


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)



ریاضی و آمار (۳)

فصل اول

آمار و احتمال

نشر نیجے بیوک

تلاشی در مسیر موفقیت

این فصل نسبت به فصل‌های قبلی یکم متفاوت و فاش فرق دارد. فهم دقیق مسئله و خلاقیت حرف اول رو تو حل مسائل این فصل میزنه نه فرمول! کلا تو این فصل قراره یاد بگیریم چجوری بدون شمردن حالات، تعداد حالات رو محاسبه کنیم.

**اصل جمع:** اگر بتوان کاری را به  $m_1$  طریق، کار دیگری را به  $m_2$  طریق و ... و کار آخر را به  $m_k$  طریق انجام داد و نتوان این کارها را باهم انجام داد و با انجام هر مرحله کار تمام شود و مرحله‌بندی نشود، همه این کارها را می‌توان به  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  طریق انجام داد. برای اصل جمع اغلب از حرف «یا» استفاده می‌کنیم.

◀ **مثال:** شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار **یا** یک مداد **یا** یک روان‌نویس را از بین ۴ خودکار با چهار رنگ مختلف، ۵ مداد با رنگ‌های متفاوت و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟ (کتاب درسی)

◀ **مثال:** برای مسافرت از شهر A به B ۷ راه زمینی، ۴ راه هوایی و ۲ راه دریایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از A به B مسافرت کرد؟ (تالیفی)

◀ **مثال:** مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آن‌ها در گروه A و ۸ نفر دیگر در گروه B قرار می‌گیرند. مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟ (کتاب درسی)

**اصل ضرب:** اگر انجام کاری را بتوان به  $k$  مرحله تقسیم کرد به طوری که مرحله اول را به  $m_1$  طریق، مرحله دوم را به  $m_2$  طریق و ... و مرحله  $k$  ام را به  $m_k$  طریق انجام داد، تعداد کل حالاتی که می‌توان این کار را انجام داد برابر  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$  است. توجه کنید که پس از انجام هر مرحله کار تمام نشده است و همه  $k$  مرحله باید انجام شوند تا کار تمام شود. برای اصل ضرب اغلب از حرف «و» استفاده می‌کنیم.

◀ **مثال:** فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین ۲ درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان ۳ درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی و یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟  
(کتاب درسی)

◀ **مثال:** روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعده غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد انتخاب کنیم؟ (نهایی خرداد-۹۲)

◀ **مثال:** مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آن‌ها در گروه A و ۸ نفر دیگر در گروه B قرار می‌گیرند. اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نظرش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (کتاب درسی)

◀ **مثال:** یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند.  
الف) یک خریدار برای خرید خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟ (کتاب درسی)

ب) اگر یکی از رنگ‌ها سفید باشد، چند نوع از این خودرو با رنگ سفید می‌توان خریداری کرد؟ (تالیفی)

◀ **مثال:** با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف، چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت که به «گردی» ختم شوند؟ (تالیفی)

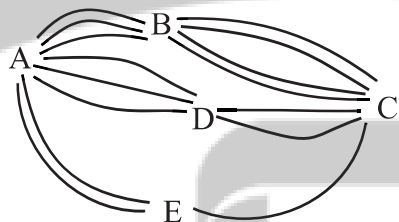
◀ مثال: یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سوال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر: (تالیفی و مشابه نهایی خرداد-۹۳)

الف) مجبور باشد به همه سوال‌ها پاسخ دهد؟

ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

✓ نکته: در برخی مسائل نیاز است مسئله را به چند حالت تقسیم‌بندی کنیم (به خصوص در مسائل عدد سازی وقتی رقم صفر داشته باشیم). در اینگونه مسائل از اصل ضرب و جمع در کنار هم استفاده می‌کنیم. همچنین توجه داشته باشید که در مسائل شمارش، ابتدا محدودیت‌ها را لحاظ می‌کنیم سپس به شمارش حالات باقی مانده می‌پردازیم.

◀ مثال: مطابق شکل، میان شهرهای A, B, C, D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه اند. به چند طریق می‌توان:



(کتاب درسی)

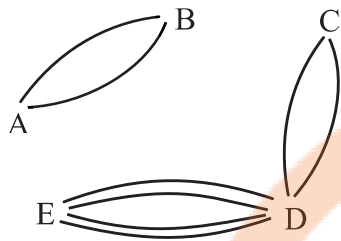
الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر D سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

ت) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

◀ مثال: تعداد راه‌ها از شهر B به C و از شهر E به A را طوری تعیین کنید که با توجه به شکل، بتوان به ۲۰ طریق از



شهر A به شهر D سفر کرد. (کتاب درسی)

◀ مثال: ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض اند. با این ارقام:

الف) چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی و مشابه نهایی خارج - ۸۸)

ب) چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟ (تالیفی و مشابه نهایی خرداد - ۸۹)

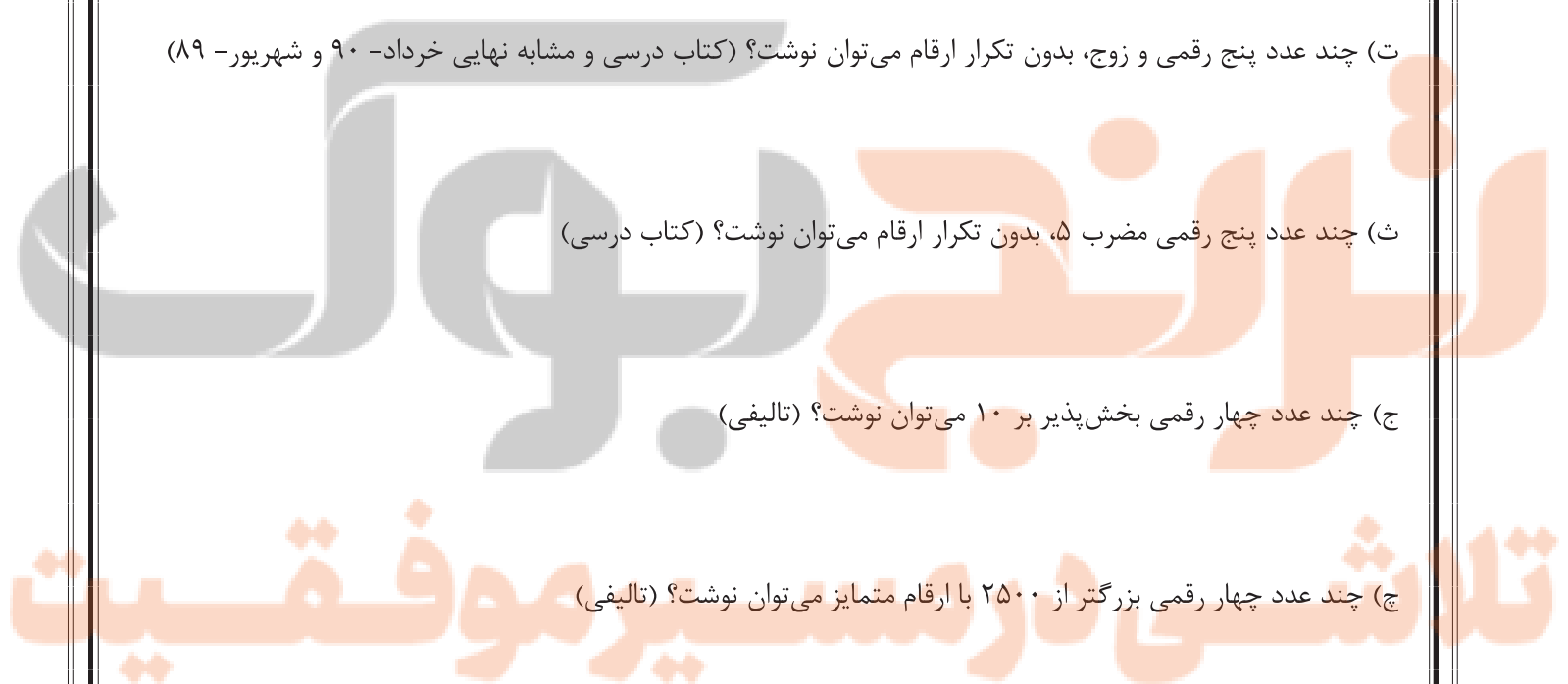
پ) چند عدد پنج رقمی و فرد، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی)

ت) چند عدد پنج رقمی و زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی و مشابه نهایی خرداد - ۹۰ و شهریور - ۸۹)

ث) چند عدد پنج رقمی مضرب ۵، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی)

ج) چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۱۰ می‌توان نوشت؟ (تالیفی)

چ) چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۵۰۰ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟ (تالیفی)



✓ نکته: در ساخت عدد چند رقمی، رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد ولی در ساخت رمز می‌تواند اینچنین باشد.

ح) چند رمز سه رقمی می‌توان ساخت؟ (تالیفی)

خ) چند رمز چهار رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟ (تالیفی)

✓ نکته: تعداد حروف الفبای فارسی، انگلیسی و عربی به ترتیب برابر ۳۲، ۲۶ و ۲۸ می‌باشد.

◀ مثال: تعداد حالات ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید: (تالیفی)

الف) این رمز از دو گزینه تشکیل شده که یکی از گزینه‌ها یک رقم و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ب) این رمز از چهار گزینه تشکیل شده که دو گزینه اول ارقام غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

اصل متمم: در برخی مسائل، شمارش مستقیم تعداد حالات دشوار یا غیرممکن است. در چنین مسائلی از اصل متمم استفاده

می‌کنیم یعنی کل حالات را حساب کرده و حالات نامطلوب را از آن کم می‌کنیم.

◀ مثال: چند عدد سه رقمی شامل رقم ۴ وجود دارد؟ (تالیفی)

شمارش مستقیم:

◀ مثال: با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف، چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که عبارت «گرد» در

ابتدای کلمه نباشد؟ (تالیفی)

**جایگاه‌های وابسته:** اگر تعداد حالات یک جایگاه هنگام شمارش به جایگاه دیگر وابسته شود به طوری که نتواند به طور مستقل حالات متمایز داشته باشد، دیگر حالات جدیدی در شمارش ایجاد نمی‌کند و تعداد حالات آن جایگاه ۱ است.

