# فصل اول : ماتریس ها

**ماتریس:** هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در آن ماتریس درایه نامیده می شود. اگر ماتریس $A$، $m$ سطر و $n$ ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس $A$، $m\times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ و یا $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم. $a_{ij}$ یعنی درایه واقع در سطر $i$ام و ستون $j$ ام ماتریس $A$.

**مثال:** ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۴}$ با شرایط $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ ۷ & i=j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$ را مشخص کنید.

## ماتریس های خاص

**۱. ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\overline{O}$ نمایش می دهیم.

$$\overline{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

**۲. ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه این ماتریس، $۱\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴۸ & -۷ \end{bmatrix}_{۱\times۵}$$

**۳. ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مرتبه این ماتریس، $n\times۱$ است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_{۴\times۱}$$

**۴. ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبه این ماتریس $n\times n$ است. این ماتریس دارای قطر اصلی و فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است. ( $i$ شماره سطر و $j$ شماره ستون درایه $a_{ij}$ است)

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی	قطر اصلی

**۴'. ماتریس پایین مثلثی** ماتریس مربعی است که همه درایه های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

**۴''. ماتریس بالا مثلثی:** ماتریس مربعی که همه درایه های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

**۵. ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند.**
$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

**عناصر روی قطر اصلی نیز می توانند صفر باشند.**

**۶. ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند.**
$$\begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & k \end{bmatrix}$$

**۷. ماتریس همانی (واحد- یکه) ماتریس اسکالری که درایه های روی قطر اصلی آن یک باشد.**
$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$$

**ماتریس همانی را می توان به صورت** $I_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ **که** $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i=j \\ \cdot & i\neq j \end{cases}$ **نیز نمایش داد.**

**تساوی دو ماتریس: دو ماتریس $A$ و $B$ مساوی‌اند هر گاه: ۱. دو ماتریس هم مرتبه باشند ۲. درایه‌های نظیر به نظیر در $A$ و $B$ برابر باشند.**

**به عبارت دیگر** $[a_{ij}] = [b_{ij}] \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$

**مثال: اگر** $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **و** $A = B$ **در این صورت حاصل** $(x+y+z)$ **را بیابید.**

**چند عمل روی ماتریس‌ها**

**۱. جمع و تفریق ماتریس ها: اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس بدست می‌آید.**

**مثال: اگر** $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ **و** $a_{ij} = \begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$ **، در ماتریس** $I - A$ **کدام درایه وجود ندارد؟**

**۱. مضرب ۳ ۲. مضرب ۴ ۳. مضرب ۵ ۴. مضرب ۷**

**۲. ضرب عدد در ماتریس: اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می شود.**

**چند ویژگی جمع وتفریق: ماتریسهای هم مرتبه $A$، $B$ و $C$ را در نظر بگیرید.**

**۱. خاصیت جابجایی** $A+B = B+A$ **۲.** $k$ **عدد حقیقی می‌باشد** $k(A+B) = kA + kB$

**۳. خاصیت عضو خنثی در جمع $A+\overline{O}=A$**    **۴. خاصیت شرکتپذیری $(A+B)+C=A+(B+C)$**

**مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس $C$ چنان باشد که $B-۲A+۳C=\overline{O}$ ، آن گاه درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $C$ کدام است؟**

**۱. ۴    ۲. ۳    ۳. ۲    ۴. ۱    ۲**

**ضرب ماتریس‌ها:**

**اگر $A_{m\times n}$ ، $B_{k\times p}$ باشد، $A\times B$ زمانی وجود دارد که $n=k$ باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند. $A\times B$ ، ماتریسی است از مرتبه $m\times p$. مثلاً $A_{۳\times ۲}\times B_{۲\times ۴}=C_{۳\times ۴}$**

**برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی داریم و درایه های هر سطر در ستون، نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود. پس:**

**الف. از ضرب یک سطر در یک ستون یک درایه ایجاد می شود.**

**ب. سطر $i$ ام (مثلاً سطر سوم) ماتریس $A\times B=C$ از ضرب سطر $i$ ام (سطر سوم) ماتریس $A$ در همه ستون‌های ماتریس $B$ ایجاد می‌شود.**

**ج. (ستون $j$ ام $B$) × (ماتریس $A$) = ستون $j$ ام $A\times B$**

**مثال: برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.**

**الف.** $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

**ب.** $A=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

**مثال:** اگر $A$ ماتریسی $5\times 3$ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف، مرتبه آن را بیابید.

الف. $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 2}$　　ب. $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 5}$　　ج. $B=\left[b_{ij}\right]_{5\times 3}$

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ در این صورت درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف. $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$　　ب. $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

**مثال:** اگر $A=[2i-j]_{3\times 3}$ و $B=\left[i^2+j^2\right]_{3\times 3}$، آن‌گاه درایه سطر دوم و ستون سوم $A\times B-B\times A$ کدام است؟

