فصل ۲: نظریه‌ی اعداد

بخش‌پذیری و تقسیم

عضو ابتدای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو ابتدای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\min A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A کوچک‌تر یا مساوی باشد.

عضو انتهای یک مجموعه: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد x را عضو انتهای A می‌گوییم و می‌نویسیم $\max A = x$ هرگاه:

۱. x عضو A باشد.

۲. x از تمام اعضای A بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

نکته: ممکن است یک مجموعه عضو ابتدا و یا انتها نداشته باشد.

مثال ۱: وجود عضو ابتدا و انتها را در مجموعه‌های زیر بررسی کنید.

$۱) A = \{x \in R \mid -۲ < x \leq ۹\}$ $۲) B = \{x \in R \mid -۲ \leq x < ۹\}$ $۳) = \{x \in z \mid -۲ < x \leq ۹\}$

اصل خوش‌ترتیبی: هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای عضو ابتدا (کوچک‌ترین عضو) است.

اصل استقرای ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن عدد طبیعی مانند t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی $t+۱$ نیز در آن زیرمجموعه باشد.

اصل استقرای قوی ریاضی: اگر زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هر دو ویژگی زیر را داشته باشد، آن‌گاه با خود مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است.

۱. عدد ۱ متعلق به آن زیر مجموعه باشد.

۲. در صورت موجود بودن همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از t در آن زیر مجموعه، عدد طبیعی t نیز در آن زیرمجموعه باشد.

بخش‌پذیری: عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیر صفر b بخش پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $a = b \times q$. بخش‌پذیری a بر b را به صورت $b \mid a$ نشان می‌دهیم و بخش‌پذیر نبودن a بر b را به صورت $b \nmid a$ نشان می‌دهیم. $b \mid a \Leftrightarrow a = bq \quad (q \in z)$

قرار داد: چون بی شمار عدد صحیح مانند q یافت می‌شود که در تساوی $۰ \times q = ۰$ صدق می‌کند، قرارداد می‌کنیم که صفر بر خودش بخش‌پذیر است یعنی $۰ \mid ۰$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری:

(در تمام فرمول‌های زیر، پایه‌ها، اعداد صحیح و توان‌ها، اعداد طبیعی‌اند.)

$1)\ \pm 1 \mid a$

$2)\ a \mid 1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{or} \quad a = -1$

$3)\ \pm a \mid a$

$4)\ a \mid 0$

$$5)\ a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$$

$6)\ a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$

$7)\ a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

$8)\ a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$

$9)\ a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

$10)\ a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

$11)\ a \mid b \xrightarrow{m<n} a^m \mid b^n$

$12)\ a^m \mid b^n \xrightarrow{m>n} a \mid b$

$$13)\ a \mid b\ ,\ a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid b \pm c \\ a \mid b \times c \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$$

$14)\ a \mid b\ ,\ c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

$15)\ a \mid b\ ,\ b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

$16)\ a \mid b \Rightarrow a \mid ma \pm nb$

$17)\ ab \mid c \Rightarrow a \mid c\ ,\ b \mid c$

$18)\ (a-b) \mid (a^n - b^n)$

$$19)\ \frac{n}{m} \in N \Rightarrow (a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$$

$$20)\ \frac{n}{m} = 2k+1 \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n + b^n) \quad \Rightarrow \quad n = 2k+1 \Rightarrow (a+b) \mid (a^n + b^n)$$

$$21)\ \frac{n}{m} = 2k \Rightarrow (a^m + b^m) \mid (a^n - b^n) \quad \Rightarrow \quad n = 2k \Rightarrow (a+b) \mid (a^n - b^n)$$

۲۲) حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

مثال ۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم $14^{1394} - 8^{1394}$ را بر ۶ بیابید.

مثال ۳: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a = 3^{36} - 2^{36}$ را بر ۳۵ بیابید.

مثال ۴: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

$1)\ a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^3$

$2)\ a^2 \mid b^3 \Rightarrow a \mid b$

مثال ۵: تمام مقادیر صحیح n را چنان بیابید که حاصل $\frac{4n-2}{n+1}$ یک عدد صحیح باشد.

مثال ۶: اگر $\frac{n^{۲}+۴}{n+۱}$ یک عدد صحیح باشد آن‌گاه برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

مثال ۷: چند عدد صحیح مانند a می‌توان یافت به طوری که در هر دو رابطه‌ی $a|۲۴۰$ و $۱۲|a$ صدق کنند.

مثال ۸: چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد که $d|۴۵۰$ و $۱۵|d$.

