی» متمایز، برابر است با $n!$.
حل: اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از جیب (یا راست) «انتخاب داریم و برای مکان بعدی «...» انتخاب داریم و... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$.

$$\frac{n}{n} \quad \frac{n-1}{n-1} \quad \frac{n-2}{n-2} \quad \dots \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن «سی» متمایز را یک جایگشت «نای» از آن «سی» می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروضه‌اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

→ تعداد انتخاب‌ها $\frac{5}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5}$ اصل ضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابر این:

→ تعداد انتخاب‌ها $\frac{4}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5}$ اصل ضرب $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$$= 120 - 96 = 24$$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر

حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

(الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

→ تعداد انتخاب‌ها $\frac{5}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5}$ اصل ضرب $5! = 120$

(ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

→ تعداد انتخاب‌ها $\frac{4}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5}$ اصل ضرب $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$

$$120 + 192 = 312 = \text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج}$$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند: $5! = 120$

اصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ → تعداد انتخاب‌ها

۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

اصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ → تعداد انتخاب‌ها

تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵ = $120 + 24 = 144$

تبدیل (انتخاب ۳ شیء از بین ۵ شیء، که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد).

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست).

تعداد انتخاب‌ها: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

اصل ضرب $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

از طرفی: $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$

(توجه دارید که با جابه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، جابه‌جایی ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک رفیف بچینیم؟

تعداد انتخاب‌ها: $5 \times 4 \times 3 = 60$

اصل ضرب $5 \cdot 4 \cdot 3$

از طرفی: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$



در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\begin{aligned} \text{تعداد انتخاب‌ها} &= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots \times \frac{(n-r+2)}{(n-r+2)} \times \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)} \\ \text{طبق اصل ضرب} &\rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1)\dots \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

* تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشند) را با نماد $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۰ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)
حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$\text{روش اول: } P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

$$\text{روش دوم: } \frac{7}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر $3! = 6$ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۴۲
جابگشت های سه رقم انتخاب شده	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1,2,4\}$	$A_2 = \{1,2,6\}$	$A_3 = \{1,4,6\}$	$A_4 = \{2,4,6\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟
حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 2!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

روش دوم: $P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$

۱۱. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6! \times 3!} = 84$$

۱۲. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۱۳. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس نهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟

$$12 + 11 + 10 = 33$$

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارند که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

$$(3 \times 4) + (3 \times 2) + (2 \times 1) = 20$$

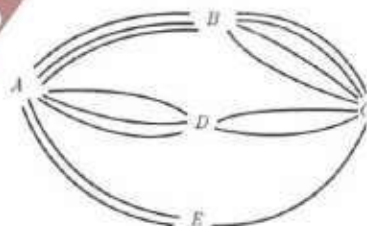
الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

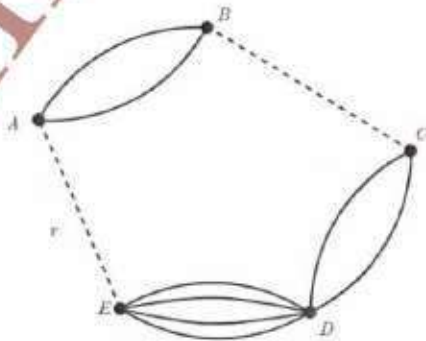
پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

$$(3 \times 4) + (2 \times 3) = 18$$

$$3 + (2 \times 4 \times 3) = 27$$



۳. الفبای حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)
الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟
ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟
پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟
۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟
۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟
۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از 80000 می توان نوشت؟ پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هر گاه بخواهیم:
الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.
پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.
ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.
۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر E به A را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه ۱۱

تمرین ۳:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب) $3 \times 3 \times 1 = 12$

پ) $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تمرین ۴:

$$P(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

تمرین ۵:

$$7 \times 2 \times 2 = 28$$

تمرین ۶:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ) $\binom{6}{3} = 20$

ت) $\binom{10}{5} \times \binom{6}{1} = 252 \times 6 = 1512$

کافی است تعداد زیر مجموع های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 6, 9\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

تمرین ۷:

الف) $\binom{12}{3} = 220$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

تمرین ۸:

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$

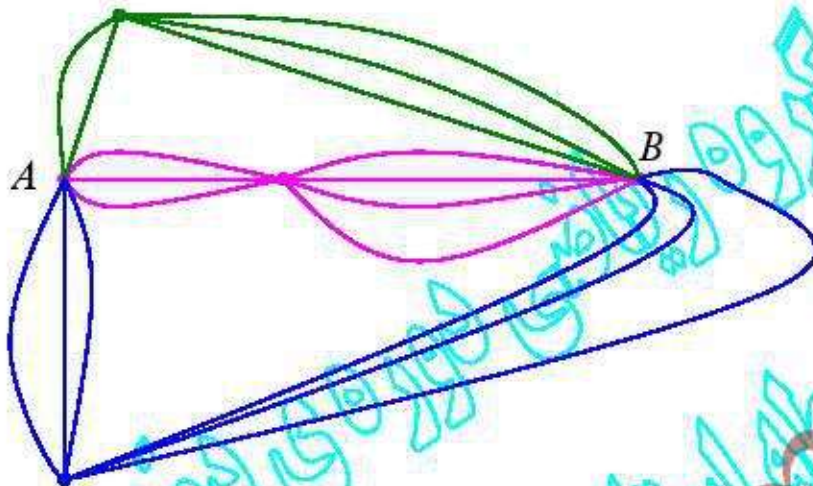
ب) $\binom{12}{2} = ????$

پ)

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 15) + (5 \times 6) + (1 \times 1) = 150 + 30 + 1 = 181$$

$$ت) \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 12 = 120$$

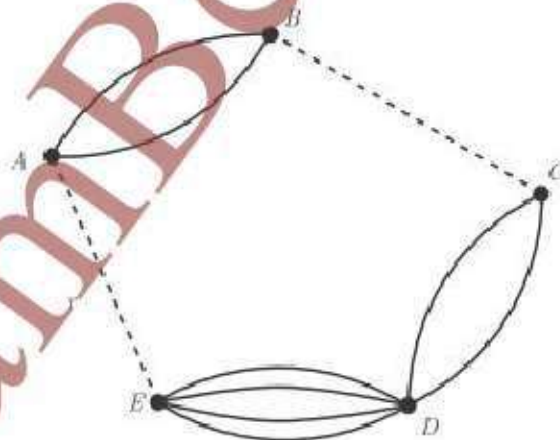
تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایپی دارد حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم، می توان

به شکل زیر عمل کرد.

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به 20 طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم، خواهیم داشت.

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \rightarrow 4m + 4n = 20 \xrightarrow{\div 4} m + n = 5$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
	۴	۳	۲	۱

درس ۲

حتمه ال

فعالیت

ترگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز ترگس مانند هر روز در ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، ترگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عوامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک، از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... بنابراین؛ دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.



پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این‌گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

ج) نتیجه قرینه کشی

الف) نتیجه برتاب سکه
ب) نتیجه برتاب تاس

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشند، آزمایش های پدیده های قطعی می گوئیم.
برای مثال، جانچه سنگی را به داخل استخرهای برتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می دانیم که سنگ به داخل آب فرو می رود یا
پیش از برتاب یک سکه می دانیم که سکه روی زمین می نشیند. این گونه پدیده ها، آزمایش های قطعی هستند.

ب) نتیجه استخراج مهره از رویون
کسب و دین، مهره ها هم
باشند.

الف) نتیجه رها شدن بیست اردرخت

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که پس از بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛ **قطعی**

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، برتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ **تصادفی**

ب) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ **قطعی**

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ **تصادفی**

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای برتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج

بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟ **تصادفی**

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ **خیر**

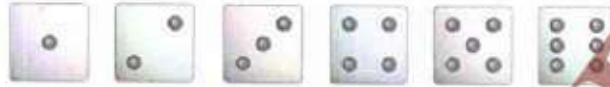
ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.
{ خودکار ۱، خودکار ۲، خودکار ۳، خودکار ۴، خودکار ۵، مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳، مداد ۴، مداد ۵ }



فضای نمونه

در برتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت، مجموعه همه برآمدهای سکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

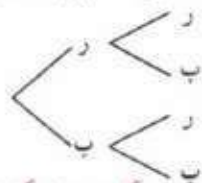


بنابراین، در برتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. برتاب دو سکه باهم.

برتاب سکه اول برتاب سکه دوم



$$S = \{(ر, ر), (ر, ب), (ب, ر), (ب, ب)\}$$

۲. برتاب سه سکه باهم (برتاب یک سکه سه بار)

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, ب), (ر, ب, ر), (ر, ب, ب), (ب, ر, ر), (ب, ر, ب), (ب, ب, ر), (ب, ب, ب)\}$$

۳. برتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$$S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (ب, ۱), (ب, ۲), (ب, ۳), (ب, ۴), (ب, ۵), (ب, ۶)\}$$

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه برتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$S = \{(۳۴۵), (۳۵۴), (۴۳۵), (۴۵۳), (۵۳۴), (۵۴۳)\}$$

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این بدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$$

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$: یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است: $\emptyset \subseteq A$

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در برتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. (ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (ب) \quad A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

این مثال باید بعد از ترفیق پیشامد بیان شود.

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ پس \emptyset یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشده‌نی) می‌نامند. همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار برتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{b, r\}$ ، $S =$ تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$$\{\emptyset, \{r\}, \{b\}, \{r, b\}\}$$

۲. مریم، ملیکا و سوگند بول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این بدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

$$S = \{\emptyset, \{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{ملیکا و مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}, \{S\}$$

اگر قرار یابند دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

۳. تاسی را برتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{2\}$$

ب)

$$\{\emptyset, \{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و مریم}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}, \{S\}$$

همیشه پیشامدها، کافیست برآمد ≥ 2 باشد.

$$C = \{2, 4, 6\}$$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

مثلاً پیشامد $E = \{3, 4, 6\}$ رخ نداده است. زیرا $2 \notin E$

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

{}

۴۴ اعضای S حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ یابند.

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$$

۵. در یک برنامه کهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشناز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
الف) سه نفر دانش آموز پیشناز از سه پایه مختلف باشند.

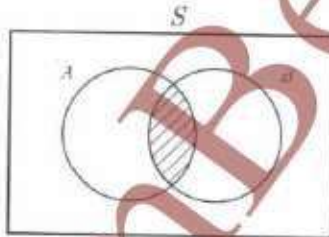
دوازدهم یازدهم دهم

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشناز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.
 $n(B) = \binom{6}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{1} \binom{9}{2} = 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$

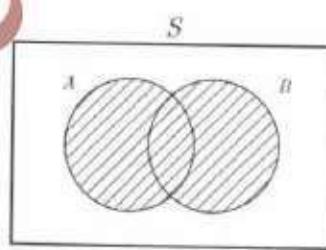
اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B ، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت زیر یادآوری می‌کنیم.



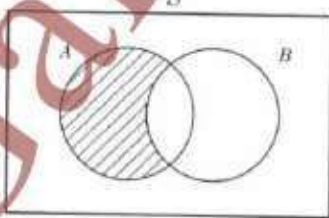
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



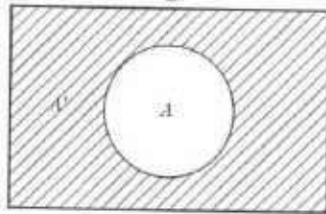
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند:

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را بر تاس می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را بر تاس می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

پیشامد مورد نظر برابر $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1)\}$$

ب) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

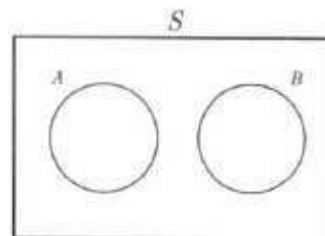
ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم:

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال: هرگاه A و B دو پیشامد تانهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل: چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای تانهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را

ناسازگار می‌گوییم.

وای مثال، در برتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\}$$

۱. تاسی را برتاب می‌کنید؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cap B = \{2\}$$

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

$$A - B = \{4, 6\}$$

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

$$B - A = \{3, 5\}$$

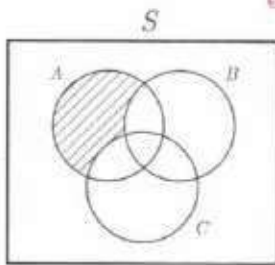
– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

$$B' = S - B = \{1, 4, 6\}$$

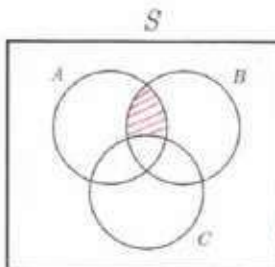
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای

زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

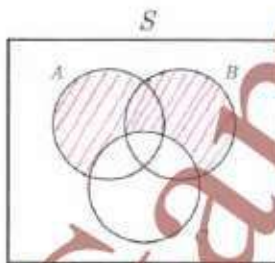


$A - (B \cup C)$

– فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



– پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



– پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\}$$

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$A = \{(د, د, پ), (د, پ, د)\}$$

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$B = \{(د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د)\}$$

$$C = \{(> > >), (> > <), (> < <), (< < <)\}$$

چهار پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱. آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ **بله**

۲. آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟ **بله**

۳. آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟ **خیر**

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید. در پرانتزهای مناسب پیشامدها آمون عدد خرد و آمون عدد زوج

ناسازگارند.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه منتهای یک پدیده تصادفی باشد. اگر n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(B)}{n(S)} = 1 \Rightarrow P(S) = 1$

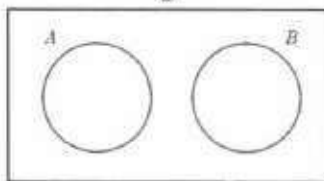
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

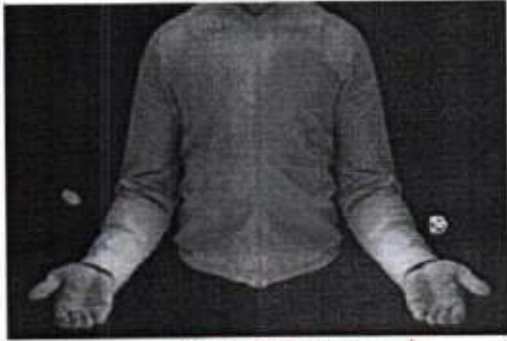
۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) تاس زوج بیاید.
می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛ بنابراین $n(S) = 12$.

$$(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)$$

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با:

$$A = \{(پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶), (ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶)\}; n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

$$C = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

ب) تاس زوج یا سکه رو بیاید.



$$D = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \rightarrow P(D) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

$$E = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \rightarrow P(E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت بر می‌شوند.

$$n(S) = 12^5 \rightarrow \begin{matrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} \end{matrix}$$

تعداد انتخاب‌ها

فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بسازید که شیء انتخابی مداد باشد: $P(A)$

ب) احتمال این را بسازید که شیء انتخابی خودکار باشد: $P(B)$

پ) احتمال این را بسازید که شیء انتخاب شده مداد نباشد: $P(A')$

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید: چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

$$\frac{3}{8} \quad \frac{5}{8}$$

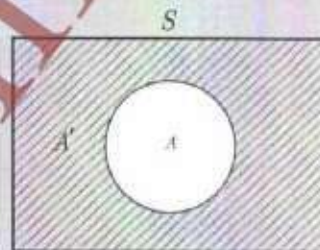
مدادها ۳ تا = خودکار ۵ تا

$$P(B) = P(A')$$



$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد. $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۲. احتمال اینکه کپاشن فردا به مدرسه نرود برابر با $\frac{1}{100}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کپاشن به مدرسه برود. $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند. $1 - \frac{32}{49} = \frac{49-32}{49} = \frac{17}{49}$

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی بیراهن ورزشی شامل ۴ بیراهن قرمز، ۴ بیراهن آبی و ۲ بیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به‌طور تصادفی ۳ بیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ بیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ بیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

چه جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: الف) چون قرار است ۳ بیراهن از بین ۱۰ بیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه بیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند. بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناممکن‌گوارند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) برای اینکه رنگ سه بیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک بیراهن قرمز، یک بیراهن آبی و یک بیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

ب) برای اینکه حداقل ۲ بیراهن فرمز باشند، آن گاه ۲ بیراهن فرمز یا ۳ بیراهن فرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو بیراهن آبی باشند، باید دو بیراهن آبی یا یک بیراهن آبی و یا صفر بیراهن آبی داشته باشیم:

$$n(E) = \binom{4}{0} \times \binom{6}{4} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{3} + \binom{4}{2} \times \binom{6}{2} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ بیراهن آبی باشد، آن گاه $P(F^c) = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ بیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان اند. یعنی می‌توان راه‌حل قسمت «ت» و «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ بیراهن به دنبال تعداد بیراهن‌های آبی باشیم، پشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(S) = 1$$

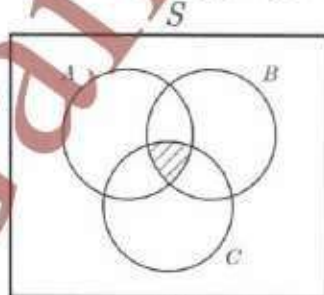
تمرین

- کدام یک از بدیده‌های زیر لزوماً تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
- الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. **تصادفی**
- ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**
- ج) نتیجه یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم. **تصادفی**
- ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.
- عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن عدد می‌افزاید.
 - سپس حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

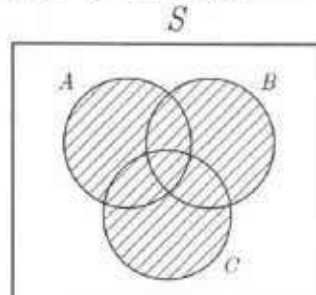
بیمه‌بازار ۲۰ کارت

قطعی

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گانه‌تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.
- الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
- ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.
۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
- الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
- ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.
- ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.
۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۵. در هر یک از اعداد دورقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.
 ج) خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. ب) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

۹. عقریه دستگاہ جرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. جقدر احتمال دارد که:

الف) عقریه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقریه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقریه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



۱۰. ۷۰۱ برجم مختلف را به هفت میله برجم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. حثانجه این برجم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله برجم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

۱۱. داده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بیتنازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۲ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک بارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رها می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای متمنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

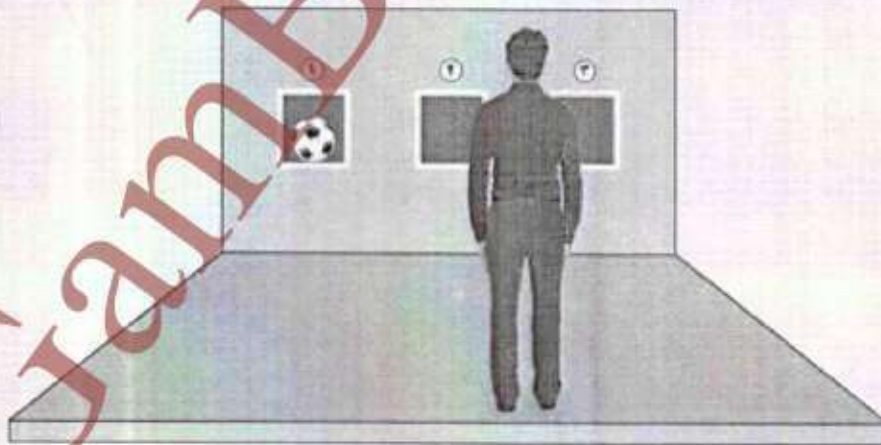
الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

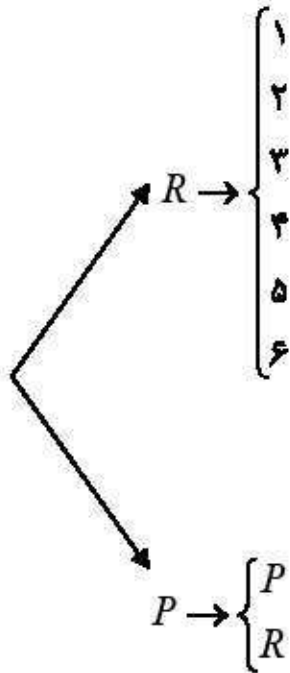
در یک مسابقه، سه درجه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت کننده قرار دارد. ناگهان یک درجه به طور تصادفی باز می شود و تویی از آن به طرف شرکت کننده برتاب می شود. اگر این فرد نتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می شود.