◀ **مثال:** یک عدد سه رقمی را متقارن می‌گوییم اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند مانند ۳۴۳. چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟ (تالیفی)

❖ **تست:** پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به صورت 

تهران
*** ب ***

 است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر

است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (سراسری انسانی)

(۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۱۴۵۸۰

(۳) ۱۵۴۸۰ (۴) ۱۸۲۲۵

❖ **تست:** با ارقام مجموعه  $\{۱, ۲, ۴, ۶, ۷, ۸\}$  چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (انسانی خارج - ۹۸)

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰

(۳) ۲۴۰ (۴) ۳۰۰

❖ **تست:** با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (انسانی داخل - ۹۸)

(۱) ۷۲ (۲) ۹۶

(۳) ۱۰۸ (۴) ۱۲۰

❖ **تست:** با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(سراسری انسانی و مشابه تجربی داخل - ۹۰)

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰

(۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰



❖ تست: با حروف کلمه DANESH چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟

(انسانی داخل - ۹۷)

(۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۰

(۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۰

❖ تست: با ۵ رنگ متمایز به چند طریق می‌توان پنج خانه کنار هم را رنگ کرد به طوری که خانه‌ها یکی درمیان دارای رنگ

یکسان باشند؟ (تالیفی)

(۱) ۲۰ (۲) ۲۵

(۳) ۱۵۰ (۴) ۵<sup>۵</sup>

فاکتوریل: نماد فاکتوریل ! است و برای اعداد حسابی به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

$$0! = 1$$

✓ قرارداد: صفر فاکتوریل برابر ۱ می‌شود:

$$n \times (n-1)! = n!$$

✓ نکته:

◀ مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (کتاب درسی و نهایی خرداد- ۸۹ و ۹۰)

$$5! =$$

$$4! + 3! =$$

$$5! \times 3! =$$

$$\frac{10!}{7!} =$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} =$$

$$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} =$$

◀ مثال: حاصل عبارات زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید. (تالیفی)

$$11 \times 10 \times 9 =$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) =$$

◀ مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟ (تالیفی و نهایی خرداد- ۹۲ و ۹۵ و ۹۶)

$$1! + 3! + 4! = 8!$$

$$3! \times 4 = 4!$$

$$8! = 4! \times 2!$$

$$2 \times 3! = 6!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

$$\frac{8!}{4!} = 2!$$

◀ مثال: از رابطه  $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ ، مقدار  $n$  را به دست آورید. (سراسری انسانی)

❖ تست: اگر  $n! = 40 \times 18$ ، مقدار  $n$  کدام است؟ (تالیفی و مشابه سراسری انسانی)

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

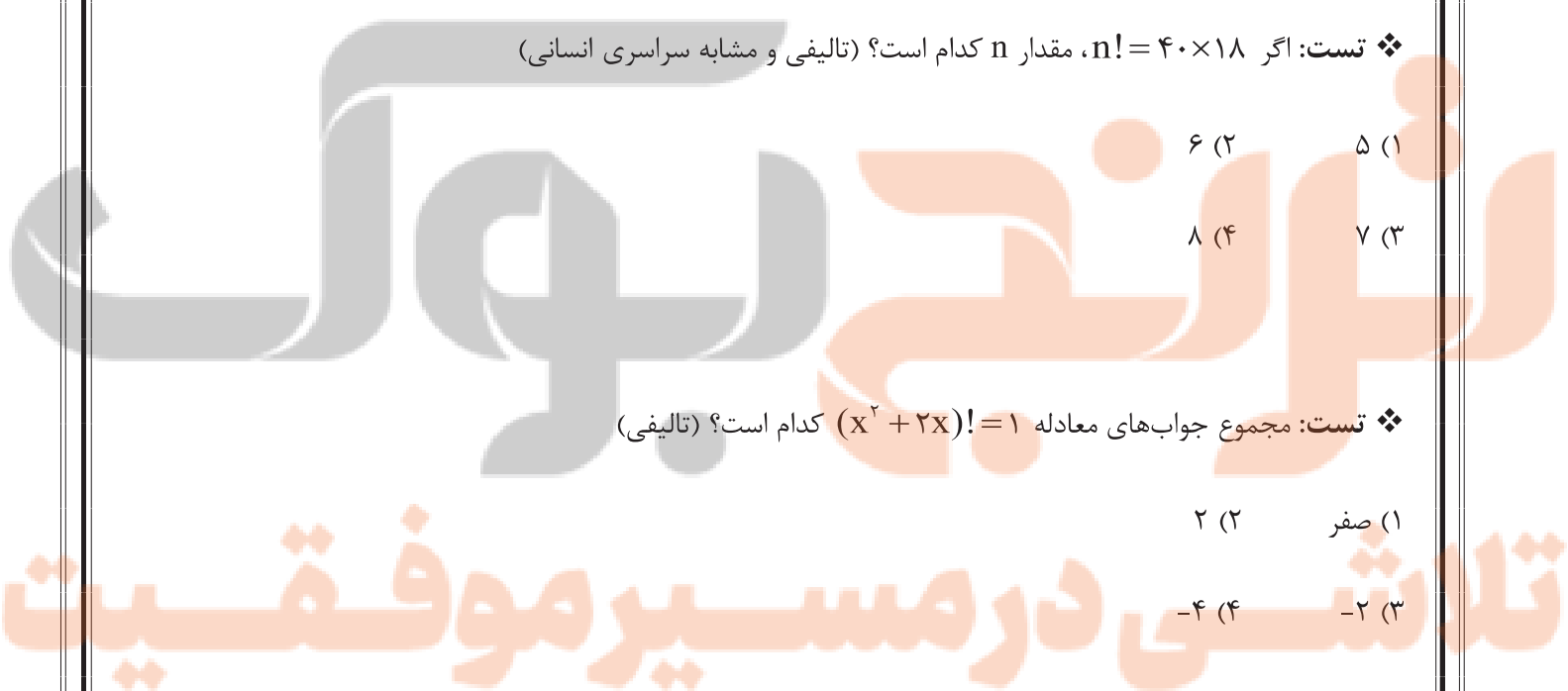
❖ تست: مجموع جواب‌های معادله  $(x^2 + 2x)! = 1$  کدام است؟ (تالیفی)

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) -۲

(۴) -۴



**جایگشت (تبدیل):** اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت (تبدیل) از آن اشیاء می‌گوییم. در مسائل جایگشت، ترتیب قرار گرفتن مهم است.

✓ تذکر (مهم!): اشیای یکسان جایگشت ندارند.

**دسته‌بندی مسائل جایگشت:**

**الف) جایگشت n شیء متمایز (جایگشت n شیء از n شیء متمایز):** تعداد حالتی که می‌توان n شیء متمایز را کنار

$$P_n = n!$$

هم چید برابر است با:

◀ **مثال:** ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با  $n!$ . (کتاب درسی)

◀ **مثال:** اگر افراد A, B, C و ... بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

(کتاب درسی)

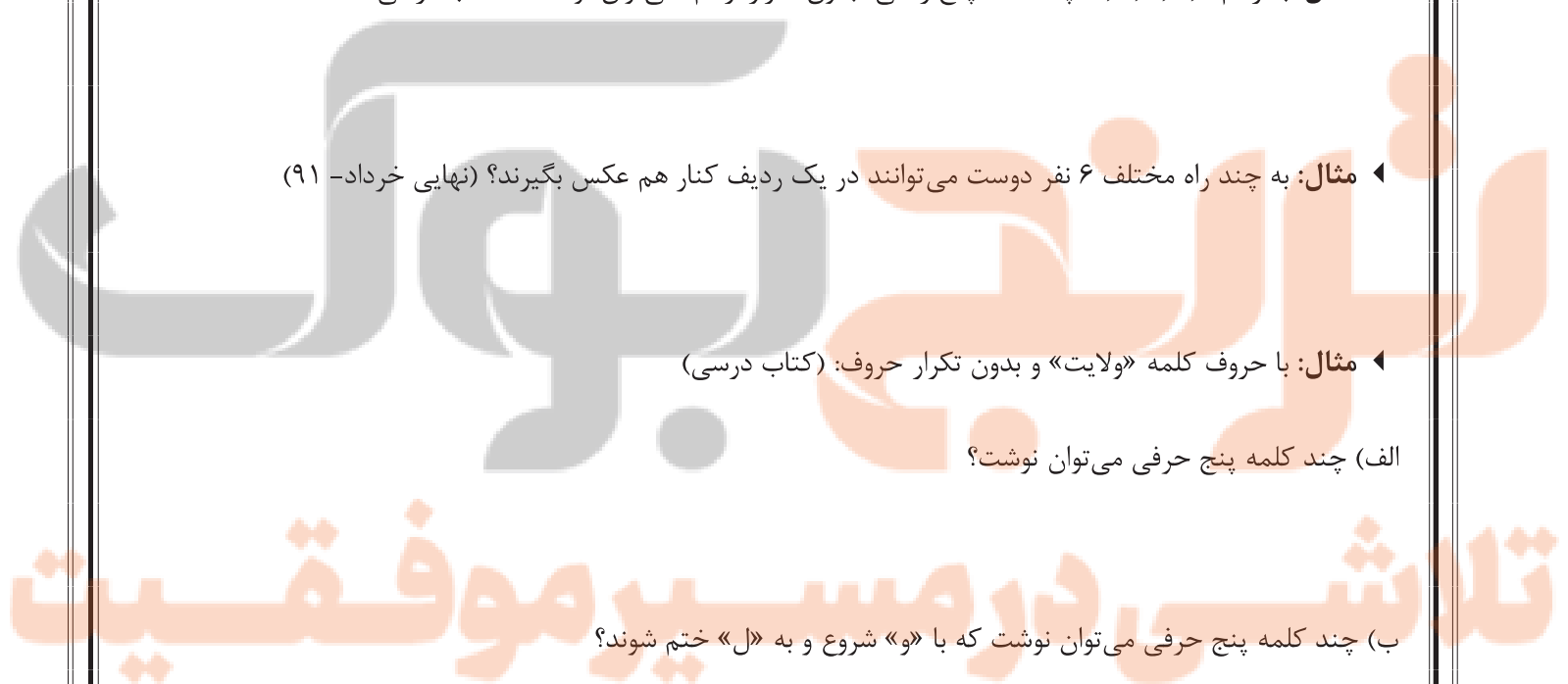
◀ **مثال:** با ارقام ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد پنج رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی)