۱. ۳۳　　۲. ۳۰　　۳. ۳۲　　۴. ۲۸

**توان ماتریس‌ها:** اگر $A$ ماتریس مربعی باشد داریم: $A^1=A\ ,\ A^2=A.A\ ,A^3=A.A^2=A^2.A\ ,\ ....A^n=A.A^{n-1}=A^{n-1}.A$

**توجه:** اگر $A$ ماتریس مربعی و $m$ و $n$ عدد طبیعی و $k$ عدد حقیقی باشد آن‌گاه

۱. $I^n=I$　　۲. $(kA)^n=K^nA^n$　　۳. $A^m\times A^n=A^{m+n}$　　۴. $\left(A^m\right)^n=A^{mn}$

**نکته:** برای محاسبه توان‌های ماتریس مربعی $A$ (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ) راه کلی این است که بین $A$، $A^2$، $A^3$ و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

**مثال:** اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ حاصل $A^2$ و $A^3$ را بیابید و سپس قانونی برای محاسبه $A^n$ ($n$ عدد طبیعی) بیان کنید.

**مثال:** اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + \dots A^{1395}$ کدام است؟

۱. ۱۲　　۲. ۱۳۹۴　　۳. ۱۳　　۴. ۱۳۹۵

**نکته:** ماتریس بالا $A_{3\times3}$ مثلثی اکید نام دارد (ماتریس مثلثی که قطر اصلی نیز صفر است) که پوچ توان از مرتبه ۳ است یعنی توان سوم آن‌ها صفر است.

**نکته:** اگر $A$ ماتریس مربعی از مرتبه $2\times2$ باشد یعنی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه رابطه $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$ برقرار است.

**مثال:** با فرض $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ داریم $A^2 = \alpha I + \beta A$، حاصل $2\alpha - \beta$ کدام است؟

۱. ۴-　　۲. ۴　　۳. ۶　　۴. ۶-

**ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها**

۱. ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.

۲. اگر $AB = AC$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$ (قانون حذف همیشه برقرار نیست)

توجه داریم که قانون حذف زمانی برقرار است که ماتریس حذف شونده وارون‌پذیر باشد. (وارون پذیری در قسمت بعدی خوانده می‌شود)

۳. ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

**مثال:** جواب معادله $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ کدام‌اند؟

۱. ۳- و ۱-　　۲. ۳- و ۱　　۳. ۳ و ۱-　　۴. ۳ و ۱



۴. در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C \\ (B\pm C)\times A=B\times A\pm C\times A \end{cases}$$

**۵. اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. مثلاً**

$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ آن‌گاه $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

**البته برای مثال بهتر است ماتریسی مثال بزنیم که بیشترین صفر ممکن را داشته باشد.**

**۶. حاصل ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبه آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظیر به نظیر ضرب کرد.**

**۷. اگر دو ماتریس $A$ و $B$ تعویض‌پذیر باشند. یعنی $AB=BA$ باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند.**

**بطور مثال** $(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)=A\times A+A\times \underbrace{B+B}_{=}\times A+B\times B=A^2+2AB+B^2$

**توجه داریم که از جمله ماتریس‌هایی که با ماتریس مربعی $A$ تعویض‌پذیر می‌باشد ماتریس همانی $I$ می باشد پس اتحادها در مورد این دو ماتریس نیز برقرار است بطور مثال** $(A-I)^3=A^3-3A^2\times I+3A\times I^2-I^3=A^3-3A^2+3A-I$

**نکته مثال: اگر** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$**، آن‌گاه درایه واقع در سطر سوم و ستون اول از ماتریس $ABC$ کدام است؟**

**۱. ۵۳ ۲. ۵۲ ۳. ۵۱ ۴. ۵۰**

**مثال: اگر** $A^2=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 15 & 13\end{bmatrix}$ و $B^2=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 6 & 6\end{bmatrix}$ **باشند، $AB+BA$ کدام است؟**

۱. $\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix}-6 & 1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix}-6 & -1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$



**چند تمرین کتاب صفحه ۲۰:**

۱. دو ماتریس $۳\times ۳$ مانند $A$ و $B$ مثال بزنید که $A\neq \bar{0}$ و $B\neq \bar{0}$ ولی $AB=\bar{0}$

۲. با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌هابرقرار نمی‌باشد.

۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر $a$ و $b$ را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۴. اگر $A=\left[a_{ij}\right]$ و $B=\left[b_{ij}\right]$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ معرفی شده باشند. ابتدا $A$ و $B$ را مشخص کرده وسپس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید.