به نظر شما، احتمال برتاب توپ از هر درجه چقدر است؟
اگر یک درجه را غیرفعال کنند و شرکت کننده شماره درجه شریفعلی را بداند، در این صورت احتمال برتاب توپ از هر درجه برای شرکت کننده در مسابقه چقدر است؟



حل تمرینهای صفحه‌ی ۲۵

تمرین ۲:



(الف)

$$S = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

(ب)

$$A = \{(R, 2), (R, 3), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

تمرین ۳:

(الف)

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

(ب)

$$A = \{3, 9, 15\}$$

(پ)

$$B = \{1, 9\}$$

(ت)

$$A \cap B = \{9\} \text{ و } A - B = \{3, 15\}$$

تمرین ۴:

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب: حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

تمرین ۵:

(الف)

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

(ب)

$$A = \{12, 24, 42\}$$

(پ)

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$S = \{PPP, PPR, PRP, RPP, PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

(ب)

$$A = \{PPP, RRR\}$$

(پ)

$$B = \{PPR, PRP, RPP\}$$

(ت)

$$C = \{PPP, PPR, PRP, RPP\}$$

(ث)

$$D = \{PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

تمرین ۷:

عضو $2^2 = 16$ (الف)

ب) $A = \{PPRR, PRRR, RPPR, RRRR\}$

پ) $C = \{PRRR, RPPR, RRPR, RRRP, RRRR\}$

ت) خیر ناسازگار نیستند.

تمرین ۸:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} = \frac{22 \times 1}{680} = \frac{11}{340}$$
$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{136}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\binom{12}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{11}{340} + \frac{33}{680} = \frac{55}{680}$$

تمرین ۹:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(الف)

(ب)

(ب)

تمرین ۱۰:

۶ و ۴ و ۱ پرچم های غیر اول

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اول

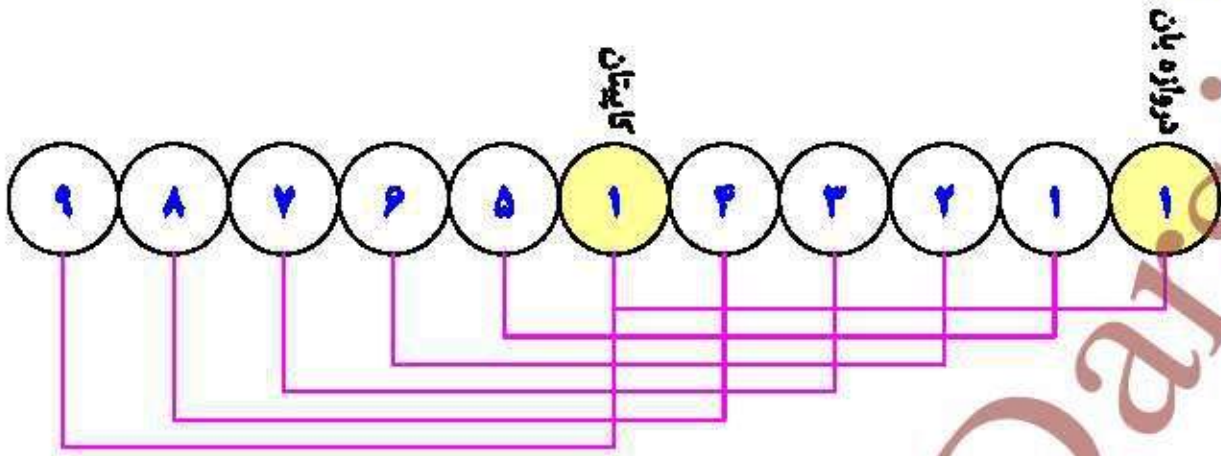


تعداد حالت های مساعد $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$

تعداد کل حالت ها $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$

$$P(E) = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$$

تمرین ۱۱:



تعداد حالت های مساعد = $9! \times 6 \times 2$

تعداد کل حالت ها = $11!$

$$P(E) = \frac{9! \times 6 \times 2}{11!} = \frac{9! \times 6 \times 2}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

تمرین ۱۲:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{15}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} =$$

تمرین ۱۳:

$$الف) P(A) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 10 \times 1}{120} = \frac{50 + 10}{120} = \frac{1}{2}$$

$$ب) P(B) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$

دنیای امروز بر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبه‌رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم. محدودیت‌های نتایج به‌دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی مان نیافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❓ دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به‌طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

👥 گروه اجراکننده این پروژه، پرسش‌نامه‌ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسش‌نامه را تکمیل کنند:

- الف) به‌طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟
 ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.
- خواندن کتاب الکترونیک شبکه‌های اجتماعی عکاسی بازی تماس تلفنی
 تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان چارگی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

حس می‌زند دانش‌آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

● اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در بررسی اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟

■ داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشیاء‌های ناپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. بررسی‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

● ممکن است برخی دانش‌آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی بررسی‌نامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟

■ نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷ دقیقه و دامنه میان چارگی آن $Q_3 = 100$ ، $Q_1 = 65$ دقیقه بود.



● با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

● با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟

● چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

چون ممکن است برخی از دانش‌آموزان چندگانه‌ترین فعالیت را انتخاب کرده باشند.

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مفهاری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان چارگی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با (Interquartile Range) IQR نمایش می‌دهیم.

دوم، و دهم و دوازدهم

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه‌های..... این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از تلفن‌های هوشمند... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.
 • با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش‌آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ شبکه‌های اجتماعی

• در میانه و دامنه میان چارگی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟
 ۵۰ درصد از دانش‌آموزان بیش از ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد دیگر کمتر از ۷۰ دقیقه در روز

• مشاوران آموزشی، به کمک دانش‌آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش‌آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که ۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش‌آموزان را بهبود بخشد؛ ۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب،



محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند و دانش‌آموزان در ساعاتی از شبانه‌روز که امکان بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ ۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش‌آموزان، می‌توان علاقه دانش‌آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

• در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش‌آموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌های داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش‌آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح درک مسئله	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	جست‌وجوی راه حل	نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در فضای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	کسب داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخه امار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با رویتن ترسیدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازمینی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های بهلوانی و...) با توانایی‌ها و توانایی‌های

جسادی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

همین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میانه پسران ۱۲ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفتگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تاثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می کند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می توانند به اندازه گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

کام ۲ (طرح و برنامه ریزی)

اندازه گیری با سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه گیری، در واقع سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دمای اسنان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می توانیم توصیف هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه ای می خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه گیری کنیم. چه پرسش هایی می تواند برای اندازه گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه گیری دازایی ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد، وستان و... لزوماً مشخص می کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه گیری می توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه گیری یا پرسش نامه ها را طوری طراحی می کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه گیری و همچنین شیوه تحلیل داده ها تصمیم گیری می شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامیم. هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگتری نیاز است؟ توضیح دهید.

- (الف) □ سن دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. *نمونه کوچک*
 □ معدل سال گذشته دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. *نمونه بزرگ*
- (ب) □ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی *نمونه کوچک*
 □ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی *نمونه بزرگ*

حوزه برادری متغی مورد بررسی بیشتر با رده های نمونه بزرگ است. انتخاب نشود.

۲. علی و امید در یک پروژه دانش اموزی می خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت های مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند.»
 علی پیشنهاد می کند: «برای نمونه گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند.»
 امید پیشنهاد می کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهاد های امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.



- (الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد علی*
- (ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد امید*
- (ب) اگر مثلا به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های بدست آمده (ماره نمونه) بزرگتر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می شود؛ چون نوجوانانی که اصلا به کتابخانه نمی روند، در نظر گرفته نشده اند. *اشکال پیشنهاد علی*
- دو اشکال دیگر را که به نمونه گیری علی وارد است، مطرح کنید. *عدم توجه به شانس و شانس بیشتر / عدم توجه به روزها حضور نوجوان در اماکن مختلف*

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

- (الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها
 (ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها.



گام ۳ (گردآوری و پاک سازی داده ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه گیری، گردآوری یا ثبت داده ها و یا وارد کردن داده ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از این اشتباه ها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش‌آموزی بیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم‌افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است. در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش‌آموز
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۲
۱۵	۲	۲	۱	۱۴	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴
۱۷	۲	۲	۲	۵۱	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۶
	۱۹	۱	۳	۱۵	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۹
۱۰	-	۲	۱	۱۴	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۱۱
۱۴	۲	۱	۲	۱۴	۱۲
۲۰	۷	۲	۱	۱۵	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۱۴

با توجه به جدول داده‌ها

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش‌آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است. *ردیف ۷ / کد ۳ بسکتبال / ۱۹*

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟ *۲۲ ردیف ۴*

ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟ *۴۴ / ۵*

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟ *دانش‌آموز ردیف ۴ / نمره ۴ + به پسر کوی*

بهبود و گفت و گو

- اگر امتحان موزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار را چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟
- ایا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملا درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.

یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

بسیار معیارها را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی	
		\bar{x}	\bar{y}	IQR	$SD (s)$
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶٫۸۳	۱۷	۲٫۵	۱٫۴۱
میزان نمایش تلویزیون	۴ ۲۱ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹٫۷۱	۶٫۲۵	۳	۸٫۹۴

راهنمای جدول: میزان نمایش تلویزیون: متوسط ساعت‌های نمایش تلویزیون در هفته؛ IQR : دامنه میان جاری؛ SD : انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

سن: $Q_3 = 19$, $Q_2 = 17$, $Q_1 = 15.5$, $min = 15$, $max = 19$
 میزان تلویزیون: $Q_3 = 30$, $Q_2 = 6.25$, $Q_1 = 4.5$, $min = 4$, $max = 30$

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

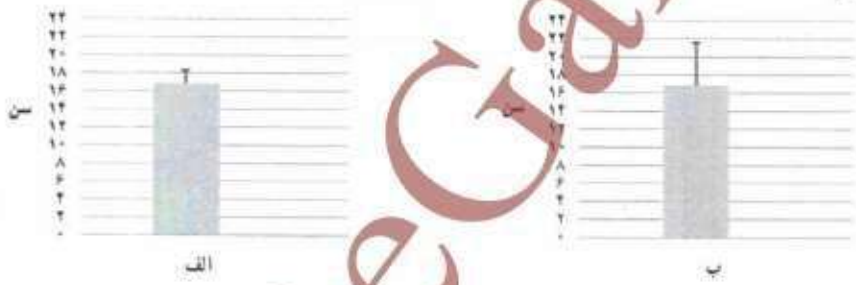
میانگین / انحراف معیار زیرا داده دور افتاده وجود ندارد.

* IQR: Interquartile Range
 ** SD: Standard Deviation

کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
 میان / دامنه / میان چارگی
 با انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
 ۲۹ و ۳۰ **فواصل اصلا ف از میانگین زیاد می شود**
 دسترسی نداشتند چگونه گمراه می شدند؟ **میانگین غیر واقعی در اختیار دارند و واقعت کمتر از آنچه دوست می آید**
بهرتر است میان را حساب می کردند

در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطی آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ت) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟ نمودار الف یا ب؟



اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میان) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟ **جعبه‌ای**

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟ **جعبه‌ای زیرا اگر داده دور افتاده نباشد، قدری متراکم می‌شود**
و میان به هم نزدیک می‌شود

کار در کلاس

دو شرکت به ترنس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول تقریباً ۱۰۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

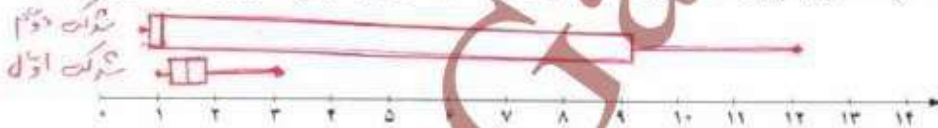
اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»
مریم می‌گوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکنندگی چه فایده‌ای دارد؟»
انها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان									
شرکت اول	۱	۱.۵	۱.۲	۱.۷	۱.۴	۱.۹	۳	۱.۱	۱.۸	
شرکت دوم	۰.۷	۱	۸	۱۲.۱	۰.۸	۱.۶	۱۰.۱	۰.۹	۰.۸	

Min = ۰.۷
Q₁ = ۰.۸
Q₂ = ۱
Q₃ = ۱.۰۵
Max = ۱.۱

Min = ۱
Q₁ = ۱.۱
Q₂ = ۱.۵
Q₃ = ۱.۸۵
Max = ۳

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جمع‌های حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر ترنس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰٪ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰٪ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟ حوزه نگرانی اولیا قبولی است.

پ) افزایش ۲۰٪ درصدی و ۲۰٪ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

در مورد ۲۰٪ درصد، افزایش ۲۰٪ برابر بود و ۲۰٪ درصد از ۱۰٪ بود.

فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشند.

گام ۳ (بحث و نتیجه‌گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی محدود کنیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

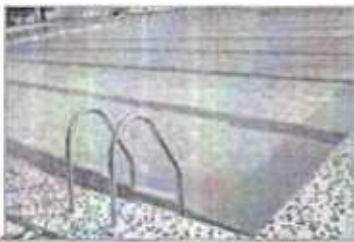
$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{اگر جامعه‌ای با اندازه } N \text{ به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه } n \text{ داشته باشیم؟})$$

یکپارچگی چرخه امار در حل مسائل

همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با امار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر امارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه امار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم جرایب گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش شدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.



کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه بگ کلان شهر، محل مناسبی انتخاب و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکانی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق کاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟ این آگاهی کجای کار می‌کند؟
 ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

ج) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟
 د) برای اطلاع افراد بومی پیرامون سن آنها و تغییر میانگین سنی

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجرا کنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند. *مطلوب بود نتیجه نهایی*
 ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است. *عبر واقعی کردن معیارها می‌شود که نتایج داده‌ها*
 ج) تمامی داده‌های دورافزاده حذف شده‌اند. *معیارهای غیر واقعی که فریب را با اشکال مواجه می‌کند.*



د) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، مجریان پروژه جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی پروژه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. امارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای بر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «فوق شده است».

الف) داده‌های نادرست به دست می‌آید.
 ب) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسیده بود، نتایج موارد انتظار به دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است. *عدم تعریف مناسب مسئله و آبی به صورت درست*
 ج) نتایج را فقط افراد متخصص امارت تفسیر کرده‌اند. *عدم شایستگی و بررسی داده منطقه*

خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «انچه داری گرد است و زرد است و مخوف (میان‌تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، بس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غریب (غریب‌الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چنین نشان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریب در مشت ننگ‌جده؟»

برگرفته از قیه ما قیه - مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل، بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

● ۱- پیاده یا با دوچرخه

○ ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی

● ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روش می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

ب) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و اماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شود؟ توضیح دهید.

۳. در هر یک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

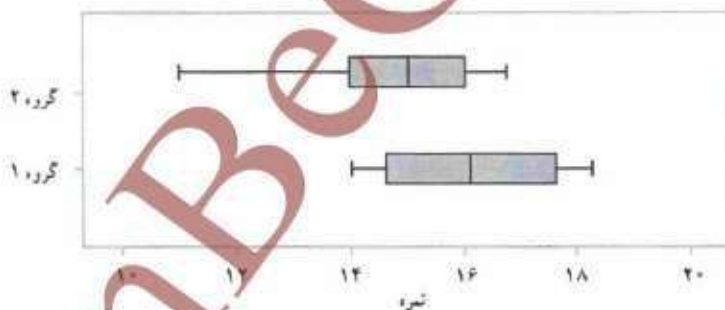
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
 نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

ب) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌برد. مغز انسان تشنه خیرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما کمی تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»
 سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان‌جاری مقایسه کنید.

ب) از مقایسه کپشه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشند؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

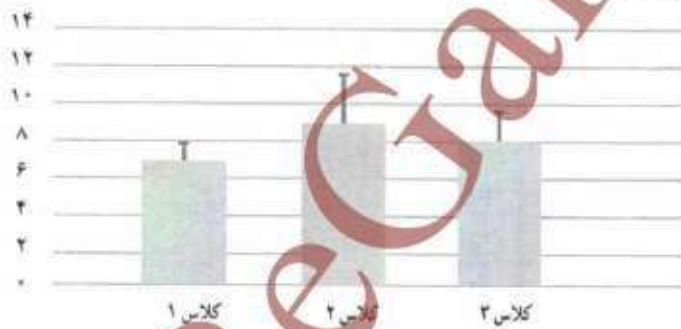
۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و جارک اول و جارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تاثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت برسی‌اند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و مبدا خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها تایید را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌برسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید. ب) یا استفاده از اطلاعات نمودارها، تایید را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تاثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



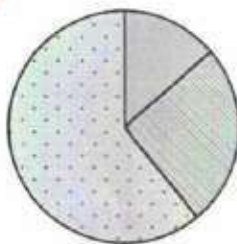
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درصد مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹ درصد مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



کمیتر از ۲۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال ۴۰ تا ۶۰ سال

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) جدول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیر واقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۲۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشند؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشینان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.
- ۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

کیلومتر در ساعت (سرعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۴۰۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.» نتیجه‌گیری بالا چه انسکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه اماره، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید برش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه آزاد دانش‌آموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانش‌آموزان.



حل تمرینهای صفحه ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:

بررسی وضعیت نمرات درسی دانش آموزان پایه‌ی اول دبستان چند پایه‌ی مختلط شهید احمدی شهرستان
پستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین ۲:

الف:

جامعه‌ی آماری	دانش آموزان کلاس
نمونه‌ی آماری	دانش آموزان انتخاب شده
اندازه‌ی جامعه	۲۸ نفر
اندازه‌ی نمونه	۹ نفر

پ: پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثلاً
برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پا: شیوه‌ی رفتن به مدرسه / کیفی / اسمی

ت: دایره ای ، میله ای / مد و نسبت

ث: خیر، چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوتی پیش بیاید.

ج: خیر، نتایج ممکن است قلمری تغییر کنند.

تمرین ۳:

الف (۱): مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند. (۲) مدیران نمی توانند، نماینده‌ی کل کارمندان محسوب
شوند. برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

پ: ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود.
برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ (۱): دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند. (۲) نمونه گیری تصادفی نیست.
نمونه‌ی انتخاب نمونه ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین ۴:

الف: تقریباً مساویند. (ولی گروه اول نتیجه‌ی بهتری دارد).