◀ **مثال:** به چند راه مختلف ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟ (نهایی خرداد-۹۱)

◀ **مثال:** با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (کتاب درسی)

الف) چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟



ب) جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز: تعداد حالاتی که می توان  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز را کنار هم چید برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

◀ مثال: نشان دهید تعداد انتخاب های  $r$  شیء از بین  $n$  شیء ( $r \leq n$ ) که جابجایی (ترتیب)  $r$  شیء انتخاب شده اهمیت

داشته باشد برابر است با  $\frac{n!}{(n-r)!}$ . (کتاب درسی)

◀ مثال: درستی تساوی  $P(n, n-1) = P(n, n)$  را نشان دهید. (نهایی خرداد-۹۴)

◀ مثال: با ارقام ۱, ۲, ۴, ۶, ۸, ۹, ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

(کتاب درسی و مشابه نهایی شهریور-۹۸)

◀ مثال: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم حضور دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت می توانند مشخص

شوند؟ (تالیفی و مشابه نهایی شهریور-۸۹)

◀ مثال: با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف چند کلمه سه حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

(کتاب درسی و مشابه نهایی شهریور-۹۰)

◀ مثال: یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم به صورت رفت و برگشتی انجام می شود. اگر همه تیم ها باهم بازی داشته باشند،

در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟ (کتاب درسی)

◀ مثال: مقدار  $n$  را از تساوی  $P(n, 1) = 6$  بیابید. (نهایی خرداد-۹۶)

ج) جایگشت جعبه: در برخی مسائل جایگشت می‌خواهند تعدادی از اشیاء کنار هم باشند یا نباشند. در این حالت آن اشیای خاص را درون جعبه قرار می‌دهیم و جایگشت آن جعبه با سایر اشیاء و اشیای داخل جعبه را حساب می‌کنیم.

◀ مثال: به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فیزیک متمایز را در یک قفسه قرار داد به طوری که: (تالیفی)

الف) کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟ (مشابه سراسری ریاضی)

ب) کتاب‌های فیزیک کنار هم و کتاب‌های ریاضی هم کنار هم باشند؟

ج) کتاب‌های ریاضی کنار هم نباشند؟

د) دو کتاب فیزیک در سمت راست باشند؟

◀ مثال: با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف: (تالیفی)

الف) چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

ب) چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟

تلاشی در مسیر موفقیت

(د) جایگشت‌های یکی درمیان: در اینگونه مسائل باید تعداد اعضای دو گروه باهم برابر یا دقیقا یکی اختلاف داشته باشند:

اگر تعداد اعضای یک گروه یکی بیشتر بود، شمارش را با همان گروه آغاز می‌کنیم:  $n! \times (n+1)!$  = تعداد حالات

اما اگر تعداد اعضای دو گروه برابر بود، شمارش را یکبار با گروه اول و بار دیگر با گروه دوم شروع کرده و جواب‌ها را طبق اصل

جمع باهم جمع می‌کنیم. البته چون همواره جواب حاصل از دو حالت، یکسان می‌شود می‌توان جواب حاصل از شمارش حالت

اول را مستقیما دو برابر کرد. (ویژه تست!)  $2 \times n! \times n! = n! \times n! + n! \times n!$  = تعداد حالات

◀ مثال: به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ادبی و ۳ کتاب علمی متمایز را یکی درمیان کنار هم چید؟ (سراسری انسانی)

◀ مثال: به چند طریق می‌توان ۴ مداد و ۴ خودکار متمایز را یکی درمیان کنار هم قرار داد؟ (تالیفی)

◀ مثال: با جابجایی ارقام ۲, ۲, ۲, ۶, ۷, ۵ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت که رقم‌های ۲ یکی درمیان قرار گیرند؟

(ریاضی خارج - ۸۹)

❖ تست: از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، به چند راه می‌توان ۳ نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه انتخاب

کرد؟ (انسانی خارج - ۹۱)

(۱) ۱۳۲۰ (۲) ۶۶۰

(۳) ۳۳۰ (۴) ۲۲۰

❖ تست: مقدار  $\frac{P(n,r)}{P(n+1,r+1)}$  کدام است؟ (سراسری انسانی)

(۱)  $\frac{1}{n+1}$  (۲)  $\frac{r}{n}$

(۳)  $\frac{1}{(n+1)!}$  (۴)  $\frac{r+1}{n+1}$

❖ تست: ۳ کتاب متمایز ریاضی، ۲ کتاب متمایز فیزیک و ۲ کتاب شیمی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک قفسه

قرار داد به طوری که کتاب‌های هر درس پهلوی هم باشند؟ (سراسری ریاضی)

۳۶ (۱)      ۵۴ (۲)

۷۲ (۳)      ۱۴۴ (۴)

❖ تست: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «DAMDARAN» به شرط آنکه حروف یکسان کنار هم قرار گیرند کدام

است؟ (انسانی داخل و مشابه تجربی داخل - ۸۴)

۱۲۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)

۲۴۰ (۳)      ۳۶۰ (۴)

❖ تست: حروف کلمه «ASSIST» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم آن طوری کنار هم قرار داد که S ها

یک‌در میان باشند؟ (سراسری انسانی)

۸ (۱)      ۹ (۲)

۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

❖ تست: تعداد یکسانی دختر و پسر یکی در میان صف می‌ایستند. اگر تعداد حالات ایجاد شده ۷۲ تا باشد، تعداد افراد حاضر

در صف کدام است؟ (تالیفی)

۳ (۱)      ۴ (۲)

۵ (۳)      ۶ (۴)



ترکیب: اگر ترتیب اهمیت نداشته باشد و بخواهیم از بین  $n$  شیء  $r$  شیء را انتخاب کنیم تعداد حالات برابر است با:

$$C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

◀ مثال: حاصل ترکیب‌های زیر را به دست آورید. (تالیفی و نهایی شهریور - ۹۸)

$$\binom{9}{6} =$$

$$\binom{6}{2} =$$

$$\binom{4}{1} =$$

$$\binom{6}{0} =$$

$$\binom{12}{12} =$$

◀ مثال: درستی تساوی  $C(n, n) = C(n, 0)$  را نشان دهید. (نهایی خرداد - ۹۲)

✓ نکته تستی: برای ساده تر شدن محاسبات ترکیب، از روابط زیر استفاده کنید:

$$(۱) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$(۲) \binom{n}{1} = n$$

$$(۳) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(۴) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{6}{0} =$$

$$\binom{12}{12} =$$

$$\binom{4}{1} =$$

$$\binom{6}{2} =$$



محاسبه سریع  $\binom{n}{r}$  به روش پیشروی در ضرب (ویژه تست!): با استفاده از  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  ابتدا عدد پایینی ترکیب را

کوچکتر می‌کنیم و سپس در صورت کسر جواب، برابر عدد پایینی در مراحل ضرب فاکتوریلی عدد بالا پیشروی می‌کنیم و در مخرج کسر جواب، فاکتوریل عدد پایینی را به صورت ضربی قرار می‌دهیم و ساده می‌کنیم.

◀ مثال: حاصل ترکیب‌های زیر را به روش پیشروی در ضرب محاسبه کنید. (تالیفی)

$$\binom{5}{2} =$$

$$\binom{7}{5} =$$

$$\binom{8}{4} =$$

◀ مثال: از معادله  $\binom{n}{8} = 2 \binom{n}{7}$  مقدار  $n$  را به دست آورید. (سراسری ریاضی)

❖ تست: اگر  $C_4^n = P(n-1, 3)$  باشد، عدد  $n$  کدام است؟ (انسانی داخل- ۸۴ و مشابه سراسری تجربی)

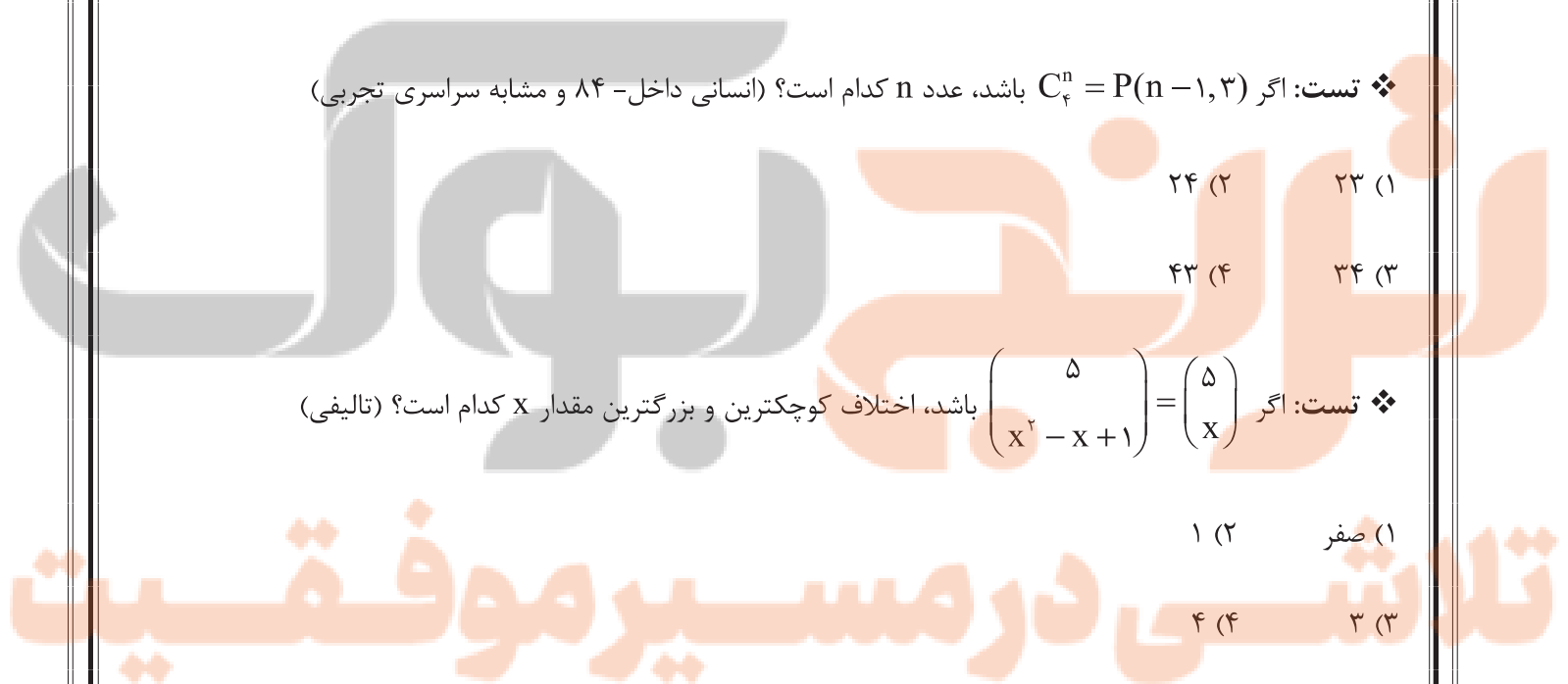
۲۴ (۲)      ۲۳ (۱)

