

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فایده های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

## توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها

۲- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ یکسان در  $k$  جعبه متمایز  
 ۴- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ یکسان در  $k$  جعبه یکسان

۱- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه متمایز  
 ۳- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه یکسان

۱- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه متمایز

مثال ۱) می‌خواهیم ۵ توپ با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در ۳ جعبه به رنگ‌های آبی، قرمز و زرد توزیع کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ: برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$  است. (برای هر کدام از توپ‌ها ۳ انتخاب وجود دارد یعنی می‌توان جعبه آبی یا قرمز یا زرد را انتخاب کرد به همین ترتیب بقیه جعبه‌ها نیز همین حالت را دارد.)

مثال ۲) چند تابع از مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  وجود دارد؟

پاسخ: عضو  $a$  می‌تواند به هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ تصویر شود، بنابراین برای هر عضو از مجموعه  $A$  چهار انتخاب از مجموعه  $B$  وجود دارد پس پاسخ برابر است با: ۴<sup>۵</sup>

## نتیجه ۱

تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه متفاوت برابر است با:  $k^n$

مثال ۳) می‌خواهیم ۳ جایزه متفاوت را بین ۵ نفر توزیع کنیم، به‌وری که به هر کدام حداکثر یک جایزه برسد. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ: جایزه اول را می‌توانیم به هر کدام از ۵ نفر بدهیم، جایزه دوم را نیز به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده و جایزه سوم را نیز می‌توانیم به ۳ نفر دیگر بدهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، جواب مسئله  $5 \times 4 \times 3$  است. این عدد را می‌توانیم به صورت

$$\frac{5!}{2! \times 1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

## نتیجه ۲

تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه متفاوت ( $k \geq n$ ) که در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد، برابر است با :

$$P(k, n) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

**مثال ۴)** شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبانی، دفترداری، روابط عمومی و مسئول رایانه، یک نفر را استخدام کند، ۴ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند؟  
**پاسخ :** برای نگهبانی هر کدام از ۴ نفر را می‌توان انتخاب کرد پس ۴ روش، برای دفترداری نیز ۳ نفر و ... در نتیجه ۴! طریق وجود دارد.

## نتیجه ۳

تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه  $n$  عضوی به خودش برابر است با  $n!$

**مثال ۵)** شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبانی، دفترداری، روابط عمومی و مسئول رایانه، یک نفر را استخدام کند، ۱۰ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند؟  
**پاسخ :** برای نگهبانی هر کدام از ۱۰ نفر را می‌توان انتخاب کرد پس ۱۰ روش، برای دفترداری نیز ۹ روش و برای روابط عمومی ۸ روش و برای مسئول رایانه نیز ۷ روش وجود دارد. در نتیجه  $10 \times 9 \times 8 \times 7$  (یا می‌توان ابتدا ۴ نفر از ۱۰ نفر را انتخاب کرده سپس آن چهار نفر را برای شغل‌ها انتخاب نمود).  

$$\frac{10!}{4!} = 1680$$

## نتیجه ۴

تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ متمایز در  $k$  جعبه متمایز ( $k \leq n$ ) به طوری که در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد، برابر است با :

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**مثال ۶** شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهداری، دفترداری، روابط عمومی و مسئول رایانه، به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ نفر را استخدام کند، ۱۰ نفر متقاضی استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای این مشاغل استخدام کند؟

**پاسخ:** ابتدا ۳ نفر از ۱۰ نفر را برای مسئول رایانه، سپس ۲ نفر از افراد باقی‌مانده را برای روابط عمومی، به همین ترتیب ۲ نفر از افراد باقی‌مانده را برای دفترداری و ۱ نفر را از افراد باقی‌مانده را برای نگهداری انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{10}{3} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$$

**مثال ۷** می‌خواهیم ۵ توپ از رشته‌های ورزشی متفاوت را در سه جعبه ۱، ۲ و ۳ به گونه‌ای قرار دهیم که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

**پاسخ:** می‌توان صورت دیگر مسئله را بدین صورت نیز بیان کرد. (تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ای ۵ عضوی به مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  به‌دست آورد.)

برای جواب دادن به این مسئله ناچاریم از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم، ابتدا پیشامدهای نامطلوب را تعریف می‌کنیم:

$A_1$  پیشامدهایی که در جعبه اول تویی قرار نگیرد یا عدد ۱ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

$A_2$  پیشامدهایی که در جعبه دوم تویی قرار نگیرد یا عدد ۲ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

$A_3$  پیشامدهایی که در جعبه سوم تویی قرار نگیرد یا عدد ۳ تصویر هیچ عضوی از مجموعه اول نباشد

تعداد کل حالت‌های نامطلوب برابر است با:  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 2^5 + 2^5 + 2^5 - 1 - 1 - 1 + 0 = 3 \times 2^5 - 3$$

$$35 - (3 \times 2^5 - 3)$$

بنابراین از کل حالت‌ها ۳۵ تعداد حالت‌های نامطلوب را کم می‌کنیم.

تلاشی در مسیر موفقیت

۲- تعداد راه‌های توزیع  $n$  توپ یکسان در  $k$  جعبه متمایز

## نکته

تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء که  $n_1$  تا از آن‌ها مانند هم ،  $n_2$  تا از آن‌ها نیز مانند هم و  $\dots$  ،  $n_k$  تا از آن‌ها مانند هم است به شرطی که  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  برابر است با :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

**مثال ۸)** با حروف کلمه انتخابات چند کلمه ۸ حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت ؟

**پاسخ :** با توجه به این که ۳ حرف «ا» و ۲ حرف «ت» وجود دارد ، پاسخ  $\frac{8!}{3!2!}$  است .

**مثال ۹)** با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت ؟

**پاسخ :** رقم صفر در اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد ، بنابراین این رقم یا عدد ۲ یا عدد ۳ است .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{7!}{2!1!3!} = 140 \\ \Rightarrow \frac{7!}{2!2!3!} = 210 \end{array} \right. \Rightarrow 140 + 210 = 350$$

# نزد پنج بوبل

## تلاشی در مسیر موفقیت

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.toranjbook.net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.toranjbook.net)