پ: دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است.

پ: مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اول گروه ۲ است. (گروه ۱ بهتر است).

ت: گروه الف، چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ث: گروه ۱، نمودار متقارن است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

ج: جامعه‌ی گروه ۱ به دلیل اطمینان از درست بودن نتایج

تمرین ۵:

۲۲ و ۲۰ و ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۰ و ۶ و ۴ و ۰



Q_1

چارک اول



Q_2

چارک دوم (میانه)



Q_3

چارک سوم

جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها $12/6$

الف : داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند ۵۰ تغییر می دهیم.

ب : میانگین این داده ها $12/6$ می باشد . لذا می توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند ($9/6$ و $12/6$) . بدین شکل میانگین تغییر نمی کند. از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تمرین ۶:

الف : ممکن است میزان ساعت خواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود. برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب : کمی / نسبی (چون صفر مطلق دارند)

پ :

گروه	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	$2/8$	$1/8$

ت : اولاً : ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً : میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث : والدین دانش آموزان ، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

تمرین ۷:

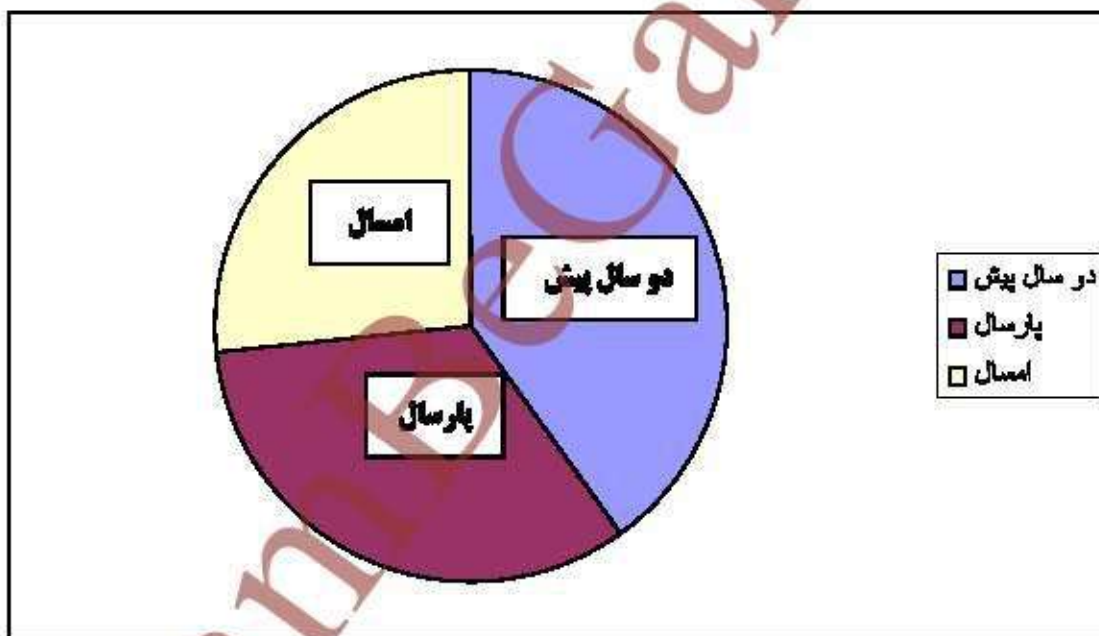
الف: ۳۰ نفر

ب: ۲۰ نفر (روند نزولی دارد)

پ: ۵۰ نفر

نمودار دانش آموزان مدرسه

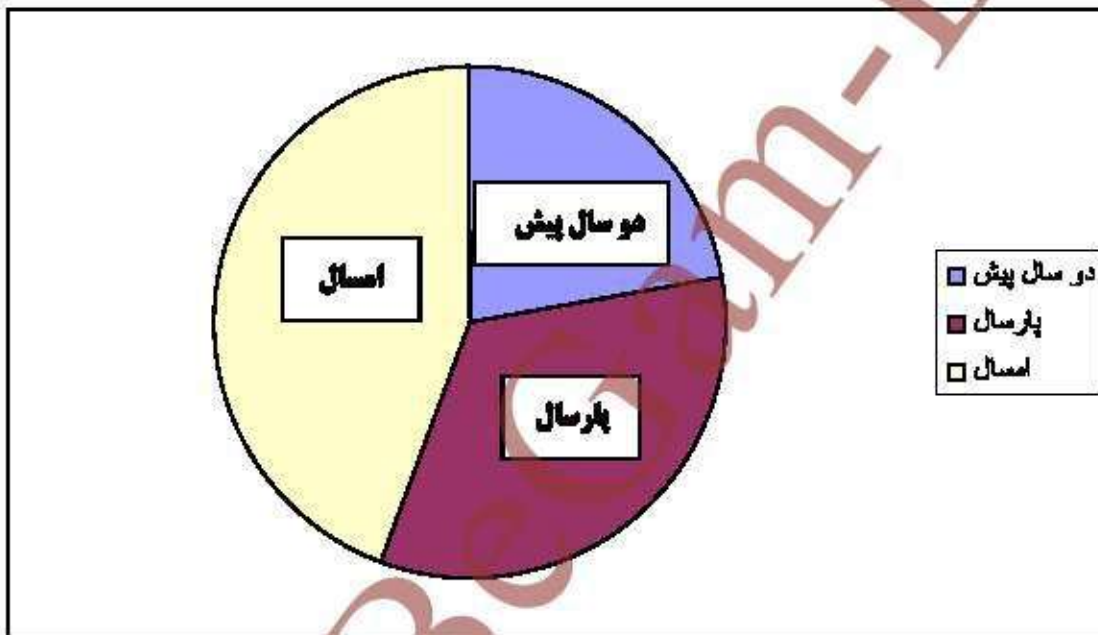
سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{60}{150} \times 360 = 144$
پارسال	۵۰	$\frac{50}{150} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{150} \times 360 = 96$
جمع	۱۵۰	۳۶۰



ادامه ی حل تمرین ۷

نمودار سایر اعضا

سال	فراوانی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۸۰$
پارسال	۳۰	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۶۰$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت : عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و ... تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین ۸ :

الف :

دوره ی سنی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
کمتر از ۲۰ سال	۵۴
بین ۲۰ الی ۴۰	۹۰
بین ۴۰ الی ۶۰	۲۱۶ (۱)
جمع	۳۶۰

$$۳۶۰ - (۹۰ + ۵۴) = ۲۱۶$$

$$\frac{۳۶۰}{۱۰۰} = \frac{۲۱۶}{x} \rightarrow x = \frac{۲۱۶ \times ۱۰۰}{۳۶۰} = ۶۰ \text{ درصد}$$

اولاً: در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانیاً: افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

نصرتن ۹:

اشكال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه س بهتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

مؤسسه استانی خوارشاه
مراکز آموزشی دوره های روزم

@GambBe

فصل ۲- الگوهای خطی

درس ۱ مدل سازی و دنباله

درس ۲ دنباله حسابی

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَالاختلافِ أَلْيَلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ (آیه ۱۹۰ سوره مبارکه آل عمران)
«و مسلماً در آفرینش آسمان‌ها و زمین و آمدورت شب و روز نشانه‌های (بروفتنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

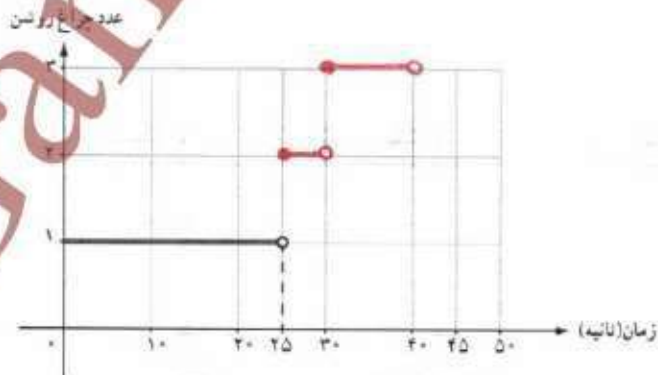
در کتاب بازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

فعالیت

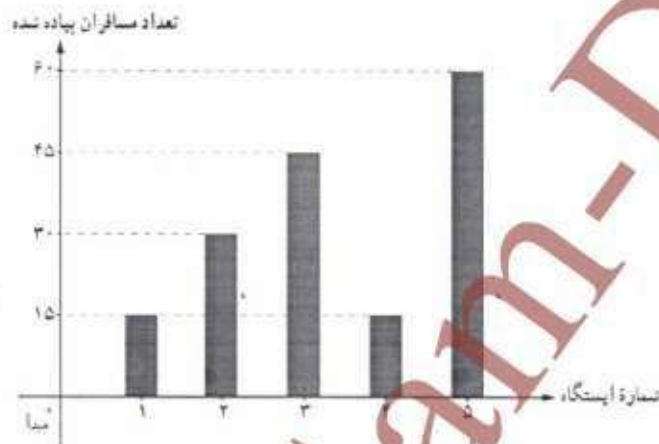


۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

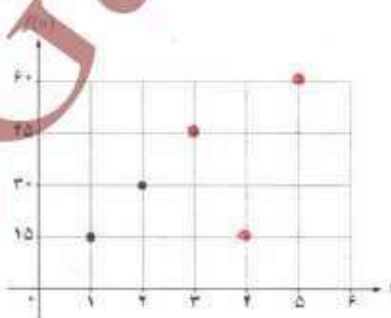
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر $f(n)$ ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	$۴۵ + ۱۵$	۶۰	۶۰



$$f(n) = \begin{cases} \dots, ۱۵, n, \dots & ۱ \leq n \leq ۳ \\ ۱۵ + ۴۵(n-۴) & ۴ \leq n \leq ۵ \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

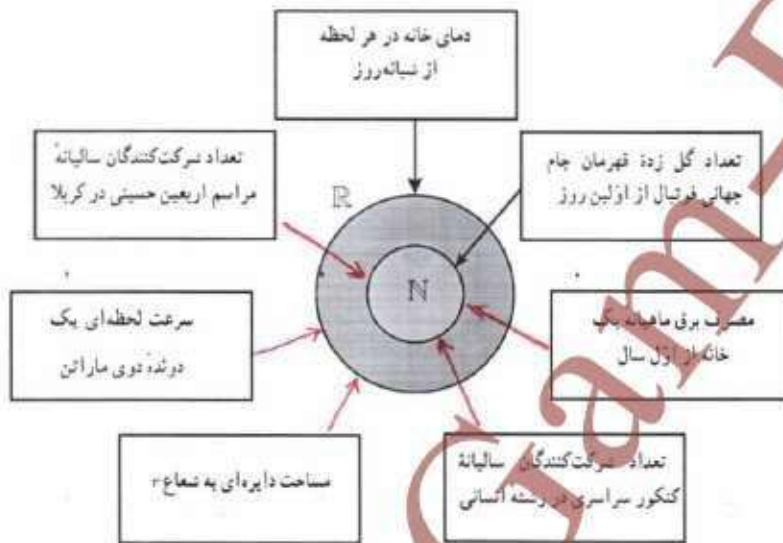
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid ۱ \leq n \leq ۵\} \quad R_f = \{۱۵, ۳۰, ۴۵, ۶۰\}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار جراح راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵م است و تابع در تمامی این زمان قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

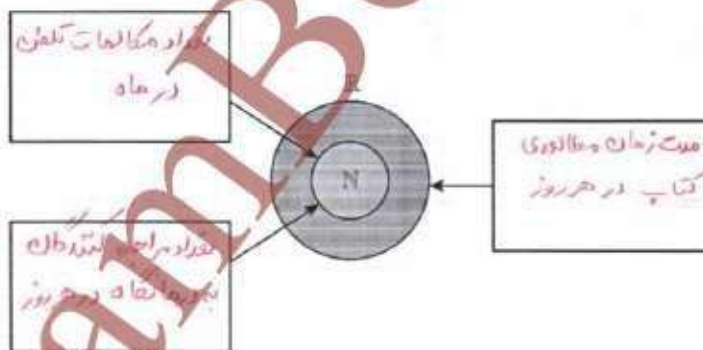
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر کتاب‌تایع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشند، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:

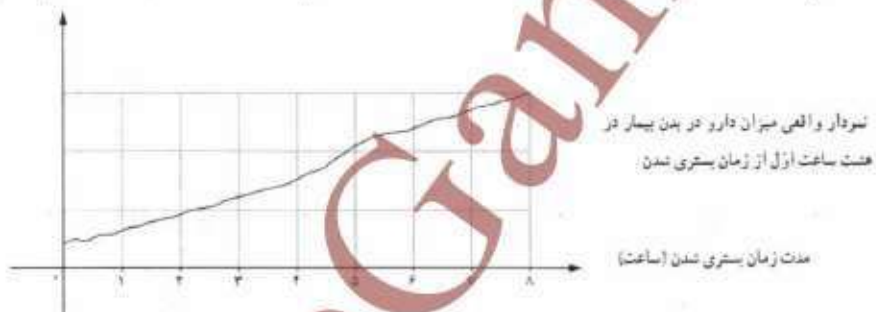


در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و ...ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

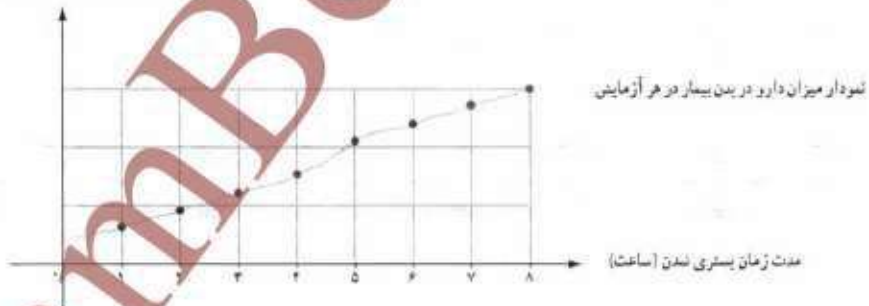
کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می‌کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه‌روز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند. به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی‌گرم)



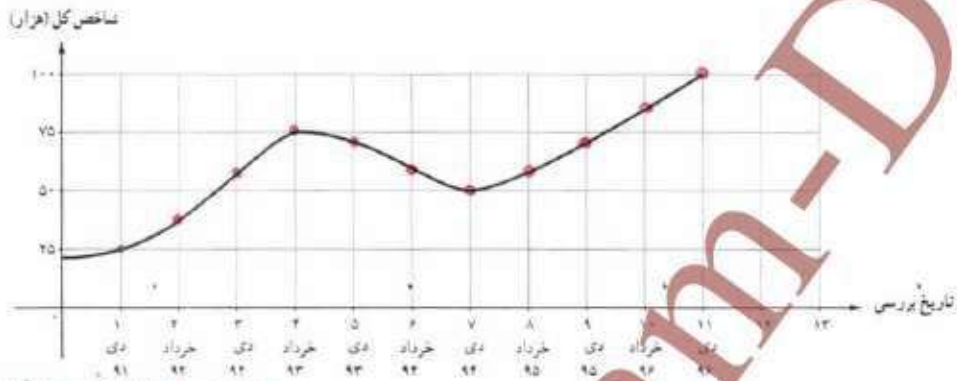
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی‌گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می‌دهد.



رسمی

نزدی ۹۱ دی فروردین ۹۲ اردیبهشت ۹۲ خرداد ۹۲ اردیبهشت ۹۲ خرداد ۹۲ اردیبهشت ۹۲ خرداد ۹۲ اردیبهشت ۹۲ خرداد ۹۲ اردیبهشت ۹۲ خرداد ۹۲

(الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا، اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

د _n آمین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$	۲۵	۴۰	۵۵	۷۵	۷۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰		
مقدار شاخص کل (هزار)											

(ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، شکل رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه باید، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ (۲) ۱۰۵,۰۰۰ (۳) ۱۱۲,۵۰۰ (۴) ۱۰۰,۰۰۰ (۵) ۱۲۵,۰۰۰

(د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

۱. شاخص بورس تهران: TSEPIX

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید». «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت». اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها - که در اخبار مطرح می‌شود - «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت بیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}}$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز × تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه × تعداد سهام در روز بررسی» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

- فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۱۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۰۰۰ \times ۱۵ + ۵۰۰ \times ۳} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲۰۰۰}{۱۹۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است.

توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۲۰۰۰ واحد برسد، یعنی ۵٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵٪ بوده است.

۱ فرمول بالا به روش محاسبه «لاسپیرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک نایمی یا دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

$$a_7 = 32$$

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر نهم و هفتم مثلث خیام، جملات نهم (a_9) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید. $a_7 = 32$

ب) بر اساس رابطه میان a_7 و a_9 ، رابطه میان a_n و a_{n+2} نیز a_7 و a_9 می‌توان مفادیر a_n و a_{n+2} را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟ $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای معلوم کنید.

بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ه) رابطه‌ای میان a_n و a_{n+1} بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند.

و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. خواندن کتاب ریاضی دهم

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

- (الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)
 (ب) رابطه ای برحسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

$$\begin{array}{cccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots \end{array}$$

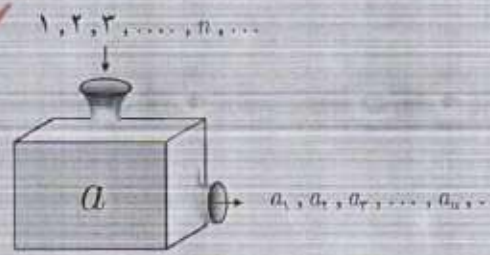
با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و با می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای \mathbb{R} این تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم.

معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳
$b_n = n^2 - ۱$	۰، ۳، ۸، ۱۵، ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ۲۴۳، ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3^2 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3^3 a_1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی‌کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n و n را مشخص کنیم:

$$\text{اولین جمله} \quad n=1 \rightarrow a_1=3$$

$$\text{دومین جمله} \quad n=2 \rightarrow a_2=9=3^2$$

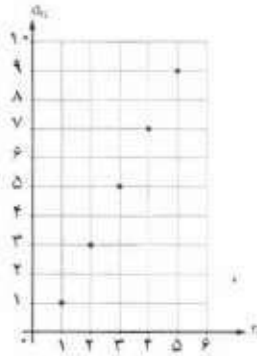
$$\text{سومین جمله} \quad n=3 \rightarrow a_3=27=3^3$$

پس، ضابطه تابعی به صورت $a_n = 3^n$ به دست می‌آید.

