

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

درس اول: تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع به کمک تبدیلات می توان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبدیلات را معرفی می کنیم.

الف: انتقال های افقی و عمودی

قسمت اول: انتقال عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می توان انتقال عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول: تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) + k = y_0 + k$$

بنابر این نقطه $(x_0, y_0 + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

حالت دوم: تابع g به صورت $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) - k = y_0 - k$$

بنابر این نقطه $(x_0, y_0 - k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

۱: برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم.

۲: برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

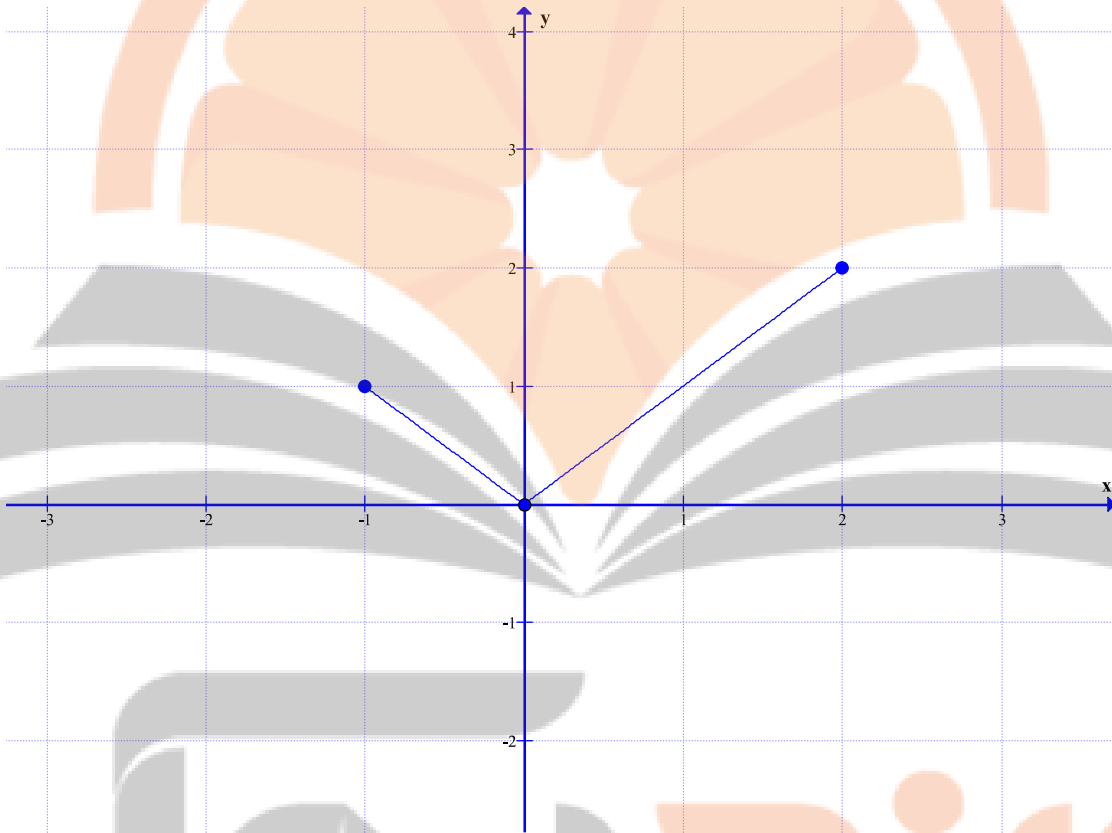
مثال: ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله $[-1, 2]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

موارد زیر پاسخ دهید.

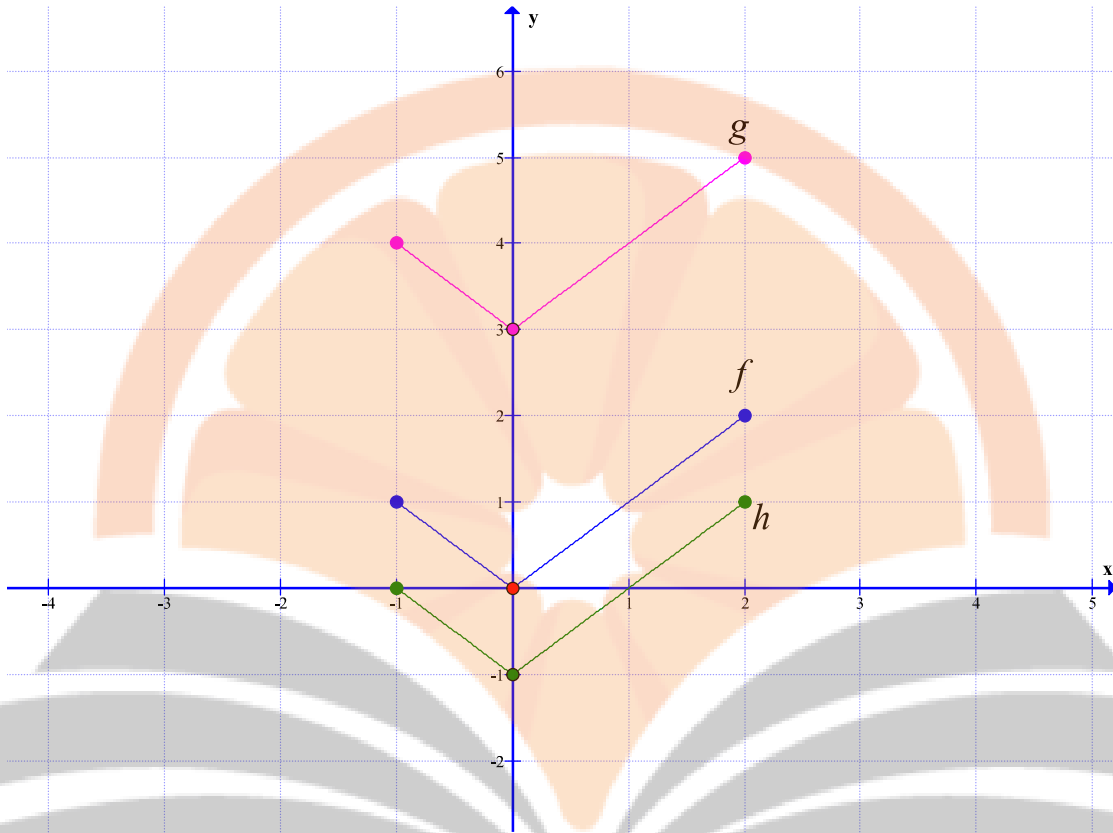
الف: نمودار تابع $g(x) = |x| + 3$ را رسم کنید. ب: نمودار تابع $h(x) = |x| - 1$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