۴۲ (۴)      ۳۴ (۳)

❖ تست: اگر  $\binom{5}{x^2 - x + 1} = \binom{5}{x}$  باشد، اختلاف کوچکترین و بزرگترین مقدار  $x$  کدام است؟ (تالیفی)

۱ (۲)      صفر (۱)

۴ (۴)      ۳ (۳)



◀ مثال: به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه دهیم؟

(کتاب درسی و مشابه نهایی خرداد- ۹۵ و شهریور- ۹۸)

◀ مثال: از میان ۵ ریاضیدان، ۳ فیزیکدان و ۴ شیمی‌دان به چند طریق می‌توانیم یک کمیته علمی ۳ نفره تشکیل دهیم؟

(نهایی خرداد- ۹۶)

◀ مثال: می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره

والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل دهیم هرگاه: (کتاب درسی)

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند؟

ب) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند؟ (مشابه سراسری انسانی)

پ) کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد؟ (مشابه سراسری انسانی)

ت) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند؟ (مشابه تجربی خارج- ۹۰)

ث) حداکثر ۳ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه یازدهم باشند؟

تلاشی در مسیر موفقیت

◀ مثال: از بین ۲ مدرس ریاضی، ۲ مدرس فلسفه و ۲ مدرس جغرافیا قرار است یک کمیته ۲ نفره انتخاب شود به گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم‌رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟ (تالیفی)

◀ مثال: روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه متمایز وجود دارد. مشخص کنید با این نقاط: (کتاب درسی)  
الف) چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟ (به پاره خطی که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند، وتر می‌گویند).

◀ مثال: در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این ۲ نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ (تالیفی)

❖ تست: به چند طریق می‌توان ۶ کارمند جدید را در اتاق‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟ (انسانی خارج - ۹۳)

(۱) ۴۵

(۲) ۵۴

(۳) ۶۰

(۴) ۷۲

❖ تست: به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین ۳ بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (انسانی داخل - ۹۳)

(۱) ۵۴

(۲) ۶۰

(۳) ۷۲

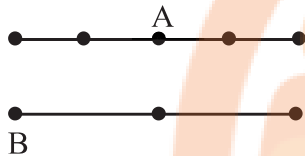
(۴) ۹۰

❖ تست: از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد به شرط آنکه حداقل ۴

پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟ (ریاضی داخل - ۸۹)

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰

(۳) ۳۲ (۴) ۳۵



با نقاط داده شده در شکل مقابل:

❖ تست: به چند طریق می‌توان مثلث تشکیل داد؟ (تالیفی)

(۱) ۴۰ (۲) ۴۵

(۳) ۵۰ (۴) ۶۰

❖ تست: چند مثلث شامل راس B و فاقد راس A می‌توان ساخت؟ (تالیفی)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲

(۳) ۱۴ (۴) ۲۰

❖ تست: از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد به

طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده از یک مدرسه نباشند؟ (تجربی خارج - ۹۸ و مشابه ریاضی و تجربی داخل - ۹۲)

(۱) ۱۳۵ (۲) ۲۷۰

(۳) ۳۲۰ (۴) ۶۴۰

❖ تست: یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز

چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه ۳ ادویه باشند که نباید هر سه باهم استفاده شوند؟ (تالیفی)

(۱) ۱۱۹ (۲) ۱۲۰

(۳) ۷۲۰ (۴) ۸۲۰



✓ نکته: در برخی مسائل نیاز به استفاده همزمان از جایگشت و ترکیب داریم که چند تیپ مهم از آنها در زیر آمده است.

◀ مثال: با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟ (تالیفی)

❖ تست: با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ... و ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی با ارقام متمایز ساخت به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ (ریاضی داخل و مشابه خارج - ۹۴)

(۱) ۶۴۰۰ (۲) ۷۲۰۰

(۳) ۸۴۰۰ (۴) ۹۶۰۰

❖ تست: با حروف کلمه «speak» چند کلمه سه حرفی شامل حرف p و فاقد حرف k می‌توان ساخت؟ (تالیفی)

(۱) ۶ (۲) ۱۸

(۳) ۲۴ (۴) ۳۶

❖ تست: در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. به چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b، فقط یک نفر سخنرانی کند؟ (ریاضی داخل - ۸۷)

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴

(۳) ۳۶ (۴) ۴۰

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

✓ نکته (مهم!): تعداد زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:

◀ مثال: مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ : (تالیفی)

الف) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ (مشابه سراسری انسانی، تجربی، تمرین کتاب درسی و نهایی خرداد و دی - ۹۸)

ب) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که شامل  $a$  باشد؟ (مشابه کتاب درسی)

ت) چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد که شامل  $b$  و  $f$  و فاقد  $d$  باشد؟

ث) چند زیرمجموعه حداقل ۴ عضوی دارد؟

ج) چند زیرمجموعه حداکثر ۲ عضوی دارد؟

❖ تست: یک مجموعه  $n$  عضوی ۵۵ زیرمجموعه  $n-2$  عضوی دارد.  $n$  کدام است؟ (سراسری انسانی)

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

❖ تست: اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی آن برابر باشد، این مجموعه

چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد؟ (تالیفی)

۲۵۲ (۱)

۲۵۴ (۲)

۲۵۶ (۳)

۲۵۸ (۴)

**پدیده (آزمایش) تصادفی:** به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد اطمینان نداریم. مانند پرتاب سکه، تولد فرزند، پرتاب تاس، بیرون آوردن مهره از کیسه و ...

برای مثال در آزمایش پرتاب یک تاس می‌دانیم یکی از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر خواهد شد اما قبل از انجام آزمایش به طور قطع نمی‌توانیم بگوییم کدام یک از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر خواهد شد.

**پدیده (آزمایش) قطعی:** به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش یا پدیده قطعی می‌گوییم. مثلاً اگر سنگی را به داخل استخر بیندازیم بدون شک به داخل آب فرو می‌رود یا اگر از کیسه‌ای که تمام مهره‌های آن آبی هستند مهره‌ای خارج کنیم، قطعاً مهره خارج شده آبی خواهد بود.

**برآمد:** به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی برآمد می‌گوییم.

◀ **مثال:** کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟ (کتاب درسی)

الف) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد.

ب) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم.

پ) نتیجه یک آزمون چهار جوابی که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده ایم.

ت) مقداری آب را حرارت دهیم تا به بخار تبدیل شود.

ث) در یک بازی ساده دو نفره یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام دهد:

عددی را انتخاب می‌کند. سه واحد به آن اضافه می‌کند. حاصل را دو برابر می‌کند. از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند. نتیجه

به‌دست آمده را نصف می‌کند. از حاصل به‌دست آمده عدد اولیه را کم می‌کند. در مرحله آخر فرد دوم به جای شخص محاسبه

کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

**فضای نمونه:** مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف  $S$  نمایش می‌دهیم. تعداد اعضای فضای نمونه را با  $n(S)$  نمایش می‌دهیم.

◀ **مثال:** فضای نمونه هریک از پدیده‌های تصادفی زیر را بنویسید و تعداد اعضای آن را به دست آورید. (کتاب درسی)

(الف) پرتاب ۳ سکه با هم.

(ب) ۳ دوست به نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم بنشینند.

(پ) پرتاب یک تاس و یک سکه با هم. (نهایی دی - ۹۸)

(ت) پرتاب ۲ تاس با هم.

**پیشامد:** به هریک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه  $S$ ، یک پیشامد می‌گویند. پیشامدها را اغلب با حروف بزرگ انگلیسی مانند

$A, B, C$  و ... نمایش می‌دهند. تعداد اعضای پیشامدی مانند  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهند.

✓ تذکر: هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

**پیشامد غیر ممکن (نشدنی):** از آنجا که  $\emptyset \subseteq S$  پس  $\emptyset$  یک پیشامد روی  $S$  است و آن را پیشامد غیرممکن می‌نامند.

**پیشامد حتمی:** از آنجا که  $S \subseteq S$  پس  $S$  یک پیشامد روی  $S$  است و آن را پیشامد حتمی می‌نامند.

برای مثال در آزمایش پرتاب تاس، پیشامد ظاهر شدن عدد ۸ غیرممکن (نشدنی) است یا در آزمایش خارج کردن یک مهره از

کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید، پیشامد بیرون آمدن مهره‌ای سفید حتمی است.



◀ مثال: دو تاس را پرتاب می‌کنیم (یا تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم). پیشامدهای زیر را مشخص کنید و تعداد اعضای آن را

به دست آورید:

الف) پیشامد اینکه عدد رو شده از هر دو تاس یکسان باشند ولی زوج نباشند. (نهایی دی - ۹۸)

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۴ باشد. (نهایی دی و مشابه شهریور - ۹۸)

پ) اعداد رو شده از دو تاس بر ۳ بخش پذیر باشند. (نهایی شهریور - ۹۸)

ت) حاصل تقسیم اعداد برآمده از دو تاس برابر صفر شود. (تالیفی)

ث) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد. (کتاب درسی)

◀ مثال: هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴ می‌توان نوشت روی کارتهایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن

کارتهای یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم: (کتاب درسی)

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید و تعداد اعضای آن را به دست آورید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد را مشخص کنید و تعداد اعضای آن را بیابید.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد را بیابید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

◀ مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است: (کتاب درسی)

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟ (مشابه نهایی خرداد-۹۸)

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند را با تعداد اعضا مشخص کنید.