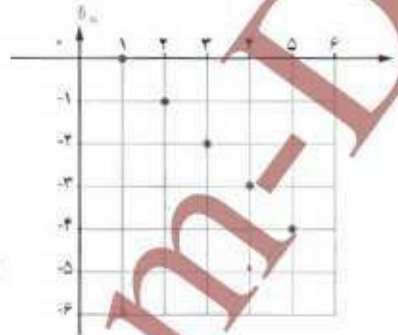
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد:

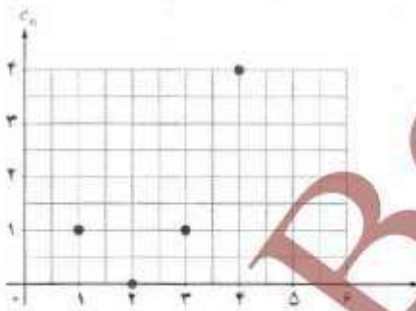
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



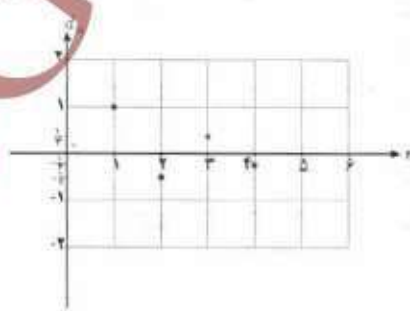
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



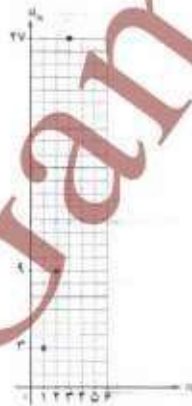
$$c_n = (n-2)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



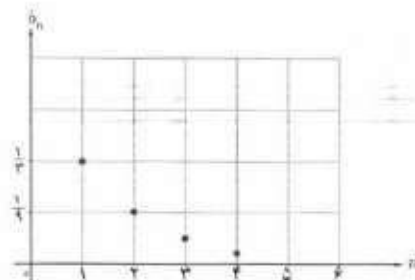
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = 3^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = r^{n-1}$	$a_{n+1} = r a_n$ $a_1 = 1$	$1, r, r^2, r^3, r^4, \dots$
	$a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
	$a_n = 2n + 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 3$	$3, 5, 7, 9, \dots$
	$a_n = 2n - 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 1$	$1, 3, 5, 7, \dots$
	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$		$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$
	$a_n = -n^2$		$-1, -4, -9, -16, \dots$
		$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$	$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبهٔ فیض آب^۱ (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقهٔ مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطهٔ زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود:
 هزینهٔ هر متر مکعب با توجه به طبقهٔ مصرف * میانگین مصرف = آب‌بها^۱

جدول ۱. محاسبهٔ آب‌بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۲	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۲
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۲۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۱ در تهران در یک ماه $20/49$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هر کدام از آنها را مشخص کنید.

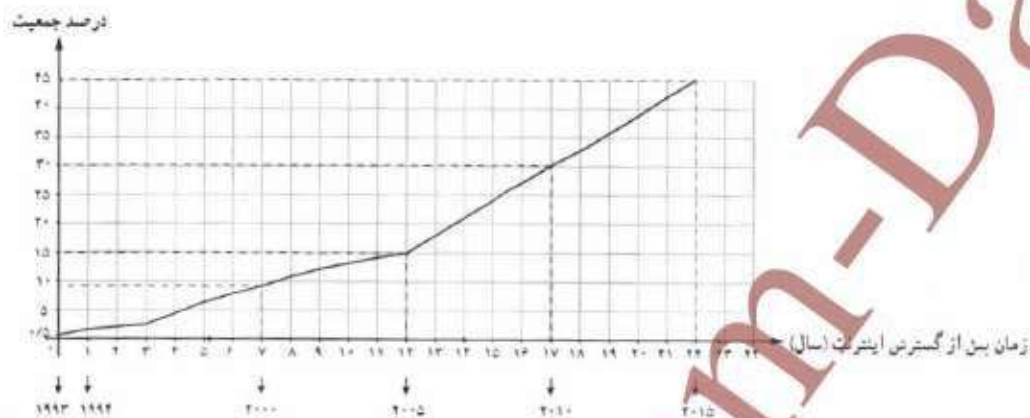
- الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر
 \mathbb{N} \mathbb{R}
- ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت
 \mathbb{N} \mathbb{R}
- ج) حجم مکعبی به ضلع x
 \mathbb{N} \mathbb{R}
- د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر
 \mathbb{N} \mathbb{R}
- ه) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی
 \mathbb{N} \mathbb{R}

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.rpww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی، پس از محاسبهٔ حاصل ضرب گشته شده بر اساس طبقهٔ مصرف، عدد ثابت از عدد به دست آمده، کم می‌شود.

با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{4}$ هزینهٔ واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینهٔ آب در مقایسه با کشورهای منطقه، بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۲. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران 18 است.

۲. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیا است، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $n = 4x - 1$ پیروی کند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_7$

ب) $c_7 - d_7$

ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ data.worldbank.org

جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
5, 8, 11, 14, 17, ...			
4, 1, 4, 1, 4, 1, ...			
1, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{6}$, ...			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{4}n + 3$

ب) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_n را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

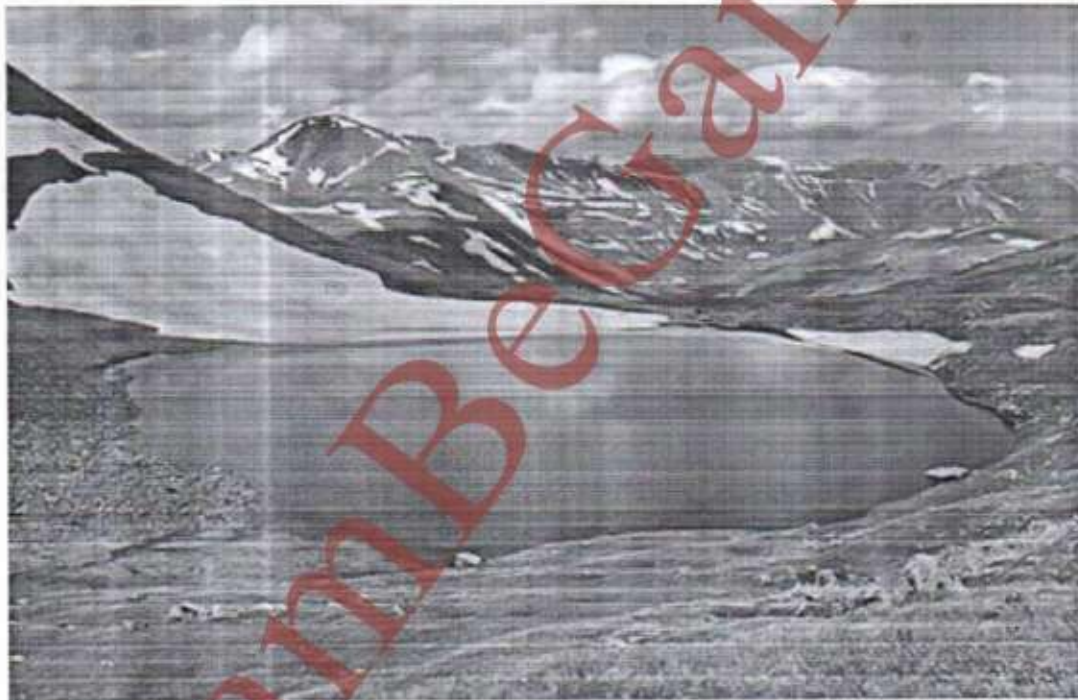
ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پسماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1 = ۲۵$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



دریاچه گهر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = a_2 = 1$$



$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$[, /) \cup [/ , /) \cup \dots \cup [/ ,) \quad [,)$$

$$f(/) \quad / \quad / \quad /$$

N	R	
	✓	
✓		
	✓	
✓		
✓		

$f() / f()$

t		
$f(t)$		

m _____

$h y_0 mt_0 ()$

$y mt h y t$

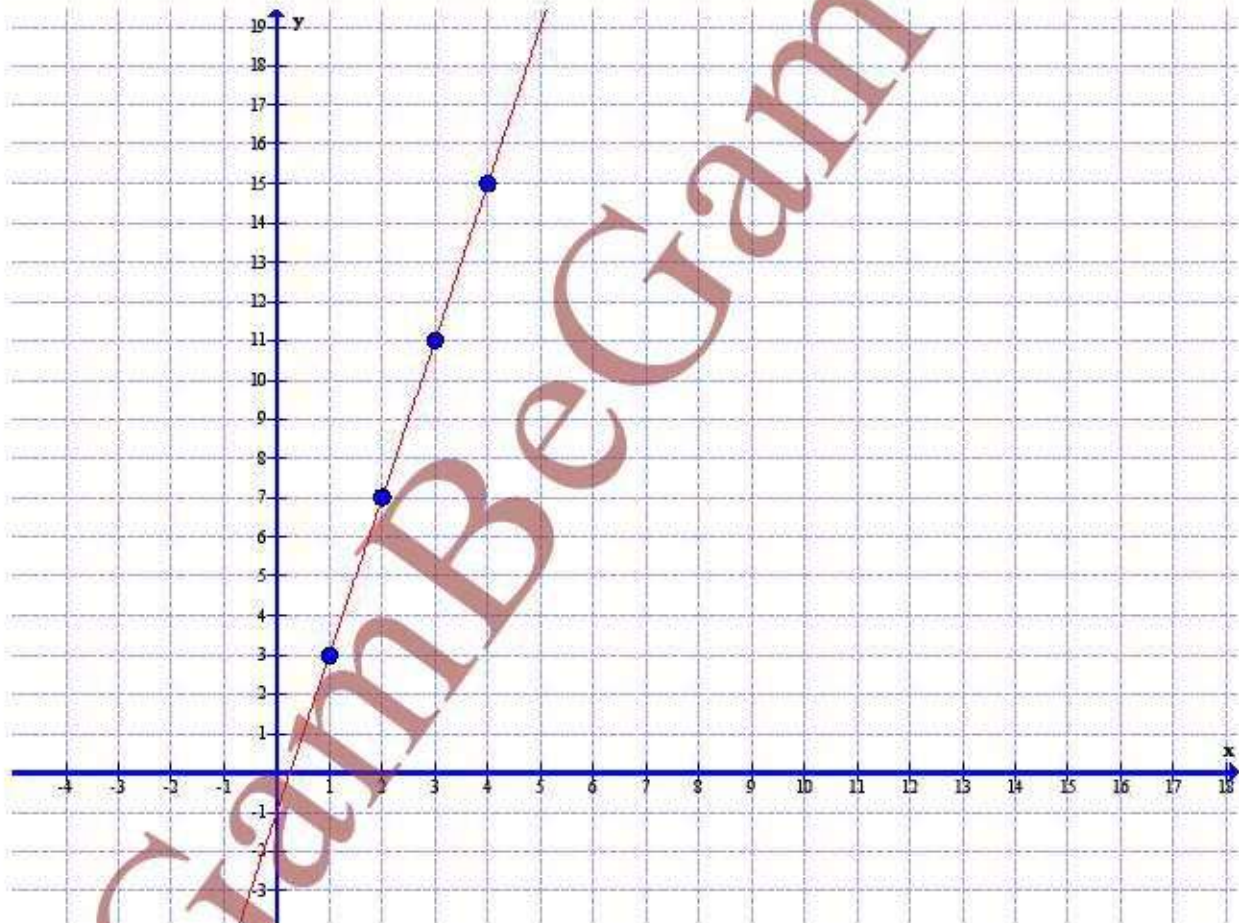
$f(t) t$

$f() ()$



	y	x
x		
y		

	a_n	n		
n				
a_n				



a_n n

a_n a_n

m

a_n a_n m



$$a \quad b \quad (-) \quad - \quad -$$

$$c \quad d \quad \left(\frac{\quad}{\quad}\right) \quad (\quad) \quad - \quad -$$

$$b \quad d \quad (-) \quad (\quad) \quad - \quad -$$

$$a_n \quad -a_n \quad ; \quad a$$

$$a \quad -a \quad -(-) \quad - \quad a \quad -a \quad -(-) \quad -$$

$$a \quad -a \quad -(-) \quad - \quad a \quad -a \quad -(-) \quad -$$

$$a \quad -a \quad -(-) \quad -$$

$$a_n \quad \frac{\quad}{a_n} \quad ; \quad a$$

$$a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad -$$

$$a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad - \quad a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad -$$

$$a \quad \frac{\quad}{a} \quad - \quad - \quad -$$

$$a_n \quad a_n \quad a_n \quad a_n \quad ; \quad a \quad a \quad a$$

$$a \quad a \quad a$$

$$n \quad a \quad a \quad a \quad a$$

$$n \quad a \quad a \quad a \quad a$$

$$a_n = a_n ()^n ; a$$

a

$$n = a a () ()$$

$$n = a a ()$$

$$n = a a () ()$$

$$n = a a ()$$

$$a_n = a_n ; a$$

$$a_n = n$$

$$a_n = a ; a$$

$$a_n = a ; a$$

$$a_n = \frac{n}{n}$$

$$a_n = \frac{n}{n} \quad n$$

$$a_n = \frac{n}{n}$$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

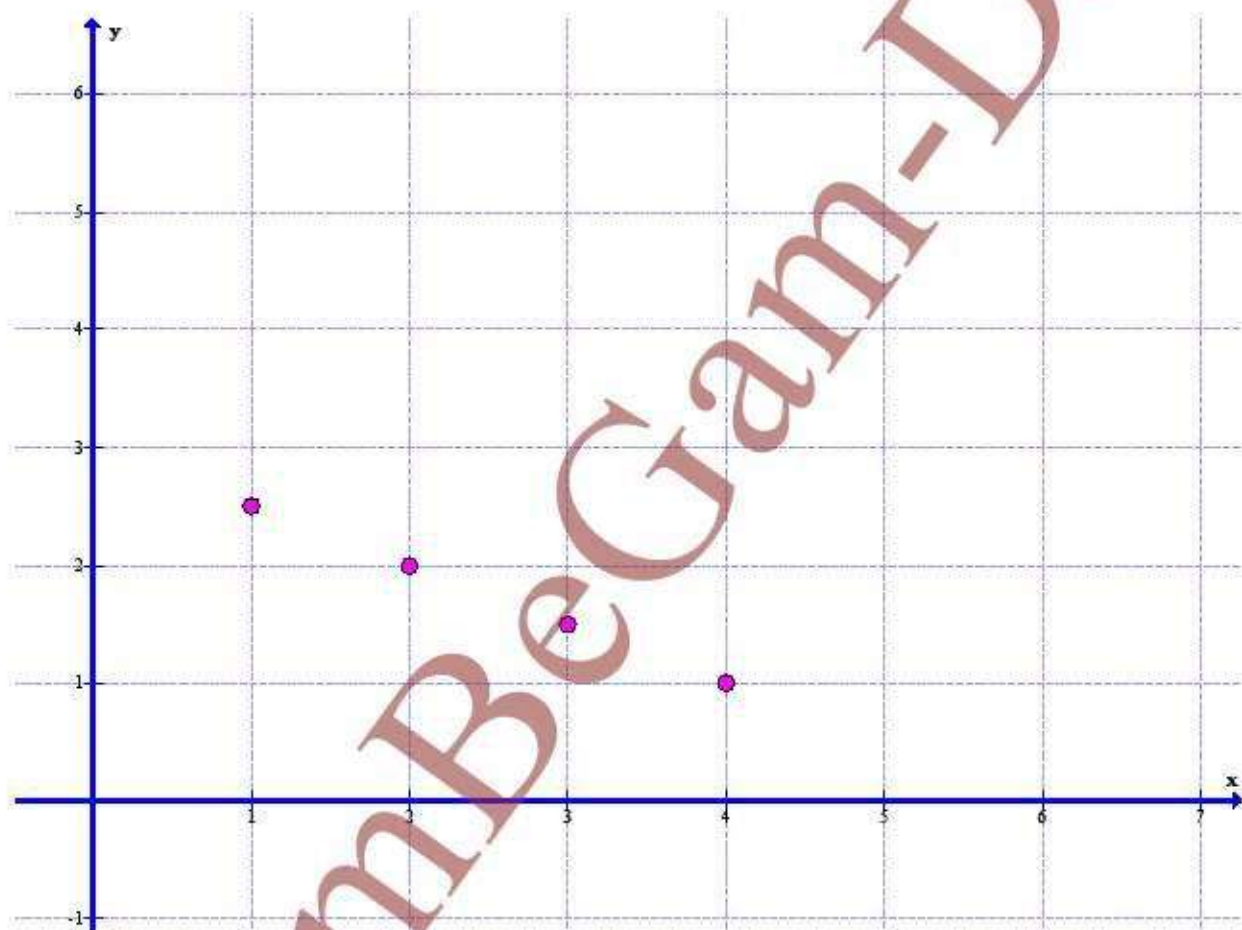
$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -() \quad -$

$n \quad a \quad a \quad (-) \quad -$

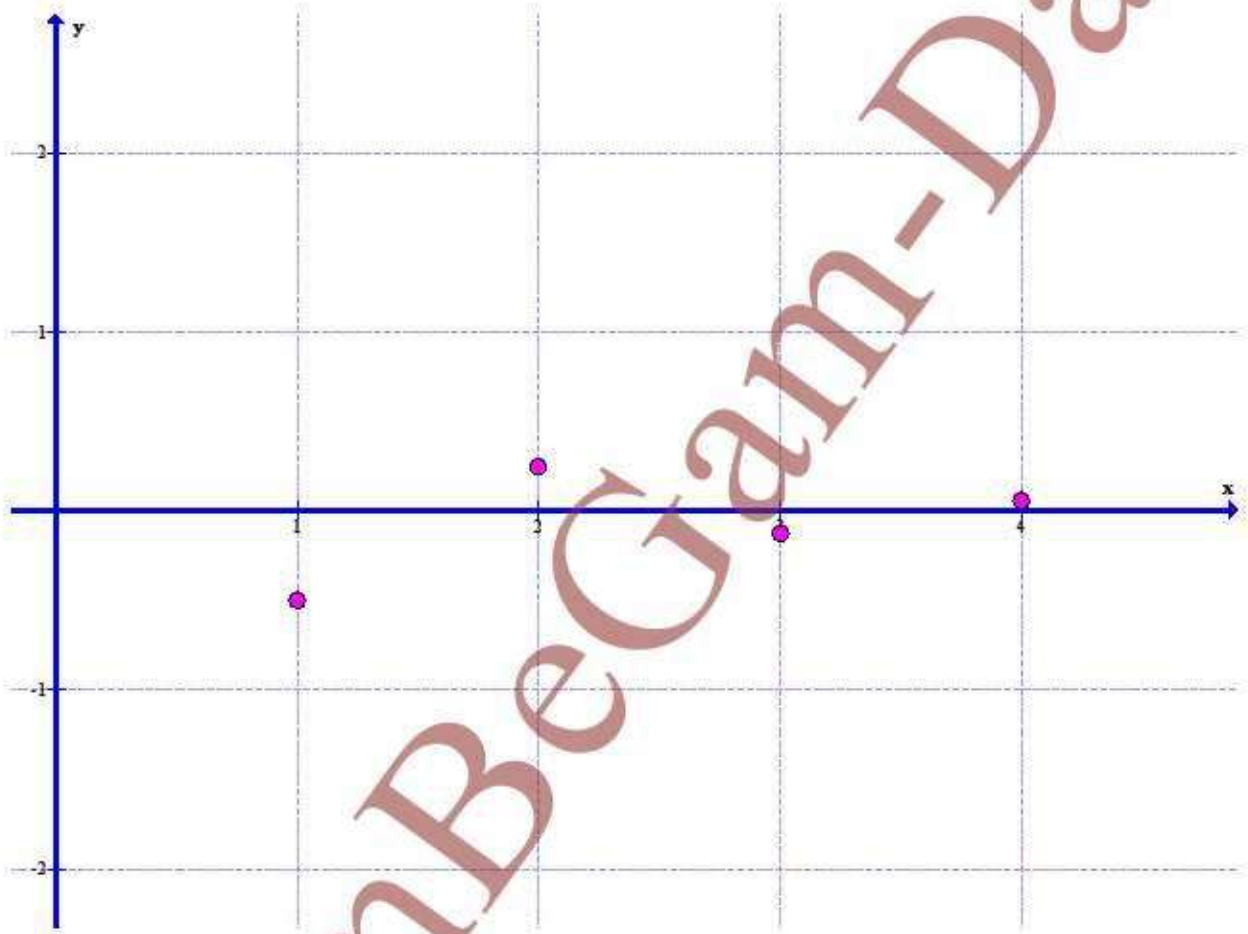
$- \quad -$

	$a_n = -n$			
n				
a_n	-		-	



@GambBeGam-Darsi

$a_n \quad (-)^n$				
n				
a_n	-	-	-	-



@GambBeGamb-Darsi

$$a \quad a \quad \frac{a}{a} \quad - \quad a \quad \frac{a}{a} \quad a \quad \frac{a}{a} \quad -$$

