تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net

فصل دوم:

مقاطع مخروطی

معرفی مقاطع مخروطی

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A متقاطع(غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی(سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را راس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

برای درک بهتر به شکلهای کتاب صفحه ۳۴ و ۳۵ مراجعه کنید.

الف. در حالتی که صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد واز راس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

واگر از راس عبور کند فقط نقطه A حاصل می‌شود.

ب. در حالتی که صفحه p بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، شکل حاصل یک بیضی خواهد بود.

ج. اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر p از راس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)

د. اگر صفحه p به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. (در کتاب هندسه دوازدهم به بررسی خواص هذلولی پرداخته نشده است)

تلاشی درمسیرموفقیت

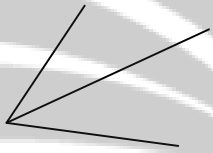
مکان هندسی: مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

در واقع هر مکان هندسی مانند یک قضیه دو شرطی می‌باشد. به قضیه‌های زیر توجه کنید.

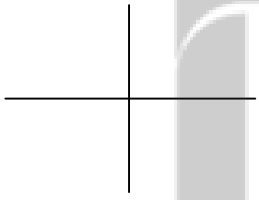
۱. نقطه A روی نیم‌ساز زاویه B قرار دارد اگر وتنها اگر فاصله این نقطه تا دو ضلع زاویه B یکسان باشد.

پس می‌توان گفت: نیم‌ساز هر زاویه مکان هندسی نقطه‌ای ازصفحه آن زاویه است که فاصله آن نقطه تا اضلاع زاویه مقدار یکسانی باشد.

یعنی فاصله هر نقطه که روی نیمساز قرار دارد از دو ضلع زاویه مقدار برابری می باشد و هر نقطه از صفحه که از دو ضلع زاویه فاصله یکسانی داشته باشد، روی نیمساز قرار دارد.



۲. نقطه M روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد اگر وتنها اگر فاصله آن تا دو سر پاره‌خط مقدار یکسانی باشد. لذا عمود منصف هر پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن از دو سر پاره‌خط به یک اندازه می‌باشد. یعنی هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره-خط فاصله یکسانی دارد و هر نقطه از صفحه که از دو سر پاره‌خط فاصله یکسانی داشته باشد روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.



معرفی چند مکان هندسی مهم درصفحه:

۱.مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B درصفحه به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره خط AB است.

۲. مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۳. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

۴. مکان هندسی نقاطی ازصفحه که از خط d به فاصله k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

www.niazsara.ir

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. در تعداد جواب بحث کنید.

مثال: در صفحه مثلث ABC نقطه بیابید که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشد و فاصله یکسان از دو راس B و C داشته باشد.

توجه: همان طور که در دو مثال بالا دقت کردیم نقطه یا نقاط جواب، محل برخورد دو یا چند مکان و یا یک مکان با اطلاعات مساله می‌باشد. برای حل ابتدا مکان یا مکان‌های خواسته شده را معرفی می‌کنیم و سپس مجموعه مشترک این مکان‌ها را به عنوان جواب معرفی می‌کنیم.

نکته: برای یافتن مکان هندسی خاصی ابتدا چندین نقطه که در شرایط مکان صدق می‌کند را یافته و سپس این نقاط را به هم وصل می‌کنیم تا مکان مورد نظر مشخص گردد.

چند تمرین کتاب صفحه ۳۹

۱. مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف. نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب. مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

ج. مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت. مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,R)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

۲. نقاط A، B، C، D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله واز C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید)

www.niazisara.ir

۳. نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۴. نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۵. هر گاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

۶. هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران خط d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه p، یک شطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید.

چند تست مکان هندسی

۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند کدام است؟

۱. یک خط ۲. دو خط موازی ۳. دو خط عمود برهم ۴. یک صفحه ۱

۲. مکان هندسی مراکز دایره هایی که بر دو خط موازی مماس اند، کدام است؟

۱. دایره ۲. دو خط موازی ۳. یک خط ۴. دو خط عمود برهم ۳

۳. مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، کدام است؟

۱. خطی موازی با d و به فاصله r از d ۲. خطی موازی با d و به فاصله r از d ۳

۳. دو خط موازی با d و به فاصله r از d ۴. دو خط موازی با d وبه فاصله r از d

۴. مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ۲ که بر دایره ی $C(O,\ )$ مماس داخلی اند، کدام است؟

۱. دایره ای به شعاع ۱ ۲. دایره ای به شعاع ۲ ۳. دایره ای به شعاع ۳ ۴. دایره‌ای به شعاع ۴ ۳

۵. مکان هندسی مرکزهای همه دایره ها با شعاع ثابت r که بر دایره ی $C(O,r)$ مماس خارجی اند، کدام است؟ ۱

www.niazsara.ir

۱. دایره ای به شعاع r ۲. دایره ای به شعاع $\frac{r}{}$ ۳. مربعی به طول ضلع r ۴. مربعی به طول ضلع r

۶. مکان هندسی مرکز دایره هایی با شعاع ۳ که بر دایره $C(O, \ )$ مماس خارجی اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط این مکان هندسی چه قدر است؟

۱. ۷ ۲. ۱۱ ۳. ۱۴ ۴. ۲۰ ۳

۷. مکان هندسی مرکز دایره هایی که در صفحه که بر خط d در نقطه A مماس اند، کدام است؟

۱. خطی موازی با خط d ۲. دایره ای به مرکز A ۳. خطوط عمود بر خط d ۴. خط عمود بر d در نقطه A ۴

۸. تعداد نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به ترتیب به فاصله ی ۲/۵ و ۳/۵ سانتی متر باشند، کدام است؟

۱. بی شمار ۲. ۴ ۳. ۲ ۴. صفر ۲

۹. مکان هندسی مرکز دایره هایی با شعاع ۳ که از نقطه ثابت A می گذرند، کدام است؟ ۴

۱. مربعی به طول ۳ سانتی متر ۲. دایره ای به قطر ۳ سانتی متر

۳. مربعی به طول ۶ سانتی متر ۴. دایره ای به قطر ۶ سانتی متر

۱۰. خط d و پاره خط AB برهم عمود نیستند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشند؟ ۲

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. بی شمار

۱۱. خط d و دو نقطه A و B طوری در صفحه قرار دارند که خط گذرنده از A و B بر خط d عمود است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشند؟ ۳

۱. صفر ۲. صفر و یک ۳. صفر یا بی شمار ۴. یک یا بی شمار

۱۲. نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند. کدام گزینه تعداد نقاطی را مشخص کنید که از A و B و به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند؟

۱. حداکثر یک ۲. دقیقاً یک ۳. یک، بی شمار ۴. صفر، یک، بی شمار ۴

۱۳. حداکثر چند نقطه روی دایره C به شعاع ۵ وجود دارد که از خط Δ به فاصله ۲/۵ باشند؟

۱. ۴ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱ ۱

۱۴. مکان هندسی رئوس مثلث هایی در صفحه که طول قاعده آن ها ۴ سانتی متر و مساحت آن ها ۸ سانتی متر مربع باشد، کدام است؟

۱. دو دایره به شعاع ۴ سانتی متر به مراکز B و C ۲. چهار دایره به شعاع ۴ سانتی متر به مراکز B و C

۳. خطی موازی باقاعده و به فاصله ۴ سانتی متر از آن ۴. دو خط موازی به فاصله ۸ سانتی متر ۴

۱۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، کدام است؟

۱. دو خط عمود برهم ۲. یک دایره ۳. یک خط ۴. دو خط متقاطع ۱

۱۶. مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقداری ثابت باشد، کدام است؟

۱. یک خط ۲. دو خط متقاطع ۳. یک دایره ۴. دو دایره ۲

۱۷. حداکثر چند نقطه روی خط L وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۴ ۴. بی‌شمار ۴

۱۸. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه A و B می گذرند، کدام است؟ ۲

۱. خطوط موازی با AB ۲. یک خط عمود بر AB ۳. دو خط موازی با AB ۴. خطوط عمود بر AB

www.niazisara.ir

۱۹. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آن ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن ها ۴ سانتی متر است، برابر با ۴ سانتی متر باشد، کدام است؟ ۳

۱. یک خط بین دو خط d و d' ۲. دو خط موازی با d و d' ۳. نقاط بین d و d' ۴. نقاط روی d و d'

۲۰. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فاصله های آن ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن ها ۴ سانتی متر است، برابر با ۳ سانتی متر باشد، کدام است؟ ۲

۱. تمام نقاط بین d و d' ۲. دو خط موازی با d و d' ۳. نقاط خارج از فضای بین دو خط ۴. یک خط

۲۱. فاصله دو نقطه A و B روی دو خط عمود برهم d و d' همواره برابر ۲ است. مکان هندسی نقطه وسط AB کدام است؟ ۳

۱. یک خط ۲. دو خط موازی ۳. دایره ۴. مربع

۲۲. A و B دو نقطه ثابت و C نقطه ای متغیر از یک صفحه اند. با حرکت نقطه C، مکان هندسی نقطه همرسی عمود منصف های مثلث ABC کدام است؟ ۴

۱. دایره‌ای به مرکز وسط AB ۲. یک نقطه ۳. خطی موازی AB ۴. خطی عمود بر AB

۲۳. مکان هندسی راس A از مثلث ABC که نقاط B و C و طول میانه AM در آن ثابت هستند، کدام است؟ ۱

۱. دایره ۲. یک خط ۳. دو خط موازی ۴. نیم خط

۲۴. نقاط M و N به ترتیب روی دو خط موازی d و d' قرار دارند. مکان هندسی وسط پاره خط MN کدام است؟ ۱

۱. یک خط ۲. نیم دایره ۳. دایره ۴. پاره خط عمود بر d و d'

۲۵. نقطه A و طول ضلع AB از مثلث ABC ثابت اند. مکان هندسی نقطه M پای میانه ی مرسوم از راس C کدام است؟ ۲

