

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فایده های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

## درس اول: معرفی گراف

گراف از واژه‌ی Graph (به معنای نمودار) گرفته شده است. ریاضیدانان سرآغاز بحث گراف را به سئوالی که مردم شهر کونیگسبرگ (در روسیه) بوده و اوایل آن را حل کرد، دانسته‌اند. البته ریاضیدانان برجسته دیگری از جمله شیخ بهایی، برای حل مسائل از مدل سازی با گراف بهره گرفته‌اند.

**تعریف:** گراف از مجموعه‌ای از نقاط (که به هر کدام **راس** می‌گوییم) و مجموعه‌ای از خطوط (که به هر کدام **یال** می‌گوییم) تشکیل شده است. هر یال بین دو راس قرار دارد. در گراف  $G$  مجموعه‌ی راس‌ها را با  $V(G)$  (Vertex) و مجموعه‌ی یال‌ها را با  $E(G)$  (Edge) نشان می‌دهیم.

\*\*\* گراف یک روش مدل سازی برای نشان دادن رابطه بین اعضای یک مجموعه است.

**مثال ۱:** ۵ نفر به نام‌های  $a, b, c, d, e$  هنگام ملاقات با یکدیگر، به صورت زیر با یکدیگر دست داده‌اند.

$a$  با  $c$  و  $d$  دست داده است.

$b$  با  $c$  و  $e$  دست داده است.

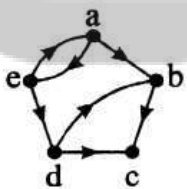
$c$  با  $e$  دست داده است.

$d$  با  $e$  دست داده است.

گرافی رسم کنید که نشان‌دهنده‌ی این وضعیت باشد.

**تعریف:** به گرافی که یال‌های آن جهت داشته باشند، «**گراف جهت‌دار**» می‌گوییم. در نمایش گراف جهت دار با استفاده از نمادهای ریاضی، یال‌ها را با زوج مرتب نشان می‌دهیم.

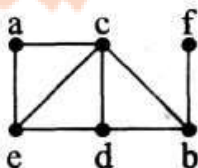
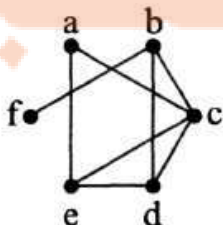
برای مثال مجموعه‌ی راس‌ها و یال‌های گراف روبرو به صورت زیر است:



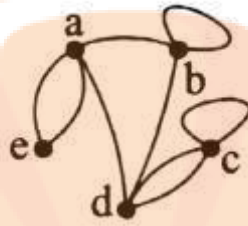
$$V = \{a, b, c, d, e\}, \quad E = \{(a, b), (b, c), (d, c), (d, b), (e, d), (e, a), (a, e)\}$$

\*\*\* برای رسم نمودار یک گراف روش یکتایی وجود ندارد و شکل گراف باید مشخص کند که کدام راس‌ها به هم متصل‌اند.

مثلاً دو نمودار زیر، هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



بین هر دو راس گراف ممکن است بیش از یک یال موجود باشد و همچنین یک یال ممکن است یک راس را به خود آن راس وصل کند که در این صورت به این یال «طوقه» گفته می‌شود.

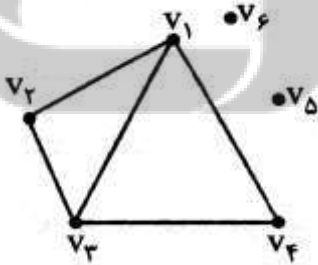


به گرافی که طوقه نداشته باشد و بین هر دو راس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد، «گراف ساده» می‌گوییم. در این فصل با گراف‌های ساده سر و کار خواهیم داشت و هر جا از گراف نام ببریم، منظور گراف ساده است.