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد را با تعداد اعضا مشخص کنید.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند را با تعداد اعضا مشخص کنید.

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند دختر باشد را با تعداد اعضا مشخص کنید.

ج) پیشامد E که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد را با تعداد اعضا مشخص کنید.

◀ مثال: در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت

دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آن‌ها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص

کنید: (کتاب درسی)

الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.

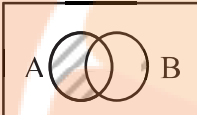
اعمال روی پیشامدها: هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد در فضای نمونه  $S$  باشند: (قابل تعمیم به بیش از دو پیشامد)

الف) پیشامد  $A \cap B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای  $A$  و  $B$  هر دو رخ دهند.



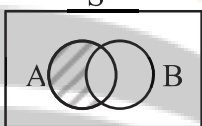
$$\rightarrow A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ب) پیشامد  $A \cup B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ دهند. (حداقل یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  رخ دهد)



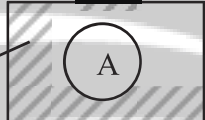
$$\rightarrow A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

پ) پیشامد  $A - B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی پیشامد  $B$  رخ ندهد. (فقط پیشامد  $A$  رخ دهد)



$$\rightarrow A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

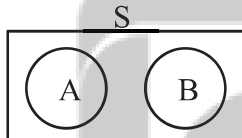
ت) پیشامد  $A'$  (پیشامد متمم) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد.



$$\rightarrow A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

دو پیشامد ناسازگار: هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه  $S$  باشند به طوری که  $A \cap B = \emptyset$  در اینصورت

پیشامدهای  $A$  و  $B$  را ناسازگار می‌گوییم. (دو پیشامد ناسازگار هرگز نمی‌توانند باهم رخ دهند مانند روز و شب یا زوج و فرد)



◀ مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را با تعداد اعضا مشخص کنید: (کتاب درسی)

الف) پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد. (نهایی خرداد- ۹۸)

ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

پ) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد. (نهایی خرداد- ۹۸)

ت) پیشامد اینکه یکی از تاس‌ها ۵ یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

◀ **مثال:** سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد آنگاه تاس می‌ریزیم. در غیر اینصورت یک بار دیگر سکه می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. (کتاب درسی)

ب) پیشامد  $A$  که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا مشخص کنید. (کتاب درسی)

◀ **مثال:** هر یک از اعداد طبیعی فرد کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور

تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوبست تعیین: (کتاب درسی)

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی.

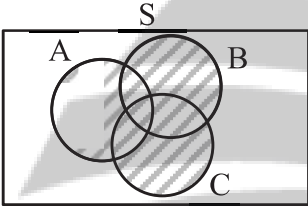
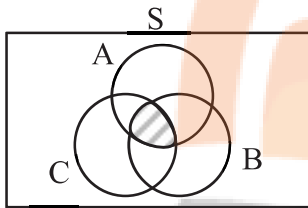
ب) پیشامد  $A$  که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد  $B$  که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

ت) پیشامدهای  $A \cap B$  و  $A - B$  را با اعضا مشخص کنید.

ث) آیا پیشامدهای  $A$  و  $B$  ناسازگار اند؟

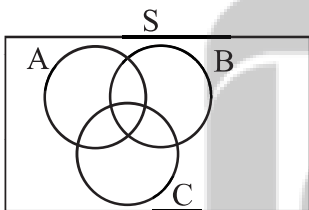
◀ مثال: برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید. (کتاب درسی)



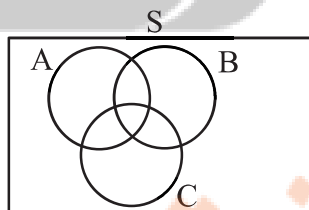
◀ مثال: فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  سه پیشامد در فضای نمونه  $S$  باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه

بزنید سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را بنویسید. (کتاب درسی)

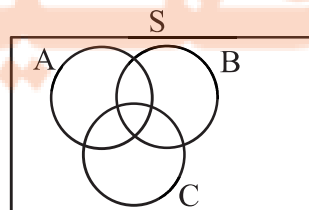
الف) فقط پیشامد  $A$  رخ دهد و پیشامدهای  $B$  یا  $C$  رخ ندهند.



ب) پیشامدهای  $A$  و  $B$  رخ دهند ولی پیشامد  $C$  رخ ندهد.



ج) پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ دهند ولی پیشامد  $C$  رخ ندهد.



✓ نکته: برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

◀ مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۲ نمایان شود، کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده است؟ (کتاب درسی)

$$A = \{3, 2, 5\}$$

$$B = \{2\}$$

$$C = \{1, 3, 4, 5\}$$

❖ تست: کدام بیان برای فضای نمونه یک آزمایش تصادفی نادرست است؟ (انسانی خارج- ۸۹)

(۱) احتمال وقوع لااقل یکی از برآمدهای آن صفر است. (۲) مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی است.

(۳) احتمال وقوع حداکثر یکی از پیشامدهای آن ۱ است. (۴) اجتماع تمام برآمدهای ممکن، برابر فضای نمونه است.

❖ تست: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه کدام است؟ (انسانی خارج- ۹۷)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲

(۳) ۱۸ (۴) ۲۴

❖ تست: در آزمایش پرتاب تعداد مساوی سکه و تاس، تعداد اعضای فضای نمونه برابر ۱۴۴ شده است. تعداد تاس‌ها کدام

است؟ (تالیفی)

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۵

❖ تست: فضای نمونه  $S = \{a, b, 2, 5\}$  چند پیشامد غیر حتمی دارد؟ (تالیفی)

(۱) ۸ (۲) ۱۲

(۳) ۱۴ (۴) ۱۶

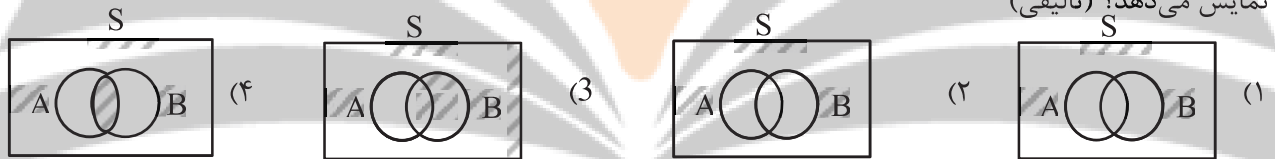
دو سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر  $A$  پیشامد رو آمدن هر دو سکه،  $B$  پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در تاس و پشت آمدن سکه اول و  $C$  پیشامد ظاهر شدن عدد مربع کامل در تاس باشد:

❖ تست: پیشامد  $(A-C) \cup B$  چند عضو دارد؟ (تالیفی)

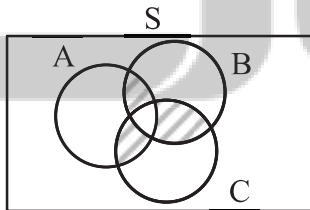
- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲

❖ تست: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند، پیشامد فقط  $A$  رخ دهد یا  $B$  رخ ندهد را کدام نمودار ون صحیح

نمایش می‌دهد؟ (تالیفی)



❖ تست: اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند، نمودار ون مقابل معادل کدام عبارت است؟ (تالیفی)



(۱)  $A' \cap B' \cap C'$  (۲)  $(A \cap B \cap C)'$

(۳)  $A \cap B \cap C$  (۴)  $(A \cap B - C) \cup (A \cap C - B) \cup (B \cap C - A)$

احتمال یک پیشامد: اگر  $S$  فضای نمونه و  $A$  پیشامدی از این فضای نمونه باشد احتمال رخداد پیشامد  $A$  برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد اعضا (برآمدهای) پیشامد  $A$  (حالات مطلوب)  $\rightarrow$   
 تعداد اعضا (برآمدهای) پیشامد  $S$  (کل حالات ممکن)  $\rightarrow$

برخی ویژگی‌های احتمال:

$$(۱) P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0, \quad (۲) P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1, \quad (۳) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$0 \leq n(A) \leq n(S) \xrightarrow{+n(S)} 0 \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

اثبات ویژگی (۳):

$$(۴) A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$A \subseteq B \rightarrow n(A) \leq n(B) \xrightarrow{+n(S)} \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \rightarrow P(A) \leq P(B)$$

اثبات ویژگی (۴):

$$(۵) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

برای دو پیشامد ناسازگار  $A$  و  $B$  داریم:

اثبات ویژگی (۵):

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) \xrightarrow{+n(S)} \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

◀ مثال: اگر  $P(A) = 0.2$ ،  $n(A) = 8$  و  $n(B) = 5$  باشند، مقدار  $P(B)$  چقدر است؟ (سراسری انسانی)

◀ مثال: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار و  $P(A) = \frac{1}{5}$  و  $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$  باشند، مقدار  $P(B)$  چقدر است؟ (سراسری انسانی)

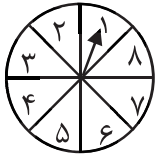
✓ تذکر: به طور کلی باید برای محاسبه احتمال  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ، به کمک اصل جمع و ضرب، جایگشت و ترکیب، مقادیر

$n(S)$  و  $n(A)$  را یافته و در نهایت  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  را محاسبه کنیم. پس تسلط بر شمارش یعنی تسلط بر احتمال.



الف) استفاده از اصل جمع و ضرب:

◀ مثال: عقربه دستگاه چرخنده زیر پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد. چقدر احتمال دارد که:



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد؟ (کتاب درسی)

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد. (کتاب درسی)

◀ مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) تاس زوج بیاید. (کتاب درسی)

ب) سکه پشت و تاس زوج بیاید. (نهایی دی - ۹۸)

ج) عدد ظاهر شده برای تاس حداکثر ۳ باشد. (نهایی دی - ۹۸)

◀ مثال: یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: (کتاب درسی)

الف) هر پنج نفر آن‌ها در ماه فروردین متولد شده باشند.

