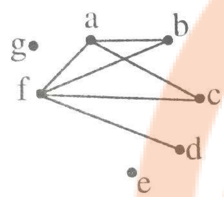
فصل ۱: گراف‌ها و کاربرد آن

گراف ساده: زوج مرتبی مثل $G(V,E)$ است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی V است.

مجموعه‌ی رئوس را با V و مجموعه‌ی یال‌ها را با E نشان می‌دهیم.

مثال ۱: مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف زیر را بنویسید.



مرتبه‌ی گراف (p): تعداد راس‌های گراف G را مرتبه‌ی گراف G می‌گوییم.

اندازه‌ی گراف (q): تعداد یال‌های گراف G را اندازه‌ی گراف G می‌گوییم. $\quad ۰ \le q \le \binom{p}{۲}$

درجه‌ی یک راس: به تعداد یال‌های گذرنده از یک راس، درجه‌ی آن راس می‌گوییم.

راس ایزوله (منفرد ـ منزوی): راسی است که درجه‌ی آن صفر باشد. (هیچ یالی از آن نگذرد)

دو راس مجاور: دو راس a و b را مجاور گوییم هرگاه آن دو راس توسط یک یال به هم متصل شده باشند.

گراف کامل: گراف G را کامل گوییم هرگاه هر دو راس دلخواه آن مجاور باشند؛ به عبارت دیگر همه‌ی یال‌های ممکن در آن رسم شده باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی p را به صورت k_p نشان می‌دهیم.

نکته: درجه‌ی هریک از رئوس گراف k_p برابر است با $p-۱$.

نکته: تعداد کل یال‌های گراف کامل k_p برابر است با $\binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$.

مثال ۲: تعداد یال‌های گراف $k_۸$ را به دست آورید.

مثال ۳: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند راس دارد؟

گراف تهی: گراف G را تهی گوییم هرگاه هیچ یالی در آن یافت نشود. به عبارت دیگر درجه‌ی هر یک از رئوس آن صفر باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی p را به صورت $\overline{k_p}$ نشان می‌دهیم.

نکته: تعداد گراف‌های ساده که با p راس مشخص (نامگذاری شده) می‌توان تعریف کرد برابر است با $۲^{\binom{p}{۲}}$.

مثال ۴: با چهار راس d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

مثال ۵: با پنج راس e,d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن‌ها شامل سه یال باشند؟

مثال ۶: با ۷ راس g,f,e,d,c,b,a چند گراف ساده می‌توان ساخت به شرطی که هر یک از آن گراف‌ها هر دو یال ac و ef را شامل بوده و هیچ یک از آن گراف‌ها یال ag را نداشته باشند.

گراف‌های هم‌نوع (یکریخت): دو گراف را یکریخت گوییم هرگاه بتوان با اعمالی مثل تغییر محل رئوس و اندازه‌ی یال‌ها و یا چرخش گراف‌ها، آن را بر روی هم منطبق کرد.

مثال ۷: کدام‌یک از گراف‌های زیر با گراف مقابل هم‌نوع است؟

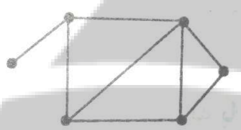
مثال ۸: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد که هر یک از آن‌ها فقط شامل ۳ یال باشند؟

مثال ۹: چند نوع گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ می‌توان ساخت به طوری که هر یک از آن‌ها فقط دارای سه یال باشند؟

ماکزیمم درجه‌ی یک گراف $\Delta(G)$: در هر گراف، بزرگترین درجه‌ی رئوس گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

مینیمم درجه‌ی یک گراف $\delta(G)$: در هر گراف، کوچکترین درجه‌ی رئوس گراف را مینیمم درجه‌ی گراف می‌گوییم.

مثال ۱۰: در گراف زیر، Δ و δ را بنویسید.



قضیه: در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، مجموع درجات رئوس، دو برابر تعداد یال‌های آن گراف می‌باشد.

به عبارتی $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$.

مثال ۱۱: فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به طوری که درجه‌ی هر راس آن ۲ یا ۳ می باشد. تعیین کنید این گراف چند راس از درجه‌ی ۲ و چند راس از درجه‌ی ۳ دارد؟

نکته: در هر گراف، تعداد راس‌های فرد، عددی زوج است.

نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی مقابل برقرار است. $\delta \le \deg v_i \le \Delta$

نکته: با گرفتن زیگما از طرفین نامساوی بالا، رابطه‌ی مقابل نتیجه می‌شود. $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$ یا $p\delta \le 2q \le p\Delta$

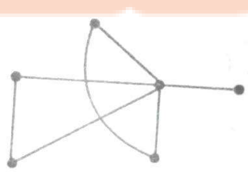
مثال ۱۲: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\Delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

مثال ۱۳: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداقل تعداد یال‌های آن کدام است؟

مثال ۱۴: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۷ چنان است که در آن $\delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده: اگر درجات رئوس یک گراف را به صورت یک دنباله‌ی نزولی بنویسیم، آن را دنباله‌ی درجات رئوس گراف می‌نامیم.

مثال ۱۵: دنباله‌ی درجات رئوس گراف زیر را بنویسید.



مثال ۱۶: تعداد یال‌های گراف G با دنباله‌ی درجات رئوس ۳,۱,۱,۱ چقدر است؟

نکته: از روی دنباله‌ی درجات رئوس می‌توان p و q و δ و Δ را به دست آورد.

ویژگی‌های دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده از مرتبه‌ی p:

۱. تعداد اعضای فرد دنباله، زوج است.

۲. در یک دنباله‌ی p راسی حداکثر درجه‌ی هر راس مساوی $p-1$ است. $\Delta \le p-1$ (اگر دنباله شامل صفر بود، ابتدا صفرها را کنار می‌گذلریم)

۳. حداقل دو عدد در دنباله برابرند. (با استفاده از اصل لانه کبوتری ثابت می‌شود)

۴. در هر دنباله با p راس، اگر k راس از درجه‌ی $p-1$ داشته باشیم باید $k \le \delta$ باشد.

۵. اگر در دنباله‌ی درجه رئوس یک گراف ساده‌ی غیر تهی از مرتبه‌ی p، عضو $p-1$ موجود باشد، عضو صفر موجود نخواهد بود و اگر عضو صفر موجود باشد، عضو $p-1$ موجود نخواهد بود.

۶. اگر دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده تشکیل تصاعد حسابی یا هندسی بدهند، آن‌گاه تمام اعضای آن دنباله باهم برابر خواهند بود. (به عبارتی دیگر گراف مربوطه، منتظم خواهد بود)

مثال ۱۷: گرافیکال بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

۱. ۶,۶,۵,۵,۵,۴,۲ ۲. ۶,۵,۵,۴,۳,۳ ۳. ۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰

۴. ۶,۶,۶,۵,۴,۳,۲ ۵. ۵,۴,۳,۳,۲,۱

الگوریتم هاول – حکیمی برای تشخیص گرافیکال بودن یک دنباله:

۱. دنباله را به صورت نزولی مرتب کرده و اولین (بزرگترین) عضو آن را k می‌نامیم.

۲. k را از دنباله حذف کرده و از هر یک از k عضو بعدی یک واحد کم می کنیم و مرحله‌ی قبل را تکرار می‌کنیم.

۳. اگر در نهایت به دنباله‌ای شامل فقط تعدادی صفر برسیم، دنباله‌ی اصلی گرافیکال خواهد بود.

گراف منتظم: اگر $r \ge 0$ باشد، آنگاه گراف G را r- منتظم گوییم هرگاه درجه‌ی هر راس G برابر r باشد.

نکته: مجموع درجات رئوس هر گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p برابر است با rp. به عبارت دیگر $q=\frac{pr}{2}$.

مثال ۱۸: چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

نکته: گراف فرد منتظم از درجه‌ی فرد وجود ندارد.

مثال ۱۹: چند نوع گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۱ وجود دارد؟

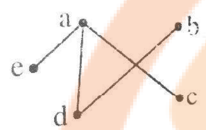
نکته: در گراف r- منتظم، $\delta=\Delta=r$.

مثال ۲۰: اگر به گراف ۴- منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازه‌ی گراف را مشخص کنید.

مثال ۲۱: در گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم $2q-3p=16$. گراف را مشخص کنید.

مکمل یک گراف: گراف G' را مکمل گراف G گوییم هرگاه رئوس آن همان رئوس G بوده و مجموعه‌ی مجموعه‌ی یال‌های آن‌ها مکمل یک‌دیگر باشند، به عبارتی اگر یالی در گراف G موجود نباشد، ان یال در گراف G' موجود باشد.

مثال ۲۲: مکمل گراف زیر رارسم کنید.



(G)

نکته: $q(G)+q(G')=q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$.

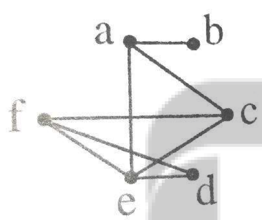
نکته: اگر a راس دلخواهی از گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p باشد، آن‌گاه: $\deg(a_G)+\deg(a_{G'})=p-۱$.

