آموزش

ریاضیات تشریحی

نمونه از جزوات:

حسابان دو

آموزش دقیق و مفهومی دروس، مثال های متنوع و بررسی سؤالات امتحانی در جزوات درس آموز

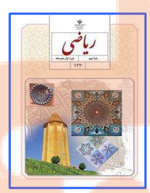
(جزوات آموزش تشریحی)

درسنامه دقیق و مفهومی با مثال‌های فراوان

شامل

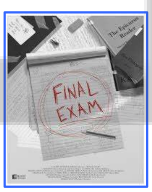
مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده کتاب درسی

(نمره ۲۰ امتحان پایانی)



مثال، فعالیت

و تمرینات برگزیده کتاب درسی عینا وارد جزوه شده.



سؤالات امتحانی

ادوار مختلف آورده و بررسی و پاسخ داده شده.

پوشش کامل محتوای کتاب درسی

این مجموعه ویژه شما است . . .

فهرست کل بخش‌ها

آموزش تشریحی

حسابان دوازدهم

۱

تابع

فهرست	صفحه

بخش ۱

تغییرات افقی نمودار

روش‌های انتقال افقی نمودار به صورت زیر یادآوری می‌شود.

انتقال افقی:

انتقال افقی نمودار $y=f(x)$ به دو صورت است: $(a>0)$

- برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$:

نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت چپ** منتقل می‌کنیم.

- برای رسم نمودار $y=f(x-a)$:

نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت راست** منتقل می‌کنیم.

دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_0)=y_0$، آنگاه انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به چپ، یعنی: (x_0-a,y_0) روی نمودار $y=f(x+a)$ قرار دارد:

$$y=f(x+a)\xrightarrow{x=x_0-a} f((x_0-a)+a)=f(x_0)=y_0$$

به صورت مشابه:

انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به راست، یعنی: (x_0+a,y_0) روی نمودار $y=f(x-a)$ قرار دارد.

برای نمونه؛

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم:

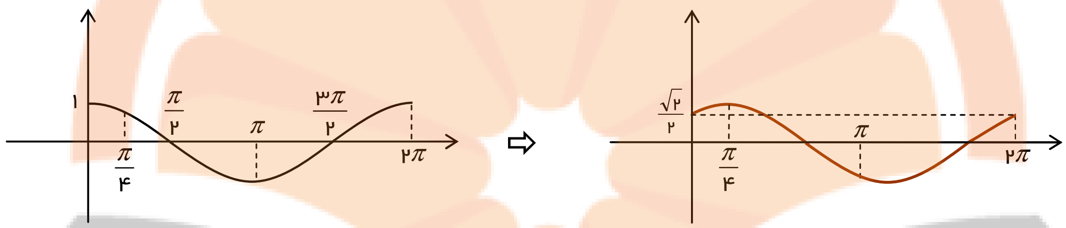
$y=|x|$ $\quad$ $y=|x-۲|$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ

باید ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم کنیم و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال دهیم:



مثال: نمودار تابع $y=(x+2)^2$ را توسط انتقال در بازه‌ی $(-3,0]$ رسم کرده و برد آن را معلوم کنید.

پاسخ

باید نمودار $y=x^2$ را در بازه‌ی $(-1,2]$ رسم کنیم تا بعد از ۲ واحد حرکت به چپ، دامنه‌ی آن $(-3,0]$ شود:

$y=(x+2)^2$ $\qquad$ $y=x^2$

می‌بینید که برد تابع در هر دو نمودار $[0,4]$ است.

روشی دیگر برای تغییر افقی نمودار به صورت زیر است:

انبساط و انقباض افقی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$:

- ❖ نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار مشخص می‌کنیم.
- ❖ طول این نقاط بر k تقسیم شده و عرض نقطه ثابت می‌ماند.

بویژه:

- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده می‌شود. (انبساط می‌یابد.)
- اگر $k>1$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع می‌شود. (انقباض می‌یابد.)

دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_{\circ})=y_{\circ}$، آنگاه نقطه‌ی $(\frac{x_{\circ}}{k},y_{\circ})$ روی نمودار $y=f(kx)$ قـرار دارد:

$$y=f(kx) \xrightarrow{x=\frac{x_{\circ}}{k}} f(k(\frac{x_{\circ}}{k}))=f(x_{\circ})=y_{\circ}$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=|2x|$ را با تغییر مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

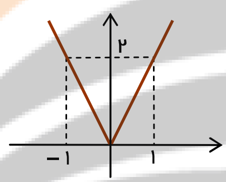
پاسخ

با توجه به نمودار $f(x)=|x|$ و طبق نکته‌ی قبل، نمودار $g(x)=f(2x)$ را رسم می‌کنیم:

$$(-2,2)\in f \xrightarrow{k=2} (\frac{-2}{2},2)=(-1,2)\in g$$

$$(0,0)\in f \longrightarrow (\frac{0}{2},0)=(0,0)\in g$$

$$(2,2)\in f \longrightarrow (\frac{2}{2},2)=(1,2)\in g$$



$g(x)=|2x|$

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

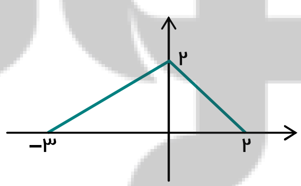
اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها بدست می‌آید.

(درست ☐ – نادرست ☐)

پاسخ

نادرست است؛ زیرا برای $k>1$ نمودار به صورت افقی منقبض می‌شود.

مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل است:



الف) نمودار $y=f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع جدید را مشخص کنید.