ب) هر پنج نفر آن‌ها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

پ) تولد هیچ دو تایی آن‌ها در یک روز نباشد.

(ب) استفاده از جایگشت:

◀ مثال: با حروف کلمه «پهلوان» بدون تکرار حروف یک کلمه ۴ حرفی می‌سازیم. چقدر احتمال دارد که کلمه ساخته شده فاقد حرف «ن» باشد؟ (تالیفی)

◀ مثال: ۳ معلم و ۳ دانش‌آموز برای عکس یادگاری کنار هم می‌ایستند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: (تالیفی)  
الف) معلم‌ها کنار هم قرار گیرند. (مشابه سراسری ریاضی)

ب) معلم‌ها کنار هم و دانش‌آموزان هم کنار هم قرار گیرند.

ج) معلم‌ها و دانش‌آموزان یکی در میان بایستند.

◀ مثال: ۷ پرچم مختلف را به ۷ میله پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به طور تصادفی کنار هم قرار بگیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند. (کتاب درسی)

ج) استفاده از ترکیب:

◀ مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: (کتاب درسی)

الف) رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد.

ب) ۳ پیراهن از یک رنگ باشند.

پ) حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند.

ت) حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند.

◀ مثال: از جعبه‌ای شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار، ۴ سیب به تصادف برمی‌داریم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه: الف) هر ۴ سیب سالم باشند. (مشابه کتاب درسی)

ب) ۳ سیب سالم و ۱ سیب لکه‌دار باشد. (نهایی خرداد- ۹۸ و مشابه نهایی دی- ۹۸)

ج) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد. (مشابه کتاب درسی)

◀ **مثال:** در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی وجود دارد. ۵ تا از آن‌ها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آن‌ها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند. (کتاب درسی)

◀ **مثال:** انجمن اولیاء و مربیان یک دبیرستان ۱۰ عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع دادند. از بین آن‌ها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: (کتاب درسی)

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مشابه هم نباشد.

◀ **مثال:** خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: (نهایی خرداد- ۹۸)

الف) هر دو فرزند از یک جنس باشند.

ب) حداکثر یک فرزند پسر باشد.

د) استفاده همزمان از جایگشت و ترکیب:

◀ **مثال:** یازده بازیکن تیم فوتبال مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر می‌ایستند تا عکس یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند. (کتاب درسی)

❖ **تست:** از بین ۲۰ کارت یکسان که اعداد ۱ تا ۲۰ بر روی آن‌ها نوشته شده است، دو کارت با شماره‌های زوج را کنار می‌کشیم. از بین بقیه به تصادف یک کارت بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال عدد این کارت زوج است؟ (انسانی داخل - ۹۵)

$$(1) \frac{4}{9} \quad (2) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{5}{9} \quad (4) \frac{7}{18}$$

❖ **تست:** جدول مقابل تعداد لامپ‌های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از تولیدات دو کارخانه A و B است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال این لامپ ۱۰۰ واتی است؟ (انسانی داخل - ۹۰ و مشابه داخل - ۸۷)

	۶۰ وات	۱۰۰ وات
A	۲۰	۱۴
B	۲۲	۳۴

$$(1) \frac{7}{15} \quad (2) \frac{8}{15}$$

$$(3) \frac{3}{5} \quad (4) \frac{5}{9}$$

❖ **تست:** یک سکه و یک تاس با هم پرتاب می‌شوند. با کدام احتمال سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ ظاهر می‌شود؟

(انسانی داخل - ۹۸)

$$(1) \frac{1}{12} \quad (2) \frac{1}{6}$$

$$(3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{1}{3}$$

❖ **تست:** ۳ تاس متمایز را همزمان پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر سه عدد رو شده متفاوت اند؟ (انسانی خارج - ۹۲)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{4}{9}$$

$$(3) \frac{5}{9} \quad (4) \frac{2}{3}$$

❖ تست: در ظرفی ۱۰ گوی یکسان با شماره‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ قرار دارند. یک گوی به تصادف خارج کرده و شماره آن را یادداشت می‌کنیم و دوباره به ظرف برمی‌گردانیم. گوی دیگری خارج کرده، شماره آن را سمت راست رقم قبلی می‌نویسیم.

با کدام احتمال عدد حاصل بزرگتر از ۵۵ است؟ (انسانی داخل - ۸۶)

(۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{2}{44}$

(۳)  $\frac{3}{45}$       (۴)  $\frac{4}{48}$

❖ تست: سکه‌ای را ۵ بار می‌اندازیم. احتمال اینکه فقط ۳ بار رو بیاید کدام است؟ (سراسری انسانی)

(۱)  $\frac{8}{32}$       (۲)  $\frac{10}{32}$

(۳)  $\frac{12}{32}$       (۴)  $\frac{18}{32}$

❖ تست: در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر هستند؟ (تجربی داخل - ۹۰)

(۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{5}{8}$

(۳)  $\frac{9}{16}$       (۴)  $\frac{3}{4}$

❖ تست: احتمال آنکه شخصی جواب ۵ تست دوگزینه‌ای را تصادفاً صحیح انتخاب نماید، چند برابر احتمال انتخاب صحیح

تصادفی ۵ تست چهارگزینه‌ای است؟ (سراسری انسانی)

(۱) ۴      (۲) ۸

(۳) ۱۶      (۴) ۳۲

❖ **تست:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ یک عدد چهار رقمی می‌سازیم. احتمال اینکه ارقام آن متمایز و دقیقاً دو رقم آن زوج

باشد کدام است؟ (تالیفی)

$$(۱) \quad \frac{1}{18}$$

$$(۲) \quad \frac{1}{6}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{2}$$

$$(۴) \quad \frac{5}{36}$$

✓ **نکته:** در برخی مسائل نمی‌توان به کمک روابط شمارش،  $n(A)$  یا  $n(S)$  (اغلب  $n(A)$ ) را حساب کرد. در اینگونه مسائل باید با نوشتن پیشامد مورد نظر، تعداد اعضای آن را محاسبه کنیم.

◀ **مثال:** یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که حاصل ضرب اعداد رو شده برابر ۱۲ شود. (تالیفی)

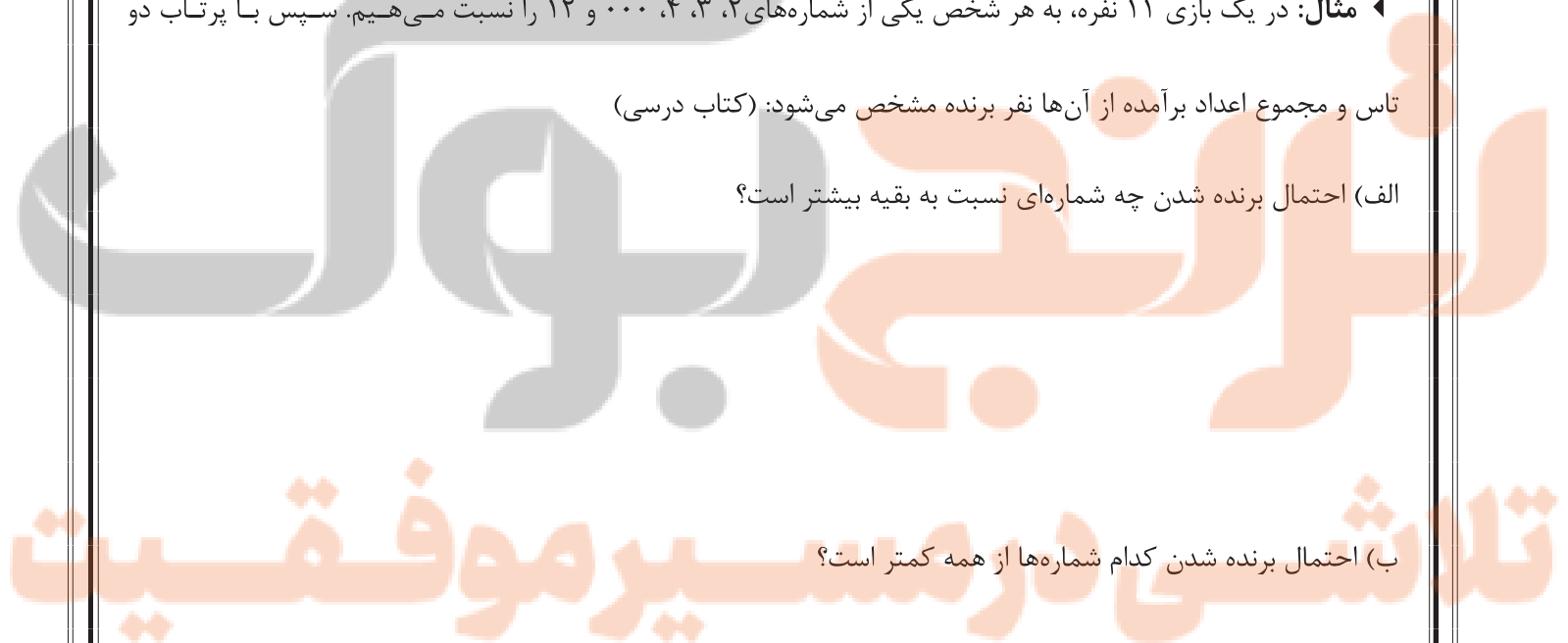
◀ **مثال:** در پرتاب یک سکه و یک تاس، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه تاس زوج یا سکه رو بیاید. (کتاب درسی)

◀ **مثال:** در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخص یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ۰۰۰ و ۱۲ را نسبت می‌هیم. سپس با پرتاب دو

تاس و مجموع اعداد برآمده از آن‌ها نفر برنده مشخص می‌شود: (کتاب درسی)

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟



پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آن‌ها را بنویسید. سپس نمودار میله‌ای مربوط به آن را رسم کنید.

✓ **نکته تستی:** در پرتاب دو تاس، تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده برابر  $x$  شود برابر  $|x-7| - 6$  است.