۵. اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد و $B$ ماتریسی $۳\times ۳$ و دلخواه باشد، دراین صورت $A\times B$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای بگیرید؟

**۶. اگر $A$ ماتریسی $۳ \times ۳$ واسکالر باشد و $B$ ماتریسی هم مرتبه‌ی $A$، در این صورت**

**الف. برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی تعریف کنید.**

**ب. آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟**

**۷. اگر $A$ و $B$ ماتریس‌های $۳ \times ۳$ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:**

**الف.** $(A-B)^۲ = A^۲ - ۲AB + B^۲$ **ب.** $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

**۸. اگر** $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ **مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

**چند تست**

**۱. اگر** $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ **و $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی $B \times A$ کدام است؟**

۱. صفر	۲. ۸	۳. ۱۴	۴. ۲۴	۴

**۲. اگر** $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۲a & ۰ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۲b & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۴c \end{bmatrix}$ **و $۴a + ۳b - ۲c = ۷$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی $BA$ چه‌قدر است؟**

۱. ۱۴	۲. ۱۶	۳. ۱۶	۴. ۲۱	۱

**۳.اگر** $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ **،** $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ **و** $C=A\times B$ **، آن‌گاه حاصل** $c_{23}$ **کدام است؟**

۱. صفر		۲. ۱۶		۳. ۲۲		۴. ۲۴		۳

**۴. حاصل جمع ریشه‌های معادله** $[1\quad -1\quad 2]\begin{bmatrix}x & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ x\\ 1\end{bmatrix}=0$ **کدام است؟**

۱. $\frac{3}{2}$		۲. ۱		۳. ۱-		۴. $-\frac{3}{2}$		۱

**۵.اگر** $B$ **و** $A$ **هر دو** $2\times 2$ **باشند و** $BA=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ **باشد، مجموع درایه‌های ماتریس** $B\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -3 & -3\end{bmatrix}A$ **کدام است؟**

۱. صفر		۲. ۲-		۳. ۶-		۴. ۱۲-		۴

**۶.اگر** $A-B=-kI$ **باشد، حاصل** $A^2-AB+kB$ **کدام است؟**

۱. $k^2$		۲. $k^2I$		۳. $-k^2$		۴. $-k^2I$		۲

**۷.اگر** $B^2=-B$ **و** $A+B=I$ **باشد،** $A^2B$ **کدام است؟**

۱. $-4B$		۲. $-2B$		۳. $2B$		۴. $4B$		۴

**۸.اگر** $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ **و** $A^2=\alpha A+\beta I$ **، دو تایی** $(\alpha,\beta)$ **کدام است؟**

۱. $(2,11)$		۲. $(2,13)$		۳. $(4,11)$		۴. $(4,3)$		۲

**۹.اگر** $A=\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس** $A^3$ **کدام است؟**

۱. $3x$		۲. $3y$		۳. $2(x^2+y^2)$		۴. $3(x^2+y^2)$		۱

**۱۰.اگر** $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ **، ماتریس** $A^4$ **کدام می‌باشد؟**

۱. بالا مثلثی		۲. پایین مثلثی		۳. قطری غیر همانی		۴. همانی		۴

**۱۱.اگر** $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ **، مجموع درایه‌های** $A^5$ **کدام است؟**

۱. $-3^7$		۲. $3^7$		۳. $-3^6$		۴. $3^6$		۳

**۱۲. سه ماتریس دارای رابطه** $A=B+C$ **می باشند، حاصل** $A^2+B^2-AB-BA$ **کدام است؟**

۱. $-C^2$		۲. $\bar{0}$		۳. $C$		۴. $C^2$		۴

۱۳. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ در رابطه $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ صدق می‌کنند، حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. ۳-　　۲. ۱　　۳. ۳　　۴. ۵　　۲

۱۴. اگر $A$ یک ماتریس مربعی و $A^۲-I=۲A$ باشد، $A^۵-A^۴$ کدام است؟

۱. $۲۹A+۱۲I$　　۲. $۱۷A+۷I$　　۳. $۱۲A+۵I$　　۴. $A$　　۲

۱۵. اگر $AB-۲BA=\bar{۰}$ و $B^۳A=kAB^۳$ باشند، $k$ کدام است؟

۱. ۸　　۲. $\frac{۱}{۸}$　　۳. $-\frac{۱}{۸}$　　۴. ۸-　　۲

۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA^n=\begin{bmatrix} ۴ & ۴۱ \\ ۳ & ۳۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه:

۱. $n=۱۱$　　۲. $n=۱۰$　　۳. $n=۹$　　۴. $n=۸$　　۲

۱۷. اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^۲-A=\bar{۰}$، آن‌گاه $(۲A-I)^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱. $\bar{۰}$　　۲. $I$　　۳. $A$　　۴. $۲A-I$　　۴

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۳ \\ -۷ & ۱۵ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(B^{-۱}AB)^{۱۴}$ کدام است؟

۱. $-A$　　۲. $A$　　۳. $I$　　۴. $-I$　　۴

۱۹. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^n-A^{n-۱}$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$　　۲. $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$　　۳. $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$　　۴. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$　　۲

**وارون ماتریس و دترمینان:**

**وارون ( معکوس) ماتریس:** برای هر ماتریس مربعی مانند $A$، وارون ماتریس $A$ ( در صورت وجود) ماتریسی چون $B$ می‌باشد به طوری که $AB = BA = I$ در این صورت $B$ را وارون $A$ می‌نامیم و با $A^{-1}$ نشان می‌دهیم.

**مثال:** نشان دهید دو ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.

در این کتاب فقط معکوس ماتریس مربعی $2 \times 2$ را محاسبه می کنیم. وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود به صورت $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ بدست می‌آید.