x	-۱	۰	۲
y	۱	۰	۲

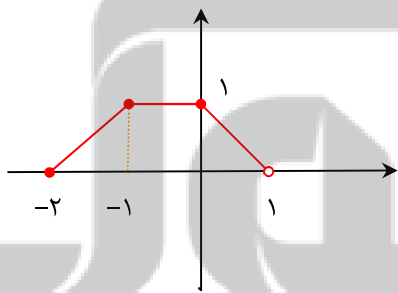


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



نتیجه: در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط عرض آنها به اندازه‌ی k اضافه یا کم می شود.

تمرین ۱: تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف: دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب: نمودار تابع $g(x) = f(x) - 2$ را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

قسمت دوم : انتقال افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول : تابع g به صورت $g(x) = f(x + k)$ تعریف شده باشد. ، آنگاه

$$g(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_0 - k, y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

حالت دوم : تابع g به صورت $g(x) = f(x - k)$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0 + k) = f(x_0 + k - k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_0, y_0 + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x + k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به

سمت چپ انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x - k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به

سمت راست انتقال دهیم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله‌ی $(-2, 2)$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

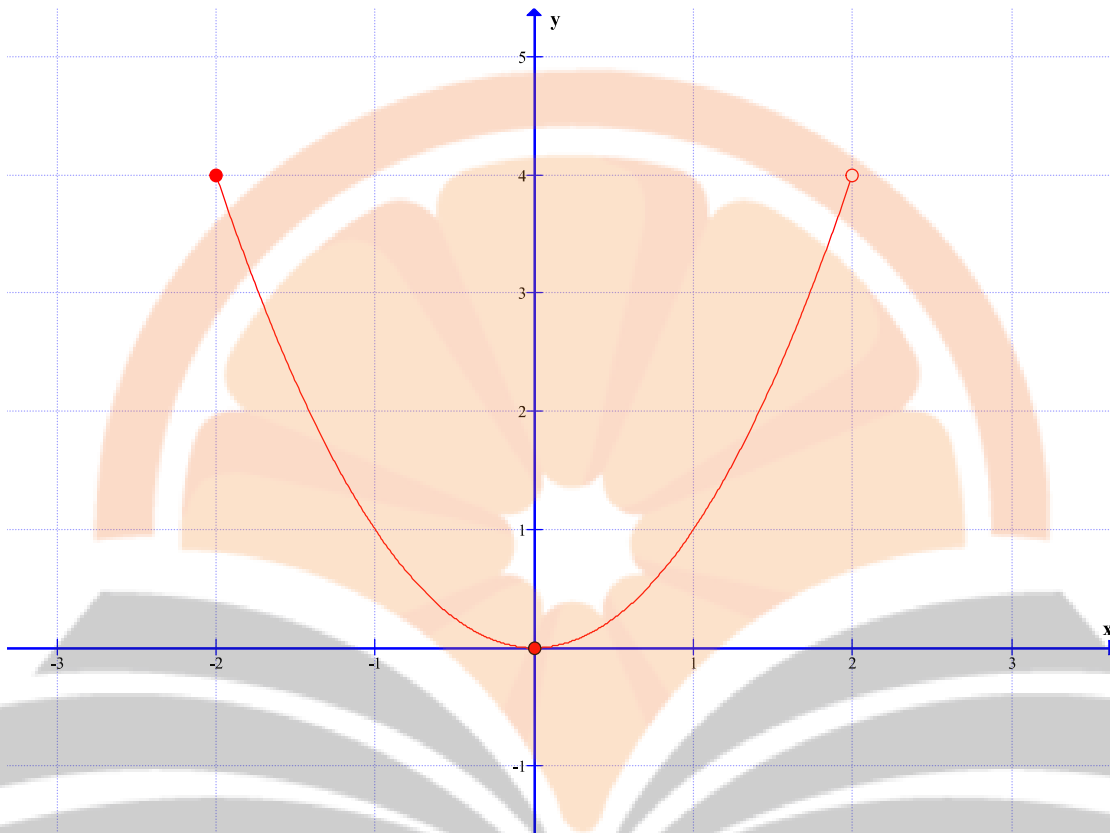
موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x) = (x + 3)^2$ را رسم کنید.