۱. خط ۲. دو خط ۳. نیم دایره ۴. دایره

سئوال زمان بر

۲۶. حداکثر چند دایره به شعاع ۱ می توان رسم کرد که بر دایره ی $C(O,\ )$ و خط d مماس باشند؟ ۱

۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۱۲ ۴. بی شمار

۲۷. دایره ای بر مثلث ABC که در راس A قائمه است، محیط شده است. اگر نقاط B و C ثابت باشند و نقطه A روی محیط دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطه G مرکز مثلث کدام است؟ ۱

۱. دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۲. دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۳.دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۴. دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{}$

۲۸. مکان هندسی نقاطی که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد، کدام است؟ ۱

۱. حداکثر یک نقطه ۲. یک نقطه ۳. حداکثر دو خط متقاطع ۴. دو خط متقاطع

۲۹. دو نقطه C و D و طول AD از متوازی الاضلاع $ABCD$ ثابت اند. مکان هندسی محل تلاقی قطر های متوازی الاضلاع $ABCD$ روی شکل قرار دارد؟ ۴

۱. نقطه همرسی میانه های مثلث ADC ۲. نقطه همرسی میانه های مثلث BCD

۳. خطی که از وسط DC عبور می کند. ۴. دایره‌ای به مرکز وسط DC

۳۰. خط d اضلاع زاویه O را در نقاط A و B قطع کرده است. اگر مکان خط d تغییر کند، مکان هندسی محل تلاقی نیم سازهای زوایای OAB و OBA کدام است؟

www.niazisara.ir

۱. خط ۲. یک نقطه ثابت ۳. تمام نقاط بین دو نیم خط زاویه ۴. دایره ۱

۳۱. قاعده BC از مثلث ABC ثابت و نقطه M وسط BC مفروض است. راس A روی خطی موازی با BC و به فاصله d از آن حرکت می کند. مکان هندسی G، نقطه برخورد میانه های مثلث ABC کدام است؟

۱. خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{d}{3}$ از آن ۲. دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{d}{3}$ ۱

۳. خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{d}{3}$ ۴. دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{d}{3}$

۳۲. قطر های مربعی قسمتی از دو خط متمایز d و d' هستند. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آن نقاط از دو خط d و d' برابر ۱۳ باشد، کدام است؟ ۴

۱. دایره‌ای به شعاع ۱۳ ۲. مربعی به طول ضلع ۱۳ ۳. دایره ای به شعاع $\sqrt{}$ ۴. مربعی به طول ضلع $\sqrt{}$

۳۳. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل آن ها از دو خط متقاطع برابر ۳ سانتی متر باشد، کدام است؟

۱. ۴خط ۲. ۴ نیم خط ۳. محیط یک مستطیل ۴. ۸ نیم خط ۴

۳۴. دایره $C(O,R)$ و نقطه A درون آن مفروض است. مکان هندسی وسط وترهای گذرنده از نقطه A کدام است؟

۱. دایره ۲. نیم دایره ۳. پاره‌خط ۴. دو خط موازی ۱

۳۵. نقطه A و دایره $C(O,R)$ مفروض است. وسط پاره‌خط‌هایی که A را به نقاط دایره وصل می‌کند، روی شکل... قرار دارند؟

۱. دایره به قطر OA ۲. دایره به شعاع OA ۳. دایره به قطر R ۴. دایره به شعاع R ۳

۳۶. دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. نقطه A و A' به ترتیب روی دایره‌های C و C' چنان قرار دارند که $OA \| O'A'$ است. مکان هندسی وسط پاره خط AA' کدام است؟

۱. دایره به قطر OO' ۲. دایره‌ای به شعاع OO' ۳. دایره به قطر $R+R'$ ۴. دایره به شعاع $R+R'$ ۳

۳۷. دو نقطه A و B به فاصله ۱۲ سانتی‌متر مفروض‌اند. از نقطه A بر همه خط‌هایی که از دو نقطه B می‌گذرند؛ خطی عمود کرده‌ایم. مکان هندسی پای عمودها کدام است؟

۱. دایره‌ای به قطر ۱۲ ۲. دایره‌ای به قطر ۶ ۳. عمود منصف AB ۴. دو خط موازی AB

۳۸. سه نقطه A، B و C روی یک خط نیستند. چند خط در صفحه مثلث ABC وجود دارد که این سه نقطه از آن‌ها به یک فاصله باشد؟

۱. صفر ۲. یک ۳. دو ۴. سه ۴

۳۹. پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر موازی خط l و به فاصله ۵ سانتی‌متر از آن قرار دارد. چند نقطه مانند M روی خط l می‌توان یافت که مثلث AM متساوی الساقین باشد؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت

دایره:

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه معرفی شد که فاصله هر نقطه از آن مانند $A(x,y)$ از نقطه $O(\alpha,\beta)$ فاصله یکسان R می‌باشد. O مرکز دایره و R شعاع دایره می باشد. پس معادله دایره به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

به معادله فوق معادله استاندارد دایره می گویند.

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

معادله گسترده یا ضمنی دایره: اگر معادله دایره را بسط داده و ساده کنیم معادله دایره به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ تبدیل می‌شود که به آن معادله گسترده دایره می گویند.

یافتن مرکز و شعاع دایره از روی حالت گسترده:

مرکز دایره: $O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ و شعاع از رابطه‌های $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ یا $R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^2+(\text{عرض مرکز})^2-c}$ بدست می‌آید زیرا:

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و برخط به معادله $3x-4y+3=0$ مماس باشد.

مثال: مرکز و شعاع را بیابید.

الف. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ ب. $2x^2+2y^2+4x-6y=1$

www.niazsara.ir

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$ مماس بیرون باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس داخل باشد.

مثال: معادلات قطرهای دایره‌ای $(m+۲)x + (m+۱)y = ۱$ است. اگر دایره از نقطه $(۳,-۱)$ بگذرد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۲

مثال: به ازای کدام مقدار k خط $y = k$ بر دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$ مماس است.

۱) $\pm\sqrt{۲}$ ۲) $۱\pm\sqrt{۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

مثال: به ازای کدام مقدار a معادله $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $a > ۳$ ۲) $a < ۱/۵$ ۳) $a < ۸/۵$ ۴) $a \le ۱۷$

www.niazisara.ir

مثال: اگر فاصله نقاط مقطع مخروطی $(m-2)x^2+(4-m)y^2+(n-1)xy+ax-2y=0$ **از نقطه** $(2,b)$ **یکسان باشد، مقادیر** n، m، b **و** a **را بیابید.**

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(1,2)$ **و** $B(3,4)$ **دو سر قطر آن باشد.**

مثال: معادله دایره گذرنده از سه نقطه $A(1,1)$، $B(2,2)$ **و** $C(3,1)$ **را بنویسید.**

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $(1,2)$ **و** $(3,0)$ **بگذرد و مرکز آن روی خط** $y=2x-1$ **قرار داشته باشد.**

مثال: شعاع دایره محیطی مثلث ABC **که در آن** $A(0,1)$، $B(-1,0)$ **و** C **منطبق بر مبدا مختصات می‌باشد کدام است؟**

۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲. $2\sqrt{2}$ ۳. $\sqrt{2}$ ۴. ۱

www.niazisara.ir

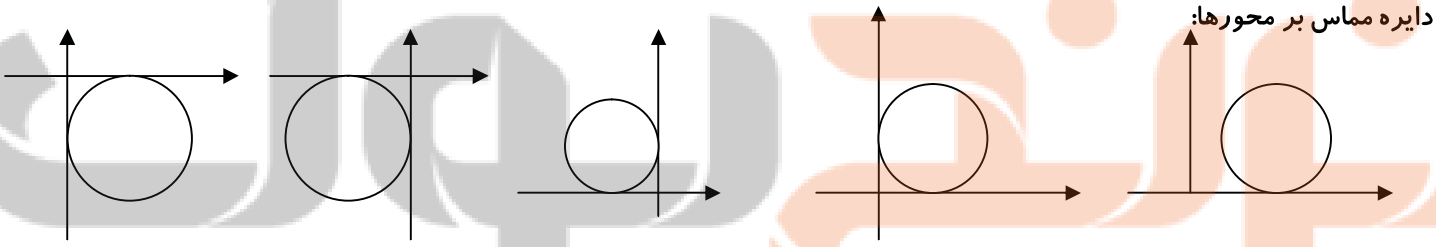
مثال: مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ که از نقاط $(۴,۱)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد کدام است؟

۱. $(۱,۳)$ ۲. $(-۱,۳)$ ۳. $(۰,۴)$ ۴. $(۰,-۴)$

مثال: معادله دایره‌ای که طول مرکز آن ۲ باشد و بر دو خط $۲x+۲y=۶$ و $x+y=۱$ مماس است.

مثال: معادله دایره‌ای به شعاع $۳\sqrt{۲}$ را بنویسید که بر نیمساز ربع اول و دوم مماس است.

دایره مماس بر محورها:



www.niazsara.ir

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ که بر محور xها مماس است، کدام است؟

۱. $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$ ۲. $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$

۳. $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴$ ۴. $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$

مثال: دو دایره از نقطه $(۲,۱)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند. شعاع این دایره‌ها کدام است؟

بررسی وضعیت خط و دایره:

مثال: وضعیت خط $۳x+۴y+۳=۰$ و دایره $x^۲+y^۲-۲x-۷=۰$ بررسی کنید.

مثال: دایره‌ای روی خط $x-۲y=۰$ پاره خطی به طول ۴ جدا می‌کند و مرکز آن نقطه $(۱,-۲)$ است. کدام یک از نقاط زیر روی این دایره است؟

۱. $(-۱,۱)$ ۲. $(۱,-۱)$ ۳. $(-۱,-۱)$ ۴. $(۱,۱)$

مثال: بیشترین فاصله یک نقطه از دایره $(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱$ تا خط $۳x+y=۸$ چقدر است؟

۱. $۱+\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۲. $۲+\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۳. $۲-\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۴. $۱-\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

چند تمرین کتاب صفحه ۴۶

۱. معادله دایره‌ای را بنویسید که:

الف. خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

ب. از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.