نکته: تعداد گراف‌های G از مرتبه‌ی p با تعداد گراف‌های G' از مرتبه‌ی P برابرند.

مثال ۲۳: چند نوع گراف ۶- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

مسیر: در گراف ساده‌ی G، یک مسیر به طول m از راس u به راس v، عبارت است از دنباله‌ای شامل $(m+۱)$ راس دو به دو متمایز که با u شروع و به v ختم می‌شود. (در مسیر راس تکراری وجود ندارد)

مثال ۲۴: تمام مسیرهای موجود از راس a به راس e را در گراف زیر بنویسید.



نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p، طول یک مسیر حداکثر می‌تواند برابر با $p-۱$ باشد.

نکته: در هر گراف، دنباله‌ای متشکل از فقط یک راس مثل u، مسیری به طول صفر از u به u تعریف می‌شود.

نکته: در گراف k_p، تعداد مسیرهای به طول i از راس دلخواه u به راس v برابر است با $(i-۱)!\binom{p-۲}{i-۱}$.

مثال ۲۵: u و v، دو راس متمایز از گراف $k_۶$ می‌باشند، تعداد مسیرهای به طول ۴ از u به v چقدر است؟

مثال ۲۶: u و v، دو راس متمایز از گراف $k_۶$ می‌باشند، تعداد کل مسیرها از u به v چقدر است؟

نکته: در گراف k_p، تعداد مسیرهای به طول i برابر است با $(i-۱)!\binom{p-۲}{i-۱}\binom{p}{۲}$.

مثال ۲۷: در گراف $k_۷$ تعداد کل مسیرهای به طول ۵ چقدر است؟

مثال ۲۸: در گراف $k_۴$ تعداد کل مسیرها چقدر است؟

گراف همبند: گراف ساده‌ی G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو راس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورات گراف را ناهمبند می‌گوییم.

مثال ۲۹: کدام‌یک از گراف‌های زیر همبند است؟

نکته: در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p، حد اکثر مقدار q برای آن‌که گراف بتواند ناهمبند باشد برابر است با $\binom{p-1}{2}$

مثال ۳۰: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی q مفروض است. حداکثر مقدار q باید چقدر باشد تا گراف G بتواند ناهمبند باشد؟

نکته: اگر $q \geq \binom{p-1}{2}+1$ باشد، آنگاه گراف همبند است. (یک راس را ایزوله در نظر گرفته و بقیه را گراف کامل می‌کنیم و سپس راس ایزوله را با یک یال به گراف کامل وصل می‌کنیم)

(البته ممکن است در یک گراف، $q < \binom{p-1}{2}+1$ باشد و گراف همبند باشد)

مثال ۳۱: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی q مفروض است. حداقل مقدار q باید چقدر باشد تا مطمئن شویم گراف G همبند است؟

نکته: گراف k_1 که فقط از یک راس ایزوله تشکیل شده است، همبند است.

نکته: اگر $q \leq p-2$ باشد، آن‌گاه گراف همبند نیست.

(توجه شود نکته فوق بیان نمی‌کند که اگر در یک گراف $q > p-2$ بود آن گراف حتما همبند است)

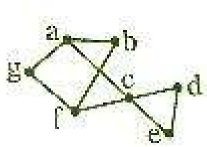
فاصله‌ی بین دو راس: در گراف همبند G فاصله‌ی دو راس u و v که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود برابر است با کوتاه‌ترین مسیر از u به v.

دور: یک دور به طول m روی راسی چون a، دنباله‌ای است شامل m راس دو به دو متمایز که با a شروع و به a ختم می‌شود. (دنباله شامل $m+1$ عضو است)

نکته: دنباله‌ی متناظر با هر دور باید حداقل ۴ عضو داشته باشد. (دور به طول صفر نداریم)

نکته: اگر جهت چرخش را در نوشتن دنباله‌ی متناظر به یک دور یا نقطه‌ی شروع دور را عوض کنیم، دور جدیدی ایجاد نمی‌شود.

مثال ۳۲: تمام دورهای موجود در گراف زیر را بنویسید.

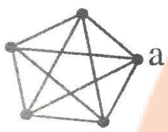


نکته: تعدا دورهای به طول i در گراف k_p برابر است با $\frac{-۱}{۲}\times\binom{p}{i}$.