به عدد حقیقی $ad - bc$ دترمینان $A$ می‌گویند و با نماد $|A|$ نشان می‌دهند؛ یعنی: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

پس برای محاسبه معکوس ( وارون) ماتریس $A_{2\times 2}$، درایه‌های روی قطر اصلی را جابجا و درایه‌های قطر فرعی را قرینه کرده و عکس دترمینان را درآن ضرب می‌کنیم.

**توجه:** با توجه به فرمول $A^{-1}$ واضح است اگر $|A|$ صفر باشد، ماتریس وارون ندارد ( وارون‌پذیر نیست). به عبارتی شرط لازم و کافی برای این که $A^{-1}$ وجود داشته باشد ( $A$ وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A| \neq 0$.

**مثال:** وارون ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

**مثال:** اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $m$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

**مثال:** اگر $A$ و $B$ مربع هم مرتبه و وارون‌پذیر باشد به طوری که $A + B = 2AB$ آن‌گاه $A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

۱. $I$ ۲. $2I$ ۳. $3I$ ۴. هیچ‌کدام

**حل دستگاه $۲\times۲$ به کمک ماتریس وارون:**

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=e_۱ \\ cx+dy=e_۲ \end{cases}$ ، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم ( ماتریس سمت راست) و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه می باشد. در این صورت دستگاه به شکل معادله ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود و در صورتی که ماتریس $A$ وارون‌پذیر باشد (یا $|A|\neq ۰$) با ضرب $A^{-۱}$ از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر بدست آورد.

$$AX=B\Rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B\Rightarrow (A^{-۱}A)X=A^{-۱}B\Rightarrow IX=A^{-۱}B\Rightarrow X=A^{-۱}B$$

یعنی برای حل دستگاه باید معکوس ماتریس ضرایب را از سمت چپ در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کرد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

تعبیر هندسی و بحث در تعداد جواب‌های دستگاه: می دانیم در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ هر معادله دستگاه، معرف یک خط در صفحه می‌باشد. دو خط در صفحه سه وضعیت دارند؛

۱. در یک نقطه متقاطعند. در این صورت نقطه برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند پس جواب دستگاه می باشد. برای اینکه دو خط متقاطع باشند باید شیب آن‌ها نابرابر باشد یعنی دستگاه جواب منحصر بفرد دارد هرگاه $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ ( در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است $|A|\neq ۰$)

۲. با هم نقطه مشترک ندارند ( موازی) هستند. یعنی دستگاه جواب ندارد پس $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

۳. بر هم منطبق هستند یعنی دستگاه بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه از خط جواب دستگاه می‌باشد پس $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

نکته: دقت داریم که اگر دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد آن‌گاه دستگاه جواب منحصربفرد دارد ولی اگر دترمینان ضرایب صفر باشد دستگاه ممکن است بی شمار جواب یا اصلاً جواب نداشته باشد. لذا برای بحث بهتر است از سه حالت ذکر شده استفاده کنیم. ( کسرهای ذکر شده)

مثال: روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف. $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$ ج. $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$

**دترمینان و کاربرد**

**اگر $A$ ماتریسی مربعی از مرتبه $n$ باشد( $1 \le n \le 3$) در این صورت دترمینان ماتریس $A$ را با نماد $|A| = \det(A)$ نمایش می‌دهیم و داریم:**

**الف.** $A = [k]_{1\times 1} \Rightarrow |A| = k$ **ب.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$

**ج. اگر** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **آن‌گاه دترمینان این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:**

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**پس دترمینان بر حسب سطر اول به صورت** $|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

**توجه: هر ماتریس $3 \times 3$ دلخواه می توان دترمینان آن را بر حسب هر سطر و ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربفرد است. ولی بهتر است بر اساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد ( چرا؟)**

**مثال: دترمینان ماتریس** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ **بر حسب سطر اول و ستون (سطر) سوم بسط دهید.**

**مثال: دترمینان ماتریس** $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ **را محاسبه کنید.**

**ویژگی‌های دترمینان:**

**۱. اگر درایه‌های یک سطر یا یک ستون همگی صفر باشند، حاصل دترمینان صفر است.**

**۲. اگر دو سطر( یا دو ستون) یک دترمینان با هم برابر باشند یا مضربی از هم باشند، حاصل دترمینان صفر است.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kd & ke & kf \end{vmatrix} = 0$$

**۳. اگر همه عناصر یک سطر ( ستون) ماتریس در عدد ثابت $k$ ضرب شوند آن‌گاه دترمینان در $k$ ضرب می‌شود و بعکس**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & l \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix}$$

**مثال: اگر** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -2$ **آن‌گاه مقدار** $\begin{vmatrix} 2a & 6b & -2c \\ -a' & -3b' & c' \\ -a'' & -3b'' & c'' \end{vmatrix}$ **کدام است؟**

**۱. ۱۲　　۲. ۱۲-　　۳. ۶　　۴. ۶-**

**۴. اگر جای دو سطر( ستون) یک دترمینان را با هم عوض کنیم مقدار دترمینان در $(-1)$ ضرب می‌شود. ( به تعداد جابجایی‌ها، عدد ۱- ضرب خواهد شد)**