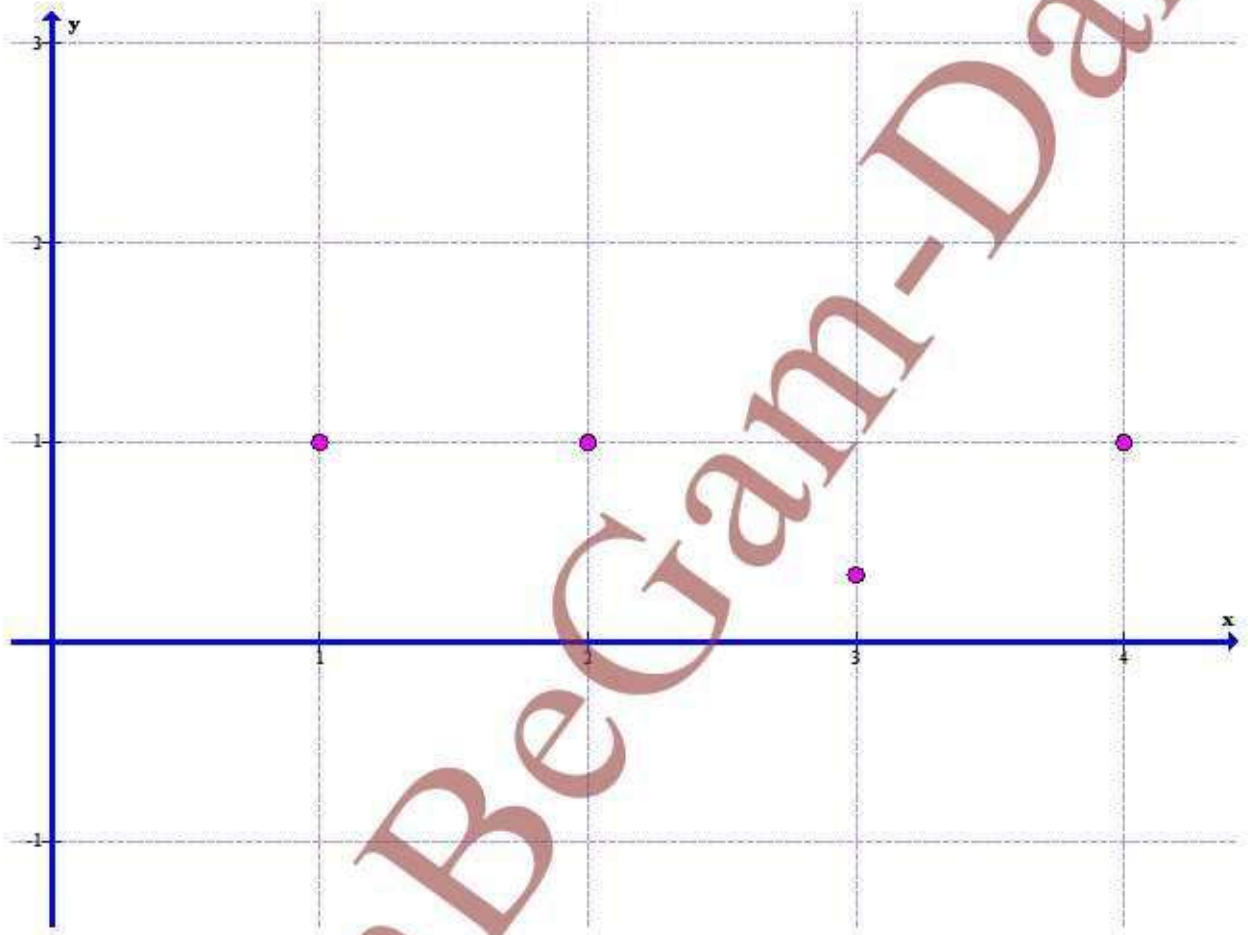
n				
a_n		-		-



@GambBeGam-Darsi

$a \quad a \quad a \quad - \quad a$

n				
a_n			-	



k

$$a_n \quad -\left(\frac{a_n}{a_n}\right) ; a$$

$$a \quad -\left(\frac{a}{a}\right) \quad -\left(-\right) \quad -$$

$$a \quad -\left(\frac{a}{a}\right) \quad -\left(-\right) \quad -\left(-\right) \quad - \quad - \quad - \quad /$$

$$a_n = -\left(a_n \frac{1}{a_n}\right); a$$

$$a = -\left(a \frac{1}{a}\right) = -\left(1\right) = -\left(1\right)$$

$$a = -\left(a \frac{1}{a}\right) = -\left(1\right) = -\left(1\right)$$

$$a_n = -\left(a_n \frac{1}{a_n}\right); a$$

$$a = -\left(a \frac{1}{a}\right) = -\left(1\right) = -\left(1\right)$$

$$a = -\left(a \frac{1}{a}\right) = -\left(1\right) = -\left(1\right)$$

$$a_n = a_n (n); a$$

$$a$$

$$n = a \cdot a ()$$

$$n = a \cdot a ()$$



جامعہ اسلامی دارسی

$p_n \quad p_n \quad \neg p_n \quad ; \quad p$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg() \quad / \quad /$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad / \quad /$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad /$

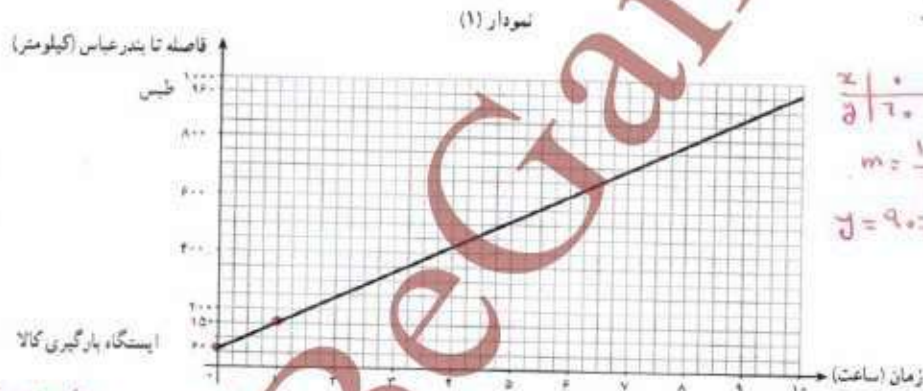
@GambBeGam-Darsi

درس ۲

دنباله های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طیس حرکت می کند.



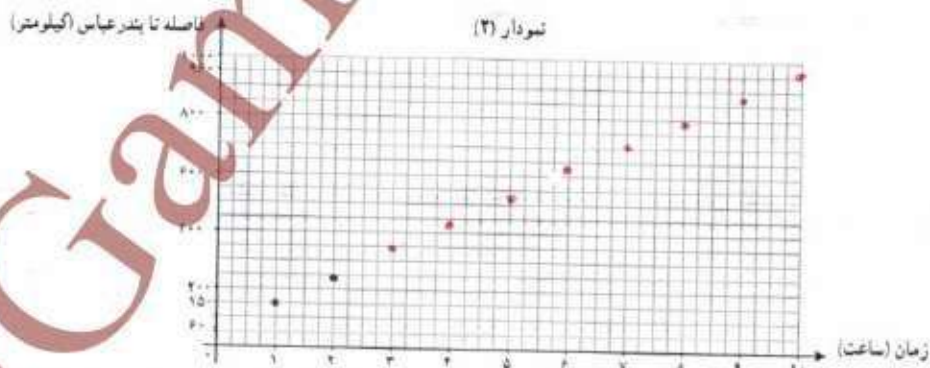
$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 70 \quad 150 \end{array} \right.$$

$$m = \frac{150 - 60}{1 - 0} = 90$$

$$y = 90x + 60$$

$$y = 90x + 60$$

الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.
 ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر ساعت را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.



ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

۶۱

دامنه و برد نمودار (۱) زیر مجموعه $1 \leq x \leq 10$ از اعداد صحیح است.
 ولی دامنه و برد نمودار (۲) زیر مجموعه $0 \leq x \leq 10$ از اعداد طبیعی است.


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

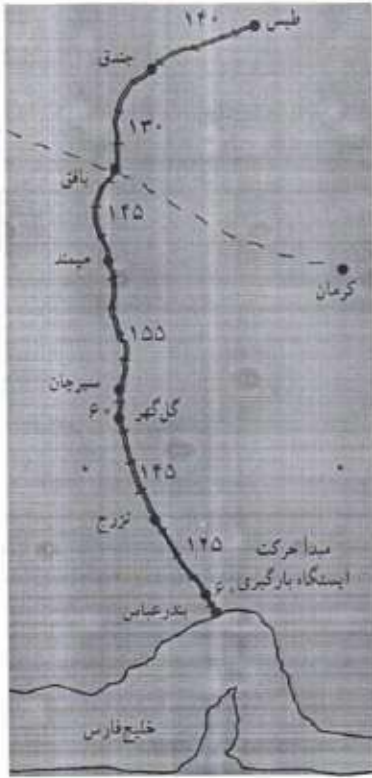
 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۲۵	$۱۸۵ + ۱۲۵ = ۳۱۰$
گل گهر - سیرجان	۶۰	$۳۱۰ + ۶۰ = ۳۷۰$
سیرجان - میمند	۱۵۵	$۳۷۰ + ۱۵۵ = ۵۲۵$
میمند - بافق	۱۲۵	$۵۲۵ + ۱۲۵ = ۶۵۰$
باقق - جندق	۱۳۰	$۶۵۰ + ۱۳۰ = ۷۸۰$
جندق - طیس	۱۴۰	$۷۸۰ + ۱۴۰ = ۹۲۰$



ه) با فرض اینکه n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰ = ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰ = ۲۴۰ + ۹۰ = ۳۳۰$	$a_4 = a_3 + ۹۰ = ۳۳۰ + ۹۰ = ۴۲۰$	$a_5 = a_4 + ۹۰ = ۴۲۰ + ۹۰ = ۵۱۰$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + ۹۰ = ۵۱۰ + ۹۰ = ۶۰۰$	$a_7 = a_6 + ۹۰ = ۶۰۰ + ۹۰ = ۶۹۰$	$a_8 = a_7 + ۹۰ = ۶۹۰ + ۹۰ = ۷۸۰$	$a_9 = a_8 + ۹۰ = ۷۸۰ + ۹۰ = ۸۷۰$	$a_{10} = a_9 + ۹۰ = ۸۷۰ + ۹۰ = ۹۶۰$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاهها محل مناسب تر برای قطار بوده اند؟ چرا؟

ایستگاه بافق - مقایسه مسافت و فاصله

از دو جدول ۶۲

$a_7 = ۶۹۰$
فاصله ۶۹۰ کیلومتری



ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + \dots + 9 \cdot 6 \\ a_7 = a_1 + \dots + 2 \dots \times 9 \\ a_7 = a_1 + \dots + 9 \dots \\ a_7 = a_1 + \dots + 7 \times 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + \dots + 9 \cdot 10 \\ a_{11} = a_1 + \dots + 10 \dots \times 9 \\ a_8 = a_1 + \dots + 8 \dots \times 9 \\ a_8 = a_1 + \dots + 3 \dots \times 9 \end{cases}$$

(۸-۵)

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9 \quad (۱)$$

رابطه بازگشتی: $a_n - a_{n-1} = \dots + 9 \cdot 1$

$$a_n - a_m = (n-m) \times 9$$

ج) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟ اما چه شد که ۹۰ به هر جمله برای تعیین a_n بوری (ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضریب جمع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)(90) \\ \rightarrow a_n &= a_1 + 90n - 90 \\ a_1 &= 150 \\ \rightarrow a_n &= 90n + 60 \end{aligned}$$

$$y = 90x + 60$$

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش» این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله « a » این دنباله با رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ معرفی می‌شود.

« d » را اختلاف مشترک^۲ دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن این است که اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence
۲. Common Difference

کار در کلاس

$$a_{n+1} - a_n = d$$

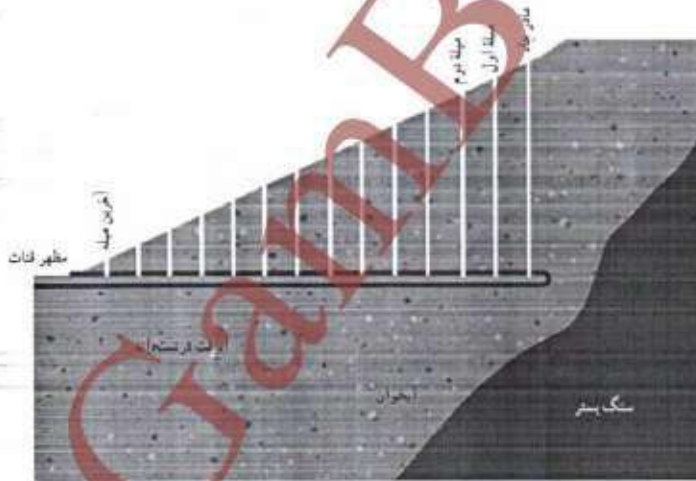
۱ ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

- ۲ نسبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک» d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
 ۳ جدول زیر را کامل کنید.
 اگر d مثبت باشد، هر چه d بزرگتر باشد، با هر چه n بزرگتر می‌شود، a_n بزرگتر می‌شود.
 اگر d منفی باشد، هر چه d کوچکتر باشد، با هر چه n بزرگتر می‌شود، a_n کوچکتر می‌شود.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots$	$a_n = a + (n-1)d$
2	3	$2, 5, 8, 11, 14, \dots$	$a_n = 2 + 3(n-1)$
4	-3	$4, 1, -2, -5, -8, \dots$	$a_n = 4 + (n-1)(-3)$
4	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \dots$	$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$
-2	5	$-2, 3, 8, 13, 18, \dots$	$a_n = -2 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادر چاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مفتی در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مفتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مفتی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

۱. مفتی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

$$n = \text{تعداد چاه‌ها}$$

$$\rightarrow -29 = -\frac{1}{5}n \rightarrow n = 58$$

$$a_n = a_1 + (n-1)(-\frac{1}{5})$$

$$\rightarrow 1,5 = 30 + (n-1)(-\frac{1}{5}) \rightarrow 1,5 - 30 = -\frac{1}{5}n + \frac{1}{5} \rightarrow -28,5 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}n$$

$$a_1 = 30, a_2 = 29,5, a_3 = 29, a_4 = 28,5, \dots, a_n = 1,5$$

خواندنی

سدی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نو، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان‌که در سفرنامه ناصرخسرو به قنات گناباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر جاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله.

حفر صدها جاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن‌هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همناست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق انسان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها غلٹی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارج یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و جاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مفتی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، متحس می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مفتی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روز خود را با لباس سفید و اشهدگوبان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شبی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانش زمین نیازی به وجود پست برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادی این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون جاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن‌رو که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله جاه‌ها، آب توسط جاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نيل به توسعه پایدار، نوشته شده است: قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست‌کم به ۸۰۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد.

پیش از ۴۰۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشند؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکامان یا شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، سالگین بارش جوی کشور ۲۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر حوضت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۲۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

فعالیت

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3 + 2(1-1) = 3 + 0 = 3$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3 + 2(2-1) = 3 + 2 = 5$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 3 + 2(3-1) = 3 + 4 = 7$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 9$$

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با معاینه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

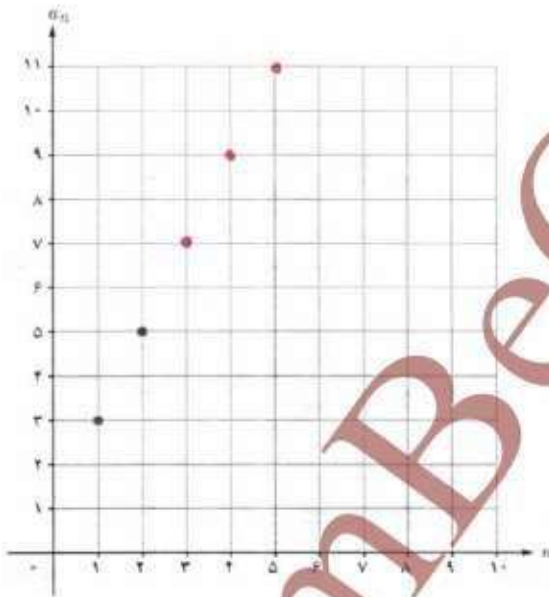
$$y = 2x + 1$$

معادله خط

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

$$d = m = 2$$

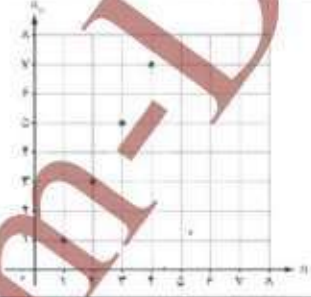
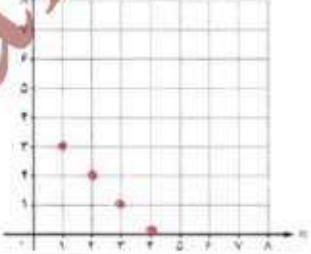
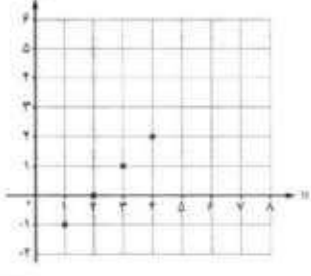
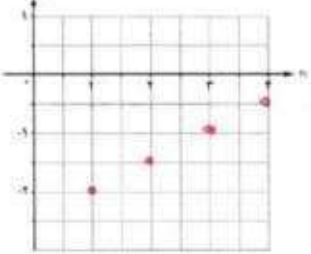
مساویند.