**تعریف مرتبه و اندازه‌ی گراف:** به تعداد راس‌های گراف  $G$ ، مرتبه‌ی گراف گفته و آن را با  $P$  نشان می‌دهیم. به تعداد یال‌های گراف  $G$ ، اندازه‌ی گراف گفته و آن را با  $q$  نشان می‌دهیم.

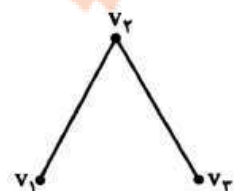
**تعریف درجه راس گراف:** به تعداد یال‌های متصل به گراف  $G$  که به راس  $v$  متصل‌اند، درجه‌ی آن راس گفته و آن را با  $deg_G(v)$  یا  $deg(v)$  نشان می‌دهیم. اگر درجه یک راس عددی فرد باشد، به آن راس فرد و اگر درجه زوج باشد، به آن راس زوج می‌گوییم. در صورتی که  $deg(v) = 0$  باشد (یعنی راس موردنظر به راس دیگری متصل نباشد) به  $v$  راس تنها یا ایزوله می‌گوییم.

**مثال ۲:** در گراف مقابل، مجموعه‌ی راس‌ها، مجموعه‌ی یال‌ها، مرتبه، اندازه و درجه‌ی راس‌ها را مشخص کنید.



چند تعریف مقدماتی در گراف

**دو راس مجاور:** دو راس که تو سط یالی به هم متصل شده باشند را مجاور (یا هم سایه) می‌نامیم. مثلاً در گراف زیر راس‌های



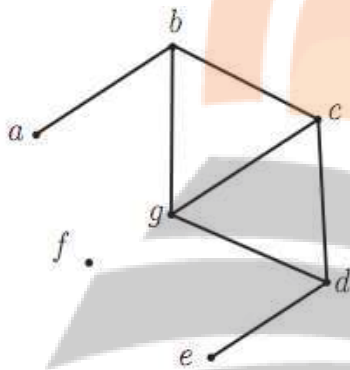
مجاور و غیر مجاور عبارتند از:

مجموعه‌های همسایه‌های یک راس: فرض کنیم  $v \in V(G)$ ، به مجموعه‌ی راس‌هایی از گراف  $G$  که به راس  $v$  متصل هستند، «همسایگی باز راس  $v$ » می‌گوییم و با  $N_G(v)$  نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خودِ راس  $v$  به  $N_G(v)$  «همسایگی بسته‌ی راس  $v$ » را به دست می‌دهد که آن را با  $N_G[v]$  نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نشان داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

مثال ۲: در گراف مقابل داریم:



$$N_G(a) = \{b\}$$

$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

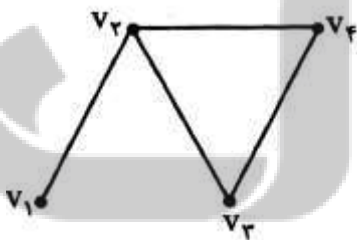
$$N_G[a] = \{a, b\}$$

$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G[f] = \{f\}$$

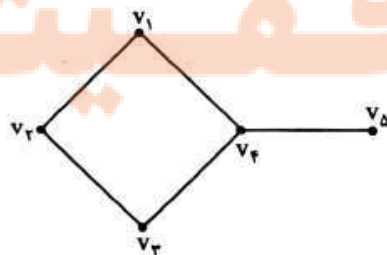
نکته: در صورتی که  $N_G[v] = \emptyset$  باشد، راس  $v$  ایزوله است.

دو یال مجاور: دو یال را مجاور می‌نامیم هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند. مثلاً در گراف زیر یال‌های  $v_1v_2$  و  $v_2v_3$  مجاورند. ولی یال‌های  $v_1v_2$  و  $v_3v_4$  مجاور نیستند.



بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه گراف: بزرگ‌ترین درجه در بین راس‌های یک گراف را ماکسیمم درجه نامیده و آن را با نماد  $\Delta(G)$  نمایش می‌دهیم. به صورت مشابه، کوچک‌ترین درجه را می‌نیمم درجه نامیده و با نماد  $\delta(G)$  نمایش می‌دهیم.