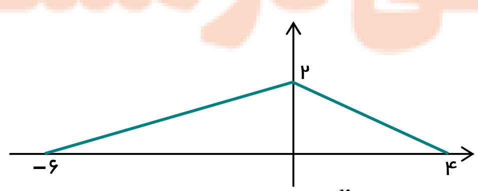
پاسخ

باید طول نقاط بر $k=\frac{1}{2}$ تقسیم شود؛ در واقع؛ طول نقاط در عدد ۲ ضرب می‌شود:

$$(-3,0)\in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} (\frac{-3}{\frac{1}{2}},0)=(-6,0)$$

$$(0,2)\in f \xrightarrow{0\times 2=0} (0,2)$$

$$(2,0)\in f \xrightarrow{2\times 2=4} (4,0)$$



$y=f(\frac{x}{2})$

در نمودار حاصل شده، دامنه $[-۶,۴]$ و برد $[۰,۲]$ است.

حالت خاص:

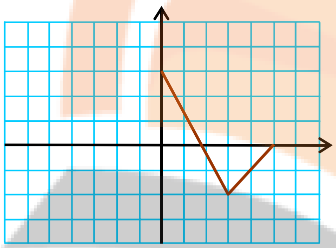
در رسم $y=f(kx)$، مقدار $k=-۱$ ضابطه را به $y=f(-x)$ تبدیل می‌کند و برای رسم آن کافی است:

نمودار $f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها قرینه شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

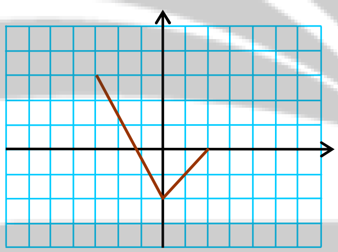
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.



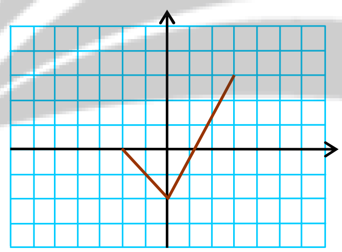
پاسخ

کافی است ابتدا $f(۳+x)$ (سه واحد انتقال به چپ) و سپس $f(۳-x)$ یعنی (قرینه نسبت به محور عرض) انجام گیرد:



$f(x+۳)$

$\Rightarrow$



$f(-x+۳)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g=[-۲,۳]$$

توجه کنید:

در جابجایی افقی همیشه:

برد تابع ثابت مانده و فقط دامنه ممکن است تغییر کند.

بخش ۲
تغییرات عمودی نمودار

ساده‌ترین نوع تغییر عمودی نمودار تابع به صورت زیر است:

انتقال عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

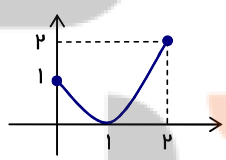
دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_\circ)=y_\circ$، آنگاه انتقال یافته‌ی عمودی نقطه به اندازه‌ی k، یعنی: $(x_\circ , y_\circ + k)$ روی نمودار $y=f(x)+k$ قرار دارد:

$$y=f(x)+k \xrightarrow{x=x_\circ} f(x_\circ)+k=y_\circ+k$$

برای نمونه؛

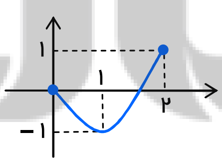
نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر داده شده است:



در رسم نمودار تابع $y=f(x)-۱$، عرض هر نقطه یک واحد کم می‌شود:

دامنه و برد تابع جدید:

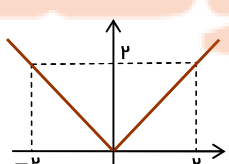
$$D=[\circ,۲] \quad \text{و} \quad R=[-۱,۱]$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=|x|$ رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

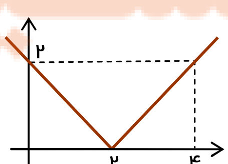
پاسخ

طبق قواعد مربوطه با دو مرحله (انتقال):



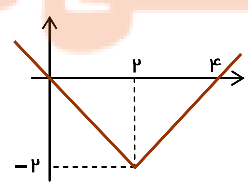
$y=|x|$

$\Rightarrow$



$y=|x-۲|$

$\Rightarrow$



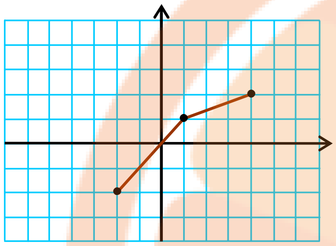
$y=|x-۲|-۲$

می‌بینید که برد $R_f=[-2,+\infty)$ است.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

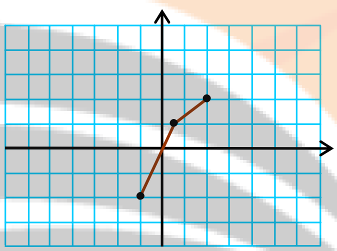
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



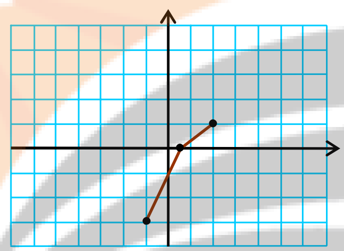
پاسخ

ابتدا $f(2x)$ (تقسیم طول نقاط بر ۲) و سپس $g(x)=f(2x)-1$ یعنی (یک واحد به پایین):



$f(2x)$

$\Rightarrow$



$f(2x)-1$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g=[-1,2] \quad \text{و} \quad R_g=[-3,1]$$

مثال: نمودار تابع $h(x)=|\frac{x}{2}|-1$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

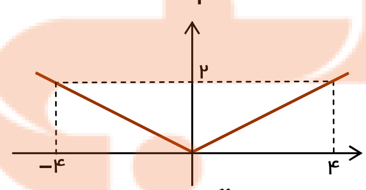
پاسخ

ابتدا مشابه نمونه‌های بالا، نمودار $|\frac{x}{2}|$ را رسم می‌کنیم:

$$(-2,2)\in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} (\frac{-2}{\frac{1}{2}},2)=(-4,2)$$

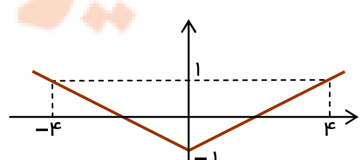
$$(0,0)\in f \longrightarrow (\frac{0}{\frac{1}{2}},0)=(0,0)$$

$$(2,2)\in f \longrightarrow (\frac{2}{\frac{1}{2}},2)=(4,2)$$



$y=|\frac{x}{2}|$

اکنون کافی است عرض نقاط یک واحد کم شود:



$h(x)=|\frac{x}{2}|-1$

روشی دیگر در تغییر عمودی نمودار:

انبساط و انقباض عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=k\,f(x)$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عـرض آن‌ها در عدد k ضرب می‌شود. به طور دقیق‌تر:

- اگر $k>1$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده می‌شود. (نمودار انبساط می‌یابد.)
- اگر $0<k<1$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع می‌شود. (نمودار انقباض می‌یابد.)