۲. حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۳. وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$، $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

۴. وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف. $x^۲+y^۲=۴$, $x^۲+y^۲-۲x=۴$

ب. $x^۲+(y-۱)^۲=۱$, $(x-۱)^۲+y^۲=۱$

ج. $x^۲+y^۲=۱$, $x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

د. $x^۲+y^۲=۱$, $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

www.niazisara.ir

۵. معادله دایره محیطی مثلث ABC با رئوس $A(-۱,-۱)$، $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در راس B به دست آورید.

چند تست دایره:

۱. معادله دایره‌ای که دو نقطه $A(\ ,-\ )$ و $B(\ ,\ )$ دو سر قطری از آن باشند، کدام است؟

۱. $x\ +y\ -\ x-y+\ =$ ۲. $x\ +y\ -\ x-y+\ =$ ۱

۳. $x\ +y\ -\ x-y-\ =$ ۴. $x\ +y\ -\ x-y-\ =$

۲. سطح دایره $(\ x+\ )+(\ y-\ )=$ در کدام نواحی مختصات قرار دارد؟

۱. فقط دوم ۲. اول، دوم و سوم ۳. اول و دوم ۴. هر چهار ربع ۳

۳. اگر نقطه $(\ ,\ )$ مرکز دایره $x\ +y\ -ax+\ by=$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱. صفر ۲. -۲ ۳. ۲ ۴. ۴ ۱

۴. فاصله جمیع نقاط واقع بر منحنی $x\ +y\ -mx+ny=k$ از نقطه $(-\ ,\ )$ برابر $\sqrt{\ }$ است، مقدار $m-n+k$ چه قدر است؟

۱. -۱۴ ۲. -۶ ۳. ۶ ۴. ۱۴ ۳

۵. شعاع دایره $(m-\ n)x\ +(\ m-n)y\ --mx-\ ny=$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴

۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادله $x\ +(a\ -\ )y\ +\ y+a=$ یک دایره است؟

۱. $\{-\ \}$ ۲. $\{\ \}$ ۳. $\{-\ ,\ \}$ ۴. ϕ ۱

۷. دسته خطوط به معادلات $(m+\ )y+(m+\ )x+\ =$ قطرهای یک دایره اند. اگر این دایره از نقطه $(\ ,\ )$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

۱. ۴ ۲. ۵ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۸. دایره $a(x\ +y\ -\ x)+b(x\ +y\ -\ y)=$ از نقطه $(\ ,-\ )$ می گذرد، شعاع دایره کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۳. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۲

۹. نقطه $(a,\ a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,-\ )$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱. ۳ ۲. ۴ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۱

۱۰. شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y=\ x-$ باشد کدام است؟

www.niazsara.ir

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۳

۱۱. معادله قطری از دایره ی $x+y-x+y=$ که موازی محور y ها ست، کدام است؟

۱. $x=-$ ۲. $x=-$ ۳. $x=$ ۴. $x=$ ۴

۱۲. معادله دایره ای که مرکز آن نقطه $(-,-)$ و $(\ ,\ )$ یک نقطه از آن باشد، کدام است؟

۱. $x+y-x-y-=$ ۲. $x+y+x+y-=$ ۲

۳. $x+y+x+y+=$ ۴. $x+y+x+y-=$

۱۳. اگر دایره $x+y-x+y-=$ محور x ها را در نقاط A و B قطع کند، آن گاه طول پاره خط AB کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۱۴. دایره ای مرکزش روی محور x ها قرار دارد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع می کند، معادله دایره کدام است؟ ۲

۱. $(x-\ )+y=$ ۲. $(x-\ )+y=$ ۳. $(x-\ )+y=$ ۴. $(x-\ )+y=$

۱۵. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x-y=$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. ۲ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. ۳ ۳

۱۶. شعاع دایره ای که از سه نقطه $P(\ ,\ )$، $Q(\ ,\ )$ و $R(\ ,\ )$ می گذرد، کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۱

۱۷. معادله دایره ای که از نقاط تلاقی خط $x+y=$ با محورهای مختصات و مبدا مختصات می گذرد، کدام است؟

۱. $(x-\ )+(y-\ )=$ ۲. $(x-\ )+(y-\ )=$ ۲

۳. $(x-\ )+(y-\ )=$ ۴. $(x-\ )+(y-\ )=$

۱۸. خط های $y=x+$ و $y=-x+$ محور x ها را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند و نقطه تلاقی آن ها را A می نامیم، شعاع دایره ای که از سه نقطه‌ی A و B و C می گذرد، کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۴/۵ ۳. ۳ ۴. ۳/۵ ۳

۱۹. از نقطه $A(-\ ,\ )$ دو مماس AB و AC بر دایره $x+y-x+y+=$ رسم شده است. معادله دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

۱. $x+y+x+y-=$ ۲. $x+y-x-y+=$ ۱

۳. $x+y+x-y-=$ ۴. $x+y-x+y-=$

۲۰. طول وتری که دایره به معادله $x+y-x=$ — از خط به معادله $y=x$ جدا می کند، کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵ ۳

۲۱. خط $my+x-=$ دایره ی $x-x+y-=$ را در دو نقطه قطع می کند، فاصله این دو نقطه چقدر است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۱ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۲۲. خط $y=x+$ دایره $x+y-x-y=$ را در دو نقطه ی A و B قطع می کند، فاصله A و B از هم چقدر است؟

www.niazisara.ir

۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۱۰ ۴. ۱۲ ۲

۲۳. مرکز دایره ای به شعاع ۳ که دو خط $x+y-=$ و $x+y+=$ را قطع می کند و از هر یک وتری به طول ۴ جدا می کند کدام است؟

۱. $(\ ,-\ )$ ۲. $(-\ ,\ )$ ۳. $(\ ,\ )$ ۴. $(\ ,\ )$ ۱

۲۴. مساحت دایره ای که از دو خط $x-y=$ و $x-y=$ وترهای به طول ۱۴ جدا کند کدام است؟

۱. π ۲. π ۳. π ۴. π ۳

۲۵. خط $y=x+$ دایره $=-x-+y+x$ را در دو نقطه ی A و B قطع می کند، طول نقطه وسط پاره خط AB کدام است؟

۱. $-$ ۲. $-$ ۳. $--$ ۴. $--$ ۳

۲۶. شعاع دایره ای که از نقاط $A(\ ,\ )$ و $B(-\ ,\ )$ می گذرد و فاصله مرکز آن از خط شامل AB برابر $\sqrt{\ }$ است، کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. ۳ ۲

۲۷. به ازای کدام مقادیر a، خط $x+y+a=$ دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ را در دو نقطه متمایز قطع می کند؟

۱. $-<a<$ ۲. $a>$ ۳. $a<$ ۴. $-<a<$ ۱

۲۸. خط $y=mx$ دایره $=+y-x+y+x$ را در نقاط A و B قطع می کند و $AB=\sqrt{\ }$ است. مقدار m کدام است؟

۱. ۳ ۲. $--$ ۳. $-$ ۴. ۱ ۳

۲۸. اندازه مماسی که از نقطه $(-\ ,\ )$ بر دایره $x+y+x+y=$ رسم شود، کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۵ ۳. ۶ ۴. ۷ ۲

۲۹. از نقطه $(\ ,\ )$ دو مماس بردایره $x+y=$ رسم می کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند، مختصات A و B کدام است؟

۱. $(\ ,\pm\sqrt{\ })$ ۲. $(\sqrt{\ },\pm\ )$ ۳. $(\pm\sqrt{\ },\ )$ ۴. $(\pm\ ,\sqrt{\ })$ ۱

۳۰. خط D در نقطه $T(\ ,\ )$ بردایره ی $x+y-=$ مماس است. معادله خط D کدام است؟

۱. $y+x-=$ ۲. $y+x+=$ ۳. $y+x-=$ ۴. $y-x-=$ ۳

۳۱. از نقطه $M(\ ,\ )$ می توان دو مماس بردایره $x+y=$ رسم کرد. مختصات یکی از نقاط تماس کدام است؟

۱. $(\ ,\ )$ ۲. $(\ ,-\ )$ ۳. $(\ ,-\ )$ ۴. $(\ ,\ )$ ۴

۳۲. شیب خطی که از نقطه $A(-\ ,-\ )$ بگذرد و بر دایره $x+y+x-y-=$ مماس باشد، کدام است؟

۱. $-,--$ ۲. $--,--$ ۳. $\overline{\ \ \ \ },-$ ۴. $-,-$ ۱

۳۳. اگر خط $y=$ بردایره $x+y-x+y+n=$ مماس باشد، آن گاه n کدام است؟

۱. -۵ ۲. -۱ ۳. صفر ۴. ۵ ۱

۳۴. معادله خط قائم بردایره $x+y-x+y-=$ که موازی خط $y=x+$ است، کدام است؟

۱. $x+y=$ ۲. $x+y-=$ ۳. $x+y-=$ ۴. $x+y+=$ ۴

www.niazsara.ir

۳۵. تمام خطوطی که با دایره $x+y-x+y=$ زاویه $^\circ$ می سازند، از نقطه ثابت A می گذرند. مختصات A کدام است؟

۱. $(\ ,-\ )$ ۲. $(\ ,\ -)$ ۳. $(-\ ,\ )$ ۴. $(-\ ,\ -)$

۳۶. دایره ای بر خط به معادله $y=x-$ مماس است و تمام قائم های بردایره از نقطه $(\ ,\ -)$ می گذرند. بیش ترین فاصله نقاط این دایره از محور x ها کدام است؟

۱. $+\sqrt{\ }$ ۲. $+\sqrt{\ }$ ۳. ۵ ۴. ۶

۳۷. به ازای کدام مقدار a، زاویه بین خط مماس بردایره $x+y-x+y=$ و خط به معادله $x+y=a$ در نقطه تلاقی آن ها، $^\circ$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

۳۸. اگر دایره $x+y+mx-y=$ در مبدا مختصات برنیم ساز ناحیه اول و سوم مماس باشد، آن گاه شعاع دایره چقدر است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. ۲ ۴. $\sqrt{\ }$

۳۹. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و بر محور x ها مماس است، این دایره محور y ها را در نقطه ای دیگر با کدام عرض قطع می کند؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸

۴۰. شعاع کوچکترین دایره ای که از نقطه $(\sqrt{\ },\sqrt{\ })$ می گذرد و بر خط $y=x$ مماس باشد، کدام است؟

۱. ۴ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. ۲ ۴. $\sqrt{\ }$

۴۱. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ -)$ گذشته و بر خط به معادله $y=$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱. $-$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $-$ ۴.