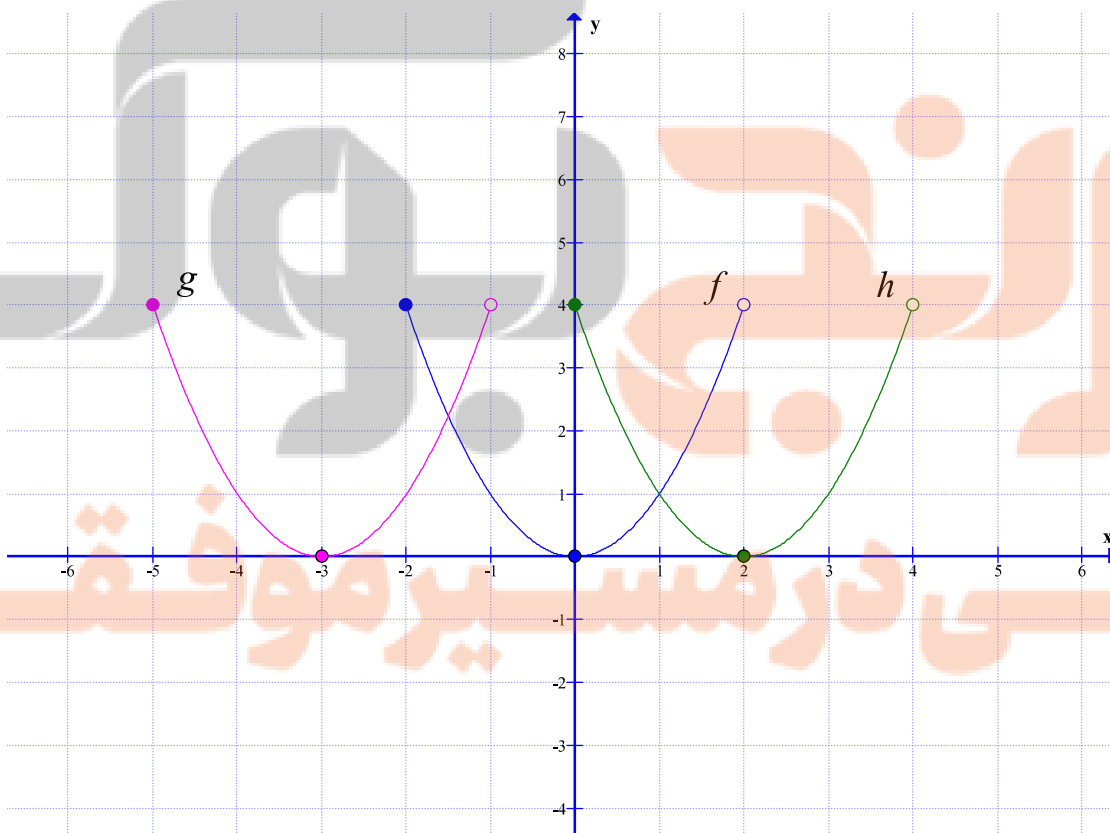
ب : نمودار تابع $h(x) = (x - 2)^2$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

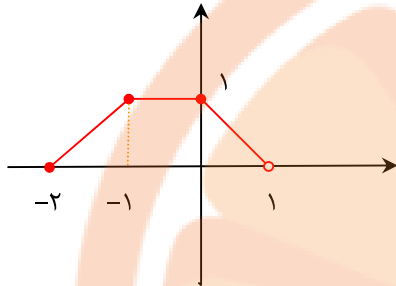
x	-2	0	2
y	4	0	4



اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.



نتیجه: در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط طول آنها به اندازه‌ی k واحد اضافه یا کم می شود.



تمرین ۲: تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

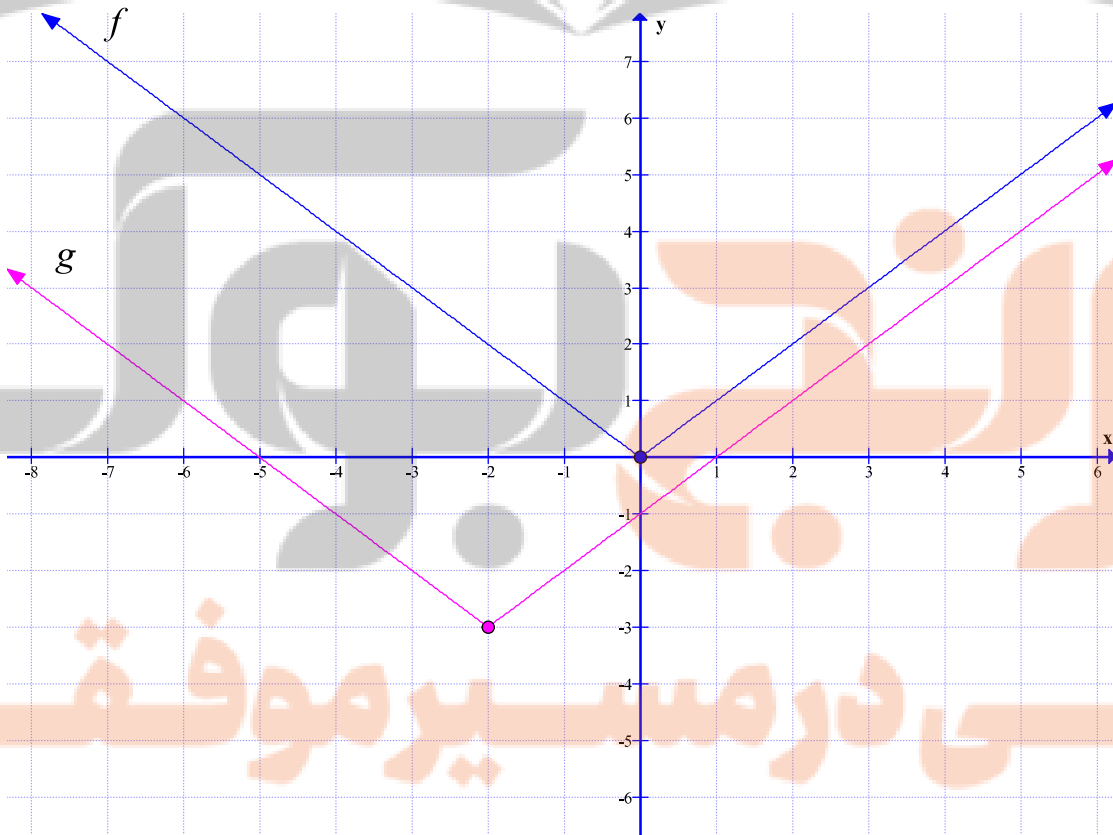
ب: نمودار تابع $g(x) = f(x - 2)$ را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

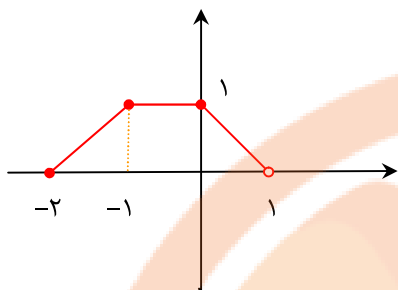
د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

توجه: گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم^۱. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x + 2| - 3$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



^۱. لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.