دلیل:

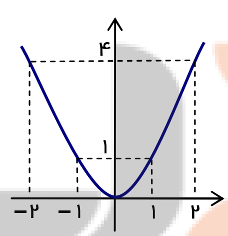
اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_0)=y_0$، آنگاه نقطه‌ی (x_0,ky_0) روی نمودار $y=k\,f(x)$ قرار دارد:

$$y=kf(x)\xrightarrow{x=x_0}kf(x_0)=ky_0$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=2x^2-1$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=x^2$ رسم کنید.

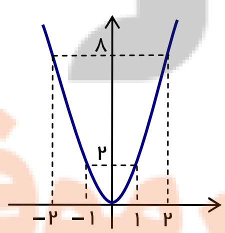
پاسخ

ابتدا نمودار $y=x^2$ را رسم می‌کنیم:

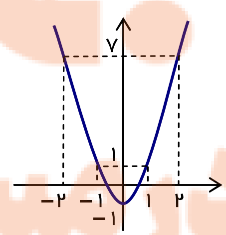


اکنون در دو مرحله نمودار تابع رسم می‌شود:

$y=2x^2$



$\Rightarrow$



$y=2x^2-1$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید.

الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-4,1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-2f(\frac{x}{2})$ برابر $[-2,\frac{1}{2}]$ است.

ب) اگر نقطه‌ی $(-۳,۱)$ روی نمودار f باشد، نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ روی نمودار تابع $y=-۲f(۲x)$ است.

ج) برای رسم نمودار تابع $y=|۲x-۱|$ توسط نمودار $y=|x-۱|$، کافی است طول هر نقطـه از نمـودار تـابع دوم بـر عـدد ۲ تقسیم شود.

پاسخ

الف) نادرست است؛

چون طول نقاط بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم شده و خواهیم داشت: $[-۴,۱] \xrightarrow{\div\frac{۱}{۲}} D=[-۸,۲]$

ب) نادرست است؛

طول نقطه بر ۲ تقسیم شده و به $-\frac{۳}{۲}$ تبدیل می‌شود، ولی عرض نقطه تغییر نمی‌کند: $(-۳,۱) \rightarrow (-\frac{۳}{۲},۱)$

ج) درست است؛

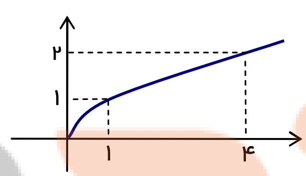
اگر قرار دهیم: $f(x)=|x-۱|$، در این صورت $f(۲x)=|۲x-۱|$ بوده و روش گفته شده برای رسم صحیح است.

مثال: با رسم نمودار $y=\sqrt{x}$ توسط نقطه گذاری، نمودار تابع $y=-۲\sqrt{x}+۱$ را رسم کنید.

پاسخ

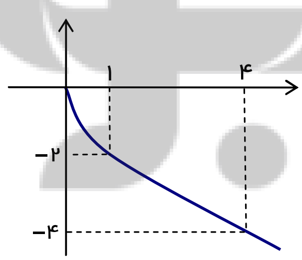
جدولی از مقادیر تابع با طول‌های نامنفی تشکیل داده و نمودار را رسم می‌کنیم:

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

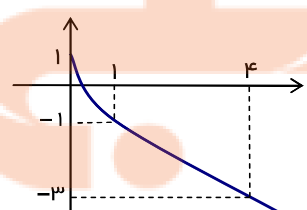


اکنون در دو مرحله: ابتدا ضرب عرض‌ها در -۲ و سپس جمع عرض‌های جدید با عدد ۱، نمودار خواسته شده رسم می‌شود:

$y=-۲\sqrt{x}$



$\Rightarrow$



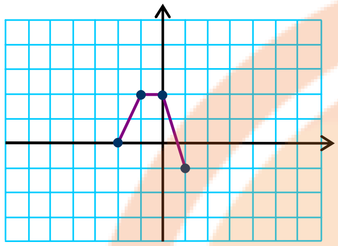
$y=-۲\sqrt{x}+۱$

می‌بینید در تابع آخری، برد $R=(-\infty,۱]$ است.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

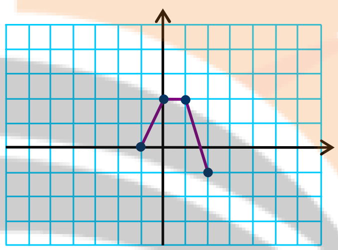


پاسخ

به آسانی و با دو تبدیل متوالی زیر، نمودار رسم می‌شود:

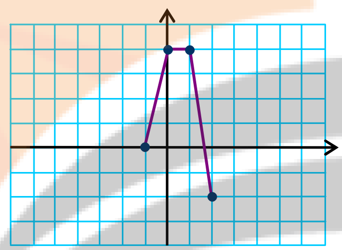
اول: تبدیل $(x \to x-1)$، یک واحد انتقال به راست.

دوم: تبدیل $f(x-1) \to 2f(x-1)$، انبساط عمودی با $k=2$.