۴۲. معادله دایره ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+$ مماس باشد کدام است؟

۱. $x+y+x-y=$ ۲. $x+y+x-y=$

۳. $x+y-x+y=$ ۴. $x+y+x-y=$

۴۳. دایره ای برمحور x ها و خط $x+y=$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. ۲ ۴. ۲/۵

۴۴. نقطه $M(\sqrt{\ },b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط $y=x$ و $y=$ مماس است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. ۲ ۴. ۲/۵

۴۵. مرکز دایره ای بر نیم ساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(\ ,\ )$ گذشته و بر خط به معادله $y=x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$

۴۶. اگر دایره $x+ax+y-y=b$ در ربع اول بر هر دو محور مماس باشد، $a+b$ چقدر است؟

۱. -۸ ۲. -۴ ۳. -۱۶ ۴. -۱۲

۴۷. دو دایره از نقطه $(\ ,\ )$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس اند، شعاع دایره ها کدام است؟

www.niazsara.ir

۱. ۱ و ۴ ۲. ۱ و ۵ ۳. ۲ و ۴ ۴. ۵ و ۲ ۲

۴۸. دو دایره گذرا از نقطه $(\ ,-\ )$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱. ۱۴ ۲. ۱۵ ۳. ۱۷ ۴. ۱۹ ۳

۴۹. اگر (x,y) نقطه ای روی نمودار به معادله $x+y-x-y-=$ باشد، آن گاه کم ترین مقدار عبارت $\sqrt{(x+\ )+(y+\ )}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۲

۵۰. فاصله نزدیکترین نقطه دایره به معادله $x+y-x+y=$ از خط به معادله $x+y=$ کدام است؟

۱. − ۲. ۱ ۳. — ۴. ۲ ۲

۵۱. همه خط های $y-mx-m+=$ دایره به معادله $x+y+x+y-=$ را در دو نقطه قطع می کنند. کوتاهترین فاصله این نقاط کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۴

۵۲. طول وتری از دایره $x+y=$ که نقطه $A(\ ,\ )$ وسط آن باشد، کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۸ ۳. ۴ ۴. ۱۰ ۲

۵۳. معادله وتر مشترک دو دایره $x+y=$ و $x+y+x+y=$ کدام خط است؟

۱. $x+y-=$ ۲. $x+y+=$ ۳. $y-x+=$ ۴. $y-x-=$ ۲

۵۴. طول وتر مشترک دو دایره $x+y-=$ و $x+y-x-y+=$ کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۴

۵۵. حدود m برای آن که نقطه $A(m,m-)$ خارج دایره $x+y=$ باشد، کدام است؟

۱. $-<m<$ ۲. $m>-$ ۳. $m<$ ۴. $m<-$ یا $m>$ ۴

۵۶. به ازای چند مقدار صحیح k، نقطه $A(-\ ,\ )$ داخل دایره $x+y+x-y+k=$ قرار گیرد؟

۱. ۲۰ ۲. ۱۱ ۳. ۱۲ ۴. بی شمار ۴

۵۷. به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x+y+x-y=$ و $x+y-y+b=$ مماس داخل اند؟

۱. -۵ ۲. -۴ ۳. -۳ ۴. -۲ ۲

۵۸. دو دایره C و C' در نقطه $(\ ,\ )$ مماس برون هستند. اگر قائم های بر دایره C همواره از نقطه $(\ ,-\ )$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{\ }$ کدام است؟

۱. $(-\ ,\ )$ ۲. $(-\ ,\ )$ ۳. $(\ ,-\ )$ ۴. $(\ ,-\ )$ ۱

۵۹. دایره C بردایره به معادله $x+y-x+y=$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(\ ,\ )$ می گذرد. شعاع دایره C کدام است؟

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۸ ۴. ۹ ۲

۶۰. دو دایره به معادله های $x+y-x+y=$ و $x+y-x+y+=$، نسبت به یکدیگر چگونه اند؟

www.niazsara.ir

۱. مماس خارجی ۲. مماس داخلی ۳. متقاطع در دو نقطه ۴. متخارج

۲

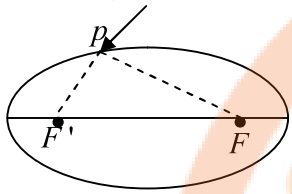
ترنج بوک
تلاشی در مسیر موفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت

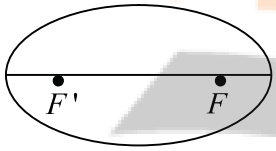
بیضی

یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را در دو نقطه F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l > FF'$، یک مداد را داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

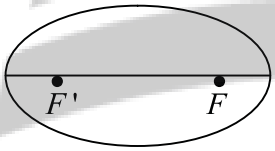


۱. یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه ثابت F و F' برابر چیست؟

۲. یک نقطه دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' کوچکتر از l است.



۳. یک نقطه دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' بزرگتر از l است.



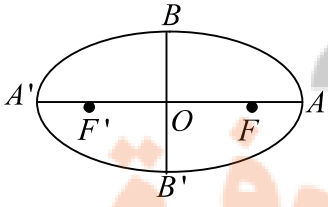
از مراحل ۱ تا ۳ متوجه چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

با توجه به مراحل بالا تعریف بیضی به صورت زیر مشخص می‌شود.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت (کانون های بیضی) یک مقدار یکسان باشد.

دو نقطه ثابت را با نماد F و F' نمایش داده و کانون‌های بیضی و مقدار ثابت را $2a$ می‌نامیم. $MF + MF' = 2a$ (M روی بیضی)

در مورد بیضی موارد زیر را به خاطر بسپارید.



۱. F و F': کانون‌ها، A و A': رئوس کانونی، B و B' رئوس ناکانونی، O مرکز، FF': فاصله کانونی، AA': قطر بزرگ و BB' : قطر کوچک

۲. $FF' = 2c$ ، $AA' = 2a$ و $BB' = 2b$

۳. $AO = A'O = a$ ، $BO = B'O = b$ ، $FO = F'O = c$ ، $AF = A'F' = a - c$ و $AF' = A'F = a + c$

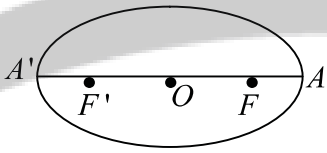
۴. $a > b, c$ بنابراین $a^2 = b^2 + c^2$

www.niazisara.ir

نمایش درستی بعضی موارد ذکر شده:

۱. در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط A و A' قرار می‌گیرد را در نظر بگیرید.

الف. نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید که $OA' = OA = a$ و لذا طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



ب. نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲. در رسم بیضی در وضعیتی را که مداد در نقطه B و B' قرار دارد در نظر بگیرید:

الف. نشان دهید $a^2 = b^2 + c^2$.

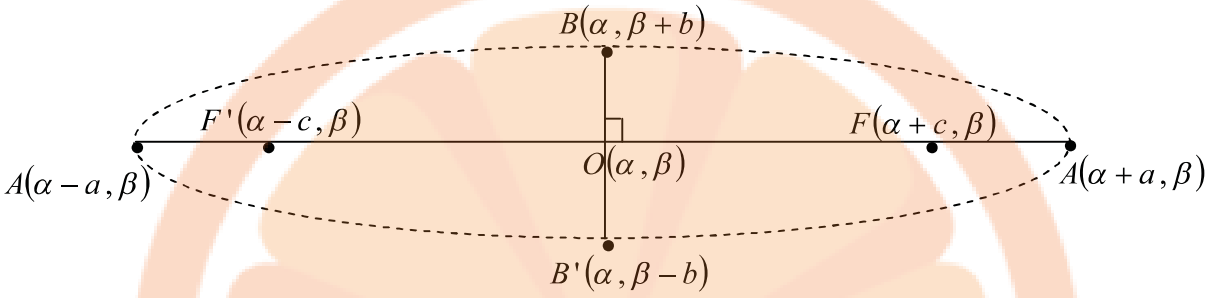
ب. نتیجه بگیرید که $OB' = OB = b$ و لذا قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

توجه: اگر قطر بزرگ بیضی به صورت افقی باشد بیضی را افقی و اگر به صورت عمودی باشد بیضی را قائم می‌نامیم.

تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

نگاه مختصاتی به بیضی:

در بیضی افقی داریم:



به همین ترتیب در بیضی قائم داریم: (شما رسم کنید)

مثال: در یک بیضی افقی با مرکز $O(۱,۲)$ و $a=۳$ و $b=۲$ موارد زیر را مشخص کنید.