تمرین ۳: تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب: نمودار تابع $g(x) = f(x - 2) + 1$ را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می‌گیرید.

تمرین ۴: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار

توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف) $g(x) = \sin x + 2$ ب) $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ج) $k(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$

ب: انبساط و انقباض عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، می‌توان

انبساط و انقباض عمودی را برای تابع g در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(x_0) = kf(x_0) = ky_0$$

بنابراین نقطه‌ی (x_0, ky_0) از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقاط

را ثابت نگه داریم.

مثال: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[0, 4]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

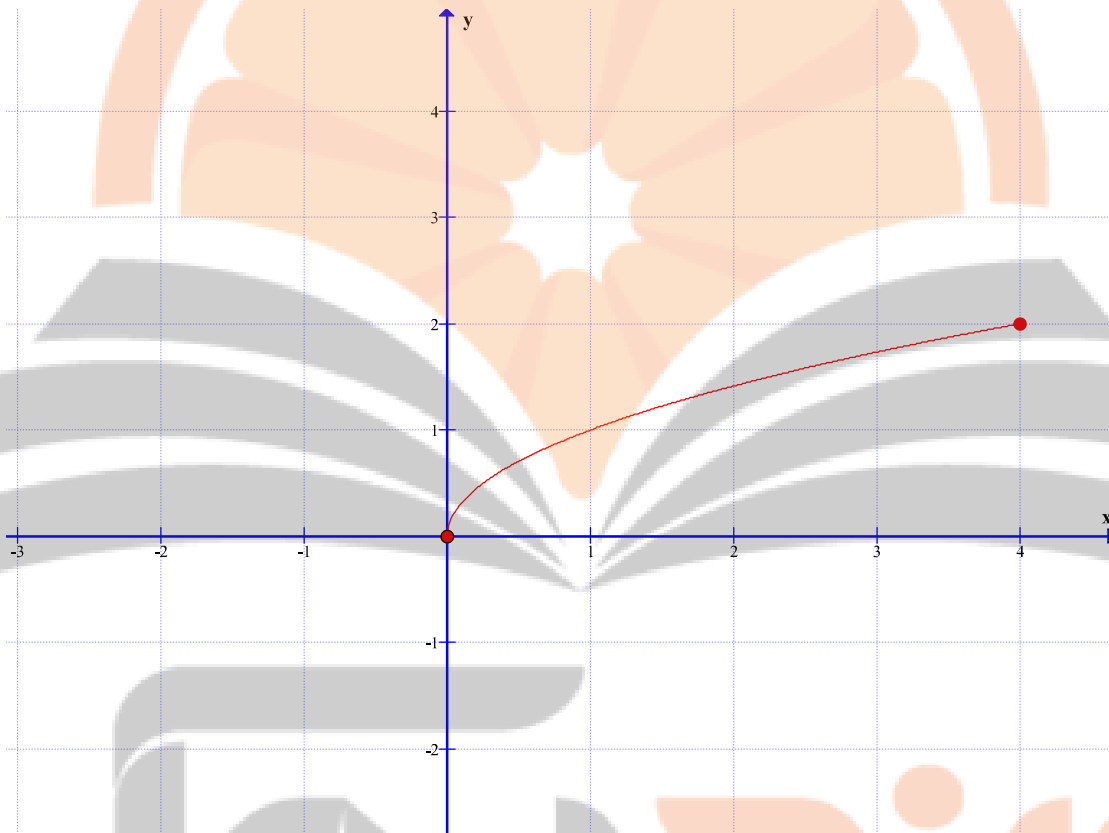
موارد زیر پاسخ دهید.

الف: نمودار تابع $g(x) = 3\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ب: نمودار تابع $h(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