$f(x-1)$

$\Rightarrow$



$2f(x-1)=g(x)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$R_g=[-2,4] \quad \text{و} \quad D_g=[-1,2]$$

توجه کنید:

در رسم نمودار $y=-f(x)$ وقتی نمودار تابع f داده شده، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

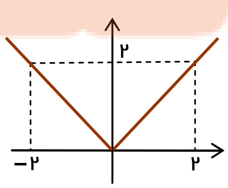
نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

(بدیهی؛ پاسخ محور طول است.)

مثال: مساحت محدود به نمودار $y=-|x|+2$ و محور طول‌ها را بیابید.

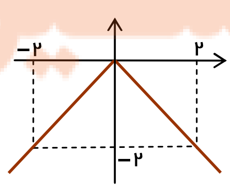
پاسخ

با دو جابجایی و به سادگی نمودار رسم می‌شود:



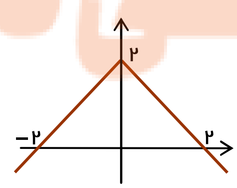
$y=|x|$

$\Rightarrow$



$y=-|x|$

$\Rightarrow$

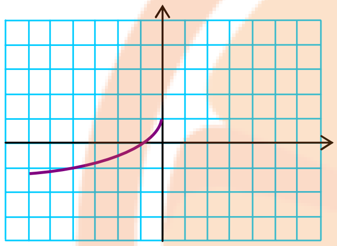


$y=-|x|+2$

می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر، مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

مثال: نمودار مقابل فقط توسط دو عمل انتقال و قرینه سازی از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه‌ی تابع مربوطه را بنویسید.



پاسخ

با قدری دقت می‌توان فهمید بعد از رسم نمودار $y=\sqrt{x}$:

اول: قرینه سازی نسبت به محور طول: $y=-\sqrt{x}$

دوم: قرینه سازی نسبت به محور عرض: $y=-\sqrt{-x}$

سوم: یک واحد انتقال عمودی به سمت بالا: $y=-\sqrt{-x}+۱$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y=-\sqrt{-x}+۱$ است.

توجه کنید:

در انتقال عمودی همیشه:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و فقط برد تغییر خواهد کرد.

بخش ۳
توابع چندجمله‌ای

شکل کلی تابع چندجمله‌ای:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+l$$

که a، b، ...، k و l عددهایی حقیقی و n عددی طبیعی و درجه‌ی تابع است.

چند حالت ویژه‌ی این توابع:

- **تابع ثابت:**

سادهترین تابع به صورت $f(x)=c$ چند جمله‌ای درجه‌ی صفر است. (c عدد ثابت)

- **تابع خطی:**

تابع به صورت $f(x)=ax+b$ چند جمله‌ای درجه‌ی یک می‌باشد.

- **تابع درجه دوم:**

این تابع به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است، نمودارش همیشه یک سهمی است که در سال یازدهم بررسی گردید.

- **تابع درجه سوم:**

این توابع به صورت $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ هستند که بررسی بیشتری از نمودار آن‌ها در ادامه‌ی این درس انجام خواهد شد.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

درجه‌ی تابع $f(x)=x^۲(۱-x)^۵$ را مشخص کنید.

پاسخ

درجه‌ی ۷ است، زیرا:

بزرگ‌ترین درجه‌ی $(۱-x)^۵$ با پنج بار ضرب $(۱-x)$ در خودش، مربوط به جمله‌ی $-x^۵$ است و در نتیجه، در $f(x)=x^۲(۱-x)^۵$، بزرگ‌ترین درجه مربوط به $x^۲(-x^۵)=-x^۷$ خواهد بود.

مثال: در یک تابع خطی f، رابطه‌ی $f(x+۲)=f(x)+۲$ برقرار بوده و $f(۲)=۵$ است. مقدار $f(-۱)$ را حساب کنید.

پاسخ

طبق شرط اول با قرار دادن $x=۲$ داریم:

$$f(۲+۲)=f(۲)+۲ \Rightarrow f(۴)=۵+۲=۷$$

تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر گرفته و با جایگذاری مقادیر در ضابطه‌ی تابع می‌نویسیم:

$$f(۲)=۵ \to ۲a+b=۵$$
$$f(۴)=۷ \to ۴a+b=۷$$

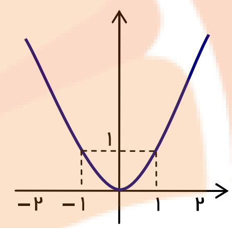
از تفریق دو معادله $a=۱$ و سپس $b=۳$ بدست خواهند آمد و بنابراین:

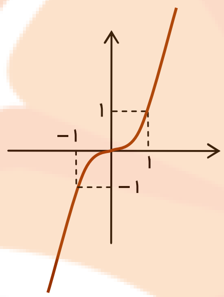
$$f(x)=x+۳ \Rightarrow f(-۱)=-۱+۳=۲$$

مثال: ابتدا نمودار تابع‌های $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x^{۳}$ را رسم کنید و سپس توسط نمودار، مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

هر دو نمودار با تشکیل جدول مقادیر به آسانی رسم می‌شوند:





x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y=x^{۲}$	۴	۱	۰	۱	۴

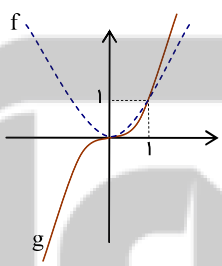
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y=x^{۳}$	−۸	−۱	۰	۱	۸

می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. یعنی:

$$۰<x<۱ \Rightarrow x^{۳}<x^{۲}$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$ بخش‌هایی از محور طول‌هاست که در آن نمودار f بالاتر از نمودار g قرار داشته باشد:

$$f(x)>g(x) \Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$$

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

نمودار تابع $g(x)=x^{۳}$ در فاصله‌ی $[۰,۱]$ پایین‌تر از نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ قرار دارد. (درست ☐ – نادرست ☐)

پاسخ

نادرست است؛

در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نمودارها بر هم منطبق بوده، ولی بین ۰ و ۱ نمودار g پایین‌تر قرار دارد.

مثال: فقط توضیح دهید که نمودار تابع $y=-(x-۱)^۳+۳$ چگونه توسط نمودار $y=x^۳$ رسم می‌شود.