**۵. اگر مضربی از یک سطر( ستون) را به سطر( ستون) دیگر اضافه کنیم حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.**

**۶. دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی، پایین مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی**

**۷. دترمینان ماتریس‌های شبه قطری و شبه مثلثی $3 \times 3$ برابر است با قرینه حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر فرعی**

**مثال: حاصل** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **برابر است با:**

**۱. ۴　　۲. ۴-　　۳. ۱۰　　۴. ۱۰-**

**۸. اگر $A$ ماتریس $n \times n$ باشد آن‌گاه $|kA| = k^n |A|$.**

**۹. اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی باشند، آن‌گاه $|AB| = |A||B|$.**

**۱۰. اگر $A = B$ آن‌گاه $|A| = |B|$ ولی برعکس آن درست نیست.**

**۱۱. $|A^n| = |A|^n$ ( ازجمله $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$ )**

**۱۲. $|I| = 1$.**

**۱۳. دترمینان به شکل** $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **صفر است.**

**۱۴. دترمینان جمع دو ماتریس قانون ندارد.** $|A+B| \neq |A|+|B|$

**دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس ۳ × ۳.**

**دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های واقع بر قطر فرعی $A$ و دو قطر موازی با آن.**

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \qquad |A| = (aci + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

**مثال دترمینان ماتریس** $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **را از دستور ساروس بدست آورید.**

**چند تمرین کتاب: صفحه ۳۰**

**۱. اگر** $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|AB|$ **و** $|BA|$ **را بدست آورید. ( آیا نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟)**

**نکته: اگر** $A_{m\times n}$ **و** $B_{n\times m}$ **و** $A\times B = C_{m\times m}$ **آنگاه با فرض** $m>n$ **داریم:** $|C| = ۰$

**۲. اگر** $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|A^۲|$ **را بدست آورید.**

**۳. اگر** $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|A|^۳ - ۲$ **را بیابید.**

**۴.** اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

**۵.** دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

**۶.** ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

**۷.** برای ماتریس ۲ × ۲ مانند $A$ دو مقدار $|A|$ و $|kA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

**۸.** اگر $A$ ماتریسی ۳ × ۳ باشد و در این صورت حاصل $\big||A|A\big|$ را بیابید.

**۹.** اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ انتدا ماتریس $A^{-۱}$ را بدست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

**چند تست دترمینان و وارون**

**۱.اگر** $A=\begin{bmatrix} - & \\ & \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ **، حاصل** $|A+B| + |AB|$ **کدام است؟**

۱. ۱۹-    ۲. ۹۱    ۳. ۷۷-    ۴. ۱۰۵    ۱

**۲.اگر** $A=\begin{bmatrix} -|A| & - \\ - & +|A| \end{bmatrix}$ **باشد ، دترمینان ماتریس** $A$ **کدام می تواند باشد؟**

۱. $\sqrt{\ }$    ۲. $-\sqrt{\ }$    ۳. ۲-    ۴. ۴-    ۴

**۳. اگر** $A=\begin{bmatrix} & \\ - & - \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}$ **، حاصل** $|A \ B| + |A \ B|$ **کدام است؟**

۱. ۲۴-    ۲. ۱۲-    ۳. ۱۲    ۴. ۲۴    ۳

**۴.اگر** $A=\begin{bmatrix} \log & \log \\ \log & \log \end{bmatrix}$ **، آن گاه** $|A|$ **کدام است؟**

۱. $\log \ /$    ۲. $\log \ /$    ۳. $\log$    ۴. $\log \ /$    ۲

**۵.اگر** $\begin{vmatrix} & \\ - & \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} & & \\ & - & \\ x & & \end{vmatrix}$ **مقدار** $A$ **کدام است؟**

۱. ۳    ۲. ۴    ۳. ۵    ۴. ۶    ۱

**۶.اگر در ماتریس اسکالر** $A=[a_{ij}]_{\times}$ **،** $= \ a$ **باشد،** $|A|$ **کدام است؟**

۱. صفر    ۲. ۱۶-    ۳. ۱۶    ۴. ۶۴    ۴

**۷. اگر** $A=[a_{ij}]_{\times}$ **و** $B=[b_{ij}]_{\times}$ **با تعاریف** $a_{ij}=\begin{cases} \circ & i<j \\ & i \geq j \end{cases}$ **و** $b_{ij}=\begin{cases} \circ & i+j= \ k+ \\ & i+j= \ k \end{cases}$ **باشند**

**حاصل** $|A^{-}| - |(A-B)^{-}|$ **کدام است؟**

۱. ۲-    ۲. صفر    ۳. ۱    ۴. ۲    ۱

**۸. به ازای کدام مقدار** $k$ **معادله** $\begin{vmatrix} x & & k \\ & x+ & \\ & & x+ \end{vmatrix} =$ **فقط یک ریشه دارد؟**

۱. ۱-    ۲. صفر    ۳. ۱    ۴. ۲    ۱

**۹. معادله** $\begin{vmatrix} & x \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \\ x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \\ & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & - \\ x & \end{vmatrix}$ **چند ریشه دارد؟**