❖ **تست:** یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده برابر ۷ می‌باشد؟ (تالیفی)

$$(1) \quad \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad \frac{5}{12}$$

$$(4) \quad \frac{7}{36}$$

❖ **تست:** دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ می‌باشد؟ (انسانی خارج - ۹۸)

$$(1) \quad \frac{5}{9}$$

$$(2) \quad \frac{7}{12}$$

$$(3) \quad \frac{2}{4}$$

$$(4) \quad \frac{5}{6}$$

❖ **تست:** احتمال آنکه در پرتاب دو تاس، اعداد رو شده برابر بوده یا مجموع آن‌ها ۱۱ شود کدام است؟ (انسانی داخل - ۸۴)

$$(1) \quad \frac{3}{10}$$

$$(2) \quad \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad \frac{4}{11}$$

$$(4) \quad \frac{5}{12}$$



❖ تست: هر یک از اعداد ۲۰, ۳, ۲, ۱ بر روی ۲۰ گوی نوشته شده است. اگر یک گوی از بین آن‌ها بیرون آوریم با کدام

احتمال عدد آن زوج است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست؟ (انسانی خارج و مشابه داخل - ۹۷)

$$(۱) \frac{۱}{۳} \quad (۲) \frac{۲}{۳۵}$$

$$(۳) \frac{۱}{۴} \quad (۴) \frac{۴}{۴۵}$$

❖ تست: در جعبه‌ای ۴ مهره با شماره‌های ۱ تا ۴ موجود است. به تصادف یک مهره از جعبه بیرون می‌کشیم، شماره آن را

یادداشت کرده و به جعبه برمی‌گردانیم. مهره دیگری بیرون کشیده، شماره آن را در کنار عدد قبلی قرار می‌دهیم. با کدام

احتمال عدد دو رقمی حاصل، مضرب ۳ است؟ (انسانی داخل - ۹۶ و مشابه داخل - ۹۲ و ۹۴)

$$(۱) \frac{۵}{۱۶} \quad (۲) \frac{۷}{۱۶}$$

$$(۳) \frac{۱}{۴} \quad (۴) \frac{۱}{۳}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

احتمال پیشامد متمم:

◀ مثال: احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر  $\frac{۳۲}{۴۹}$  است. مطلوب است محاسبه احتمال

اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند. (کتاب درسی)

◀ مثال: حسن و حسین و تقی روی یک نیمکت می‌نشینند. اگر ترتیب نشستن آن‌ها تصادفی باشد، احتمال اینکه حسن و

حسین کنار هم نباشند چقدر است؟ (مشابه سراسری ریاضی)

تلاشی در مسیر موفقیت

◀ مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه رنگ هر سه پیراهن آبی نباشد. (کتاب درسی)

✓ نکته: در برخی مسائل محاسبه مستقیم  $P(A)$  دشوار است و بهتر است  $P(A')$  را حساب کنیم. در اینگونه مسائل اغلب عبارت «حداقل» یا «حداکثر» به چشم می‌خورد که باید آن را متمم کنیم.

◀ مثال: در یک عدد سه رقمی بدون صفر، احتمال اینکه لااقل دو رقم آن یکسان باشند چقدر است؟ (انسانی داخل - ۸۷)

◀ مثال: در پرتاب دو تاس باهم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده بزرگتر از ۳ باشد چقدر است؟ (سراسری انسانی)

◀ مثال: از یک کیسه حاوی ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که دست کم یک مهره آبی باشد؟ (تالیفی)

◀ مثال: از یک کیسه حاوی ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداکثر ۲ مهره قرمز باشند؟ (تالیفی)

❖ تست: اگر نسبت احتمال آمدن باران به نیامدنش  $\frac{2}{3}$  باشد، احتمال آمدن باران چقدر است؟ (سراسری ریاضی)

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{3}{4}$       (۴)  $\frac{2}{5}$

❖ تست: در بررسی تخلفات ۳۰۰۰ راننده به علت سرعت زیاد، ۱۸ مورد با خطای دید مامور، اشتباه رخ داده است. اگر

راننده‌ای با اعمال این تخلف جریمه شود، با کدام احتمال تخلف وی واقعی است؟ (انسانی داخل - ۹۱)

(۱)  $0/984$       (۲)  $0/988$

(۳)  $0/992$       (۴)  $0/994$

❖ تست: صفحه دایره‌ای شکل عقربه‌دار با ۴ رنگ سفید، آبی، قرمز و سیاه به ترتیب با زاویه‌های  $15^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $70^\circ$  و  $50^\circ$

درست شده است. با چرخش تصادفی، با کدام احتمال عقربه در ناحیه سفید قرار نمی‌گیرد؟ (انسانی داخل - ۸۵)

(۱)  $\frac{5}{12}$       (۲)  $\frac{4}{9}$

(۳)  $\frac{5}{9}$       (۴)  $\frac{7}{12}$

❖ تست: در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال اعداد ۵ یا ۶ یا هردو ظاهر می‌شوند؟ (انسانی داخل - ۹۲)

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{4}{9}$

(۳)  $\frac{5}{9}$       (۴)  $\frac{11}{18}$



❖ تست: بر روی یک نیمکت ۴ دانش‌آموز نشسته‌اند. با کدام احتمال لاقل ۲ نفر از آنان در یک ماه از سال متولد شده‌اند؟

(انسانی خارج- ۹۶ و مشابه خارج- ۹۲)

$$\frac{41}{96} \quad (1) \quad \frac{23}{48} \quad (2)$$

$$\frac{25}{48} \quad (3) \quad \frac{55}{96} \quad (4)$$

❖ تست: در پرتاب ۳ سکه با هم، احتمال ظاهر شدن لاقل یک رو کدام است؟ (انسانی داخل- ۹۵)

$$\frac{3}{8} \quad (1) \quad \frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{6}{8} \quad (3) \quad \frac{7}{8} \quad (4)$$

❖ تست: ۴ تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده لاقل در دو تاس یکسان هستند؟ (انسانی خارج- ۹۳)

$$\frac{5}{18} \quad (1) \quad \frac{7}{18} \quad (2)$$

$$\frac{11}{18} \quad (3) \quad \frac{13}{18} \quad (4)$$

تلاشی در مسیر موفقیت

مروری بر برخی مفاهیم آمار سال دهم:

انواع متغیرها:

الف) کیفی: ۱- کیفی اسمی ۲- کیفی ترتیبی

ب) کمی: ۱- کمی فاصله‌ای ۲- کمی نسبی

**میانۀ یا چارک دوم ( $Q_2$ ):** عددی است که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است. پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، اگر تعداد داده‌ها عددی فرد باشد، میانۀ داده‌ای است که در وسط قرار دارد و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد برابر میانگین دو داده وسط است.

**چارک‌های اول ( $Q_1$ ) و سوم ( $Q_3$ ):** پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، میانۀ داده‌های قبل از میانۀ را چارک اول ( $Q_1$ ) و میانۀ داده‌های بعد از میانۀ را چارک سوم ( $Q_3$ ) می‌نامیم.

**دامنه میان چارکی (IQR):**  $IQR = Q_3 - Q_1$

**میانگین ( $\bar{x}$ ):**  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

**دامنه تغییرات (R):**  $R = \max - \min$

**واریانس ( $\sigma^2$ ):**  $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

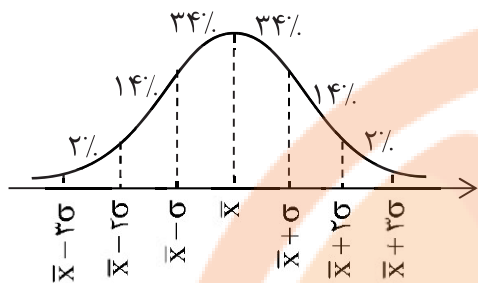
**انحراف معیار:** به جذر واریانس انحراف معیار می‌گویند.  $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

✓ نکته: اگر داده دور افتاده (پرت) داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیار مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود و

باید از میانۀ (معیار گرایش به مرکز) و دامنه میان چارکی (معیار پراکندگی) استفاده کنیم. همچنین در این حالت برای نمایش

داده‌ها از نمودار جعبه‌ای استفاده می‌کنیم.

نحوه پخش داده‌ها در اطراف میانگین (منحنی نرمال - خم بهنجار): در  $n$  داده آماری  $X_1, X_2, \dots, X_n$  با میانگین  $\bar{X}$  و



انحراف معیار  $\sigma$  داریم:

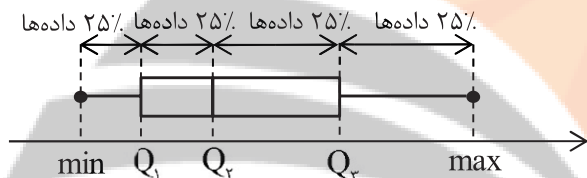
تقریباً ۶۸٪ داده‌ها در محدوده  $(\bar{X}-\sigma, \bar{X}+\sigma)$

تقریباً ۹۶٪ داده‌ها در محدوده  $(\bar{X}-2\sigma, \bar{X}+2\sigma)$

و تقریباً ۱۰۰٪ داده‌ها در محدوده  $(\bar{X}-3\sigma, \bar{X}+3\sigma)$  قرار دارند.

**نمودار جعبه‌ای:** با مشخص شدن کوچکترین داده ( $\min$ ), چارک‌های اول، دوم (میان) و سوم ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ) و بزرگترین

داده ( $\max$ ) می‌توان نموداری مانند شکل زیر رسم کرد که به نمودار جعبه‌ای معروف است.



✓ نکته: بهترین و مطمئن‌ترین نمودار برای متغیرهای کمی، نمودار جعبه‌ای است.

**نمودار دایره‌ای:** از این نمودار برای متغیرهای کیفی استفاده می‌کنیم. اگر تعداد کل داده‌ها برابر  $n$  باشد، برای محاسبه زاویه

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ$$

مرکزی مربوط به داده با فراوانی  $f$  داریم:

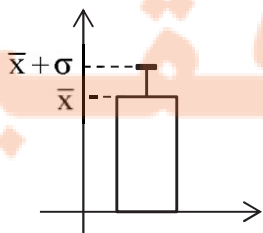
**نمودار میله‌ای:** از این نمودار هم برای متغیرهای کیفی و هم کمی استفاده می‌کنیم. برای رسم این نمودار دو محور عمود

برهم رسم کرده، روی یکی نام متغیر و روی دیگری فراوانی آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

**یک نمودار کاربردی در آمار:** در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم

از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین و میله خطای آن به اندازه انحراف معیار روی مستطیل

بالا آمده باشد. (نمودار بستنی وارونه)



گام‌های چرخه آمار در حل مسائل:

### ۱- گام اول: بیان مسئله

مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.