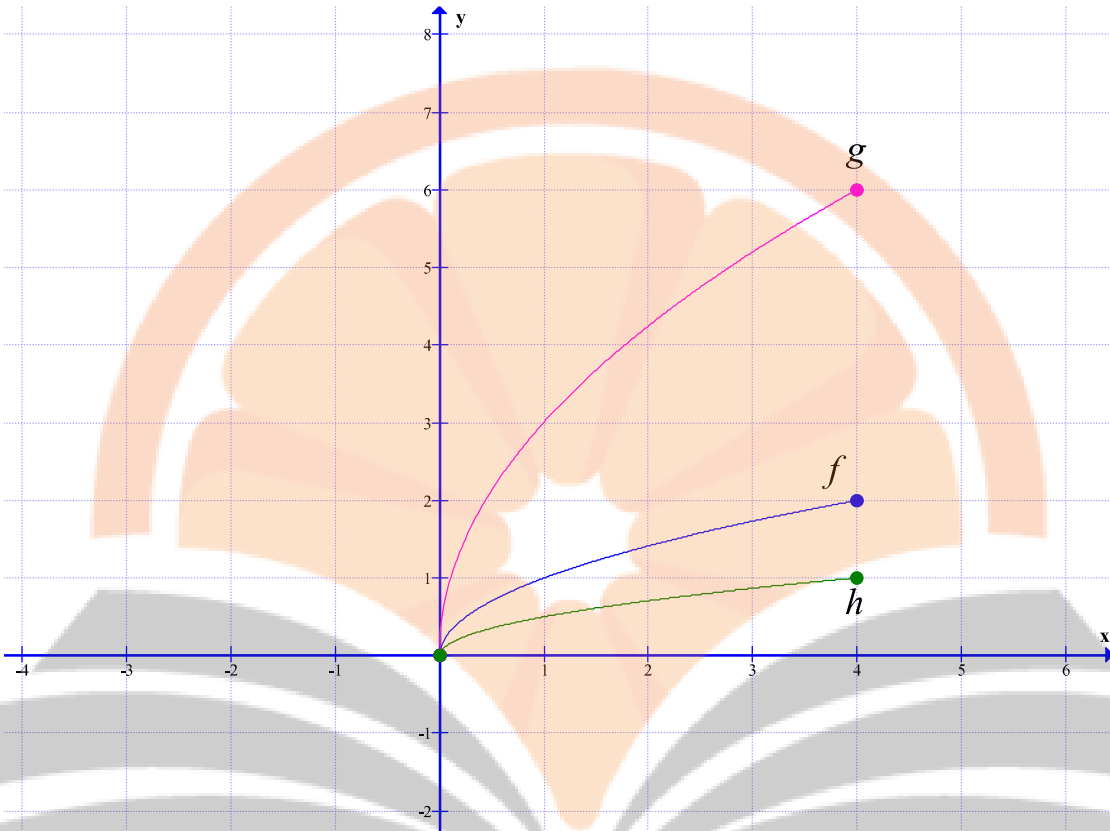
x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g طول نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می‌داریم ولی عرض نقاط را در ضرب $f(x)$ ضرب می‌کنیم.

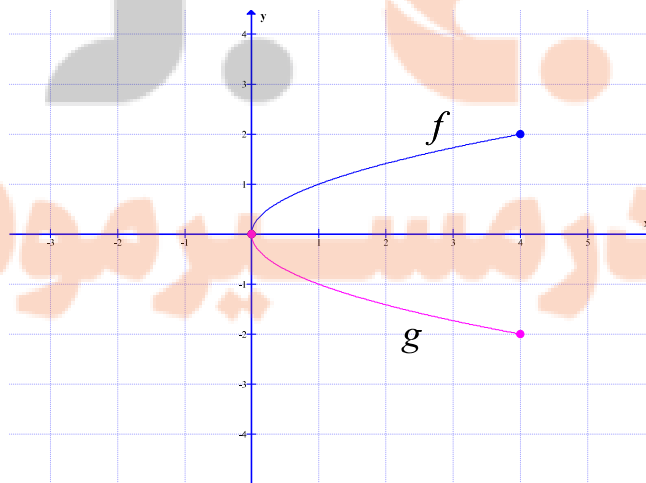
g	x	۰	۱	۴
	y	۰	۳	۶

h	x	۰	۱	۴
	y	۰	$\frac{1}{2}$	۱



توجه:

- ۱: اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
 - ۲: اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
 - ۳: اگر عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.
- در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -\sqrt{x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۵: نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ

دهید.

الف: دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب: نمودار تابع $g(x) = 2 \cos x$ را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می‌گیرید.

ج: انبساط و انقباض افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می‌توان

انبساط و انقباض افقی را برای تابع g در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{1}{k}x_0\right) = f\left(\frac{1}{k} \times kx_0\right) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته، ولی طول

نقاط را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

مثال: ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله‌ی $[-2, 1]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

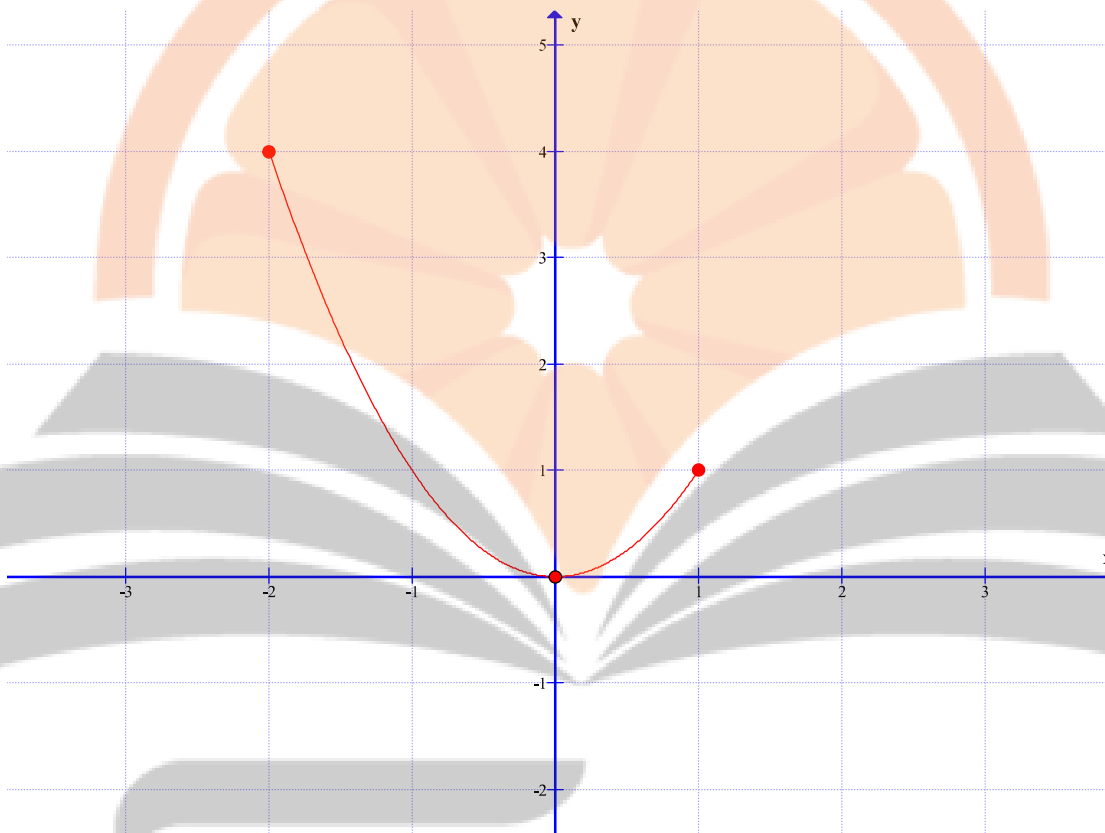
موارد زیر پاسخ دهید.