قضیه‌ی تقسیم: اگر a عدد صحیح و b یک عدد طبیعی دلخواه باشند، آن‌گاه دو عدد صحیح منحصر به فردی مانند r و q چنان یافت می‌شوند که $a=bq+r$ و $۰\le r<b$. در این حالت q را خارج قسمت، r را باقی‌مانده، a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه می‌گوییم.

مثال ۹: عدد -۴۸۷ را بر ۲۳ تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را تعیین کنید.

نکته: هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت $۲k$ و $۲k+۱$ و یا به یکی از سه صورت $۳k$ و $۳k+۱$ و $۳k+۲$ و ... نمایش داد.

نکته: مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ می‌باشد.

نکته: باقیمانده‌ی یک عدد در تقسیم بر ۴، باقیمانده‌ی عدد حاصل ازدو رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر ۴ می‌باشد.

نکته: باقیمانده‌ی یک عدد در تقسیم بر ۸، باقیمانده‌ی عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد در تقسیم بر ۸ می‌باشد.

نکته: مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقیمانده‌ی یک می‌آورد. به عبارت دیگر $a=۲k+۱ \Rightarrow a^{۲}=۸q+۱$.

مثال۱۰: کدام‌یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

۱) ۷۴۵۱۹ ۲) ۷۴۵۲۹ ۳) ۷۴۵۳۹ ۴) ۷۴۵۴۹

مثال ۱۱: از بین اعداد ۱ و ۱۱ و ۱۱۱ و ۱۱۱۱ و ... چه تعدادی مربع کامل هستند؟

نکته: هیچ مربع کاملی نمی‌تواند به یکی از ارقام ۲و۳و۷و۸ ختم شود.

نکته: اگر مربع کاملی به ۵ ختم شود، لازم است رقم دهگان آن مربع کامل برابر ۲ باشد.

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $۱,۲,۳,...,n$ برابر $\left[\frac{n}{b}\right]$ می‌باشد.

مثال ۱۲: چند عدد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد؟

نکته: تعداد مضارب طبیعی عدد طبیعی b در بین اعداد $k+۱,k+۲,...k+n$ برابر $\left[\frac{k+n}{b}\right]-\left[\frac{k}{b}\right]$ می‌باشد.

مثال ۱۳: تعداد اعداد سه رقمی که بر ۳۴ بخش‌پذیر باشند چقدر است؟

مثال ۱۴: معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱۳۸۳$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

مثال ۱۵: در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر ۲۹ و خارج قسمت برابر ۷ می‌باشد.حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد بدون این‌که مقسوم و خارج قسمت تغییر نماید؟

مثال ۱۶: در یک تقسیم، اگر ۲۰۰ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقی‌مانده ۲۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

مثال ۱۷: در یک تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت ۱۲ می‌باشد. تعیین کنید مقسوم علیه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

مثال ۱۸: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۵ و ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

عدد اول:

یک عدد طبیعی را اول گوییم هرگاه در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، دو و فقط دو مقسوم علیه مثبت داشته باشد که یکی از آن دو مقسوم‌علیه عدد ۱ و دیگری خود آن عدد است. عددی که اول نباشد، مرکب خوانده می‌شود.

نکته: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو شکل $6k+1$ و $6k-1$ (یا $6q+5$) می‌باشد. (به عبارتی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۶، عددی بجز ۱ و ۵ باشد، آن عدد اول نیست). در عین حال، ممکن است عددی به شکل $6k+1$ و $6k-1$ باشد ولی اول نباشد؛ مثل $25=6\times4+1$.

نکته: تنها عدد اولی که زوج است عدد ۲ می‌باشد. (اعداد اول: ۲و۳و۵و۷و...)

مثال ۱۹: مجموع دو عدد اول برابر ۹۱ شده است. مجموع ارقام حاصل ضرب آن دو عدد را بیابید.

مثال ۲۰: دو عدد طبیعی a و b چنانند که $a^2=b^2+41$، مجموع ارقام عدد $a+2b$ را بیابید.

قضیه: بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. (مجموعه‌ی اعداد اول مجموعه‌ای نامتناهی است)

قضیه: عدد n اول است هرگاه به هیچ یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ بخش‌پذیر نباشد.

تجزیه‌ی یک عدد به حاصل‌ضرب عوامل اول:

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

نکته: اگر پس از تجزیه‌ی یک عدد، توان تمام عامل‌های اول عددی زوج باشند، آن عدد، مربع کامل است و اگر مضرب سه باشند، مکعب کامل است.