✓ نکته: طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد. یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود و هدف مطالعه را مشخص می‌کنیم.

### ۲- گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی

راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.

✓ نکته: اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی، علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

اندازه جامعه و اندازه نمونه: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم.

✓ نکته: هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

### ۳- گام سوم: گردآوری و پاکسازی داده‌ها

داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

#### ۴- گام چهارم: تحلیل داده‌ها

با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.

✓ سه نکته: ۱- منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

۲- برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکز اند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند.

۳- برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

#### ۵- گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری

نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

✓ نکته: از جامعه‌ای با اندازه  $N$  به  $\binom{N}{n}$  طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه  $n$  داشته باشیم.

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل: در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها را خوب بشناسیم. این امر بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی ممکن نیست.

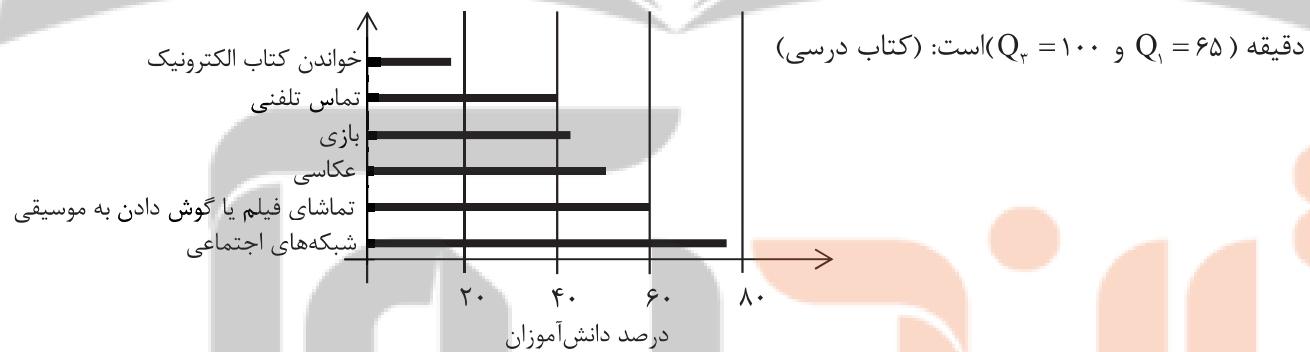
تعمیم نتایج: هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.



◀ **مثال:** در نمونه‌گیری زیر میزان مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره بر حسب متر مکعب به دست آمده است. میانه، چارک اول و سوم، میانگین، واریانس، انحراف معیار، دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی را یافته و نمودار جعبه‌ای و نمودار بستنی وارونه آن را رسم کنید. (نهایی شهریور - ۹۸ با تغییر)

۱۳۰, ۶۵, ۷۵, ۱۲۰, ۵۰, ۳۰, ۷۰, ۱۱۰, ۴۰

◀ **مثال:** نتایج نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده توسط تعدادی دانش‌آموز با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شده است. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه، و دامنه میان چارکی آن ۳۵



الف) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

ب) با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت است؟

ج) چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

◀ مثال: دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آن‌ها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهانه کارمندان شرکت اول تقریباً  $\frac{1}{6}$  میلیون تومان و میانگین حقوق ماهانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. از اعظم نظرخواهی می‌کند و او می‌گوید: شرکت دوم را انتخاب کن چون به طور متوسط هرماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.

مریم می‌گوید: به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون گزارش معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟

آن‌ها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند. پس در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند: (کتاب درسی)

		حقوق کارمندان							
شرکت اول	۱	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	۳	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{8}$
شرکت دوم	$\frac{0}{7}$	۱	۸	$\frac{12}{11}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{8}$

الف) با استفاده از داده‌های جدول، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

ب) با توجه به قسمت الف، درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

۱- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارکنان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارکنان شرکت اول است.

۲- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه مناسبی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.

۳- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

◀ مثال: با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب

تصادفی ۹ نفر از آن‌ها پرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند: (کتاب درسی)

۱- پیاده یا با دوچرخه ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) به چند طریق می‌توانیم این نمونه را انتخاب کنیم؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی / کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای / نسبتی) آن را

مشخص کنید.

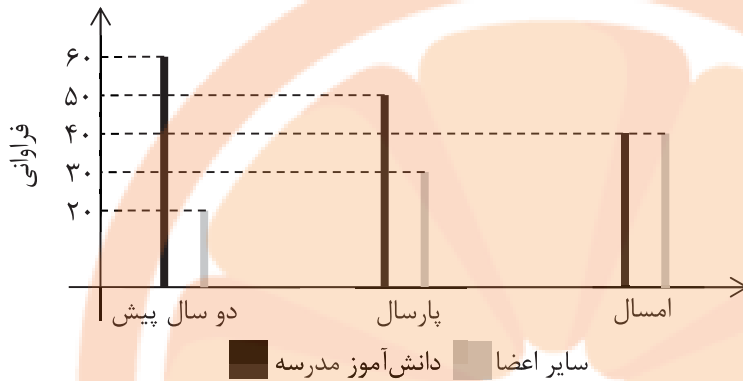
ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به

فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

◀ مثال: مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج مدرسه نیز عضو

می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید در دو گروه مذکور است: (کتاب درسی)



الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

تلاشی در مسیر موفقیت

❖ **تست:** در کدام مرحله از چرخه آمار، علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود؟ (تالیفی)

(۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه‌ریزی (۳) گردآوری و پاکسازی داده‌ها (۴) بحث و نتیجه‌گیری

❖ **تست:** چند مورد از عبارات زیر نادرست است؟ (تالیفی)

۱- طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.

۲- اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای تحلیل داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

۳- در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات کمی را تا حد ممکن به اطلاعات کیفی تبدیل کنیم.

۴- هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه کوچک‌تری نیاز داریم.

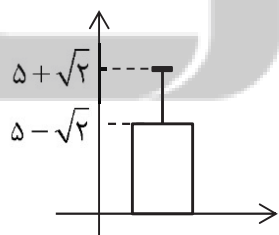
۵- برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود.

۶- منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

۷- برای توصیف داده‌های کمی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۵

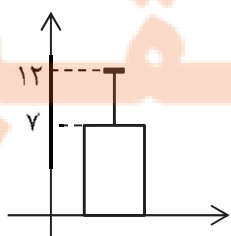
❖ **تست:** با توجه به نمودار مقابل، واریانس این داده‌ها کدام است؟ (تالیفی)



(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$

(۳) ۲ (۴) ۸

❖ **تست:** نمودار مقابل مربوط به تعدادی داده نرمال است. تقریباً چند درصد داده‌ها در محدوده (۲, ۲۲) قرار دارند؟ (تالیفی)



(۱) ۶۸ (۲) ۸۲

(۳) ۸۴ (۴) ۹۸

❖ تست‌های کنکور ۹۹ مرتبط با این فصل ❖

❖ تست: در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟

(انسانی داخل - ۹۹)

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲

(۳) ۷۵ (۴) ۸۴

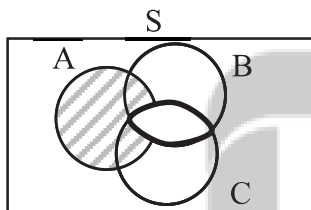
❖ تست: در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه یکسان قرار دارند. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ۲

مهره سفید و یک مهره سیاه خارج می‌شود؟ (انسانی داخل - ۹۹)

(۱)  $\frac{5}{14}$  (۲)  $\frac{3}{7}$

(۳)  $\frac{10}{21}$  (۴)  $\frac{11}{21}$

❖ تست: مطابق شکل زیر فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند. کدام مورد برای قسمت سایه‌خورده نادرست است؟



(انسانی خارج - ۹۹)

(۱)  $(A - B) \cup (A - C)$  (۲)  $A \cap (B' \cup C')$

(۳)  $A - (B \cap C)$  (۴)  $A - (B \cup C)$

❖ تست: در پرتاب یک تاس و ۲ سکه، احتمال اینکه لااقل یکی از سکه‌ها «پشت» و عدد روشده در تاس فرد باشد کدام

است؟ (انسانی خارج - ۹۹)

(۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{5}{12}$

(۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

❖ تست: تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵ با ارقام غیر تکراری کدام است؟ (ریاضی داخل - ۹۹)

(۱) ۹۴۸      (۲) ۹۵۲

(۳) ۹۶۸      (۴) ۹۷۲

❖ تست: سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار

دارد. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

(ریاضی داخل - ۹۹)

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{11}{18}$

(۳)  $\frac{25}{36}$       (۴)  $\frac{13}{18}$

❖ تست: تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۹)

(۱) ۱۸۴۸      (۲) ۱۷۹۲

(۳) ۱۷۴۸      (۴) ۱۶۵۸

❖ تست: یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می کنیم. احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶ کدام است؟

(ریاضی خارج - ۹۹)

(۱)  $\frac{13}{36}$       (۲)  $\frac{41}{108}$

(۳)  $\frac{91}{216}$       (۴)  $\frac{31}{72}$

❖ تست: به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟ (تجربی داخل - ۹۹)

۸۴ (۱)      ۸۷ (۲)

۹۱ (۳)      ۹۵ (۴)

❖ تست: پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (تجربی داخل - ۹۹)

$\frac{1}{14}$  (۱)       $\frac{1}{21}$  (۲)

$\frac{1}{28}$  (۳)       $\frac{1}{56}$  (۴)

❖ تست: به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کند؟ (تجربی خارج - ۹۹)

۱۰۵ (۱)      ۱۲۵ (۲)

۱۳۵ (۳)      ۱۵۰ (۴)

❖ تست: ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن‌ها در کنار هم نیستند؟

(تجربی خارج - ۹۹)

$\frac{2}{3}$  (۱)       $\frac{3}{4}$  (۲)



تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