الف: نمودار تابع $g(x) = (2x)^2$ را رسم کنید.

ب: نمودار تابع $h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

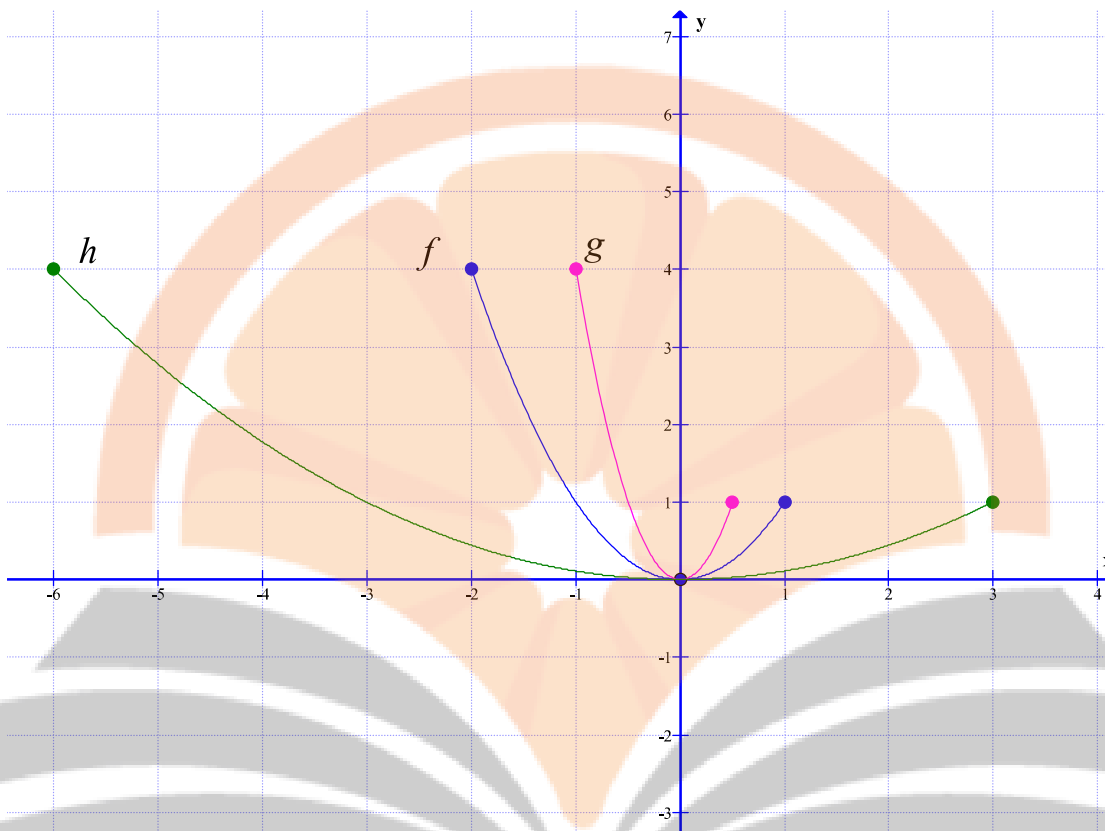
x	-۲	۰	۱
y	۴	۰	۱



اکنون برای رسم نمودار توابع g و h عرض نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می‌داریم ولی طول نقاط را در معکوس ضرب x ضرب می‌کنیم.

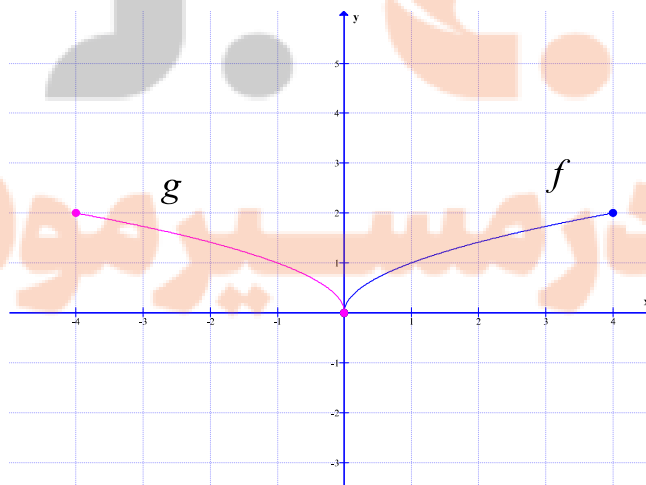
g	x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$
	y	۴	۰	۱

h	x	-۶	۰	۳
	y	۴	۰	۱



توجه:

- ۱: اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.
- ۲: اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.
- ۳: اگر طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.
در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۶: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سؤالات زیر پاسخ

دهید.

الف: دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب: نمودار تابع $g(x) = \sin 2x$ را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می‌گیرید.