برای مثال در گراف مقابل  $\Delta = 3$  و  $\delta = 1$



حواستان باشد ممکن است چند راس از درجه ماکسیمم یا می‌نیمم وجود داشته باشد.

نکته: همواره داریم  $1 \leq \Delta$ . (چرا؟)

\* در گراف از مرتبه  $p$ ، راسی که با تمامی رئوس دیگر مجاور باشد، را راس فول (پُر) می‌نامیم. در واقع راس فول دارای درجه  $p-1$  است.

نکته: اگر گرافی از مرتبه  $p$ ، دارای  $k$  راس فول باشد آن‌گاه  $\delta \geq k$ .

مثال ۳: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه راس‌های آن  $2, 2, 3, 4, 5$  باشد.

مثال ۴: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه راس‌های آن  $2, 3, 4, 5, 6, 6, 6$  باشد.

نکته (ارتباط درجه راس‌ها با تعداد یال‌ها): فرض کنید گراف  $G$  از مرتبه  $p$  و اندازه‌ی  $q$  باشد، در این صورت:

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_p) = 2q$$

مجموع درجه‌ها

نتیجه مهم: تعداد راس‌های فرد هر گراف عددی زوج است.

اثبات:

مثلاً یک گراف نمی‌تواند یک راس درجه ۱ یا ۳ راس درجه ۵ داشته باشد. برای مثالی دیگر گرافی با درجه‌های ۱، ۲، ۳، ۳ و ۴ وجود ندارد.

**مثال ۵:** هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هرکدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

**مثال ۶:** در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه‌ی ۳۳،  $\Delta = 7$  و  $\delta = 6$  است. تعداد راس‌های درجه ۶ و ۷ را به دست آورید.

**مثال ۷:** حاصلضرب درجه‌های گرافی از مرتبه ۵ برابر ۷۲ است. دو گراف با این شرایط رسم کنید.

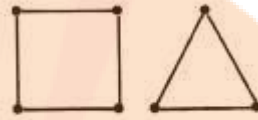
**مثال ۸:** گرافی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۴، دو راس از درجه‌ی ۵،  $\Delta = 5$ ، یک راس از درجه ۲ و یک راس از درجه ۱  $\delta = 1$  دارد. این گراف چند راس درجه ۳ دارد؟

تلاشی در مسیر موفقیت

**تعریف:** گرافی که درجه‌ی همه راس‌های آن  $r$  باشد، گراف  $r$ -منتظم (از مرتبه‌ی  $p$ ) نامیده می‌شود. برای نمونه گراف‌های زیر ۲-منتظم و ۳-منتظم هستند:



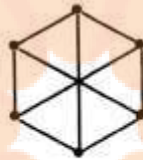
۲-منتظم مرتبه ۵



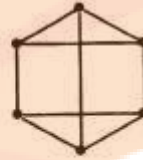
۲-منتظم مرتبه ۳



۳-منتظم مرتبه ۴



۲-منتظم مرتبه ۶



**نکته:** گفتیم در هر گراف، مجموع درجه‌ها برابر  $2q$  می‌شود. حال در گراف  $r$ -منتظم  $p$  راسی داریم:

$$\text{مجموع درجه‌ها} = \underbrace{r+r+\dots+r}_p = 2q \Rightarrow pr = 2q$$

یعنی در گراف‌های منتظم ضرب مرتبه در درجه راس‌ها، دو برابر تعداد یال‌ها می‌شود.

**نتیجه:**  $pr$  همواره عددی زوج است؛ پس  $p$  و  $r$  نمی‌توانند هر دو فرد باشد (یعنی گراف فرد-منتظم از مرتبه فرد نداریم).