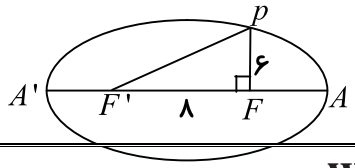
الف. مختصات کانون‌ها، رئوس کانونی(رئوس اصلی) و رئوس ناکانونی(رئوس فرعی)

ب. فاصله کانونی، قطر بزرگ(قطر اصلی)، قطر کوچک (قطر فرعی)

مثال: فاصله یک راس ناکانونی بیضی از کانون و راس کانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{۵}$ است. بیشترین فاصله نقطه $M(x,y)$ روی بیضی از یکی از کانون‌های بیضی کدام است؟

۱. $۱+\sqrt{۳}$ ۲. $۲+\sqrt{۳}$ ۳. $۱+۲\sqrt{۳}$ ۴. $۲+۲\sqrt{۳}$

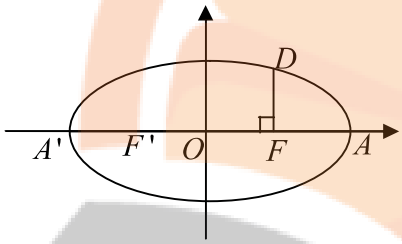
مثال: در بیضی مقابل نسبت طول قطر کوچک به قطر بزرگ کدام است؟



www.niazsara.ir

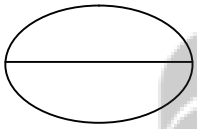
۱. $\frac{۳}{۴}$ ۲. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{۱}{۲}$

مثال: در یک بیضی، قطرهای بزرگ و کوچک بر محورهای مختصات منطبق هستند. اگر F کانون بیضی و $OF = FA = ۲$ باشد آنگاه مجموع مختصات نقطه D کدام است؟



۱. ۵ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

نکته: خطی از کانون‌های بیضی (F یا F')، عمود بر محور کانونی (FF') رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، پاره‌خط MN را وتر کانونی بیضی می‌گویند که طول آن برابر با $\frac{۲b^۲}{a}$ است.(بعداً ثابت کنید)



مثال: طول وتر کانونی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $F(۲,۴)$ و $F'(۲,۲)$ برابر ۸ باشد، چقدر است؟

۱. $\frac{۶}{۵}$ ۲. $\frac{۴}{۳}$ ۳. $\frac{۵}{۲}$ ۴. $\frac{۷}{۲}$

خروج از مرکز بیضی

عدد $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند. چون در بیضی $a > c$ است، پس همواره $۰ < e < ۱$ است. اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود (به خط نزدیک می‌شود). اگر e به صفر نزدیک شود، بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

توجه: در حالتی که $e = ۱$ شود، بیضی تبدیل به یک پاره خط می‌شود (پاره‌خط FF') و اگر $e = ۰$ شود، بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

www.niazsara.ir

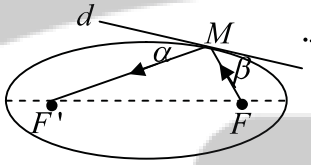
نکته: خروج از مرکز از رابطه $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$ نیز بدست می‌آید. (درستی رابطه را نشان دهید)

مثال: $F(۴,۲)$ و $F'(-۲,۲)$ کانون‌های یک بیضی هستند که $A(۶,۲)$ یک راس کانونی آن است. خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.

مثال: $B\left(۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right)$ و $B'\left(۱-\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right)$ رئوس ناکانونی بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد، مجموع فواصل نقطه p روی بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

۱. ۶ ۲. $۲\sqrt{۳}$ ۳. ۳ ۴. $\sqrt{۶}$

ویژگی بازتابندگی بیضی:



اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد، نتایج زیر به دست می‌آید.

۱. اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی بتابد، بازتاب آن از کانون دیگر می‌گذرد.

۲. زاویه‌های تابش و بازتابش با هم برابرند؛ یعنی $\alpha=\beta$ است.

۳. اگر مجموع فواصل نقاط خط d از دو کانون را به دست آوریم، مجموع فواصل نقطه M از دو کانون، کمترین مقدار را دارد.(هرون)

مثال: درستی نتایج بالا را بررسی کنید.

تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazsara.ir

مثال: نقاط $B(۱,۲+۲\sqrt{۵})$ و $B'(۱,۲-۲\sqrt{۵})$ رئوس ناکانونی یک بیضی با بدنه داخلی آینه‌ای هستند که فاصله راس ناکانونی از کانون آن $۳\sqrt{۵}$ است. از یک منبع نور که روی کانون سمت راست بیضی قرار دارد پرتوی به نقطه $(۴,۶)$ روی بیضی می‌تابد. شیب پرتو باز تابش چقدر است؟

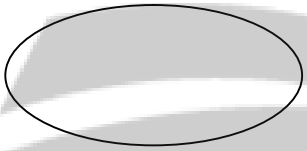
۱. ۰/۵ ۲. ۱ ۳. ۱/۵ ۴. ۲

چند تمرین کتاب صفحه ۵۷

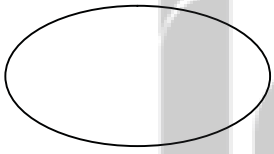
۱. دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است.

اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید:

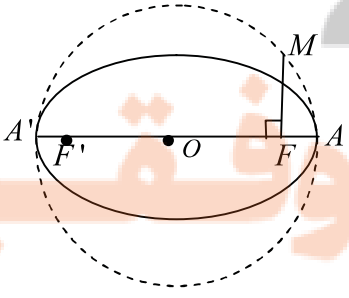
الف. در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.



ب. در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

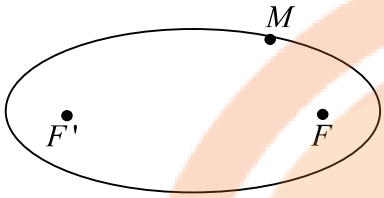


۲. قطر دایره، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را ددر نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

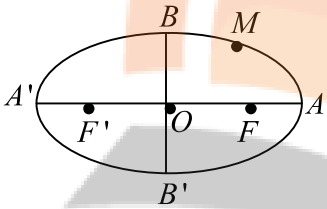


www.niazsara.ir

۳. در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بربیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.



۴. نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

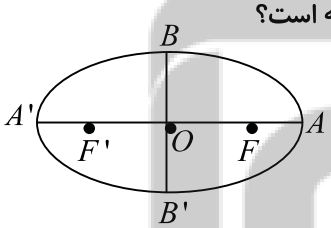


الف. نشان دهید $OM = OF = OF'$.

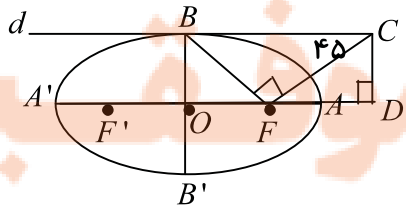
ب. نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج. طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

۵. در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶. دربیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را بدست آورید.



www.niazisara.ir

۷. فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

چند تست بیضی

۱. چند نقطه روی خط $y=x+1$ یافت می شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $A(0,1)$ و $B(1,2)$ برابر ۲ باشد؟

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. بی شمار ۳

۲. مختصات یک کانون بیضی که بر چهار خط $x=2$ ، $x=-4$ ، $y=5$ و $y=1$ مماس باشد، کدام است؟

۱. $(-1,3+\sqrt{5})$ ۲. $(-1,3-\sqrt{5})$ ۳. $(-1+\sqrt{5},3)$ ۴. $(-1+\sqrt{5},-3)$ ۳

۳. اگر $B\left(\frac{1}{2},-3\right)$ و $F\left(-\frac{5}{2},1\right)$ به ترتیب یک راس و یک کانون بیضی باشند، فاصله دورترین نقطه محیط بیضی از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{22}}{4}$ ۲. ۴ ۳. ۵ ۴. $\sqrt{34}$ ۳

۴. اگر نقاط $(0,-\sqrt{10})$ و $(0,\sqrt{5})$ راس های یک بیضی باشند، کدام گزینه مختصات یکی از کانونهای بیضی است؟

۱. $\left(0,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ۲. $(\sqrt{15},0)$ ۳. $(0,-\sqrt{5})$ ۴. $(0,-\sqrt{15})$ ۳

۵. بیضی به مرکز $(-2,3)$ بر محور y ها و خط $y=7$ مماس است. مساحت مثلثی که رئوس آن کانون های بیضی و یکی از رئوس ناکانونی است، چقدر است؟

۱. $2\sqrt{3}$ ۲. ۴ ۳. $4\sqrt{3}$ ۴. ۸ ۳

۶. $A\left(1,-1-2\sqrt{2}\right)$ و $B(3,-1)$ رئوس بیضی هستند. بیشترین مساحت از بین چهار ضلعی هایی که دو راس آن روی بیضی و دو راس دیگر آن کانون های بیضی باشند، چقدر است؟

۱. $8\sqrt{2}$ ۲. ۸ ۳. $4\sqrt{2}$ ۴. ۴ ۲

۷. در یک بیضی نقاط $F'(2,2)$ و $F(2,4)$ کانون های آن و فاصله راس کانونی بیضی از دورترین کانون ۴ است. مختصات یکی از رئوس ناکانونی بیضی کدام است؟

۱. $(2-\sqrt{2},3)$ ۲. $(2+\sqrt{2},2)$ ۳. $(2+\sqrt{2},3)$ ۴. $(2+2\sqrt{2},3)$ ۴

۸. در یک بیضی اگر فاصله یک کانون از دو راس کانونی ۱ و ۹ باشد، طول قطر بزرگ چند برابر طول قطر کوچک بیضی است؟

www.niazsara.ir

۱. $\frac{۵}{۴}$ ۲. $\frac{۴}{۳}$ ۳. $\frac{۵}{۳}$ ۴. ۳ ۳

۹. $M(-۲,-۳)$ و $N(-۴,۰)$ رئوس یک بیضی هستند، به ازای چه مقادیری از R دایره $(x+۲)^۲+y^۲=R^۲$ و بیضی، چهار نقطه مشترک دارند؟

۱. $\frac{۱}{۳}<R<\frac{۱}{۲}$ ۲. $\frac{۱}{۶}<R<\frac{۱}{۴}$ ۳. $۲<R<۳$ ۴. $۴<R<۶$ ۳

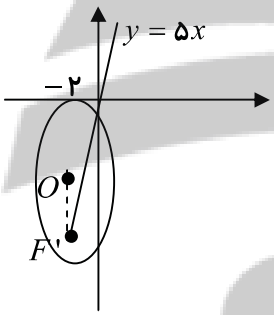
۱۰. طول قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی ۶ و۴ است. خطی که از کانون، عمود بر محور کانونی بیضی رسم شودبیضی را در نقاط M و N قطع می کند. طول MN چقدر است؟

۱. $\sqrt{۱۳}$ ۲. $\sqrt{۵}+۱$ ۳. ۳ ۴. $\frac{۸}{۳}$ ۴

۱۱. نقطه M محل برخورد بیضی با خطی است که از کانون، عمود بر محور کانونی رسم شده است. اگر مجموع فواصل M از دو کانون بیضی و فاصله دو کانون بیضی به ترتیب ۴ و ۲ باشند، فاصله M از دورترین کانون چقدر است؟