پاسخ

نمودار در طی سه مرحله رسم می‌شود:

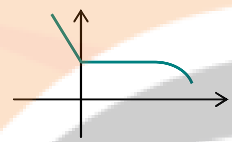
- بعد از رسم $y=x^۳$، نمودار یک واحد به راست منتقل شده تا $y=(x-۱)^۳$ رسم شود.
- نمودار حاصل در مرحله‌ی قبل را نسبت به محور طول قرینه کرده تا $y=-(x-۱)^۳$ رسم شود.
- عرض نقاط نمودار حاصل از مرحله‌ی قبل را با عدد ۳ جمع کرده تا $y=-(x-۱)^۳+۳$ رسم شود.

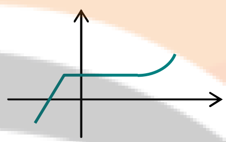
بخش ۴
توابع یکنوا

فرض کنید f یک تابع باشد.

❖ f را **«صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا زیاد شود.

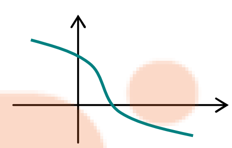
❖ f را **«نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا کم شود.

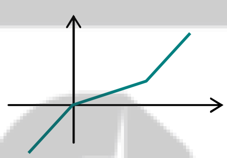

تابع نزولی


تابع صعودی

❖ تابع f را **«اکیداً صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع زیاد می‌شود.

❖ تابع f را **«اکیداً نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع کم می‌شود.


تابع اکیداً نزولی


تابع اکیداً صعودی

بعلاوه:

تابع صعودی یا نزولی را **«یکنوا»** و تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را **«اکیداً یکنوا»** گوییم.

توجه کنید:

طبق تعریف، تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم محسوب می‌شود.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیداً صعودی هم خواهد بود. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

☑ پاسخ

نادرست است؛

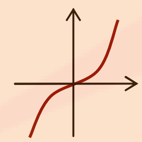
برای نمونه، تابع ثابت $f(x) = 1$ صعودی است، ولی اکیداً صعودی نیست.

مثال: با رسم، یکنوایی توابع $y=[x]$، $y=x|x|$، $y=x^{۳}$ و $y=|x|+x$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

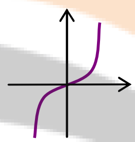
پاسخ

- نمودار تابع پله‌ای $y=[x]$ صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.
- نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر بوده و صعودی اکید است:

$$y=x|x|=\begin{cases}-x^{۲} & x<۰\\ x^{۲} & x\geq ۰\end{cases}$$

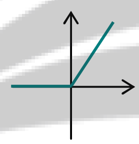


- نمودار تابع $y=x^{۳}$ را قبلاً دیده‌ایم و صعودی اکید است:



- نمودار تابع $y=|x|+x$ به‌صورت زیر، صعودی هست، ولی صعودی اکید نیست:

$$y=x+|x|=\begin{cases}۰ & x<۰\\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

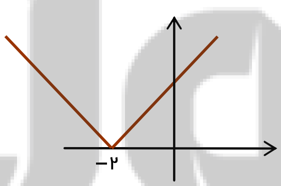


نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

تابع $h(x)=|x+۲|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

پاسخ

به روش انتقال افقی، نمودار تابع رسم می‌شود:



تابع در بازه‌ی $[-۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه کنید:

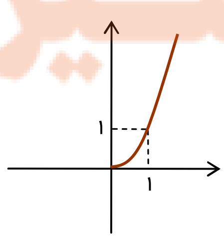
گاهی مانند نمونه‌ی قبل، تابع روی دامنه‌ی خود یکنوا نیست؛ اما:

می‌توانیم دامنه‌ی آن را طوری محدود کنیم، تا در آن دامنه یکنوا باشد. برای نمونه؛

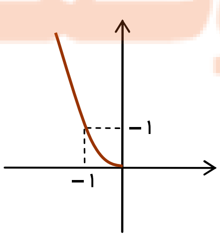
تابع $y=x^{۲}$ یکنوا نیست، ولی:

- روی بازه‌ی $[۰,\infty)$ اکیداً صعودی است.
- روی بازه‌ی $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی است.

اکیداً صعودی



اکیداً نزولی



مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید:

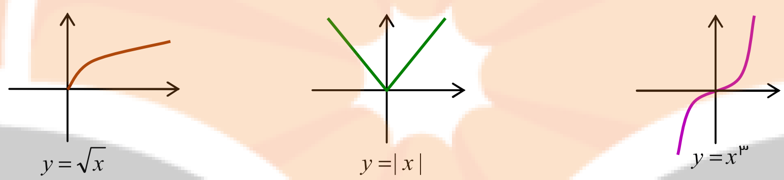
الف) تابع $y=-x^{۳}$ در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ صعودی است.

ب) تابع $y=|x|$ در بازه‌ی $[-۳,۰]$ اکیداً نزولی است.

ج) تابع $y=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

پاسخ

نمودارهای سه تابع زیر را در نظر می‌گیریم:



الف) نادرست است؛

اگر نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور طول قرینه کنید، نمودار همواره اکیداً نزولی خواهد شد.

ب) با توجه به نمودار درست است.

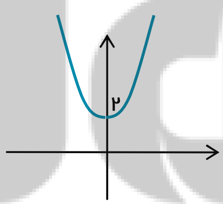
ج) با توجه به نمودار نادرست است.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲$ را رسم کرده و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

پاسخ

نمودار به روش انتقال عمودی نمودار $y=x^{۲}$ رسم می‌شود:



اکنون دیده می‌شود:

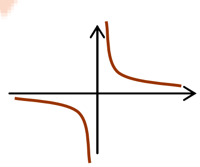
نمودار در $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و در $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

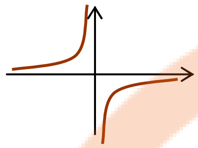
مثال: نمودار توابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x-|x|$ را رسم کرده و فواصل یکنوایی هر یک را مشخص کنید.