مثال ۲۱: با توجه به تجزیه‌ی عدد ۱۳۸۰، مربع کامل بودن آن را بررسی کنید.

نکته: اگر عدد n به صورت $n=p_1^{\alpha_1}\times p_1^{\alpha_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه شده باشد، آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ خواهد بود.

مثال ۲۲: تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۵۰ را بیابید.

مثال ۲۳: کدام‌یک ازاعداد زیر دارای ۲۷ مقسوم‌علیه مثبت می‌باشد؟

۱) ۱۹۶۳ ۲) ۱۷۶۴ ۳) ۱۸۶۲ ۴) ۲۱۷۸

نکته: تعداد عوامل اول p موجود در $n!$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

مثال ۲۴: در تجزیه‌ی عدد $۵۰!$، توان عدد ۳ چند است؟

مثال ۲۵: تعداد صفرهای واقع در انتهای عدد $n!$ با تعداد عوامل ۵ موجود در $n!$ یعنی مقدار زیر برابر است.

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\dots$$

مثال ۲۶: تعداد صفرهای موجود در انتهای $۷۹!$ چقدر است؟

مثال ۲۷: بیش‌ترین مقدار k برای آن‌که $۱۹۴!$ بر 21^k بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

برای به دست آوردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را بـه حاصـل‌ضـرب عامـل‌هـای اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان کم‌تر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

ب.م.م دو عدد a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۸: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴۵۰ و ۱۰۰۸ را بیابید.

نکته: $(a,b)=d \Rightarrow d\,|\,a\ ,\ d\,|\,b$.

مثال ۲۹: اگر $d=(3a+5,5a+4)$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

مثال ۳۰: اگر $d=(a-5,a^2-6a+3)$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b با مجموعه‌ی مقـسوم‌علیـه‌هـای ب.م.م آن دو عـدد برابـر است؛ یعنی اگر $x\,|\,a$ و $x\,|\,b$ آن‌گاه $x\,|\,(a,b)$.

مثال ۳۱: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابـر بـا ۷۲ مـی‌باشـد. آن دو عـدد چنـد مقـسوم علیـه مشترک دارند؟

ترکیب خطی دوعدد: به ازای هر $m,n\in Z$ ، $ma+nb$ را یک ترکیب خطی a و b می‌گوییم.

نکته: $(a,b)=d \Leftrightarrow \exists m,n\in Z\ ,\ ma+nb=d$.

دو عدد متباین (نسبت به هم اول): دو عدد a و b را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a,b)=1$.

نکته: اگر برای اعداد صحیح a و b، اعـداد صـحیحی ماننـد r و s چنـان یافـت شـوند کـه $ra+sb=1$، آن‌گـاه $(a,b)=1$.

نکته: اگر a در تقسیم بر b باقیمانده‌ی r داشته باشد، آن‌گاه $(a,b)=(b,r)$.

مثال ۳۲: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه $(a,5a+d)$ چقدر است؟

نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع (تفاضل) آن دو عدد نیز نـسبت بـه هـم اولند، یعنی: $(a,b)=1 \Rightarrow (a\pm b,ab)=1$

نکته: هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند و نیز هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

نکته: $\left.\begin{matrix}(a,b)=1\\(a,c)=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,bc)=1$

(لم اقلیدس): اگر $a\,|\,bc$ و $(a,b)=1$، آن‌گاه $a\,|\,c$.

نکته: اگر p عددی اول باشد و $p\,|\,ab$ آن‌گاه $p\,|\,a$ و $p\,|\,b$.

مثال ۳۳: اگر $(b,d)=1$ و $(a-2b,3a-b)=d$، آن‌گاه مقدار d را بیابید.

نکته: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه روابط زیر برقرارند.

$1)\ (ka,kb)=|k|d \qquad k\in Z-\{0\}$

$2)\ (\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{d}{|k|} \qquad k\,|\,d$

$3)\ (a^n,b^n)=d^n \qquad n\in N$

قضیه‌ی بزو: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، برابر است با کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $S=\{ma+nb>0\,|\,m,\in Z\}$.

مثال ۳۴: عضو ابتدای مجموعه‌ی $A=\{42r+12s>0\,|\,r,s\in Z\}$ را بیابید.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

برای به دست آوردن کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد، هر یک از آن‌ها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک با توان بیشتر و همچنیم عامل‌های غیر مشترک را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

مثال ۳۵: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴۵۰ و ۱۰۰۸ را بیابید.