۱. ۱/۵ ۲. $\sqrt{۵}$ ۳. $۳\sqrt{۲}-۲$ ۴. ۲/۵ ۴

۱۲. O و F' به ترتیب مرکز و کانون بیضی شکل مقابل هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟



۱. $\frac{۵}{۹}$ ۲. $\frac{۱۰}{۳}$ ۳. $\frac{۱۰}{۹}$ ۴. $\frac{۲۰}{۳}$ ۴

۱۳. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲. $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۳. $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴. $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۱

۱۴. مرکز یک بیضی و مرکز دایره $(x-۵)^۲+(y+۳)^۲=۹$ یکی است. اگر قطرهای بیضی به موازات محورهای مختصات و بیضی بر محورهای مختصات مماس باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{۴}{۵}$ ۲. $\frac{۳}{۵}$ ۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{۳}{۴}$ ۱

۱۵. خروج از مرکز بیضی که دو راس آن $A(۴,۰)$ و $B(۱,۵)$ باشند کدام است؟

۱. $\frac{۴}{۵}$ ۲. $\frac{۳}{۵}$ ۳. $\frac{۱}{۵}$ ۴. $\frac{۲}{۳}$ ۱

۱۶. $F(۲,۵)$ و $F'(۲,-۳)$ کانون های یک بیضی هستند که از نقطه $(-۶,۱)$ می گذرد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲. $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳. $\frac{\sqrt{۵}}{۲۰}$ ۴. $\frac{۱}{۲}$ ۱

۱۷. در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقاط بیضی ۳ برابر فاصله همان کانون از نزدیک ترین نقاط آن بیضی است. طول قطر کوچک چند برابر فاصله کانونی بیضی است؟

www.riazisara.ir

۱. $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۲. $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. $۲\sqrt{۲}$ ۳

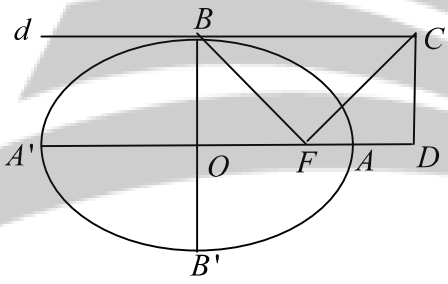
۱۸. در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. از دو راس ناکانونی به یک کانون بیضی وصل می کنیم، زاویه بین دو پاره خط چقدر است؟

۱. ۳۰ درجه ۲. ۶۰ درجه ۳. ۴۵ درجه ۴. $\cos^{-۱}\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲

۱۹. A و A' دو راس کانونی، B و B' رئوس ناکانونی و F و F' کانون های یک بیضی هستند، اگر نسبت مساحت چهار ضلعی $BFB'F'$ به مساحت چهار ضلعی $ABA'B'$ برابر $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، قطر بزرگ بیضی چند برابر قطر کوچک آن است؟

۱. $\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ۲. $\sqrt{۳}$ ۳. $\sqrt{۷}$ ۴. ۳ ۳

۲۰. در شکل مقابل AA' و BB' دو قطر بیضی هستند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم کنیم و در نقطه F عمود بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $BCF = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲. ۱ ۳. $\frac{۱}{۲}$ ۴. $\sqrt{۲}$ ۴

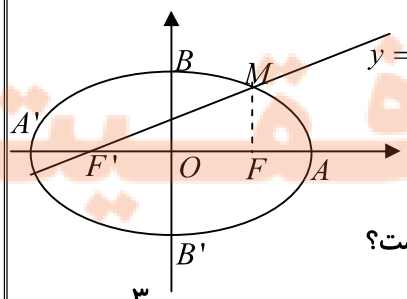
۲۱. در شکل مقابل AA' و BB' دو قطر بیضی هستند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم کنیم و در نقطه F عمود بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $\frac{FD}{FC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱. $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۲. $\frac{۱}{۲}$ ۳. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲

۲۲. با فرض این که $A(۵,۲)$ و $A'(-۱,۲)$ رئوس کانونی مسیر حرکت یک سیاره به دور خورشید باشند و فاصله یک راس کانونی از یک راس ناکانونی برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد، کدام گزینه می تواند مختصات نقطه گرفتن خورشید را مشخص کند؟

۱. $(۲,۲)$ ۲. $(۲,۴)$ ۳. $(۲,۲+\sqrt{۱۳})$ ۴. $(۲-\sqrt{۵},۲)$ ۴

۲۳. قطر کوچک بیضی مقابل، کدام است؟



۱. $۲\sqrt{۳}$ ۲. $۴\sqrt{۳}$ ۳. $۵\sqrt{۳}$ ۴. ۸ ۲

۲۴. در مثلث ABC اندازه ضلع مقابل $BC = ۲\sqrt{۳}$ و $AB + AC = ۴$، بیشترین مساحت مثلث کدام است؟

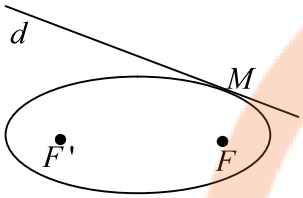
۱. ۲ ۲. ۳ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. $\sqrt{۲}$ ۳

www.niazsara.ir

۲۵. اندازه قطر کوچک بیضی ۴ و فاصله کانونی آن $۴\sqrt{۳}$ است. خطی از کانون F می گذرد و بیضی را در دو نقطه M و N قطع می کند. اگر F' کانون دیگر بیضی باشد، محیط مثلث MNF' کدام است؟

۱. ۸ ۲. ۱۶ ۳. ۴ ۴. ۱۸ ۲

۲۶. در بیضی مقابل $FF'=۲\sqrt{۶}$ و طول قطر کوچک آن برابر $۲\sqrt{۳}$ است. خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. از نقطه F' خطی موازی MF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. حاصل $NF'+MF$ کدام است؟



۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۶ ۴. ۹ ۳

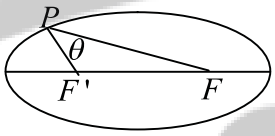
۲۷. فاصله کانونی یک بیضی $FF'=۲\sqrt{۶}$ و طول قطر بزرگ آن برابر $AA'=۴\sqrt{۲}$ است. دایره ای به قطر، قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم. از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا بیضی را در N و دایره را در M بالای AA' قطع کند. طول پاره خط MN کدام است؟

۱. $\frac{۱}{۲}$ ۲. $\frac{۲}{۳}$ ۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴

۲۸. نقطه $M(x,y)$ در معادله $\sqrt{(x-۳)^۲+(y+۱)^۲}+\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}=۱۰$ صدق می کند. بیش ترین فاصله نقاط این نمودار از یکدیگر کدام است؟

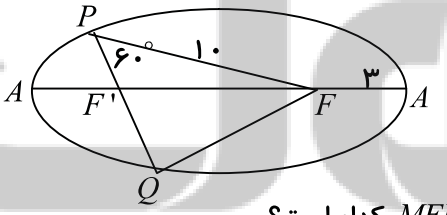
۱. ۱۰ ۲. ۱۲ ۳. ۸ ۴. ۶ ۱

۲۹. قطر کوچک بیضی مقابل، ۴ و فاصله کانونی آن $۲\sqrt{۵}$ است. اگر P نقطه ای روی بیضی باشد به طوری که $PF-PF'=۴$، آن گاه $\cos\theta$ کدام است؟



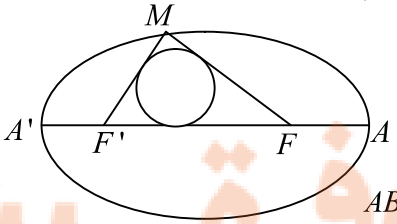
۱. $\frac{۱}{۵}$ ۲. $\frac{۲}{۵}$ ۳. $\frac{۳}{۵}$ ۴. $\frac{۴}{۵}$ ۳

۳۰. در بیضی به کانون های F و F' مطابق شکل نقاط P و Q روی آن چنان هستند که $PF=۱۰$ و $\hat{P}=۶۰^\circ$. اگر $AF=۳$ باشد آن گاه محیط مثلث PQF کدام است؟



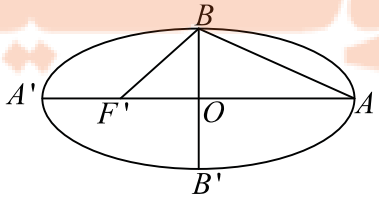
۱. $۲۹\frac{۱}{۳}$ ۲. $۲۹\frac{۲}{۳}$ ۳. $۲۹\frac{۱}{۲}$ ۴. $۲۹\frac{۳}{۴}$ ۱

۳۱. طول قطرهای بیضی مقابل ۱۰ و ۸ است. شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه MFF' کدام است؟



۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۲

۳۲. در بیضی مقابل AA' و BB' قطر های بزرگ و کوچک و F' کانون بیضی است. اگر $ABF'=۹۰^\circ$ باشد آن گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟

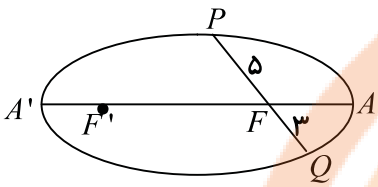


۱. $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۲. $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۳

www.niazisara.ir

۳. $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۳. در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $AA'=۱۲$ است. طول فاصله کانونی کدام است؟



۱

۱. $۳\sqrt{۶}$ ۲. $۳\sqrt{۳}$

۳. $۶\sqrt{۲}$ ۴. ۸

www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

سهمی

روش رسم:

تعریف سهمی: سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه $A(۰,۱)$ و خط $x=۲$ به یک فاصله باشند، کدام است؟