۱. بی شمار    ۲. ۲    ۳. ۱    ۴. هیچ    ۴

**۱۰.اگر** $A=\begin{bmatrix} - & & - \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} - & & - \\ & & \\ - & & \end{bmatrix}$ **باشد، دترمینان ماتریس** $A+BA-AB- \ B$ **کدام است؟**

۱. ۹    ۲. ۳    ۳. ۳-    ۴. ۹-    ۱

۱۱. اگر $A = \begin{vmatrix} & - \\ - & |A| \end{vmatrix}$ ، حاصل $\big|A|A| + A\big|$ کدام است؟

۱. ۶    ۲. ۹    ۳. ۱۲    ۴. ۱۸    ۴

۱۲. اگر $A_{\times}$ ، $\big\| A|A| \big\| =$ باشد، $|A|$ کدام است؟

۱. ۲    ۲. ۴    ۳. ۸    ۴. ۱۶    ۴

۱۳. اگر $A_{\times}$ و $\big| \; |A| \; \big| = - -$ باشد، حاصل $\left|\frac{A}{\| A \|}\right|$ کدام است؟

۱. —    ۲. $\frac{-}{\quad}$    ۳. —    ۴. — —    ۲

۱۴. $A$ و $B$ ماتریس های مربعی از مرتبه ۳ هستند و $|A| = - -$ و $\big| \; |B| \; \big| =$ است. اگر $kAB = - - \; I$ باشد، $k$ کدام است؟

۱. ۴-    ۲. ۲-    ۳. ۲    ۴. ۴    ۴

۱۵. $A$ ماتریس مربعی است که درایه های روی قطر اصلی آن ۳ و ۱- و ۲ و درایه های پایین قطر اصلی آن صفر است. دترمینان $A$ کدام است؟

۱. صفر    ۲. ۶    ۳. ۱۵    ۴. ۳۶    ۴

۱۶. اگر $M = [m_{ij}]_{\times}$ و $\left|\frac{M}{|M|} + M\right| = |M|$ باشد، $\left|\frac{M}{\|M\|}\right|$ کدام است؟

۱. ۲-    ۲. — —    ۳. —    ۴. ۲    ۱

۱۷. دو سطر یک ماتریس مربعی را در عدد ۳ و سه ستون آن را در عدد ۲- ضرب نموده‌ایم. دترمینان ماتریس حاصل چند برابر ماتریس اولیه است؟

۱. ۷۲    ۲. ۶۴    ۳. ۶۴-    ۴. ۷۲-    ۴

۱۸. اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = -$ ، حاصل $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ -a & b & -c \\ a & -b & c \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱. ۱۲-    ۲. ۶-    ۳. ۶    ۴. ۱۲    ۱

۱۹. مقدار $x$ از رابطه $\begin{vmatrix} x- & x- & \\ - & & x+ \\ & & x+ \end{vmatrix} =$ کدام است؟

۱. ۶- و ۱-    ۲. ۶ و ۱-    ۳. ۶- و ۱    ۴. ۶ و ۱    ۳

۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} & - \\ a & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & a \\ - & \\ & \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$، آن گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$، حاصل دترمینان $C$ منفی است؟

۱. $\phi$ ۲. $\{a : a < \}$ ۳. $\{a : a < \}$ ۴. $R$ ۱

۲۱. اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ ، آن گاه $\begin{vmatrix} a- & b & a+ & b \\ c- & d & c+ & d \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱. ۴۳ ۲. ۸۶- ۳. صفر ۴. ۸۶ ۴

۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} & \\ & - \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ آن گاه حاصل $\dfrac{|A + A \times B|}{|B + B \times A|}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۱- ۳. ۲ ۴. $--$ ۲

۲۳. اگر $\begin{bmatrix} & d \\ -d & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - \\ & \end{bmatrix}$ آن گاه مجموع دترمینان های دو ماتریس سمت راست تساوی کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۳۶ ۳. ۲۰ ۴. ۱۶ ۲

۲۴. اگر $A = \left[ i - j \right]_{\times}$ آن گاه دترمینان ماتریس $A \times [\ ]$ کدام است؟

۱. ۱۵ ۲. ۲۲۵ ۳. ۱۶ ۴. صفر ۴

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $c,b,a$ و $d$ اعداد طبیعی باشند به طوری که $= \quad + |A| - \quad |A|$ آن گاه کم ترین مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸ ۲

۲۶. اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی و $i$ و $j$ شماره های سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $_{\times}$ $A = [ai + bj]$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $ab(a+b)$ ۳. $ab$ ۴. $a+b$ ۱

۲۷. به ازای کدام مقادیر $a$ و $b$، اگر ۲ واحد به درایه ی واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} a+ & b & c \\ & b+ & c \\ a & b & c+ \end{bmatrix}$ اضافه شود، آن گاه ۳ واحد به دترمینان آن اضافه می شود؟