نکته: اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه می‌توان نوشت: $\begin{cases}a=a'd\ ,\ b=b'd\ ,\ (a',b')=1\\ [a,b]=a'b'd\end{cases}$

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند، آن‌گاه $(a,b).[a,b]=|ab|$.

مثال ۳۶: کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی ۱۳ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد می‌باشد، اگر مجموع این دو عدد برابر ۱۲۶ باشد، آن‌گاه ب.م.م ان دو عدد را بیابید.

مثال ۳۷: مجموع دو عدد طبیعی، برابر ۵۰۴ و ب.م.م آن دو عدد برابر ۳۶ است. کم‌ترین مقدار طبیعی برای تفاضل آن دو عدد را بیابید.

همنهشتی

اگر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m $(m\geq 2)$ باقی‌مانده‌ی یکسانی مانند r داشته باشند، آن‌گاه دو عدد a و b را همنهشت با یکدیگر به پیمانه‌ی m میگوییم و آن را به صورت $a\overset{m}{\equiv}b$ یا $a\equiv b$ (پیمانه m) نشان می‌دهیم.

نکته: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه عدد صحیحی مثل q وجود دارد به طوری که: $a-b=mq$.

خواص همنهشتی:

در تمام روابط زیر d,c,b,a اعداد صحیح و m عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد.

۱) $a\overset{m}{\equiv}a$

۲) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

۳) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c) \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

۴) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d) \Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm d$

۵) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d) \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$

۶) $(a\overset{m}{\equiv}b) \Rightarrow (a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c\ ,\ ac\overset{m}{\equiv}bc)$

۷) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$

۸) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ a\overset{n}{\equiv}b) \Leftrightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

۹) $(a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ n\mid m) \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$

۱۰) $(ac\overset{m}{\equiv}bc\ ,\ d=(m,c)) \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

مثال ۳۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳۵^{۴۰}$ بر ۹ را بیابید.

مثال ۳۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^{۱۶}+۵$ بر عدد ۷ را بیابید.

مثال ۴۰: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۴۲\times ۱۸^n+۲۳\times ۵^n$ بر ۱۳ را بیابید.

مثال ۴۱: عدد $۲^{۱۳۸۴}$ در تقسیم بر ۱۳ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۴۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۲^{۶۰}$ بر ۱۷ را بیابید.

مثال ۴۳: کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن، $۲^{۶۴}+a$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

مثال ۴۴: اگر $a\overset{۶}{\equiv}۲$ و $a\overset{۸}{\equiv}۴$، آنگاه a در تقسیم بر ۲۴ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

مثال ۴۵: کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که با ازای آن رابطه‌ی $۴x\overset{۱۵}{\equiv}۳$ برقرار باشد.

کلاس هم‌ارزی (دسته‌ی هم‌ارزی): کلاس هم‌ارزی a مجموعه‌ای از اعداد صحیح است که هر یک از آن‌ها به پیمانه‌ی m با a همنهشت باشند. $[a]_m=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ x\overset{m}{\equiv}a\right\}$

مثال ۴۶: عدد ۲۰۷− به کدام دسته‌ی هم‌ارزی به پیمانه‌ی ۸ قرار دارد؟

۱) $[۱]$ ۲) $[۳]$ ۳) $[۵]$ ۴) $[۷]$

مثال ۴۷: کدام دو عدد زیر متعلق به یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۷ هستند؟

۱) ۲۷و۹۶ ۲) ۲۸و۹۶ ۳) ۲۶و۹۶ ۴) ۲۵و۹۶

مثال ۴۸: اگر $۲a-۱$ عضوی از دسته‌ی هم‌نهشتی $۳a-۳$ به پیمانه‌ی ۶ باشد، آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۳۸۱ ۲) ۱۳۸۲ ۳) ۱۳۸۳ ۴) ۱۳۸۴

قضیه‌ی فرما: اگر p عددی اول بوده و عدد صحیح a چنان باشد که $(a,p)=1$، آن‌گاه: $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$.

نکته: برای محاسبه‌ی رقم یکان اعداد توان‌دار، به جای پایه، رقم یکان و به جای توان، اگر توان مضرب ۴ باشد، به جای توان عدد ۴ و در غیر این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴۹: رقم یکان عدد 1392^{1393} را بیابید.

مثال ۵۰: رقم یکان عدد 2×1383^{1384} را بیابید.

مثال ۵۱: رقم یکان عدد $43^{17}+27^{23}$ را بیابید.

مثال ۵۲: رقم یکان عدد $(82+73!+49!)^{42!}$ را بیابید.