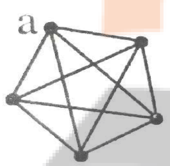
مثال ۳۳: در گراف $k_۶$ چه تعداد دور به طول ۴ موجود است؟

مثال ۳۴: در گراف $k_۵$ چه تعداد دور وجود دارد؟

مثال ۳۵: چه تعداد از دورهای گراف زیر شامل راس a نمی‌باشند؟



مثال ۳۶: چه تعداد از دورهای به طول ۴ از گراف مقابل شامل راس a می‌باشند؟



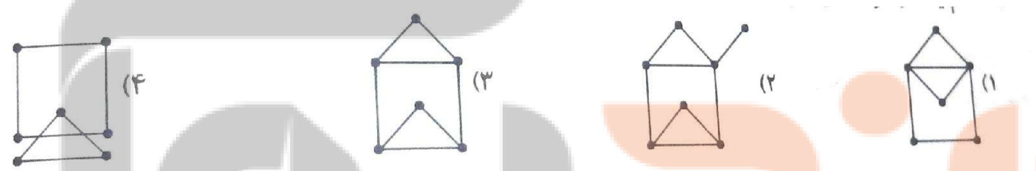
گراف همیلتنی: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p \geq ۳$ را همیلتنی گوییم هرگاه دوری از مرتبه‌ی p داشته باشد.

نکته: در نوشتن دور همیلتنی مربوط به گراف، تمام رئوس آن به کار می‌روند.

نکته: گرافی که دارای راسی از درجه‌ی صفر یا یک باشد، نمی‌تواند همیلتنی باشد.

نکته: یک گراف ناهمبند نمی‌تواند همیلتنی باشد.

مثال ۳۷: کدام‌یک از گراف‌های زیر همیلتنی است؟



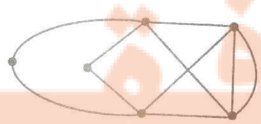
گراف اویلری: گراف G (نه لزوما ساده) را یک گراف اویلری گوییم هرگاه بتوان آن را بـدون برداشـتن قلـم از روی کاغذ و با شروع از یک راس چنان رسم کنیم که:

اولا: از هر یال، یک و فقط یک بار عبور کنیم.

ثانیا: از تمام رئوس بگذریم.

ثالثا: نقطه‌ی پایان همان نقطه‌ی شروع باشد.

مثال ۳۸: گراف زیر، اویلری است.



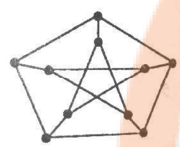
نکته: گراف همبند G اویلری است اگر و تنها اگر درجه‌ی تمام رئوس آن زوج باشد.

مثال ۳۹: کدام‌یک از گراف‌های زیر اویلری است؟

۱) $k_{۱۰}$ ۲) $k_{۱۳}$ ۳) $k_{۱۶}$ ۴) $k_{۱۸}$

مثال ۴۰: گراف‌های زیر را از نظر همیلتنی و اویلری بودن بررسی کنید.

گراف پترسن: گراف زیر به گراف پترسن معروف است.



نکته: گراف پترسن، ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است.

نکته: گراف پترسن اویلری و همیلتنی نیست.

گراف بازه‌ای: اگر به ازای بازه‌های (a_1,b_1) و (a_2,b_2)... و (a_p,b_p)، راس‌های v_1 و v_2 و ... و v_p را متناظر کرده و دو راس v_i و v_j را مجاور تعریف کنیم هرگاه بازه‌های متناظر آن‌ها اشتراک داشته باشند، در این صورت گراف به دست آمده، گراف بازه‌ای خواهد بود.

مثال ۴۱: گراف بازه‌ای زیر را رسم کنید. (۲,۹) , (۶,۸) , (۸,۹) , (۴,۷) , (۲,۳)

نکته: هر گراف که در آن n ضلعی $(n \geq 4)$ بدون قطر یافت شود، گراف بازه‌ای نیست.

نکته: گراف k_p به ازای تمام مقادیر طبیعی p بازه‌ای است.

نکته: گراف پترسن بازه‌ای نیست.

درخت: گراف همبندی است که دور نداشته باشد.

مثال ۴۲: تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶,۵,۴,۳,۲,۱ را رسم کنید.

قضیه: در هر درخت با p راس و q یال، رابطه‌ی زیر برقرار است. $p = q + 1$

مثال ۴۳: اگر از یک گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی p، ۴ یال کم کنیم یک درخت پدید می‌آید، مقدار p چقدر است؟

مثال ۴۴: دنباله‌ی نزولی S : ۳,۳,۳,۳,۲,۲,۱,...,۱، دنباله‌ی درجه‌های راس‌های یک درخت است.