۱. $a$ هر چه باشد، $b = --$ ۲. $a$ هر چه باشد، $b = -$ ۱

۳. $b$ هرچه باشد، $a = --$ ۴. $b$ هر چه باشد، $a = --$

۲۸. به هردرایه سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} & & \\ & & - \\ & & \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیش تر گردد؟

۱. ۲- ۲. ۱- ۳. ۱ ۴. ۲ ۱

۲۹. اگر به تمام درایه های واقع در ستون دوم ماتریس $\begin{vmatrix} a & \\ b & \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود به مقدار دترمینان ماتریس اولیه کدام عدد اضافه می شود؟

۱. ۳-  ۲. ۲-  ۳. ۳  ۴. ۶  ۱

۳۰. اگر به هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} a & \\ & - \\ & \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می شود. $a$ کدام است؟

۱. ۱-  ۲. ۲  ۳. ۳  ۴. ۴  ۳

۳۱. اگر از هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} & - & \\ a- & a+ & a \\ & - & \end{vmatrix}$ ، ۲ برابر شماره ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه چقدر افزوده می شود؟

۱. ۱۳۲  ۲. ۱۴۴  ۳. ۱۴۸  ۴. ۱۵۶  ۴

۳۲. اگر $A \quad + A = -I$ باشد، حاصل $|A|$ کدام است؟

۱. ۱  ۲. ۲  ۳. ۳  ۴. ۴  ۱

۳۳. اگر $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $\left(A^{-}\right)$ کدام است؟

۱. ۱  ۲. ۲  ۳. ۳  ۴. ۴  ۱

۳۴. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ، ماتریس $B$ از تساوی $A \times B = - \quad I$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} & \\ & - \end{bmatrix}$  ۲. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & \end{bmatrix}$  ۳. $\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}$  ۴. $\begin{bmatrix} & \\ - & - \end{bmatrix}$  ۲

۳۵. اگر $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{-}\left(A + \quad I\right)$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} - & \\ - & \end{bmatrix}$  ۲. $\begin{bmatrix} - & \\ & \end{bmatrix}$  ۳. $\begin{bmatrix} - & \\ & - \end{bmatrix}$  ۴. $\begin{bmatrix} - & \\ & - \end{bmatrix}$  ۴

۳۶. اگر ماتریس های $\times$ ، $A$ و $P$ چنان باشند که $\left(P^{-} \times A \times P\right) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A$ کدام است؟

۱. ۶-  ۲. ۶  ۳. ۳  ۴. ۳-  ۲

۳۷. اگر $A = \begin{bmatrix} & a \\ - & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & - \\ a & \\ & \end{bmatrix}$ آن گاه به ازای کدام مقدار $a$ ماتریس $A \times B$ وارون پذیر است؟

۱. ۲  ۲. ۶-  ۳. هر مقدار $a$  ۴. هیچ مقدار $a$  ۳

**۳۸. اگر دو ماتریس $A$ و $I - A$ وارون هم باشند، ماتریس $A$ کدام است؟**

۱. $A$  ۲. $-A$  ۳. $I$  ۴. $-I$  ۲

**۳۹. اگر $A$ یک ماتریس $\times$ باشد به طوری که $A^{-} \neq$ و $A^{-} =$ ، آن گاه معکوس ماتریس $I - A$ به کدام صورت است؟**

۱. $A - A$  ۲. $A + A$  ۳. $A - A + I$  ۴. $A + A + I$  ۴

**۴۰. از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} & \\ & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس $A$ کدام است؟**

۱. $[\quad]$  ۲. $[\quad]$  ۳. $[- \quad]$  ۴. $[\quad]$  ۴

**۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} & -\tan x \\ \tan x & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & \tan x \\ -\tan x & \end{bmatrix}$، آن گاه سطر اول ماتریس $A^{-} \times B$ کدام است؟**

۱. $[\cos x \quad \sin x]$  ۲. $[\sin x \quad \cos x]$  ۳. $[\sin x \quad -\cos x]$  ۴. $[\cos x \quad -\sin x]$  ۱

**۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} & -\tan x \\ \tan x & \end{bmatrix}$ و $I$ ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I + A)(I - A)^{-}$ کدام است؟**

۱. $[\cos x \quad -\sin x]$  ۲. $[\cos x \quad \sin x]$  ۳. $[\sin x \quad \cos x]$  ۴. $[-\sin x \quad \cos x]$  ۱

**۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} - & - \\ & \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} - & - \\ & \end{bmatrix}$، آن گاه $A$ کدام است؟**

۱. $\begin{bmatrix} - & \\ & - \end{bmatrix}$  ۲. $\begin{bmatrix} & \\ - & - \end{bmatrix}$  ۳. $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$  ۴. $\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}$  ۲

**۴۴. اگر برای دو ماتریس $\times$ ، $A$ و $B$ داشته باشیم $(A + B)(A - B) = A - B$، آن گاه حاصل $\left((A \times B) \times A^{-}\right)$ کدام است؟**