نمایش اعداد در مبناهای مختلف

می‌دانیم عدد ۴۹۲ که در مبنای ۱۰ نوشته شده است، به صورت $4\times10^2+9\times10^1+2\times10^0$ نیز قابل نمایش است و نیز عدد $(5726)_8$ که در مبنای هشت نوشته شده است، به صورت $5\times8^3+7\times8^2+2\times8^1+6\times8^0$ نیز قابل نمایش است. بنابر این هر عددی در یک مبنای خاص، قابل تبدیل به مبنای دیگر می‌باشد.

نکته: برای تبدیل هر عددی از مبنای ۱۰ به مبنایی غیر از ۱۰، از تقسیم‌های متوالی و برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ از ضب‌های متوالی استفاده می‌کنیم.

نکته: برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ می‌توان ابتدا آن را به مبنای ۱۰ برد و سپس به مبنای غیر ۱۰ خواسته شده تبدیل کرد.

نکته: اگر یک عدد در مبنای n نوشته شود، حتما هر یک از ارقام آن کمتر از n خواهند بود.

مثال ۵۳: عدد $(2103)_4$ را به مبنای ۱۰ ببرید.

مثال ۵۴: عدد ۳۵۷ را که در مبنای ۱۰ نوشته شده است به مبنای ۲ ببرید.

مثال ۵۵: عدد $(1102)_3$ را به عددی در مبنای ۴ ببرید.

مثال ۵۶: عدد $3\times8^4+2\times8^3+4$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۷: عدد $13\times8^2+69\times8^3+11$ را به مبنای ۸ ببرید.

مثال ۵۸: عدد $(10111011)_2$ را به مبنای ۸ ببرید. (چون $2^3=8$ لذا اعداد را از سمت راست، ۳ تا ۳ تا جدا کرده و هر کدام از این اعداد سه تایی را به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم و برای تبدیل از مبنای ۸ به ۲ برعکس عمل می‌کنیم، یعنی هر عدد از مبنای ۸، ۳ رقم از آن عدد را در مبنای ۲ تشکیل می‌دهد)

مثال ۵۹: حاصل عدد $(3754)_8$ را در مبنای ۲ بنویسید.

مثال ۶۰: اگر $(134)_{x+1}=(213)_x$، در این صورت $(111)_x$ را بیابید.

مثال ۶۱: اگر عدد دو رقمی $(\overline{ab})_7$ با عدد $(\overline{ba})_9$ برابر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

مثال ۶۲: عدد $65!$ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

قوانین یافتن بخش‌پذیری اعداد طبیعی بر اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ...:

۱) بخش‌پذیری بر 2^k (۲ و ۴ و ۸ و ...): عددی بر 2^k بخش‌پذیر است که مجموع k رقم سمت راست آن بر 2^k بخش‌پذیر باشد.

۲) بخش‌پذیری بر ۳ و ۹: عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع تمام ارقامش بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

۳) بخش‌پذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

۴) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ارقام آن را به ترتیب از راست به چپ با علامت مثبت و منفی جمع جبری کنیم حاصل آن بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

معادله‌ی سیاله

هر معادله به صورت $ax+by=c$ که در آن $a,b,c\in Z$ و برای هر x و y، به دنبال مقادیری در Z باشیم، یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی دو مجهولی نامیده می‌شود.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\,|\,c$.

مثال ۶۳: اگر معادله‌ی $84x+66y=5n+11$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن‌گاه n چه مقادیری را می‌تواند اختیار کند؟

نکته: اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه معادله‌ی $ax+by=c$ همواره جواب دارد.

نکته: اگر x_0 و y_0 جواب‌هایی از معادله‌ی $ax+by=c$ باشند، و $(a,b)=d$، آن‌گاه جواب‌های کلی آن معادله به شکل زیر است.

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{b}{d}k \\ y=y_0-\frac{a}{d}k \end{cases}$$

مثال ۶۴: جواب‌های عمومی معادله‌ی $9x+5y=-4$ را بیابید.

مثال ۶۵: اگر x و y جواب‌هایی از معادله‌ی $54x+21y=15$ باشند، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد x بر ۷ را بیابید.

مثال ۶۶: معادله‌ی سیاله‌ی $26x+38y=204$ را در Z حل کنید.

مثال ۶۷: پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۲۱۰ ریالی و ۱۴۰ ریالی برای فروش دارد. بسته‌ای نیاز به ۱۴۷۰ ریال تمبر دارد. چند تمبر ۲۱۰ ریالی و چند تمبر ۱۴۰ ریالی باید بخرد.