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

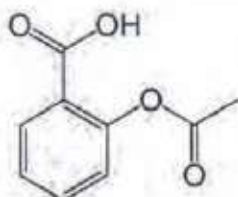
ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱، ۳، ۵، ۷	
$y = -x + 2$	$a_n = -n + 2$	۳، ۲، ۱، ۰، ...	
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	۱، ۲، ۳، ...	
$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$	$a_n = \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	



$y = mx + h$
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$h = y_1 - mx_1$

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود؟
ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهانه ۲۴۰۰,۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهانهٔ او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (مادر را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)
با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی بی‌روی می‌گردد. زیرا:



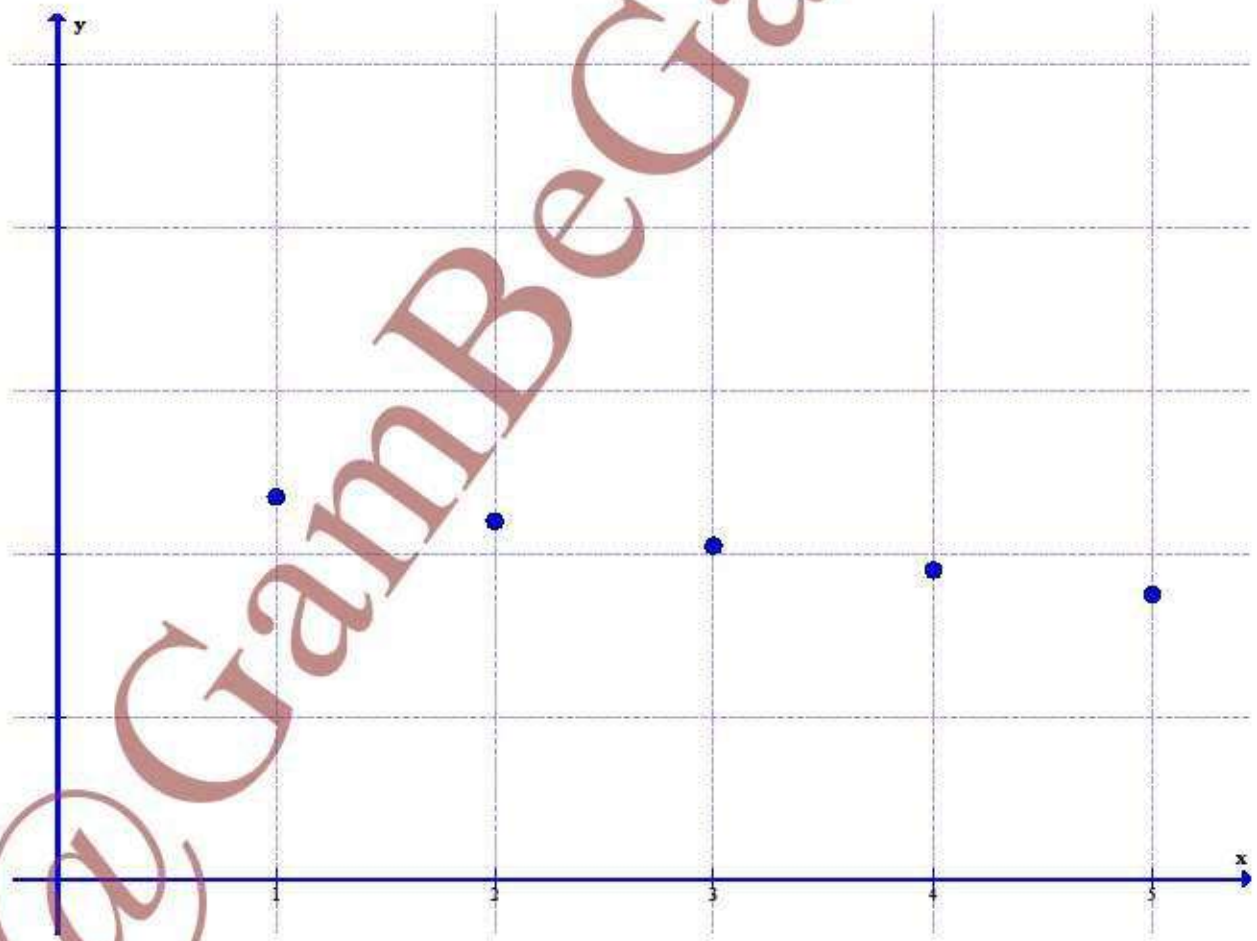
بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر یا مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطهٔ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

باید باشد.

a	a	a	...					

a_n n a_n n a_n n



n							
b_m							
m							

b

b

b

\dots

b_n

m

b_m

m

m

m

$/$

$/$

$/$

—

				n
				n

a_n

n

a_n

n

n

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد جاهای فنات» مشخص شد که فنات موردنظر ۵۸ جاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $(1/5, 2, 29/5, 29, \dots, 30)$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مفتی در هر روز بتواند ۲ متر جاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مفتی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع جاه‌های گفته شده را حفر کند. الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ جاه حفر شده چند متر است. برای این کار، مجموع عمق جاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمیق‌ترین جاه و بار دیگر از کم عمیق‌ترین تا عمیق‌ترین جاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\text{مجموع ۵۸ جاه از مادر جاه تا آخرین میله: } S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$\text{مجموع ۵۸ جاه از آخرین میله تا مادر جاه: } S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مفتی روزانه ۲ متر جاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \frac{305}{25}$$

بنابراین، مفتی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا فنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \& \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع جاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

$d = 5$
 a_1, a_2, \dots, a_n
 ۱۹۹ و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $199 = -1 + (n-1)(5) \rightarrow 200 = 5n - 5 \rightarrow n = \frac{205}{5} = 41$

$S_{41} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 4099$

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

$-2, 3, 8, 13, 18, \dots$ $n = 10$
 $d = 5$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + (10-1)(5)) = 5(-4 + 45) = 205$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$a_1 = 1$ $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n - 1$ $a_{30} = 2(30) - 1 = 59$

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(1 + 59) = 900$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی،

در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده

است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن

سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

$15, 18, 21, \dots$

$S_n = 870, d = 3, a_1 = 15$
 $n = ?$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(30 + 3n - 3) \rightarrow 1740 = n(27 + 3n) \rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0$

با توجه به معلوم بودن $S_n = 870$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

با جای گذاری $d = 3, a_1 = 15$ در رابطه بالا $n = 20$ به دست می‌آید.

$n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -29 \end{cases}$

چون n باید عدد طبیعی باشد.



تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

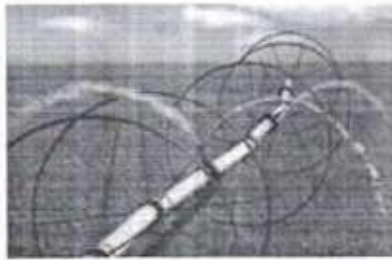
ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. بازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که دو آن سوراخ‌هایی برای بخش آب تعبیه شده است، به کمک جرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین جرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر جرخ تا جرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ جرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین جرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 1250° گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین 1875 گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b عدد m را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ بدست می‌آید. (توجه داشته باشیم که تعداد کل جملات $(m+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه بدست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد 1 و 8 قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را بدست آورید.

الف) 1 و 5 و 9 و 13 و 17 و 21 و 25 و 29 و 33 و 37 و 41 و 45 و 49 و 53 و 57 و 61 و 65 و 69 و 73 و 77 و 81 و 85 و 89 و 93 و 97 و 101 و 105 و 109 و 113 و 117 و 121 و 125 و 129 و 133 و 137 و 141 و 145 و 149 و 153 و 157 و 161 و 165 و 169 و 173 و 177 و 181 و 185 و 189 و 193 و 197 و 201 و 205 و 209 و 213 و 217 و 221 و 225 و 229 و 233 و 237 و 241 و 245 و 249 و 253 و 257 و 261 و 265 و 269 و 273 و 277 و 281 و 285 و 289 و 293 و 297 و 301 و 305 و 309 و 313 و 317 و 321 و 325 و 329 و 333 و 337 و 341 و 345 و 349 و 353 و 357 و 361 و 365 و 369 و 373 و 377 و 381 و 385 و 389 و 393 و 397 و 401 و 405 و 409 و 413 و 417 و 421 و 425 و 429 و 433 و 437 و 441 و 445 و 449 و 453 و 457 و 461 و 465 و 469 و 473 و 477 و 481 و 485 و 489 و 493 و 497 و 501 و 505 و 509 و 513 و 517 و 521 و 525 و 529 و 533 و 537 و 541 و 545 و 549 و 553 و 557 و 561 و 565 و 569 و 573 و 577 و 581 و 585 و 589 و 593 و 597 و 601 و 605 و 609 و 613 و 617 و 621 و 625 و 629 و 633 و 637 و 641 و 645 و 649 و 653 و 657 و 661 و 665 و 669 و 673 و 677 و 681 و 685 و 689 و 693 و 697 و 701 و 705 و 709 و 713 و 717 و 721 و 725 و 729 و 733 و 737 و 741 و 745 و 749 و 753 و 757 و 761 و 765 و 769 و 773 و 777 و 781 و 785 و 789 و 793 و 797 و 801 و 805 و 809 و 813 و 817 و 821 و 825 و 829 و 833 و 837 و 841 و 845 و 849 و 853 و 857 و 861 و 865 و 869 و 873 و 877 و 881 و 885 و 889 و 893 و 897 و 901 و 905 و 909 و 913 و 917 و 921 و 925 و 929 و 933 و 937 و 941 و 945 و 949 و 953 و 957 و 961 و 965 و 969 و 973 و 977 و 981 و 985 و 989 و 993 و 997 و 1001

ب) 13 و 17 و 21 و 25 و 29 و 33 و 37 و 41 و 45 و 49 و 53 و 57 و 61 و 65 و 69 و 73 و 77 و 81 و 85 و 89 و 93 و 97 و 101 و 105 و 109 و 113 و 117 و 121 و 125 و 129 و 133 و 137 و 141 و 145 و 149 و 153 و 157 و 161 و 165 و 169 و 173 و 177 و 181 و 185 و 189 و 193 و 197 و 201 و 205 و 209 و 213 و 217 و 221 و 225 و 229 و 233 و 237 و 241 و 245 و 249 و 253 و 257 و 261 و 265 و 269 و 273 و 277 و 281 و 285 و 289 و 293 و 297 و 301 و 305 و 309 و 313 و 317 و 321 و 325 و 329 و 333 و 337 و 341 و 345 و 349 و 353 و 357 و 361 و 365 و 369 و 373 و 377 و 381 و 385 و 389 و 393 و 397 و 401 و 405 و 409 و 413 و 417 و 421 و 425 و 429 و 433 و 437 و 441 و 445 و 449 و 453 و 457 و 461 و 465 و 469 و 473 و 477 و 481 و 485 و 489 و 493 و 497 و 501 و 505 و 509 و 513 و 517 و 521 و 525 و 529 و 533 و 537 و 541 و 545 و 549 و 553 و 557 و 561 و 565 و 569 و 573 و 577 و 581 و 585 و 589 و 593 و 597 و 601 و 605 و 609 و 613 و 617 و 621 و 625 و 629 و 633 و 637 و 641 و 645 و 649 و 653 و 657 و 661 و 665 و 669 و 673 و 677 و 681 و 685 و 689 و 693 و 697 و 701 و 705 و 709 و 713 و 717 و 721 و 725 و 729 و 733 و 737 و 741 و 745 و 749 و 753 و 757 و 761 و 765 و 769 و 773 و 777 و 781 و 785 و 789 و 793 و 797 و 801 و 805 و 809 و 813 و 817 و 821 و 825 و 829 و 833 و 837 و 841 و 845 و 849 و 853 و 857 و 861 و 865 و 869 و 873 و 877 و 881 و 885 و 889 و 893 و 897 و 901 و 905 و 909 و 913 و 917 و 921 و 925 و 929 و 933 و 937 و 941 و 945 و 949 و 953 و 957 و 961 و 965 و 969 و 973 و 977 و 981 و 985 و 989 و 993 و 997 و 1001



۹. باغ‌داران برای جیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

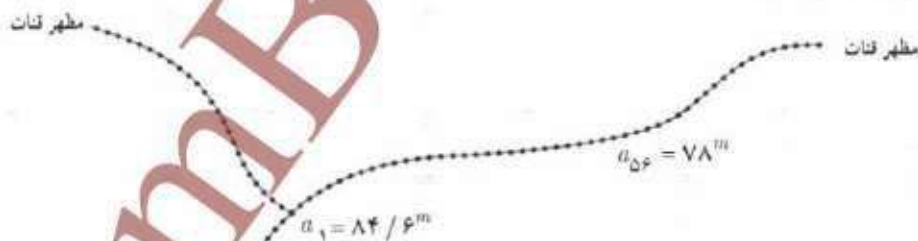
۱۰. ارزش امروزی قنات زارج طولانی‌ترین قنات ایران - عمق مادرچاه قنات زارج ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد پله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو پله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

(الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

(ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

(ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

(د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارج در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارج چقدر است؟ (براهتمتایی: « a » را عمق چاه « n » تا کانال قنات و « a_1 » را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

(الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

(ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر ۲۹۸۵۸۴ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

(ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

(د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

n	a a
n	a a
n	a a
n	a a
n	a a

a k

k k k k k k

k

a_n a $(n) d$ $(n) ()$ n

a_n a $(n) d$ a a a a d a d
 a d $(a d)$ $(a d)$ d d
 a d d a a

a_n a $(n) d$ a $() ()$

a	a	a		a

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

a

a

a

a

d a

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$$

b

a

m a b

n m

$$a = \frac{a + a_n}{2} = \frac{a + (a + (n-1)d)}{2} = a + \frac{(n-1)d}{2}$$

a_n

$$(n-1)d = \frac{2a - a_n}{1} = \frac{2a - (a + (n-1)d)}{1} \Rightarrow (n-1)d = \frac{a - (n-1)d}{1} \Rightarrow (n-1)d = \frac{a - (n-1)d}{1}$$

$$d = \frac{b - a}{n - m}$$

$$b - a + (n - 1)d$$

$$a + (n - 1)d$$

$$n \frac{b + a}{d}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ —()}$$



www.GamBe.com
مکتبہ اسلامیہ خورشیدی
مکتبہ اسلامیہ خورشیدی

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی ۱ درس

توان های گویا ۲ درس

تابع نمایی ۳ درس



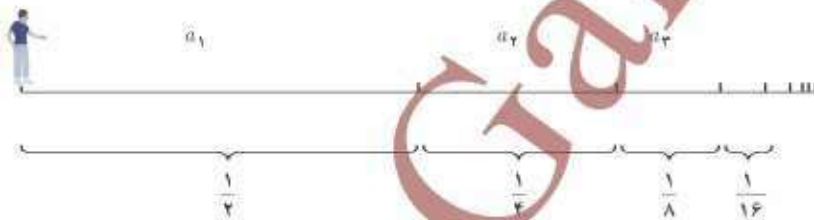
توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارند.

درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنون^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنون معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسافت باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود. به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{4}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله \dots و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{4}$ و t هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است! از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

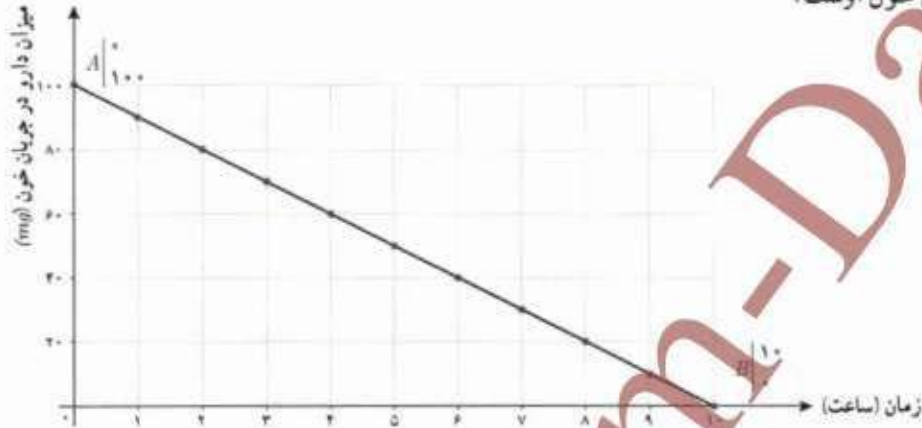
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برنوکور، نیوتن و اولبر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف 100 میلی گرم از داروی A، در هر ساعت 10 میلی گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش 10 میلی گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = a_n - 10$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m_{An} = \frac{0 - 100}{10 - 0} = -10$$

تهیه کننده:

$$h = 100 \text{ عرض از مبدأ} \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می توان مشخص کرد؛ زیرا:

$$a_1 = 100 \quad \Rightarrow a_n = 100 + (n-1)(-10) \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

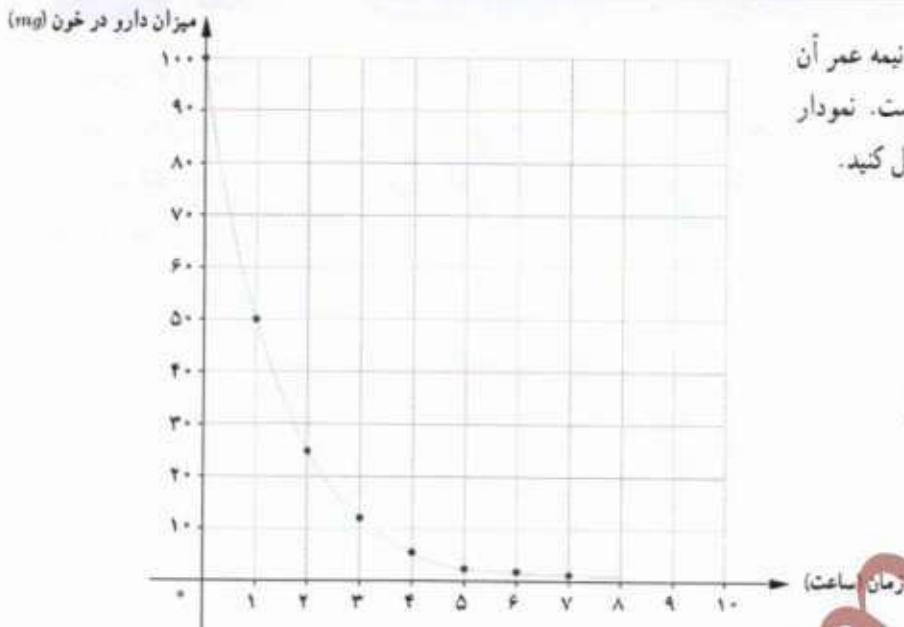
کاهش ثابت 10 میلی گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو: $d = -10$

میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی شود^۱ و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می یابد. فعالیت صفحه بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می کند.

۱. اثر این دارو را First Zero Kinetics می نامند.

۲. نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{1/2}$ نشان می دهند.

فعالیت



شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟ پس از ۳ نیمه عمر - ضریب - با افزایش زمان میزان دارو در بدن کم می‌شود و هر چه بیشتر می‌شود به قدری که می‌توان آن را نادیده حساب کرد. اما صفر نمی‌شود.
ب) اگر a_n میزان دارویی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت \dots در جمله پیشین به دست می‌آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \dots \times a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 50$$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

- در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

- در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

- کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند.