**مثال ۹:** در یک گراف ۴-منتظم داریم  $q = 3p - 8$ . مرتبه و اندازه‌ی گراف را به دست آورده و گراف را رسم کنید.

**مثال ۱۰:** یک گراف ۳-منتظم مرتبه ۸ رسم کنید.

**تعریف:** گرافی از مرتبه‌ی  $p$  که هر دو راس آن مجاور باشند را گراف کامل نامیده و با  $K_p$  نشان می‌دهیم.

\*\* در واقع گراف‌های کامل حداکثر تعداد یال‌ها را در مرتبه‌ی خود دارند و دیگر نمی‌توانیم به آن‌ها یال اضافه کنیم.

🔥 در زیر گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ را مشاهده کنید:

$p$	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
$q$	۰	۱	۳	۶	۱۰

👉 نکته: درجه‌ی هر راس در گراف کامل  $p$  راسی  $p - 1$  است. یعنی گراف کامل  $K_p$ ، یک گراف  $p - 1$  منتظم است.

👉 نکته: تعداد یال‌ها در گراف کامل  $p$  راسی برابر است با:

$$\text{مجموع درجه‌ها} = \underbrace{(p-1) + (p-1) + \dots + (p-1)}_{\text{تا } p} = 2q \Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$

👉 مثال ۱۱: حاصلضرب مرتبه در اندازه‌ی یک گراف کامل ۹۰ است. این گراف چند منتظم است؟

👉 مثال ۱۲ (سراسری ۹۳): مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی برابر ۴۵ است. اندازه‌ی این گراف کدام است؟

۲۱ (۴)

۳۰ (۳)

۳۶ (۲)

۲۸ (۱)



مثال ۱۳: در یک گراف کامل رابطه‌ی  $q = 4\Delta + \delta$  برقرار است. مرتبه‌ی گراف را بدست آورید.

مکمل گراف

تعریف: مکمل گراف  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی راس‌های آن همان مجموعه‌ی راس‌های  $G$  است و دو راس در  $\bar{G}$  مجاورند اگر در  $G$  مجاور نباشند. برای مثال در شکل زیر یک گراف و مکمل آن را می‌بینید:

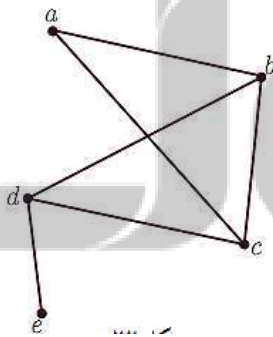


نکته ۱: اگر تعداد یال‌های  $G$  و  $\bar{G}$  را با هم جمع کنیم، برابر تعداد یال‌های گراف کامل می‌شود؛ یعنی