پاسخ

- **نمودار** f:

ابتدا نمودار شناخته شده‌ی $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم.





اکنون نمودار نسبت به محور طول قرینه می‌شود:

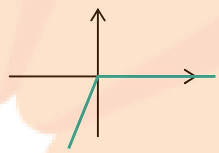
می‌بینید که:

تابع در هر دو بازه‌ی $(\circ,+\infty)$ و $(-\infty,\circ)$ اکیداً صعودی است.

- **نمودار** g:

ضابطه را باز کرده و نمودار متشکل از دو نیم‌خط را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$$



می‌بینید که:

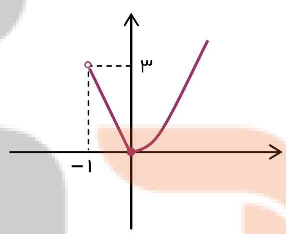
تابع در بازه‌ی $(-\infty,\circ]$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[\circ,+\infty)$ صعودی (و نزولی) است.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

با رسم نمودار تابع $y=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -3x & -1<x<0 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

پاسخ

برای $x\geq \circ$ نمودار با انتقال نیم‌سهمی $y=x^2$ و برای $-1<x<\circ$ پاره‌خطی توسط $y=-3x$ رسم می‌شود:



$$y=-3x:\begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=3 \\ x=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

تابع در بازه‌ی $[\circ,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $(-1,\circ]$ اکیداً نزولی است. **(ولی در کل روی دامنه یکنوا نیست.)**

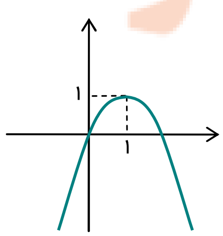
مثال: محدوده‌ی x را طوری تعیین کنید که تابع $y=2x-x^2$ در آن محدوده نزولی باشد.

پاسخ

ضابطه را با اضافه و کم کردن عدد ۱ به صورت مناسب زیر می‌نویسیم:

$$y=2x-x^2-1+1=-(x^2-2x+1)+1 \Rightarrow y=-(x-1)^2+1$$

حالا می‌توانیم با تغییر نمودارِ $y=x^2$، نمودار تابع را رسم کنیم:



با نگاه به نمودار می‌بینید که تابع در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ اکیداً نزولی (همچنین نزولی) است.

وقتی ضابطه شامل چند قدرمطلق است، برای رسم، ضابطه را باز کنید.

مثال: نمودار تابع $y=|x+۲|+|x|$ را رسم کرده و محدوده‌ای را مشخص کنید که تابع در آن صعودی است.

پاسخ

با توجه به ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها، ضابطه باز می‌شود:

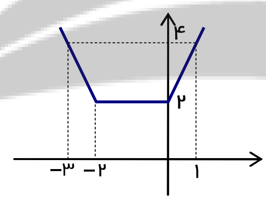
$$|x+۲|:\quad x+۲=۰ \rightarrow x=-۲ \quad و \quad |x|:\ x=۰$$

بنابراین با توجه به علامت داخل قدر مطلق‌ها در هر محدوده:

$$y=\begin{cases} -(x+۲)-x & x<-۲ \\ x+۲-x & -۲\le x\le ۰ \\ x+۲+x & x>۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -۲x-۲ & x<-۲ \\ ۲ & -۲\le x\le ۰ \\ ۲x+۲ & x>۰ \end{cases}$$

با تشکیل جدول مقادیر، نمودار خط شکسته‌ی تابع رسم می‌شود:

x	-۳	-۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴



تابع در $[-۲,+\infty)$ صعودی است.

توجه کنید:

از یکنوایی تابع می‌توان در حل برخی نامعادلات کمک گرفت.

- ❖ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد:

$$f(a)\le f(b) \Rightarrow a\le b$$

- ❖ اگر تابع f اکیداً نزولی باشد:

$$f(a)\le f(b) \Rightarrow a\ge b$$

مثال: نامعادله‌ی $(\sqrt{۳}-۱)^{x^۲-۲x}<(\sqrt{۳}-۱)^{۲x}$ را حل کنید.

پاسخ

چون $۰<\sqrt{۳}-۱<۱$ است، تابع نمایی $y=(\sqrt{۳}-۱)^x$ اکیداً نزولی است و بنابراین:

$$(\sqrt{۳}-۱)^{x^۲-۲x}<(\sqrt{۳}-۱)^{۲x} \rightarrow x^۲-۲x>۲x \rightarrow x^۲-۴x>۰$$

اگر جدول تعیین علامت رسم کنید، دو ریشه‌ی ۰ و ۴ خواهیم داشت و خارج دو ریشه عبارت مثبت است.

جواب: $(-\infty,۰)\cup(۴,+\infty)$

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

اگر $\log(x+۱)\leq\log(۲x-۳)$، حدود x را بدست آورید.

پاسخ

چون تابع $y=\log x$ اکیداً صعودی است، از نامعادله نتیجه می‌شود که: $(x+۱)\leq(۲x-۳)$. بنابراین:

$$x-۲x\leq-۱-۳ \quad\rightarrow\quad -x\leq-۴ \quad\Rightarrow\quad x\geq۴$$

توجه کنید:

باید شرایط $x+۱>۰$ و $۲x-۳>۰$ نیز برقرار باشند که در محدوده‌ی جواب بالا، هر دو برقرار هستند.

بخش ۵

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

در این بخش، تقسیم چند جمله‌ای‌ها و کاربرد آن در تجزیه‌ی عبارات، در حد نیاز برای محاسبه‌ی حد توابع آورده می‌شود.

مثال: تقسیم $f(x)=x^۳+۲x^۲-۴x-۵$ بر $x+۲$ را ببینید:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۲x^۲-۴x-۵ & x+۲ \\ \cline{2-2} -(x^۳+۲x^۲) & x^۲-۴ \\ \hline ۰\ +\ ۰\ -۴x-۵ & \\ \quad -(-۴x-۸) & \\ \hline \qquad +۳ & \end{array}$$

توجه کنید:

هنگام تقسیم، باید مقسوم و مقسوم علیه از توان بزرگ به کوچک مرتب باشند.