و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	فصلبه بازگستی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = (\frac{3}{2})^{n-1} (\frac{1}{81})$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{4}$	$4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{4}) a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 (-\frac{1}{4})^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{5})^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 (\frac{1}{4})^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

- | | | | |
|---------------------------------------|---|---|---|
| الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input checked="" type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت است. |
| ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، | <input checked="" type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت است. |
| ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input checked="" type="checkbox"/> ثابت است. |

۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 1 \times 0.15$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 1.6861 \times 0.15$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.19 \times 0.15$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.19 \times 0.19 \times 0.15$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.182 \times 0.15$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.182 \times 0.182 \times 0.15$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.177 \times 0.15$	۸	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow 0.177 \times 0.177 \times 0.15$

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $\Rightarrow n > 7$

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = r a_n \quad a_1 = a$$

کار در کلاس

هزینه استهلاک^۱ — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪ ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960,000 \quad v_2 = 960,000 \times \frac{90}{100} = 864,000 \quad v_3 = 864,000 \times \frac{90}{100} = 777,600 \quad v_n = 960,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد. هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین در v_1 که ارزش یخچال بیشتر است.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ یا چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟
د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

راه‌نمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480,000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنید.

ادامه بالای صفحه
ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

$$a_{n+1} = a_n - k \quad \text{کسر شود} \quad a_{n+1} = k a_n \quad \text{کسر شود}$$

۱. Depreciation Cost
بیانگر دنباله حسابی است. بیانگر دنباله هندسی است.

۲۸
زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود اما بیانگر آن که k درصد کسر شود. مقدار جملات کم و کمتر می‌شود اما هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

$$r = \frac{1}{2} \quad a_n = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

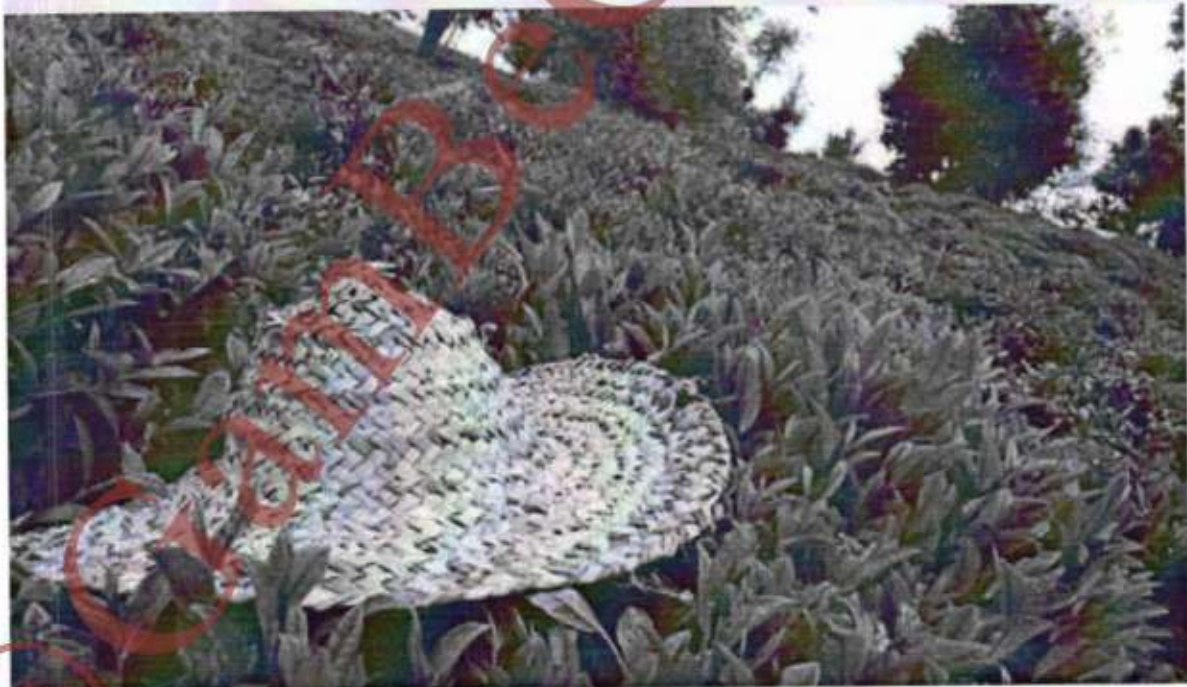
$$80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{160}$$

برای بدست آوردن چند نیمه عمر می‌توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند. یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه‌عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



$$\frac{0.5}{80} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{160} \Rightarrow 2^{n-1} > 160 \times 2^4 \Rightarrow 2^{n-1} > 2560 \Rightarrow 2^{n-4} > 160 > 128$$

$$n-4 > 3 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow \text{9 نیمه عمر یا بیشتر}$$

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل 80 میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.
ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)
د) با جای گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله:

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_1 = 80 \text{ mg}$
۲	۱۵ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۰۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{2} S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_4 = \frac{1}{2} S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_5 = \frac{1}{2} S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ پامداد	$S_6 = \frac{1}{2} S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$S_{n+1} = \dots + \frac{1}{2} S_n \quad S_1 = 80$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A = 80 \text{ mg}$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{2} S_1 = \dots$$

$$S_3 = \dots = A + \frac{1}{2} (A + \frac{1}{2} A) = A + \frac{1}{2} A + (\frac{1}{2})^2 A$$

۸۰

نیه کنده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به همین صورت برای محاسبه S_n :

$$S_p = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n A \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 160$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \cdot \frac{3}{4} = 120$$

$$S_2 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 160 \cdot \frac{15}{16} = 150$$

$$S_3 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = 160 \cdot \left(\frac{63}{64}\right) = 157.5$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم:

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{a - ra_n}{1-r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش:

$$a = 160 \quad r = \frac{1}{4}$$

(الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

(ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_r و S_r چیست؟

$$a_n = 160 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$S_n = 160 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

۹۳: میزان باقی مانده از هر قرص پس از ۲۴ ساعت مصرف کن

۹۴: میزان باقی مانده از هر قرص پس از ۲۴ ساعت مصرف کن

$$* S_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^3}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} \left(\frac{1-1}{1} \right) = \frac{2}{3}$$

$$* S_9 = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^9}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{1-1}{1} = \frac{2}{3}$$

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{21}{162}$ $S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^1}{1 - \frac{1}{3}} \right) =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \left(\frac{154-1}{154} \right)$ $= \frac{150}{154}$ $S_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \left(\frac{400-1}{400} \right)$ $= \frac{399}{1000}$ $S_2 =$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_1 =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_2 = \frac{\frac{2}{5}(1 - 5^2)}{1 - 5}$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:

الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل S_5 را به دست آورید.

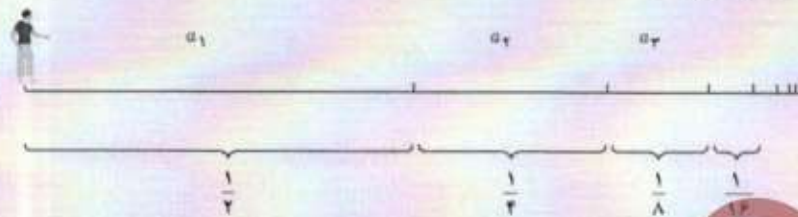


$$r = \frac{1}{2} \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$S_5 = 2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times 2 \left(\frac{1-1/32}{1/2} \right) = \frac{1-2/32}{1/32} = \frac{1-1/16}{1/16}$$

جواب تناقض (بارادوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم در حالتی که مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی خواسته می شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

$$\text{رابطه } T = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \dots \text{ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک } \frac{1}{4} \text{ است:}$$

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$= \frac{t(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}}$$

چون n تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{4})^n$ در بی نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{4})^n$ می توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{t(1 - \cancel{(\frac{1}{4})^n})}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{t}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}t = 1\frac{1}{3}t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می پنداشت اگر بی شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود.

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

⑤ a, b دنباله هندسی $\Rightarrow r^{n+2} = \frac{a}{b} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ $a_1 = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
 ۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ $a_1 = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 ۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $a_1 = 1$ $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$
 ۴) $a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 1$ $1, 2, 4, 8, \dots$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)
 a, b, c $\Rightarrow r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.
 $x(x+3) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 3x - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی‌درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار ۶٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟
 ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

$10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$

۵. میان دو عدد a و b عدد n را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۲ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۶) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \Rightarrow r^4 = \frac{242}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow a_7 = ar^6 = ar^2 \times r^4 = a_3 \times r^4 = 243 \times 9 = 2187$

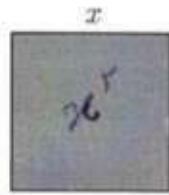
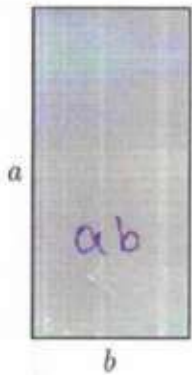
قسمت الف سوال ۴

$a_n = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_7 = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{6} = 16 \times 10^{11}$

n		n	
۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{0} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 1 < 7 \times 10^6$	۸	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 1.6384 < 7 \times 10^6$
۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.4 < 7 \times 10^6$	۹	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.65536 < 7 \times 10^6$
۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.16 < 7 \times 10^6$	۱۰	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.262144 < 7 \times 10^6$
۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.064 < 7 \times 10^6$	۱۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.1048576 < 7 \times 10^6$
۵	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.0256 < 7 \times 10^6$	۱۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.04194304 < 7 \times 10^6$
۶	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.01024 < 7 \times 10^6$	۱۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12} < 7 \times 10^6 \Rightarrow 0.016777216 < 7 \times 10^6$

بعد از ۱۴ بار

$$8) a_{20} = 1500 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{20-1} \Rightarrow a_5 = 1500 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{5-1} = 1500 \cdot 0.52200625 = 783.009375$$



7. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟

الف) x, b, a و x, a, b ✓
 ب) a, x, a و b, x, a ✓

و واسطه هندسی بین a و b است پس دنباله هندسی آن a, x, b یا b, x, a باشد

8. یک شهاب سنگ 15 هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه 15% از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

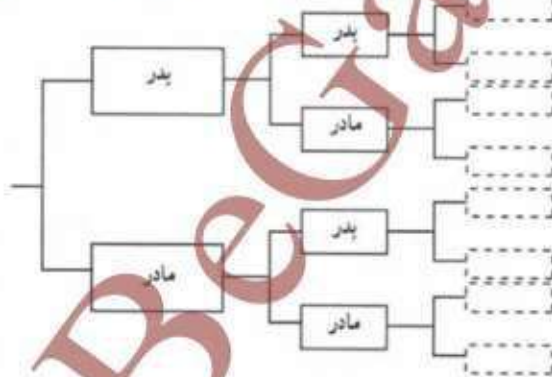
9. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد. الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.) ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

2, 4, 8, ...

$a_1 = 2$ $r = 2$

الف) $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$



ب) $S_n = 2 \times \frac{1-2^{11}}{1-2}$

$= -2 + 2^{11} = -2 + 2048$

$= 2046$

$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n}{1-r}$

$S_n = \frac{1 - 4 \times 4^9}{1-4} = -\frac{14 \times 4^9}{3} = 2046$

$a_1 = 1$ $r = 4$

10. مجموع های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4 \times 16$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$a_1 = \frac{1}{5}$ $r = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^9}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{2^9 - 1}{2^9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^9 - 1}{4 \times 5} = \frac{511}{20} = 25.55$

11. نخستین جمله یک دنباله هندسی 1536 و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر 6 است؟ مجموع

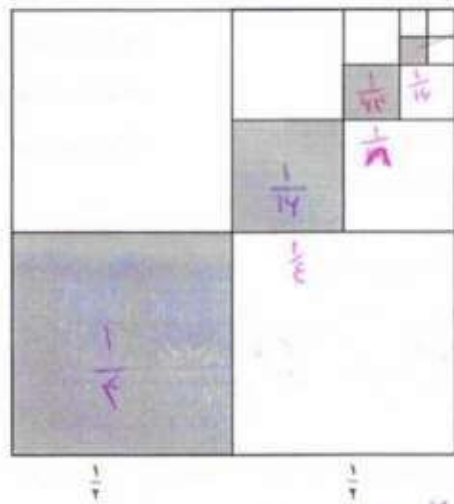
جملات این دنباله از 1536 تا عدد 6 را به دست آورید. $a_n = 2$ $n = ?$

$a_1 = 1536$ $r = \frac{1}{4}$

الف) $a_n = 1536 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1536}{1536} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{1536} = \frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow 4^{n-1} = 1536$

$2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{1345}{4096}$$

بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.

$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{50}{3}$			
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	10		
$\frac{1}{10}$		2	4	18	
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{4}$	1	4		
$\frac{5}{4}$		8		$\frac{2}{3}$	
$\frac{50}{4}$		16	4	1	$\frac{1}{4}$
$\frac{120}{4}$		32			$\frac{1}{14}$
$\frac{400}{4}$		64			$\frac{1}{49}$

درس ۲

«ریشه نام و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوه ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4^2 = 16$$

$$(2)^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$7^3 = 343$$

$$(-3)^4 = 81$$

$$-3^4 = -81$$

$$(0/1)^0 = (10^{-2})^0 = 10^{-0} = 1 \quad \left(1\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$(-36)^7 + 9^7 = \left(\frac{-36}{9}\right)^7 = (-4)^7 \quad (2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 \times \left(2\frac{1}{1}\right)^2 = (2/1)^{10}$$

$$(-4)^3 \times (-5)^3 =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{5-4} = \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \left(\frac{4}{5}\right) \quad (10^0)^4 = 10^0 = 1$$

$$(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 10^3$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (2/1)^3 \times (2/1)^7 = (2/1)^{16}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{6}{5})^5 \div (\frac{6}{5})^8 = (\frac{6}{5})^{5-8} = (\frac{6}{5})^{-3} = (\frac{5}{6})^3$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-4)^2 \times (-2)^3 = (-4 \times -2)^3 = 8^3$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-36)^2 \div 2^2 = (\frac{-36}{2})^2 = (-18)^2$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^{10} \div 9^2 = 9^{10-2} = 9^8$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$12^3 \div 3^3 = (\frac{12}{3})^3 = 4^3$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد 16 ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس 4 و -4 یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه‌های دوم عدد 16 هستند. همچنین ریشه سوم عدد 27 مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد 27 ، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر 3 می‌باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -32 ، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -2 و ریشه‌های نسبی عدد 64 ، ریشه‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر 2 و -2 می‌باشند.

جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
\sqrt{a}	$\sqrt{64}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[6]{-64}$
ریشه‌های نهم	$\sqrt[9]{64} = 2, -\sqrt[9]{64} = -2$	وجود ندارد
\sqrt{a}	$\sqrt{44} = 2$	وجود ندارد
ریشه‌های دوازدهم	$\sqrt[12]{64}$	$\sqrt[12]{-64}$
$\sqrt[13]{a}$	$\sqrt[13]{64}$	$\sqrt[13]{-64}$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه: $b^n = a$.
 همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی تر، درباره ریشه‌های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می‌توان گفت:

$a \geq 0$	n زوج باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ $\Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3, -\sqrt[4]{81} = -3$

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a} \quad \text{ریشه های } a \text{ عدد } 25, n=8 \Rightarrow a=25, n=8 \text{ زوج است و } a \geq 0$$

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a} \quad \text{ریشه سوم عدد } 64, n=3 \Rightarrow a=64, n=3 \text{ فرد است و } a \geq 0$$

$$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} \quad \text{ریشه دهم عدد } -24, n=10 \Rightarrow a=-24, n=10 \text{ زوج است و } a < 0$$

$$a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} \quad \text{ریشه سوم عدد } -27, n=3 \Rightarrow a=-27, n=3 \text{ فرد است و } a < 0$$

۱. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt{a^2} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

$$\text{برای مثال، } \sqrt[5]{(-15)^5} = -15, \sqrt[5]{(-\frac{1}{3})^5} = -\frac{1}{3} \text{ و همچنین } \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \text{ و } \sqrt[2]{(5)^2} = 5$$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائه کنند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و بیش بینی کرده که این سود در سال های آینده نیز محقق شود. اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند:

$$\text{زمان } n \text{ حساب سال} \rightarrow \text{سرمایه شرکت} = 100 \times (1/2)^n \text{ (بر حسب میلیون تومان)}$$



تپه گنده:

گروه دانشی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$100 \times (1/2)^1 = 50 \text{ سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت یک سال}$$

$$100 \times (1/2)^2 = 25 \text{ سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهام داران این شرکت می‌خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا $t=0.5$ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟
 $a_n = 100 \times (1/2)^{t/0.5}$ $a_n = 100 \times (1/2)^{2t}$

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد ریست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	—	۸
جرم (گرم)	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$	$2^7=128$	—	2^8

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شوم و نمی‌توانم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟
 پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟
 محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که 2^2 گرم شود، اما مقدار 2^2 را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.
 پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می‌شود. با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$. (زیرا a مثبت است.) بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.
 معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{2})^2 = (2^{\frac{1}{2}})^2 \Rightarrow 2 = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین، داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود. حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

$$2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} \quad \text{پس از } 10 \text{ دقیقه (} \frac{1}{6} \text{ ساعت)} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad \text{پس از } 20 \text{ دقیقه (} \frac{1}{3} \text{ ساعت)}$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هر جا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که:

$$2^6 = 2^{2 \cdot 3} = (2^2)^3$$

درباره توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \qquad \sqrt[5]{7} = 7^{5 \cdot \frac{1}{5}} = (7^5)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \quad 6^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{6^5} \quad 12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}} \quad (-0.001)^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{(-0.001)^{12}}$$

روابطی که در ابتدای درس درباره توان های صحیح اعداد یادآوری شد، در خصوص توان های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارات های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارات های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \quad 7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3} \quad \sqrt{25} = 5^{\frac{2}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2/7} = (2/7)^{\frac{1}{3}} \quad (1/31)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1/31} \quad \sqrt{1} = 1^{\frac{2}{2}}$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$6 \text{ ماه } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ سال بعد} : 100 \times (1/2)^2 = 100 \times \sqrt{1/2}$$

$$200 \text{ روز بعد} : 100 \times (1/2)^{\frac{200}{365}} = 100 \times \sqrt[365]{(1/2)^{200}}$$

$$3 \text{ سال و } 6 \text{ ماه بعد} : 100 \times (1/2)^{\frac{3.5}{1}} = 100 \times \sqrt[2]{(1/2)^{3.5}}$$

$$1 \text{ سال و } 2 \text{ ماه بعد} : 100 \times (1/2)^{\frac{1.2}{1}} = 100 \times \sqrt[12]{(1/2)^{1.2}}$$

۱- در این کتاب تمامی توان های اعداد گویا هستند.