توجه: گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را با همدیگر

انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به

صورت $g(x) = 3f(2x)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = 3f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) = 3f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0}{2}, 3y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = 3f(2x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را سه برابر کرده و طول نقاط

را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

توجه: گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را به همراه

انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

مثال الف: برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به

صورت $g(x) = f(2x + 1)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0 - 1}{2} + 1\right) = f(x_0 - 1 + 1) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0 - 1}{2}, y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته، ولی

ابتدا از طول نقاط یک واحد از آن کم کرده و سپس در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

مثال ب: اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به

صورت $g(x) = f(2x) + 1$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) + 1 = f(x_0) + 1 = y_0$$

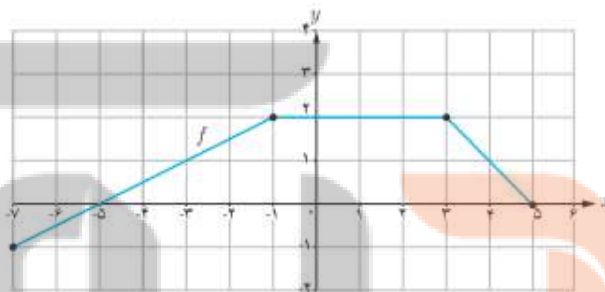
بنابراین نقطه‌ی $\left(\frac{x_0}{2}, y_0 + 1\right)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0, y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y = f(2x) + 1$ ، کافی است، طول طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده و

به عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

تمرین ۷: اگر نمودار تابع f به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $g(x) = f(2x + 1)$

ب) $h(x) = f(2x) - 3$

ج) $k(x) = 2f(x) - 1$

نتیجه: خلاصه‌ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع $y = f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می‌شود.

نتیجه	نحوه‌ی تبدیل	تابع جدید
نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می‌رود.	به عرض نقاط k واحد اضافه می‌شود.	$y = f(x) + k$
نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می‌رود.	از عرض نقاط k واحد کم می‌شود.	$y = f(x) - k$
اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می‌شود.	عرض نقاط در k ضرب می‌شود.	$y = kf(x)$
نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می‌رود.	از طول نقاط k واحد کم می‌شود.	$y = f(x + k)$
نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می‌رود.	به طول نقاط k واحد اضافه می‌شود.	$y = f(x - k)$
اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می‌شود.	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.	$y = f(kx)$

تمرین برای حل :

۸: نقطه‌ی $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌شود.

$$۱-۸) g(x) = f(x) - ۱$$

$$۴-۸) g(x) = f(۲x)$$

$$۲-۸) g(x) = f(x) + ۲$$

$$۵-۸) g(x) = ۳f(x - ۱)$$

$$۳-۸) g(x) = ۳f(x)$$

$$۶-۸) g(x) = ۵f(x + ۱) + ۲$$

۹: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

$$۲-۹) g(x) = \sqrt{۲+x}$$

$$۲-۹) g(x) = ۲ + \sqrt{x-۱}$$

$$۲-۹) g(x) = ۲ + \sqrt{x}$$

$$۲-۹) g(x) = \sqrt{۱-x}$$

$$۲-۹) g(x) = -۲\sqrt{x}$$

$$۲-۹) g(x) = \sqrt{۲x+۱} - ۳$$

۹: ابتدا نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات

نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

الف) $g(x) = \cos ۲x - ۱$

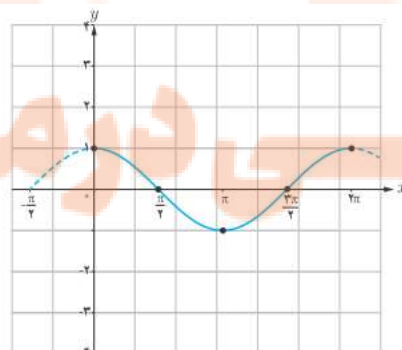
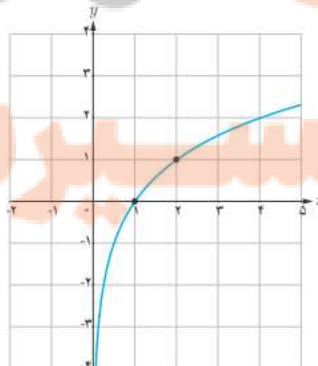
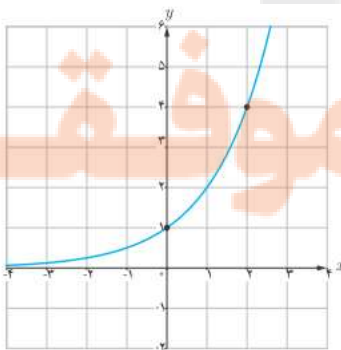
ب) $h(x) = ۲\cos \frac{x}{۳}$

۱۰: در زیر نمودار توابع $y = ۲^x$ و $y = \log_۲^x$ و $y = \cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

الف) $y = ۲^{x-۱} + ۲$

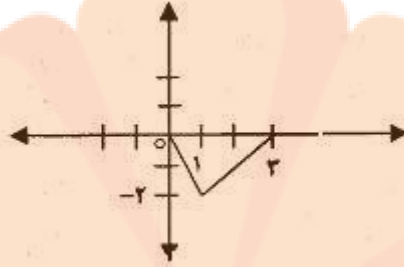
ب) $y = \log_۲^{x+۲}$

ج) $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$



۱۱: در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، سپس نمودار

تابع $y = -2f(x - 3)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۲: تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ و برد $[1, 5]$ را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی‌های تبدیلات دامنه

و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $g(x) = 2f(x - 1) - 3$

ب) $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

نزد نخبه ببولک

تلاشی در مسیر موفقیت

درس دوم : تابع درجه ۳ ، توابع یکنوا و تقسیم و بخش پذیری

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی ۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع یکنوا می پردازیم و در نهایت تقسیم چندجمله ای ها و ویژگی های آن و همچنین بخش پذیری دو چندجمله ای را معرفی می کنیم.