در این تقسیم، خارج قسمت $x^۲-۴$ و باقی‌مانده عدد ۳ بدست آمده است.

قضیه تقسیم:

در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر چند جمله‌ای $p(x)$ همواره:

دو چند جمله‌ای یکتای $q(x)$ و $r(x)$ یافت می‌شوند که:

- اولاً: تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

- ثانیاً: درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $p(x)$ کوچک‌تر باشد.

به $q(x)$ خارج قسمت و به $r(x)$ باقی مانده‌ی تقسیم گفته می‌شود.

درمثال قبل،

اگر ریشه‌ی $x+۲$ (یعنی: مقسوم علیه) در عبارت $f(x)=x^۳+۲x^۲-۴x-۵$ (یعنی: مقسوم) قرار گیرد، می‌بینیم که:

$$x+۲=۰ \;\rightarrow\; x=-۲$$

$$f(-۲)=(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۴(-۲)-۵=-۸+۸+۸-۵=۳$$

این کار، روش سریع تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم است.

بخش‌پذیری:

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ عبارت است از $R=f(a)$، بنابراین:

عبارت $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است، هرگاه $f(a)=۰$ باشد.

توجه کنید:

حتی اگر مقسوم علیه به صورت $ax+b$ باشد، تعیین باقی‌مانده و شرط بخش‌پذیری مانند بالاست.

ریشه را تعیین می‌کنیم:

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

سپس:

$f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است، هرگاه $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

اگر چند جمله‌ای $f(x)=x^2+ax-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را حساب کنید.

پاسخ

چون ریشه‌ی $x+1$ برابر -1 است، پس باید $f(-1)=0$ باشد:

$$(-1)^2+a(-1)-3=0 \Rightarrow a=-2$$

در نتیجه: $f(x)=x^2-2x-3$ بوده و باقی‌مانده‌ی آن بر $x-2$ برابر است با:

$$f(2)=(2)^2-2(2)-3=-3$$

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸ – خرداد ۱۳۹۹

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ

باید $P(x)$ بر هر دوی $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر است:

$$x-2=0 \to x=2: \quad P(2)=0 \to 8+4a+2b+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9$$

$$x+1=0 \to x=-1: \quad P(-1)=0 \to -1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=0$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم: $a=-\frac{3}{2}$ و $b=-\frac{3}{2}$.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

باقی مانده‌های تقسیم عبارت‌های $P(x)=x^3+ax+1$ و $Q(x)=2x^2-x+1$ بر $(x+2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

پاسخ

با توجه به: ($x+2=0 \to x=-2$) باید مقادیر $P(-2)$ و $Q(-2)$ برابر باشند:

$$(-2)^3+a(-2)+1=2(-2)^2-(-2)+1 \to -8-2a+1=8+2+1 \to -2a=18 \Rightarrow a=-9$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)=x^7-3x^4+ax-1$ بر $x-1$، برابر ۲ و خارج‌قسمت آن $q(x)$ است. مقدار $q(-1)$ را تعیین کنید.

پاسخ

ابتدا مقدار a را مشخص می‌کنیم:

$$(x-1=0 \rightarrow x=1): \quad p(1)=2 \rightarrow 1-3+a-1=2 \Rightarrow a=5$$

اکنون $p(x)$ با توجه به خارج قسمت و باقی‌مانده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^7-3x^4+5x-1=(x-1)q(x)+2$$

کافی است x را برابر -1 قرار دهیم:

$$(-1)^7-3(-1)^4+5(-1)-1=(-1-1)q(-1)+2 \rightarrow -2q(-1)=-12 \Rightarrow q(-1)=6$$

اطلاع از بخش‌پذیری $P(x)$ بر یک عبارت، به یک مرحله تجزیه‌ی آن منجر می‌شود:

روشی برای تجزیه:

اگر عبارت $P(x)$ بر یک عبارت $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & Q(x) \\ \hline \vdots & A(x) \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\cdot A(x)$$

پس $P(x)$ یک مرحله تجزیه شد.

توجه کنید:

اگر عبارت‌های $Q(x)$ یا $A(x)$ قابل تجزیه باشند، با ادامه، تجزیه‌ی بهتری برای $P(x)$ بدست خواهد آمد.

مثال: اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x^3+x^2+mx-4=0$ برابر $x=-2$ باشد.

الف) مقدار m را بیابید.

ب) سایر جواب‌های معادله را مشخص کنید.

پاسخ

الف) جواب $x=-2$ باید در معادله صادق باشد:

$$2(-2)^3+(-2)^2+m(-2)-4=0 \rightarrow -16+4-2m-4=0 \Rightarrow m=-8$$

ب) چون چند جمله‌ای $2x^3+x^2-8x-4$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، با تقسیم معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+2)(2x^2-3x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases}$$

از حل معادله‌ی دوم، سایر جواب‌ها معلوم می‌شوند:

$$2x^2-3x-2=0 \xrightarrow{\times 2} (2x)^2-3(2x)-4=0 \rightarrow (2x-4)(2x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

در پایانِ این بخش، به روش تجزیه‌ی یک نوع چندجمله‌ای خاص توجه کنید:

به اتحادهای زیر نگاه کنید:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

با تقسیم a^n-b^n بر $a-b$، می‌بینیم بخش‌پذیری بازهم برقرار بوده و شکل کلی تجزیه‌ی عبارت a^n-b^n بدست می‌آید:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

برای نمونه:

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

چند نتیجه:

- در حالت خاص وقتی $b=1$ باشد، داریم:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$$

- اگر n زوج باشد و در تجزیه‌ی a^n-b^n، جمله‌ی $-b$ را جایگزین b کنیم، داریم:

$$a^n-(-b)^n=(a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\cdots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی a^n-b^n بر حسب عامل $a+b$ حاصل می‌شود:

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

برای نمونه:

$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$$

- اگر n فرد باشد و در تجزیه‌ی a^n-b^n، جمله‌ی $-b$ را جایگزین b کنیم، داریم:

$$a^n-(-b)^n=(a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\cdots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی a^n+b^n حاصل شده که بر $a+b$ بخش‌پذیر است:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

برای نمونه:

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

چند جمله‌ای x^6-1 را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید.