۱. $x^۲-۲x+۴y=۳$ ۲. $y^۲+۲y-۴x=۳$ ۳. $y^۲-۲y+۴x=۳$ ۴. $y^۲=۴(x-۱)$

ویژگی‌های سهمی

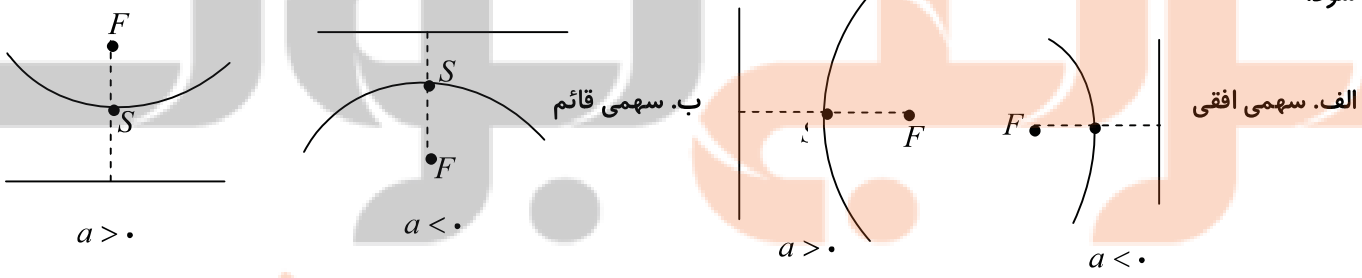
۱. سهمی سه جزء اصلی دارد: F (کانون سهمی)، S (راس سهمی) و d (خط هادی سهمی)

۲. فاصله راس سهمی(S) تا کانون (F) برابر با فاصله راس سهمی تا خط هادی (d) است؛ یعنی راس سهمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

۳. فاصله راس سهمی تا کانون را فاصله کانونی می‌نامیم و با $|a|$ نمایش می‌دهیم. a را با نام پارمتر سهمی نیز صدا می‌زنند.

۴. کانون همواره در دهانه سهمی قرار دارد. خط هادی همواره پشت سهمی است.

۵. اگر $a>۰$ باشد، دهانه سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات باز می‌شود و اگر $a<۰$ باشد، دهانه سهمی در جهت منفی محورها بازمی‌شود.



۶. اگر سهمی، افقی باشد، خط هادی، موازی با محور y ها است (معادله خط هادی به صورت $x=k$ است) و اگر سهمی، قائم باشد، خط هادی، موازی با محور x ها است. (معادله خط هادی به صورت $y=k$ است)

۷. امتداد SF، محورتقارن (محور کانونی) سهمی است که برخط هادی عود است.

www.niazsara.ir

مثال: $S(۱,۲)$ و $F(۱,-۱)$ به ترتیب راس و کانون یک سهمی هستند. معادله خط هادی سهمی کدام است؟

۱. $y=-۴$ ۲. $y=-۱$ ۳. $y=۴$ ۴. $y=۵$

معادلات سهمی

الف. معادلات کلاسیک (استاندارد - متعارف) سهمی

۱. معادله سهمی افقی با راس $S(\alpha,\beta)$ و پارامتر سهمی a به صورت $(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$ می باشد. اگر $a>۰$ دهانه سهمی رو به راست و اگر $a<۰$ سهمی رو به چپ باز می‌شود. در این سهمی کانون $F(\alpha+a,\beta)$ و خط هادی به صورت $x=\alpha-a$ می‌باشد. در حالت خاص که مبدا مختصات راس سهمی باشد؛ معادله سهمی به شکل $y^۲=۴ax$ نوشته می‌شود.

۲. معادله سهمی قائم با راس $S(\alpha,\beta)$ و پارامتر سهمی a به صورت $(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$ می باشد. اگر $a>۰$ دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a<۰$ سهمی رو به پایین باز می‌شود. در این سهمی کانون $F(\alpha,\beta+a)$ و خط هادی به صورت $y=\beta-a$ می‌باشد. در حالت خاص که مبدا مختصات راس سهمی باشد؛ معادله سهمی به شکل $x^۲=۴ay$ نوشته می‌شود.

مثال: در سهمی $(y-۱)^۲=۸(x-۲)$ نوع سهمی و مختصات راس و کانون و معادله خط هادی را بیابید.

ب. معادلات گسترده سهمی:

اگر معادله استاندارد سهمی را بسط دهیم معادله گسترده آن حاصل می شود.

اگر معادله گسترده یک سهمی داده شده باشد، آن را به کمک مربع کامل کردن به صورت استاندارد نوشته و سپس اطلاعات لازم را از آن استخراج می‌کنیم

اگر سهمی افقی باشد معادله گسترده آن به صورت $Ay^۲+By+Cx+D=۰$ و اگر سهمی قائم باشد، معادله به صورت $Ax^۲+Bx+Cy+D=۰$ می‌باشد.

مثال: معادله یک سهمی به صورت $y=x^۲+۳x+۵$ داده شده است. کانون و خط هادی را مشخص کنید.

www.niazsara.ir

مثال: به ازای کدام مقدار b، طول نقطه F (کانون) سهمی $2y^2+4y-x+b=0$ برابر $\frac{17}{8}$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

مثال: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را بنویسید که فاصله آن‌ها از نقطه $(4,0)$ برابر فاصله آن‌ها از خط $x=2$ باشد.

مثال: معادله سهمی که خط $x=-2$ هادی آن و محور y ها را در دو نقطه‌ی $A(0,3)$ و $B(0,-1)$ قطع می‌کند، کدام است؟

۱. $(y+1)^2=-4(x+1)$ ۲. $(y+1)^2=4(x-1)$ ۳. $(y-1)^2=4(x+1)$ ۴. $(y-1)^2=-4(x-1)$

مثال: معادله سهمی که بر محور x ها مماس و محور تقارن آن خط $x=1$ و سهمی از نقطه $A(0,-1)$ بگذرد کدام است؟

۱. $x^2-2x=-y-1$ ۲. $x^2-2x-y+1=0$ ۳. $2x^2-4x=y-1$ ۴. $x^2+2x-y-1=0$

نکته: در حالت گسترده سهمی همواره: $4a=-\frac{C}{A}=-\frac{\text{ضریب متغیر درجه اول}}{\text{ضریب متغیر درجه دوم}}$ **می‌باشد.**

مثال: فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $3y^2-6y-2x=0$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. $\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۳

www.niazsara.ir

مثال: دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x-y) = 0$ رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات کانون آن کدام است؟

۱. $(-1,-2)$ ۲. $(0,-2)$ ۳. $(0,-1)$ ۴. $(1,2)$

مثال: محور کانونی یک سهمی موازی یکی از محورهای مختصات است. اگر سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض ۱ و ۵ قطع کند و راس آن روی نیمساز ناحیه دوم باشد، سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

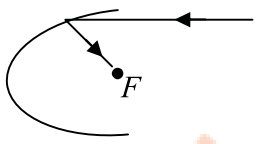
۱. $-\frac{۳۹}{۴}$ ۲. $-\frac{۱۵}{۴}$ ۳. $\frac{۱۵}{۴}$ ۴. $\frac{۳۹}{۴}$

نکته: وتری که از کانون سهمی، عمود بر محور کانونی(خط تقارن) سهمی رسم می‌شود و سهمی را در نقاط M و N قطع کند، وتر کانونی نام دارد، و طول آن برابر با $MN = ۴|a|$.

در واقع پارامتر سهمی، میزان باز و بسته شدن دهانه سهمی را تنظیم می‌کند.

ویژگی بازتابندگی آینه سهموی

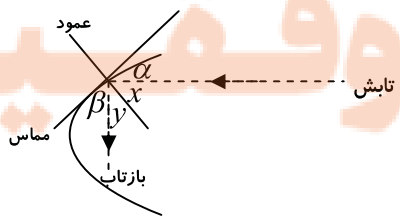
۱. اگر اشعه نوری موازی محور کانونی سهمی به آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد.



۲. اگر اشعه نوری از کانون برسهمی بتابد، موازی محور کانونی سهمی بازتاب می‌کند.

۳. اگر اشعه نوری به آینه سهمی بتابد، زاویه های تابش و بازتابش با هم برابرند.

یعنی $x = y$ و $\alpha = \beta$



www.niazsara.ir

مثال: یک پرتو نور به معادله $y = ۴$ به سهمی $y^۲ = ۱۶x$ می‌تابد. معادله بازتابش را بدست آورید.

انتقال محورها:

محورهای مختصات را به موازات خودشان از نقطه $O(۰,۰)$ به نقطه $O'(\alpha,\beta)$ انتقال می‌دهیم. اگر مختصات نقطه A در دستگاه xoy به صورت $A(x,y)$ و در دستگاه $XO'Y$ به صورت $A(X,Y)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x + ۰ = X + \alpha \\ y + ۰ = Y + \beta \end{cases}$$

مثال: اگر دستگاه مختصات را به نقطه $O'(۱,\pi)$ انتقال دهیم، معادله $y = \cos^{-۱}(x-۱)$ در دستگاه جدید کدام است؟

۱. $y = \pi - \cos^{-۱} x$ **۲.** $y = -\pi + \cos^{-۱} x$ **۳.** $y = \cos^{-۱} x$ **۴.** $y = \cos^{-۱}(-x)$

چند تمرین کتاب صفحه ۵۸

۱. سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۲. مختصات راس و کانون سهمی به معادله $y = ax^۲ + bx + c$ $(a \neq ۰)$ را به دست آورید.

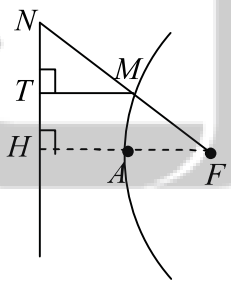
www.niazsara.ir

۳. معادله سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ راس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.

۴. سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

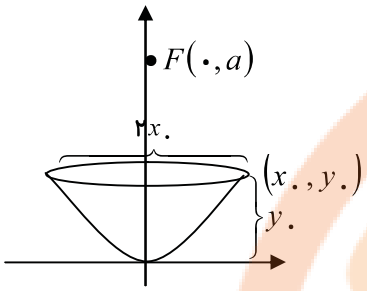
۵. سهمی p با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه کنید.

۶. در شکل سهمی با راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



www.niazsara.ir

۷. برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش معلم به دانش‌آموز گفت باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازه گودی(عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد و عدد حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این فرمول رابررسی کنید.