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

نکته ۲: مکمل گرافی ۲-منتظم گرافی  $\bar{r}$ -منتظم بوده و  $r + \bar{r} = p - 1$

مثال ۱۴: گراف  $G$  به شکل مقابل است. مجموع درجه‌های راس‌های



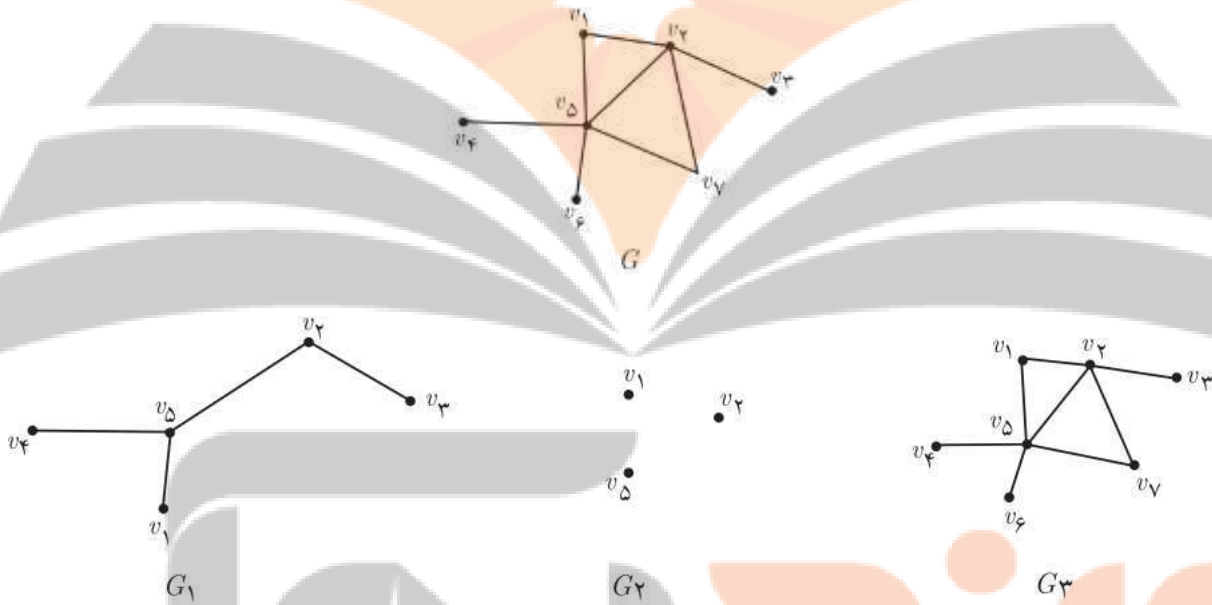
گراف  $\bar{G}$  را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس  $a$  و  $c$  در گراف  $\bar{G}$  را تعیین کنید.

مثال ۱۵: مکمل گرافی از مرتبه‌ی  $p$  که  $(2p - 7)$ -منتظم است، گرافی ۲-منتظم است.  $p$  را به دست آورید.

مثال ۱۶: تعداد یال‌های گراف  $G$  با تعداد یال‌های  $\bar{G}$  برابر است. مرتبه‌ی این گراف در تقسیم بر ۴ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

### زیرگراف

تعریف: گراف  $H$  را یک زیرگراف از  $G$  می‌گوییم هرگاه  $V(H) \subseteq V(G)$  و  $E(H) \subseteq E(G)$ .  
برای مثال گراف  $G$  و سه زیرگراف از آن را در زیر مشاهده می‌کنید:



مثال ۱۷: گراف  $k_6$  چند زیرگراف کامل دارد؟

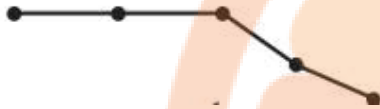
تلاشی در مسیر موفقیت

مسیر در گراف

**تعریف مسیر:** فرض کنیم  $u$  و  $v$  دو راس از گراف  $G$  باشند. یک مسیر از  $u$  به  $v$  در  $G$  دنباله‌ای متشکل از راس‌های دو به دو متمایز است که از  $u$  شروع و به  $v$  ختم می‌شود به طوری که هر دو راس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یال‌های طی شده است که یکی کمتر از تعداد راس‌ها است.

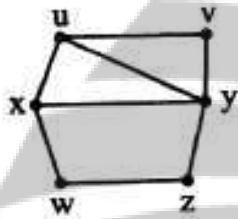
**قرارداد:** هر راس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است.

\*\* گرافی که تنها از یک مسیر  $n$  راسی تشکیل شده باشد با  $P_n$  نمایش می‌دهیم.



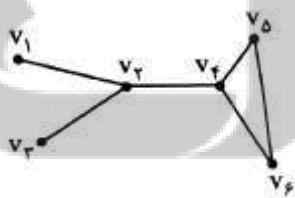
**مثال ۱۸:** در گراف مقابل تمام مسیرهای از  $u$  به  $v$  را نوشته و طول هر کدام

را مشخص کنید.