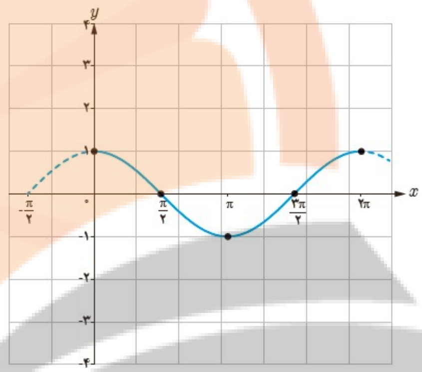
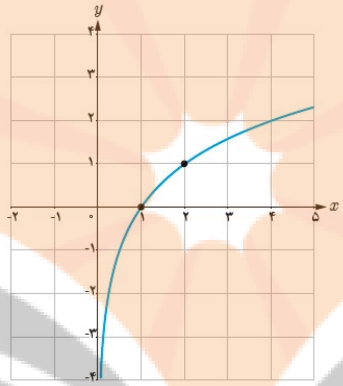
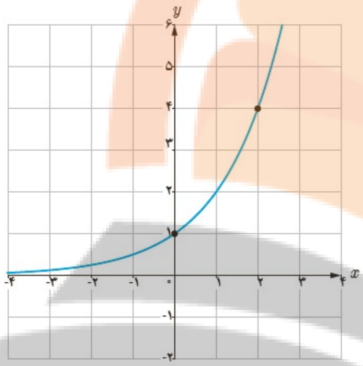
پاسخ

مانند حالت دوم بالا می‌نویسیم:

$$x^6-1=x^6-1^6=(x+1)(x^5-x^4(1)+x^3(1)^2-x^2(1)^3+x(1)^4-1^5)$$
$$=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

تمرینات

۱ـ در زیر، نمودار توابع $y=۲^x$، $y=\log_۲ x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=۲^{x-۱}+۲$، $y=\log_۲(x+۲)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنید. (متن کتاب)

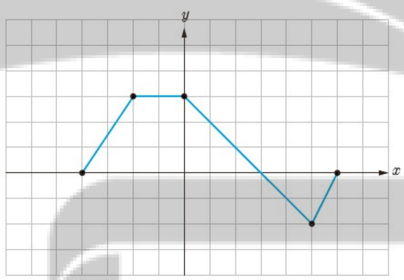
۲ـ نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کنید. (تمرین کتاب)

$y=f(-x)+۲$

$y=f(۳-x)$

$y=f(۲x-۱)$



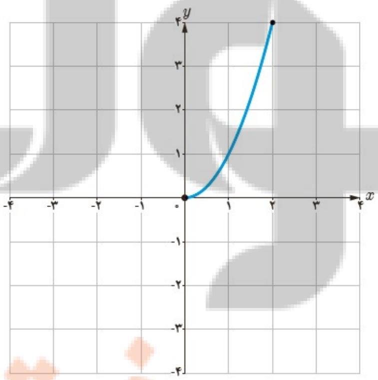
۳ـ نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کرده و با نمودار f مقایسه کنید. (تمرین کتاب)

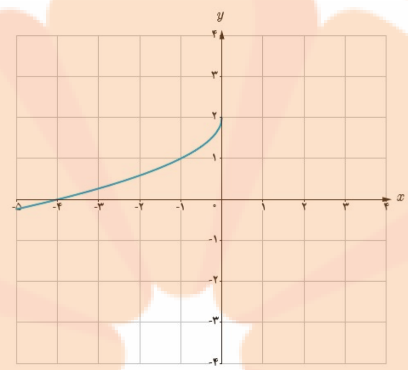
$y=f(-x)$

$y=-f(x)$

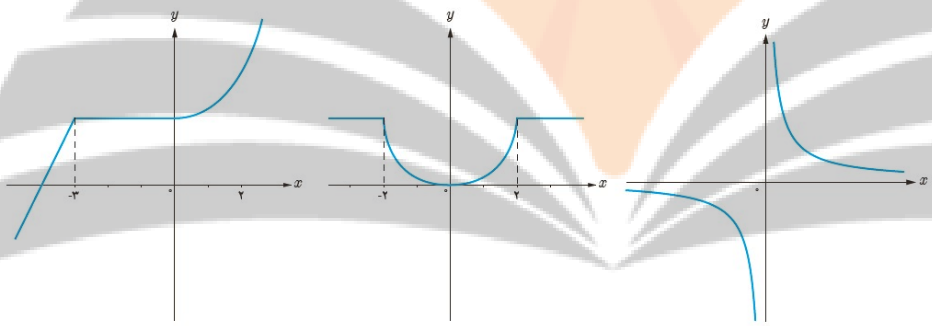
$y=-f(-x)$



۴– نمودار زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ حاصل شده؛ ضابطه‌ی آن را بنویسید. (تمرین کتاب)



۵– نمودار توابع f، g و h داده شده‌اند: (تمرین کتاب)



$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)$ $\quad$ $y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۶– الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی باشد و هم نزولی؟

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین کتاب)

۷– هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده تجزیه کنید. (تمرین کتاب)

الف) x^6-1 با عامل $x-1$.

ب) x^6-1 با عامل $x+1$.

ج) x^5+32 با عامل $x+2$.

۸- الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی بوده و a و b متعلق به این بازه باشند. (تمرین کتاب)
اگر $f(a) \le f(b)$، نشان دهید: $a \ge b$.

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴} \le (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را بیابید.