الف) تعداد راس‌های درجه‌ی یک این درخت را حساب کنید.

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

مثال ۴۵: درخت T، فقط شامل رئوسی از درجه‌ی ۳ و ۱ می‌باشد، اگر تعداد رئوس درجه‌ی ۳ برابر ۲۷ باشد، تعداد رئوس از درجه‌ی ۱ چقدر است؟

قضیه: بین هر دو راس هر درخت مفروض، دقیقا یک مسیر وجود دارد.

قضیه: هر درختی که بیش از یک راس داشته باشد، حداقل دو راس از درجه یک دارد.

نکته: در هر درخت، مجموع مرتبه و اندازه، همواره عددی فرد است.

نکته: تعداد مسیرهای با طول یک و بیشتر، بین رئوس متمایز درخت برابر است با $\binom{p}{۲}$.

نکته: تعداد کل مسیرها در یک درخت، برابر است با $\binom{p+۱}{۲} = \binom{p}{۲} + p$. (p مسیر به طول صفر از هر راس به خودش)

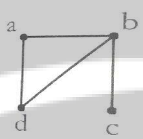
مثال ۴۶: تعداد کل مسیرهای به طول ۱ یا بیشتر در درخت از مرتبه‌ی ۱۴ را بیابید.

مثال ۴۷: در درخت از مرتبه‌ی ۱۰، چند مسیر با طول ۲ یا بیشتر وجود دارد؟

مثال ۴۸: در درخت از مرتبه‌ی ۱۳ در کل چند مسیر وجود دارد؟

ماتریس مجاورت گراف‌ها: اگر G یک گراف ساده از مرتبه‌ی p باشد، می‌توان یک ماتریس مربعی مثل M از مرتبه‌ی p به آن نسبت داد به طوری که اگر دو راس در گراف مجاور باشند، درایه‌ی متناظر با آن‌ها برابر با ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر است.

مثال ۴۹: ماتریس مجاورت گراف زیر را بنویسید.



ویژگی‌های ماتریس مجاورت یک گراف ساده (M):

۱. M ماتریسی متقارن است.
۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر با صفر است.
۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی راس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.
۴. تعداد کل یک‌های موجود در M برابر است با مجموع درجات رئوس گراف و برابر است با $۲q$.
۵. اگر گراف G یک راس ایزوله داشته باشد، تمام درایه‌های واقع بر سطر و ستون متناظر آن صفر خواهد بود.
۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل ناتهی k_p باشد، تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی M یک خواهد بود.
۷. تعداد یک‌های واقع بر M برابر با $۲q$ و تعداد صفرهای آن برابر با $(p^۲ - ۲q)$ است.
۸. اگر G یک درخت باشد، در این صورت تعداد صفرها برابر با $q^۲ + ۱$ می‌باشد.

مثال ۵۰: ماتریس مجاورت درخت از مرتبه‌ی ۶ چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال ۵۱: اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۰ درایه‌ی صفر باشد، در این صورت مقدار Δ چقدر است؟

ویژگی‌های مربع ماتریس مجاورت گراف ساده $(M^۲)$:

۱. $M^۲$ ماتریسی متقارن است.
۲. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی $M^۲$ با درجه‌ی راس متناظر با سطر (یا ستون) متناظر با آن درایه برابر است.
۳. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ همان مجموع درجات رئوس گراف G بوده و برابر است با $۲q$.
۴. اگر G گراف کامل k_p باشد، در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی $M^۲$ برابر با $(p-۱)$ و هر درایه‌ی واقع بر غیر قطر اصلی $M^۲$ برابر با $(p-۲)$ خواهد بود.

۵. اگر G گراف کامل k_p باشد، در این صورت مجموع درایه‌های یک سطر یا ستون M^2 مساوی $(p-1)^2$ و مجموع کل درایه‌های ماتریس M^2 برابر است با $p(p-1)^2$.

۶. درایه‌ی $a_{ij}(i \neq j)$ از مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G، با تعداد مسیرهای به طول ۲ از i به j در ان گراف برابر است.

۷. مجموع درایه‌های واقع در مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G با مجموع مربعات درجات رئوس آن گراف برابر است.

مثال ۵۲: اگر M ماتریس مجاورت درخت T بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی M^2 برابر ۱۸ باشد، ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

مثال ۵۳: اگر Mماتریس مجاورت متناظر گراف k_4 باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی M^2 چقدر است؟

مثال ۵۴: اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد، M^2 کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$