چند تست سهمی

۱. فاصله نقطه $A(2,3)$ روی سهمی با کانون $F(3,-1)$، از خط هادی چقدر است؟

۱) $\sqrt{17}$ ۲) $\sqrt{15}$ ۳) $\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{11}$ ۱

۲. سهمی به کانون $F(2,4)$ و خط هادی به معادله $x=-1$، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

۱) $\frac{17}{6}$ ۲) $\frac{19}{6}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$ ۲

۳. خط $y=1$ محور تقارن و خط $x=2$ خط هادی یک سهمی است. اگر این سهمی از $A(3,2)$ بگذرد، فاصله کانون آن تا مبدا چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{13}$ ۲

۴. اگر نقطه $S(-2,1)$ راس سهمی $x^2+ax-4by=a$ باشد، $a+2b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۸ ۲

۵. معادله مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از خط $x=-1$ و نقطه $A(-3,2)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟ ۳

۱) $(x+2)^2=4(y-2)$ ۲) $(y-2)^2=4(x+2)$ ۳) $(y-2)^2=-4(x+2)$ ۴) $(x+2)^2=-4(y-2)$

۶. فاصله کانون سهمی به معادله $2y^2+15=3(x+4y)$ از خط هادی سهمی کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$ ۱

۷. دو اشعه به موازات محور x ها، بر سهمی به معادله $y^2-2y+4x=11$ می تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $(2,1)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(3,1)$ ۴) $(4,1)$ ۱

۸. مختصات کانون سهمی که خط هادی آن موازی محور y ها بوده و نقطه $S(-1,0)$ راس آن بوده و از نقطه $(0,1)$ بگذرد، کدام است؟

www.nazisara.ir

۱. $\left(-\frac{۳}{۴},۰\right)$ ۲. $\left(-۱,\frac{۱}{۴}\right)$ ۳. $\left(\frac{-۵}{۴},۰\right)$ ۴. $\left(-۱,-\frac{۱}{۴}\right)$ ۱

۹. معادله خط هادی سهمی $y=\frac{۱}{۸}\left(۴+۴x-x^{۲}\right)$ کدام است؟

۱. $y=۳$ ۲. $y=-۱$ ۳. $y=-۳$ ۴. $y=۲$ ۱

۱۰. نقطه $S(۲,۱)$ راس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور yها است و از نقطه $(۰,۵)$ می گذرد. معادله خط هادی آن کدام است؟

۱. $y=\frac{۱}{۴}$ ۲. $y=\frac{۱}{۲}$ ۳. $y=\frac{۳}{۴}$ ۴. $y=\frac{۳}{۲}$ ۳

۱۱. به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $y^{۲}-ay-۳x=\frac{a^{۲}}{۲}$ بر روی نیمساز ناحیه اول است؟

۱. ۳- و ۱- ۲. ۳- و ۱ ۳. ۳ و ۱- ۴. ۱ و ۳ ۲

۱۲. محور تقارن $x^{۲}+y^{۲}=(x+۱)^{۲}+(۲y+۱)^{۲}$ کدام است؟

۱. $y=-\frac{۲}{۳}$ ۲. $x=۱$ ۳. $y=۱$ ۴. $x=-\frac{۲}{۳}$ ۱

۱۳. دهانه سهمی به معادله $y^{۲}+m(x-y)=۰$ رو به راست باز می شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۴ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟

۱. $(-۱,-۴)$ ۲. $(۰,-۴)$ ۳. $(۱,۴)$ ۴. $(۰,-۲)$ ۲

۱۴. طول وتر کانونی سهمی $y^{۲}-۴y+۲x+۲=۰$ کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱ ۳

۱۵. در سهمی به معادله $۳y^{۲}+۶x-۴y=۰$ خط گذرنده از کانون و موازی خط هادی، منحنی سهمی را در نقاط A و B قطع می کند، اندازه وتر AB کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۶ ۱

۱۶. یک سهمی افقی از نقاط $(-۳,۶)$، $(۳,۳)$ و $(۱,۲)$ می گذرد. کوتاهترین فاصله نقاط سهمی از خط هادی کدام است؟

۱. $\frac{۱}{۲}$ ۲. ۱ ۳. $\frac{۳}{۲}$ ۴. ۲ ۲

۱۷. فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵- قطع می‌کند. طول راس آن با علامت مثبت کدام است؟

۱. $\frac{۵}{۴}$ ۲. $\frac{۳}{۲}$ ۳. $\frac{۹}{۴}$ ۴. $\frac{۵}{۲}$ ۳

۱۸. معادله دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۳x+۲$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد کدام است؟

۱. $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۴y+۱۲=۰$ ۲. $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y+۸=۰$

۳. $x^{۲}+y^{۲}+۶x-۴y+۵=۰$ ۴. $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۳y+۹=۰$ ۱

www.niazsara.ir

۱۹. یک تلسکوپ انعکاسی دارای آیینه سهموی است که فاصله راس تا کانون ۷۲ سانتی متر و قطر قاعده آن ۱۶۸ سانتی متر است. عمق آیینه در مرکز چند سانتی متر است؟

۱. ۲۴ ۲. ۲۴/۵ ۳. ۲۶ ۴. ۲۶/۵ ۲

۲۰. از کانون سهمی $y^2-2y+4x=19$ عمودی بر محور کانونی رسم می کنیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مختصات A و B کدام است؟

۱. $(5,1)$ و $(-5,1)$ ۲. $(4,1)$ و $(4,3)$ ۳. $(5,-1)$ و $(-5,1)$ ۴. $(4,3)$ و $(4,-1)$ ۴

۲۱. اگر دوایری به مراکز نقاط واقع بر سهمی $x^2-2x+8y+1=0$ رسم کنیم به طوری که از کانون سهمی عبور کنند، این دوایربه کدام خط، مماس خواهند بود؟

۱. $x=3$ ۲. $x=2$ ۳. $y=3$ ۴. $y=2$ ۴

۲۲. اگر مبدا مختصات را به نقطه $O'(1,-2)$ انتقال دهیم به طوری که محورهای مختصات جدید موازی محورهای x و y باشند، خط $y=2x-3$ در مختصات جدید کدام است؟

۱. $y=2x-3$ ۲. $y=2x-1$ ۳. $y=2x+3$ ۴. $y=2x+1$ ۴

۲۳. مبدا مختصات را به نقطه $(-1,1)$ انتقال داده‌ایم. خط $y-x=k$ در مختصات جدید از نقطه $(1,1)$ می گذرد، k کدام است؟

۱. -۲ ۲. -۱ ۳. ۱ ۴. ۲ ۴

۲۴. به ازای کدام مقدار b، طول نقطه F کانون سهمی $2y^2+4y-x+b=0$ برابر $\frac{17}{8}$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵ ۳

۲۵. به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $2y^2-12y+ax+8=0$ به معادله $x=\frac{21}{8}$ است؟

۱. ۱۲ و ۳ ۲. ۱۶ و ۳ ۳. ۱۲ و ۵ ۴. ۱۶ و ۵ ۴

۲۶. نقاط $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ متعلق به یک سهمی هستند که خط $x=-\frac{1}{4}$، خط هادی آن است. مختصات راس سهمی کدام است؟

۱. $\left(\frac{1}{4},0\right)$ ۲. $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ۳. $(0,0)$ ۴. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ ۳

۲۷. خط به معادله $y=1$، محور تقارن و خط $x=2$ خط هادی سهمی هستند. اگر این سهمی از نقطه $(3,2)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\frac{5}{4}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۲ ۱

۲۸. معادله خط هادی یک سهمی، $x=\frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه $\left(-\frac{5}{4},-2\right)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها باز می تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{3}{4}$ ۳. $\frac{5}{9}$ ۴. $\frac{5}{4}$ ۳

۲۹. کدام نقطه از سهمی $y^2=4x$ از کانون و راس آن به یک فاصله است؟

۱. $(1,2)$ ۲. $(2,2\sqrt{2})$ ۳. $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ ۴. $\left(\frac{1}{4},1\right)$ ۳

www.niazsara.ir

۳۰. اگر خط به معادله $x=-1$ خط هادی سهمی $2y^2-4y=ax$ باشد، فاصله نقطه $A(3,4)$ از کانون سهمی کدام است؟

۱. $3\sqrt{2}$ ۲. $2\sqrt{6}$ ۳. ۵ ۴. ۶

۳۱. خط $y=x+2$ سهمی $x^2=4y$ را در دو نقطه P و Q قطع می کند. اگر F کانون آن باشد، آن گاه $PF+QF$ کدام است؟

۱. ۸ ۲. $8\sqrt{3}$ ۳. ۱۰ ۴. $4\sqrt{3}$

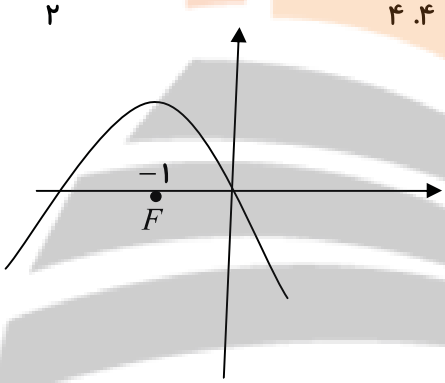
۳۲. اگر سهمی $y=x^2-(k-2)x-2k$ محور x ها را در دو نقطه A و B قطع کند، به طوری که $AB=6$، آن گاه فاصله کانون تا خط هادی سهمی کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{3}{4}$ ۴. ۱

۳۳. محور تقارن یک سهمی با راس $(-1,3)$ موازی محور y ها است. اگر این سهمی از نقطه $(5,9)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱. ۲/۵ ۲. ۳ ۳. ۳/۵ ۴. ۴

۳۴. معادله سهمی به شکل مقابل، به صورت $x^2+2x=ay$ است. مقدار a کدام است؟



۱. -۲ ۲. -۱ ۳. ۱ ۴. ۲

ترنج بوک
تلاشی درمسیر موفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت
www.niazisara.ir

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت

تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net