۱. $A$  ۲. $B$  ۳. $I$  ۴. $A \times B$  ۲

**۴۵. اگر $A$ ماتریس وارون پذیر بوده به طوری که $A + A^{-} = I$ حاصل $A$ کدام است؟**

۱. $A$  ۲. $I$  ۳. $-A$  ۴. $-I$  ۴

**۴۶. اگر $A + A + I = I^{-}$ باشد، وارون ماتریس $A$ کدام است؟**

۱. $A$  ۲. $-A$  ۳. $I + A$  ۴. $-I - A$  ۱

**۴۷. اگر $A$ و $B$ و $A - B$ ماتریس های وارون پذیر باشند، $A \times (A - B)^{-} \times B$ برابر کدام است؟**

۱. $(B - A)^{-}$  ۲. $(A - B)^{-}$  ۳. $(A^{-} - B^{-})^{-}$  ۴. $(B^{-} - A^{-})^{-}$  ۴

**۴۸. اگر $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & - \\ & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ آن گاه $x + y$ کدام است؟**

۱. ۱  ۲. ۲  ۳. ۳  ۴. ۴  ۳

**۴۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} (m - \ )x + \ y = m \\ x + (m + \ )y = \end{cases}$ به ازای کدام مقدار $m$ جواب ندارد؟**

۱. ۵-  ۲. ۳-  ۳. ۳  ۴. ۵  ۴

**۵۰. به ازای کدام مقدار $a$ دستگاه معادلات $\begin{cases} x + \ y = \\ y = a(x - \ ) \end{cases}$ بی شمار جواب دارد؟**

۱. $-\,-$ ۲. $-\,-$ ۳. $-$ ۴. $-$ ۲

۵۱. اگر جواب دستگاه $\begin{bmatrix} & a \\ b & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ - \end{bmatrix}$ زوج مرتب $( \; , \; )$ باشد، آن گاه مجموع درایه های ماتریس ضرایب دستگاه کدام است؟

۱. ۳- ۲. ۲- ۳. ۲ ۴. ۳ ۱

۵۲. اگر نقطه برخورد نمایش نموداری دستگاه $\begin{cases} ax + by = \\ ax - by = \end{cases}$ به صورت $( \; , \; )$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه کدام است؟

۱. $-$ ۲. ۱ ۳. $-$ ۴. $-\,-$ ۱

۵۳. اگر دستگاه $\begin{cases} a \;\; x - ay = \;\; - a \\ bx + ( \;\; - \;\; b)y = a + \end{cases}$ دارای جواب منحصربفرد $( \; , \; )$ باشد، زوج مرتب $(a,b)$ کدام است؟

۱. $( \; ,- \; )$ ۲. $(- \; , \; )$ ۳. $(- \; ,- \; )$ ۴. $( \; , \; )$ ۱

۵۴. اگر دستگاه $\begin{cases} ax - by = \;\; a - b \\ (c + \;\; )x + cy = \;\; - a + \;\; b \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد و $( \; , \; )$ یکی از جواب ها باشد، آن گاه مقدار $a$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۱- ۳. ۲ ۴. ۲- ۳

۵۵. اگر $A$ ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} x - y = - \\ x - \;\; y = \end{cases}$ و $I$ ماتریس همانی و $\alpha$ و $\beta$ دو عدد حقیقی باشند، به طوری که $\alpha A + \beta I = A^{-}$، مقدا $\beta$ کدام است؟

۱. $-\,-$ ۲. $\frac{-}{}$ ۳. $-$ ۴. $-$ ۳

۵۶. اگر $A$ ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} x - y = \\ x + y = - \end{cases}$ باشد و $B$ ماتریس هم مرتبه ی $A$ باشد به طوری که $A + B = A \times B$، سطر اول ماتریس $B$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} & - \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} & - \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} - & - \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} - & - \end{bmatrix}$ ۱

۵۷. اگر $A \;\; = \bar{o}$، وارون ماتریس $A - \;\; I$ کدام است؟

۱. $-\,-(A \;\; + \;\; A + \;\; I)$ ۲. $-(A \;\; + \;\; A + \;\; I)$ ۳. $-(A \;\; + \;\; A + I)$ ۴. $-\,-(A \;\; + \;\; A + I)$

۵۸. اگر $A \;\; = \;\; I$، وارون ماتریس $I + A$ کدام است؟

۱. $I - A$ ۲. $I - A$ ۳. $-(A - I)$ ۴. $-(I - A)$

۵۹. اگر ماتریس مربعی $A$ در رابطه $(A - I) \;\; = \bar{o}$ صدق کند، حاصل $A^{-} \;\; - I$ کدام است؟

۱. $(A - I)(A - \;\; I)$ ۲. $(A + I)(A + \;\; I)$ ۳. $(A - I)(A + \;\; I)$ ۴. $(A + I)(A - \;\; I)$

۶۰. اگر $A \;\; = A$، ماتریس $(I - \;\; A)^{-}$ برابر کدام است؟

۱. $I - -A$　　۲. $I + -A$　　۳. $I + -A$　　۴. $-I - A$

**۶۱. اگر $A$ ماتریس وارون پذیر باشد و $A = I - A$ ، آن گاه وارون $A$ کدام است؟**

۱. $A - I$　　۲. $A - A$　　۳. $A + A$　　۴. $A - A$