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}} = 10 = 10$$

$$125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \times \frac{1}{3}} = 5$$

$$325^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2$$

۴. هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{3}} = 14^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \quad -2(1000)^{\frac{1}{3}} = -2(10^3)^{\frac{1}{3}} = -2 \times 10 = -20$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3 \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$125^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} = 5 \quad 8^{\frac{2}{3}} \times (1/5)^{\frac{2}{3}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{3}} = (8/5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8/5)^2} = \sqrt[3]{64/25} = \sqrt[3]{144/125}$$

۵. دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^3} = \sqrt[3]{-512} = -8$$

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{5}$ یا هر دو برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

۲. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3 \quad 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 5^1 = 5 \quad 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 14^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \quad (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

$$\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \quad 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad (m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} (m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} =$$

نوبه کنند:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\left[\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(a^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (a^0)^{\frac{1}{2}} = a^0 = 1$$

$$(.136)^4 \times (.136)^x \times (.136)^{-2} = (.136)^7 \Rightarrow (.136)^{-2+x} = (.136)^7 \Rightarrow -2+x=7 \Rightarrow x=9$$

۳. در هر یک از تساوی های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times 9^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow 8^x = 8^5 \Rightarrow x=5$$

$$(.136)^4 \times (.136)^2 \times (.136)^{-6} = (.136)^7$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \quad \text{اشتباه چایی}$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^4 \Rightarrow \frac{x^5 \times 15^3}{3^8} = 5^4 \Rightarrow x^5 \times 2^3 \times 3^3 = 5^4 \times 3^8 \Rightarrow x^5 = \frac{5^4 \times 3^5}{2^3} \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{5^4 \times 3^5}{2^3}}$$

جواب در پایین صفحه

۴. همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^3 \times \frac{1}{3} = r^1 = r$$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$r = \left(\frac{3 \left(\frac{32\pi}{3}\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 \times \frac{1}{3} = 2^1 = 2$$



تپه گنده:
گروه ریاضی سطح دوم متوسطه، استان خوزستان

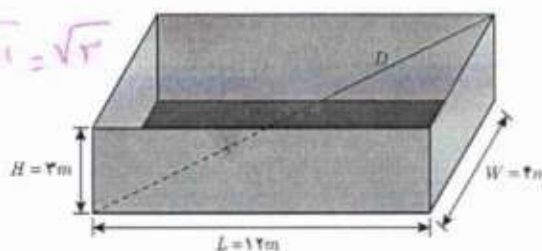
۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه) به دست می آید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1$ m باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$



درس ۳

تابع نمایی

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانش آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
$3^4 = 81$	۴
۲۴۳	۵
$3^5 = 243$	۶
$3^6 = 729$	۷
$3^7 = 2187$	۸
$3^8 = 6561$	۹
$3^9 = 19683$	۱۰
$3^{10} = 59049$?

(تعداد مراحل بازی) $= 3^n$ میزان امتیاز کسب شده

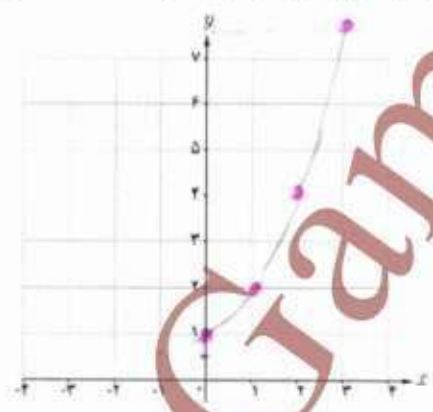
۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟ **مرحله هشتم**
 ۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به دست آورید. **بله**
 ۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

$a_{10} = 3^{10} = 59049$ $a_n = 3^n$
 $a_{20} = 3^{20} = 3486784401$

فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کند. دوباره به این فعالیت بزمی گردیم؛
 ۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

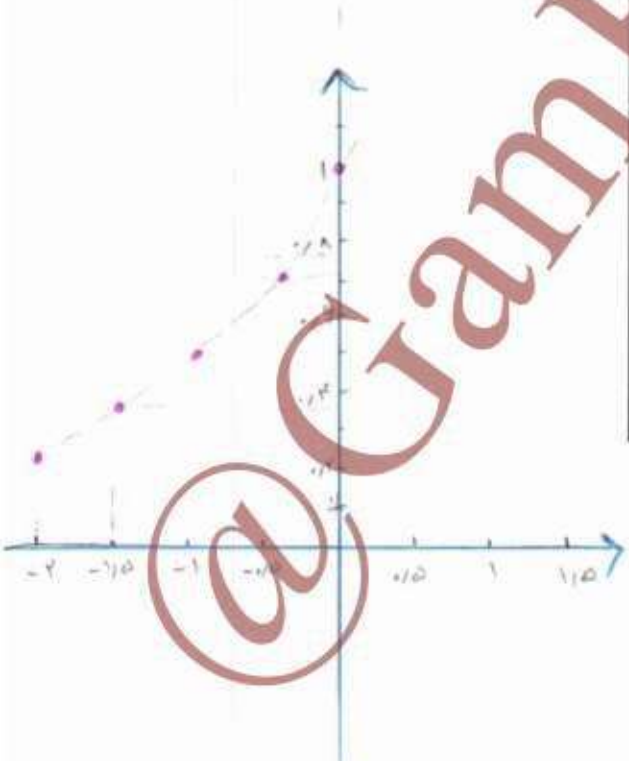
x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...



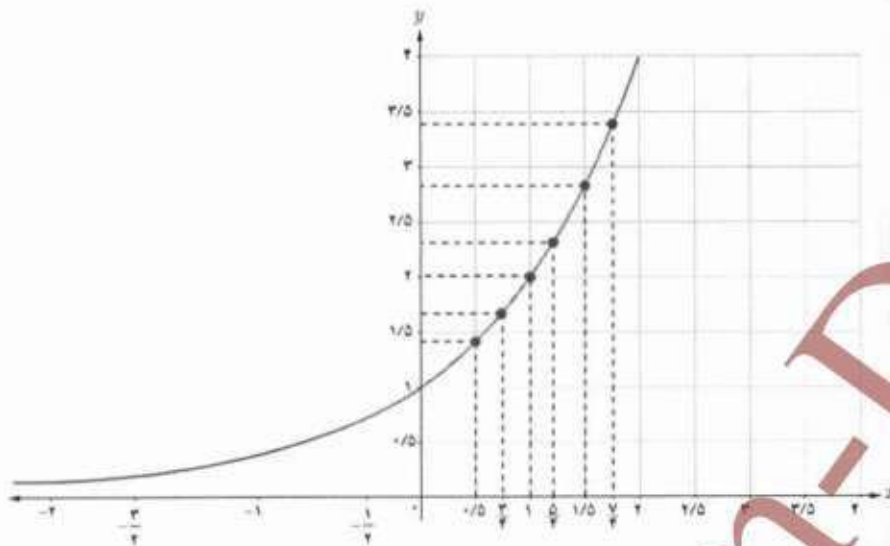
نویسه کننده:
 گروه ریاضی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲. جدول زیر را با مانسین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
	1
$-\frac{1}{2}$	≈ 0.707
-1	≈ 0.500
$-\frac{3}{2}$	≈ 0.353
-2	≈ 0.250



۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از \mathbb{R}^+ ، مجموعه $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

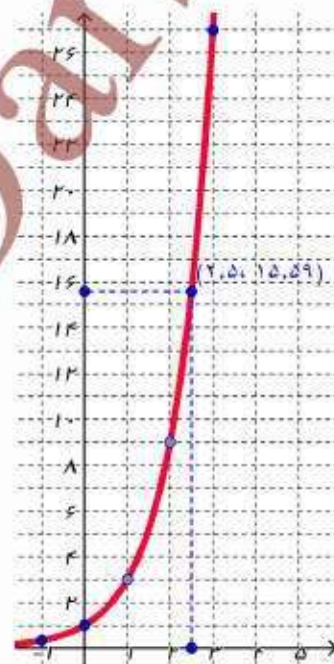
فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

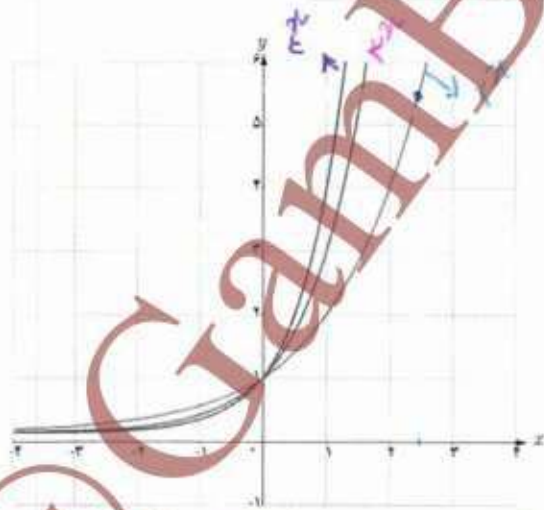
۱- این تابع به این علت نمایی نامیده می‌شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

x	3^x	y	محاسبه y با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{۳}{۲}$	$3^{-\frac{۳}{۲}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{۲}$	$3^{-\frac{1}{۲}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{۲}$	$3^{\frac{1}{۲}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۳
$\frac{۳}{۲}$	$3^{\frac{۳}{۲}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹



بجز خود
خط محور
داده به سمت ب
حد اقل محور را بیشتر باشد.



همان گونه که دیده می شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y ها را قطع می کند.

(ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد 3^2 را به دست آورید.

(پ) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت

شباهت

۱- هر سه نمودار y ما را نقطه $(۰, ۱)$ قطع می کنند

۲- هر سه تابع صعودی هستند

۳- با محور y ها برخورد نمی کنند

در طول $x=۱$ y ها یکسان به هم میزنند

میزان افزایش مقدار عرضهایشان با هم متفاوت است

فعالیت

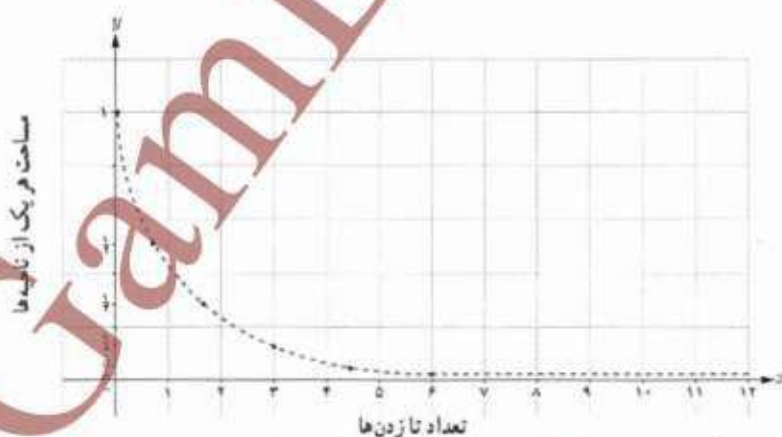
یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه هایی که بر اثر تا زدن های متوالی ایجاد می شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$
۵	$\frac{1}{32}$
...	...
۸	$\frac{1}{256}$
۹	$\frac{1}{512}$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می توانید پیشنهاد دهید؟
در نمودار زیر، رابطه تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟ نام $a = y$ به $y = 0$ **صفر** (۰) است.

فعالیت

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[4]{8}$	۲٫۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	۲
$-\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{2}$	۱٫۱۹۵
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱	۱
$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	۰٫۷۰۷
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$	۰٫۵
$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$	۰٫۳۵۳
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	۰٫۲۵

۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ **بله**

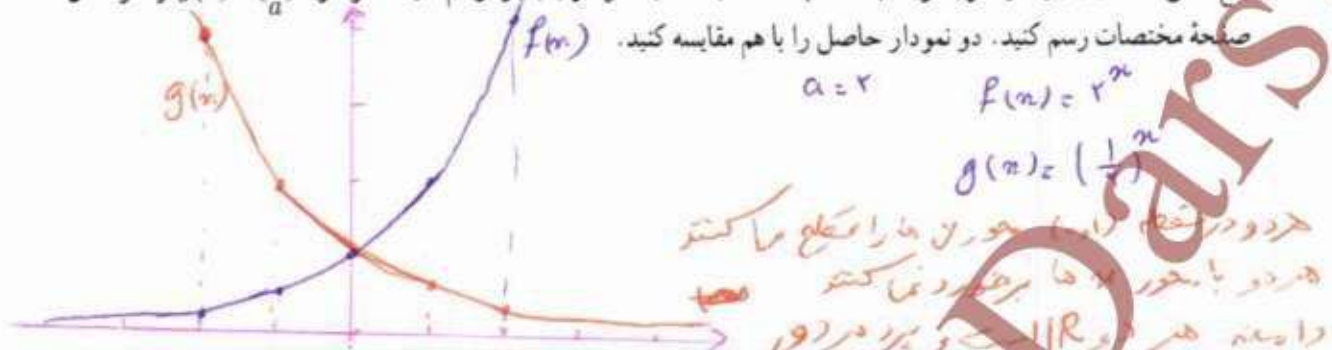
۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ $y = 2^x$ یک تابع صعودی و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ یک تابع نزولی است.

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a > 1$ ، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.



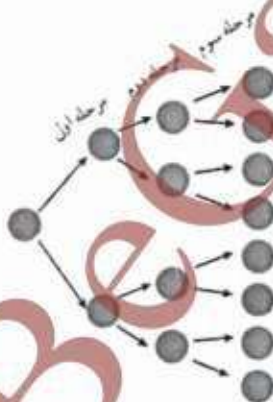
تمرین

(۰، +∞) است. دلی $f(x)$ صعودی و $g(x)$ نزولی است

- در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی، مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

۲، ۴، ۸، ...

(الف) $2^n = 2 \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow 2^n = 2^8$

(ب) $2^8 = 256$

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده $2 = 48$ سلول خواهد شد؟

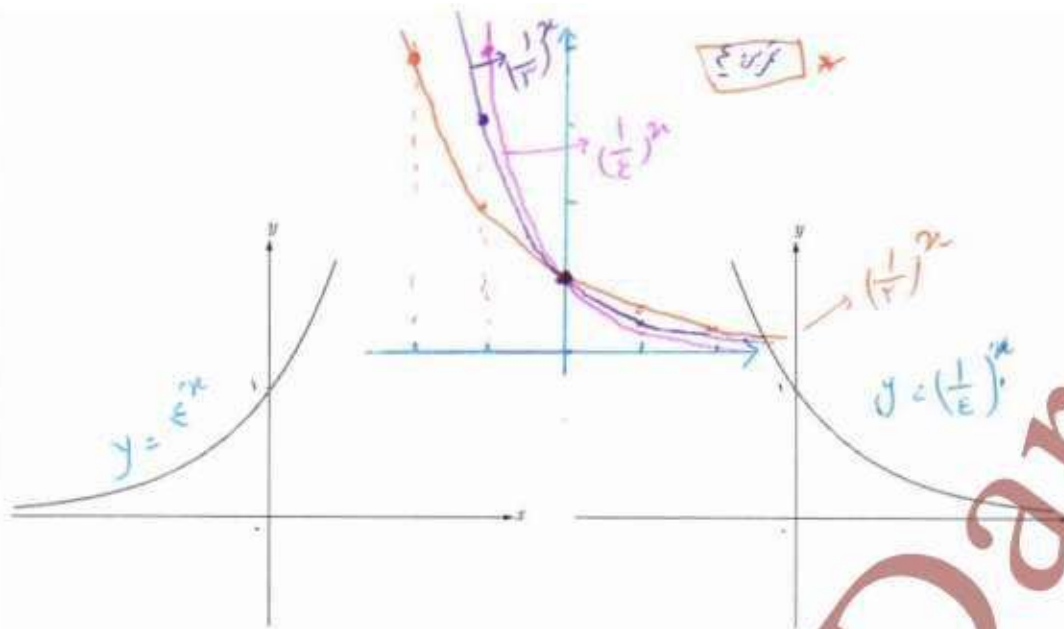
ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

تعداد سلول = تعداد سلول ها

۲. یک نمونه واقعی (متن به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

هر سه محور را دارد نقطه (۱، ۱) قطع می‌کند. هر سه نزولی هستند. هر سه محور را دارند. هر سه محور را دارند.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدار عرضهایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد. جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	$10,000,000 \times 1.14 = 11,400,000$
۱۹	$11,400,000 \times 1.14 = 12,996,000$
⋮	
۲۳	$10,000,000 \times (1.14)^6 = 21,949,722,23$

هر دو نمودار محور را دارد نقطه (۱، ۱) قطع می‌کند

هر دو محور را دارند

هر دو $R = (0, +\infty)$, $D = 1R$

اما میزان کاهش مقدار عرضهایشان با هم فرق دارد

برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10,000,000 + \left(10,000,000 \times \frac{14}{100}\right) = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

درواقع، باید میزان مبلغ سپرده گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده گذاری شده

را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه گذاری اولیه) به دست آوریم:

$$11,400,000 + \left(11,400,000 \times \frac{14}{100}\right) = 12,996,000$$

همان گونه که ملاحظه می کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می شود:

$$10,000,000 \times (1/14)^2 = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0/14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۲۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی

۲۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{30} = 5.2 \times 1.81 = 9.412$$

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{70} = 5.2 \times 2.99 = 15.448$$

تقریباً در هر ۳۵ سال دو برابر می شود
زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می گوئیم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{70} = 5.2 \times 3.99 = 20.748$$

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{104} = 5.2 \times 7.99 = 41.548$$

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای گذاری $P.C$ و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 (1 - 0.01)^{18} = 3,238,600$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۱/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید. در تصمیم بگیر

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. در تصمیم بگیر

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟ سال دهم یا بعد $f(10) > g(10)$

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟ هر دو با زیاد و زیاد تر می شوند یا کمتر می شوند.

$$① \quad y = 40,000,000 \times (1 + 0.01)^{10} = 40,000,000 \times 1.1046 = 44,184,000$$

توجه کنید:

$$② \quad y = 10,000,000 \times (1 + 0.06)^{10} = 10,000,000 \times 1.7908 = 17,908,000$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$③ \quad f(t) = 23576 (1 - 0.0125)^t = 23576 (0.9875)^t$$

$$g(t) = 15786 (1 + 0.0125)^t = 15786 (1.0125)^t$$



پ) $f(9) > g(9)$
 $f(10) < g(10)$

بین ۹ سال و ۱۰ سال برابر می شوند.

$$f(1) = 25000 \times (1.09)^1 = 27250$$

$$f(2) = 25000 \times (1.09)^2 = 29602.5$$

$$f(3) = 25000 \times (1.09)^3 = 32166.725$$

$$f(4) = 25000 \times (1.09)^4 = 34961.73025$$

$$f(5) = 25000 \times (1.09)^5 = 37988.286025$$

$$f(6) = 25000 \times (1.09)^6 = 41267.2317725$$

$$f(7) = 25000 \times (1.09)^7 = 44811.282632025$$

$$f(8) = 25000 \times (1.09)^8 = 48634.198068925$$

$$f(9) = 25000 \times (1.09)^9 = 52751.27589513025$$

$$f(10) = 25000 \times (1.09)^{10} = 57188.89072569177$$

$$g(1) = 10000 \times (1.1)^1 = 11000$$

$$g(2) = 10000 \times (1.1)^2 = 12100$$

$$g(3) = 10000 \times (1.1)^3 = 13310$$

$$g(4) = 10000 \times (1.1)^4 = 14641$$

$$g(5) = 10000 \times (1.1)^5 = 16105.1$$

$$g(6) = 10000 \times (1.1)^6 = 17715.61$$

$$g(7) = 10000 \times (1.1)^7 = 19527.171$$

$$g(8) = 10000 \times (1.1)^8 = 21483.8881$$

$$g(9) = 10000 \times (1.1)^9 = 23627.27691$$

$$g(10) = 10000 \times (1.1)^{10} = 25972.564601$$

@GambBeGamb



جزوه های بیشتر (کلیک کنید) :

گام به گام دوازدهم | جزوه آموزشی دوازدهم | نمونه سوالات درسی



جهت دانلود جدید ترین مطالب بر روی پایه خود روی لینک های زیر کلیک کنید.

ابتدایی

اول ✓ دوم ✓ سوم ✓ چهارم ✓ پنجم ✓ ششم ✓

متوسطه اول

هفتم ✓ هشتم ✓ نهم ✓

متوسطه دوم

دهم ✓ یازدهم ✓ دوازدهم ✓


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)