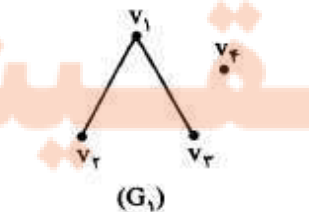


گراف‌های همبند

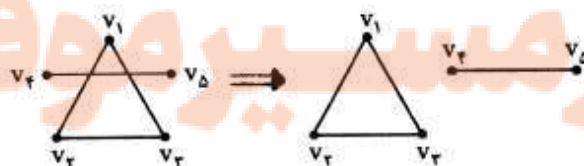
**تعریف:** گراف  $G$  را همبند گوئیم، هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. مانند گراف زیر:



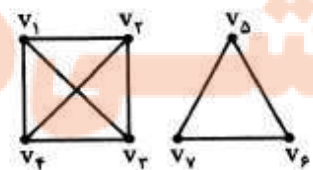
گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم. مانند گراف‌های زیر:



ناهمبند است؛ چون بین  $v_1$  و  $v_4$  مسیری نداریم.



ناهمبند است؛ چون اگر آن یال را بیرون بیاوریم معلوم می‌شود بین  $v_1$  و  $v_4$  مسیری نداریم.



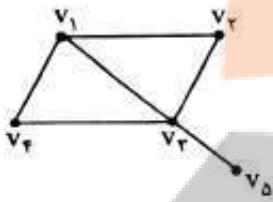
کل این گراف از مرتبه ۷ است. بین  $v_1$  و  $v_4$  مسیری نداریم؛ پس این هم ناهمبند است.

نکته ۱: اگر  $q < p - 1$  باشد، گراف قطعا ناهمبند است.

نکته ۲: اگر  $q > \binom{p-1}{2}$  باشد، گراف قطعا همبند است. همچنین اگر در گرافی  $\Delta = p - 1$  باشد (یعنی یک راس به همه وصل باشد) گراف قطعا همبند است.

### دور در گراف

**تعریف:** یک دور به طول  $m$  در گراف  $G$  دنباله‌ای از  $m + 1$  راس، که راس‌های متوالی مجاور بوده و  $m$  راس اول آن دو به دو متمایز بوده و راس آخر همان راس اول باشد. در شکل زیر دور  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$  را ببینید. این دور به طول ۴ است.

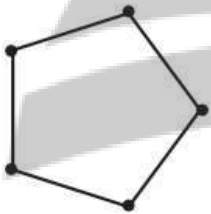


\*\* حداقل طول دور، ۳ می‌تواند باشد.

\*\* طول دور همان تعداد یال‌های طی شده است.

**تعریف:** گرافی را که تنها از یک دور  $n$  راسی تشکیل شده باشد با  $C_n$  نمایش می‌دهیم.

برای مثال  $C_5$  را در شکل مقابل می‌بینید.



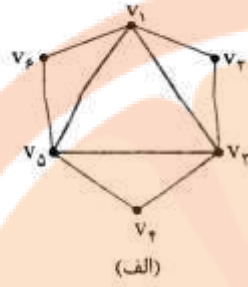
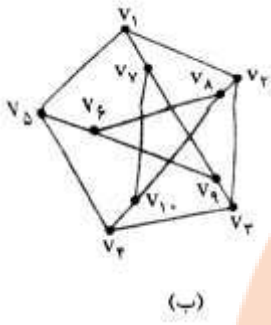
مثال ۱۹: گراف  $K_5$  چند زیرگراف به صورت  $C_3$  دارد؟

# نشان بده بگوک

مثال ۲۰: گراف کامل از مرتبه ۷ چند دور به طول ۳ دارد؟

# تلاشی در مسیر موفقیت

مثال ۲۱: گراف‌های مقابل چند دور به طول ۵ دارند؟



مثال ۲۲: یک گراف ۹ راسی رسم کنید به طوری که:

- (الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.  
 (ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

نزدیک ببولک

تلاشی در مسیر موفقیت

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)