قسمت اول : توابع چند جمله ای و تابع درجه ۳

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

(الف) تابع ثابت

$$f(x) = c \quad \text{تابع چندجمله ای از درجه صفر}^1$$

(ب) تابع خطی

$$f(x) = ax + b \quad \text{تابع چندجمله ای از درجه یک}$$

(ج) تابع درجه ۲ (سه‌می)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{تابع چندجمله ای از درجه دو}$$

(د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{تابع چندجمله ای از درجه سه}$$

مثال : نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه‌ی آن را بنویسید.

$$f(x) = x^2(1-x)^3$$

حل :

$$f(x) = x^2(1-x)^3 = x^2(1-3x+3x^2-x^3) = x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5$$

این تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۵ است.

توجه :

۱: طبق تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی چندجمله‌ای محسوب نمی‌شوند.

۲: دامنه‌ی هر تابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. (مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم).

تمرین ۱: تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای است. درجه‌ی توابع چندجمله‌ای را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

ت) $f(x) = |x-2|$

ب) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+5x-1}$

ث) $f(x) = x(2+x)(2-x) + 1$

پ) $f(x) = \sqrt{x^2+5x+1}$

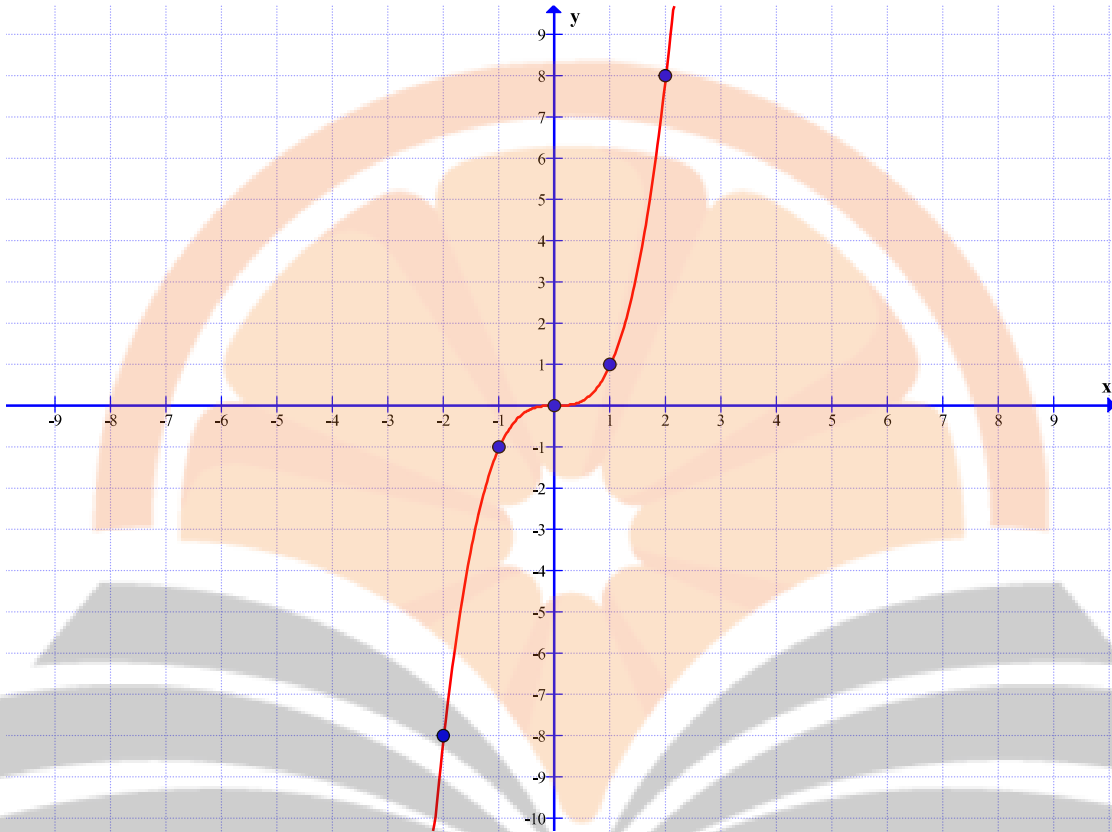
ج) $f(x) = \sin x$

ساده‌ترین تابع چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ به صورت زیر است.

$$f(x) = x^3$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸



تمرین ۲: به دو طریق نشان دهید که تابع $f(x) = x^3$ وارون پذیر است. سپس وارون آن را تعیین کنید.

تمرین ۳: به کمک رسم نمودار تابع $f(x) = x^3$ و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابع زیر را

رسم کنید.

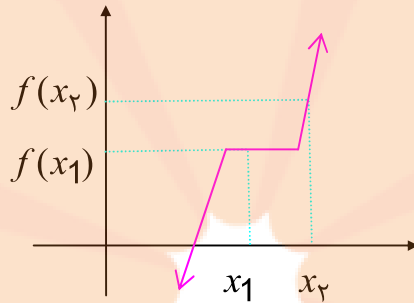
الف) $f(x) = (x + 1)^3$ ب) $f(x) = -x^3 + 1$ ج) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

تلاشی در مسیر موفقیت

قسمت دوم: توابع یکنوا

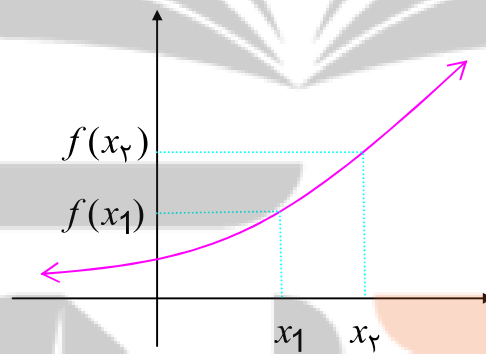
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



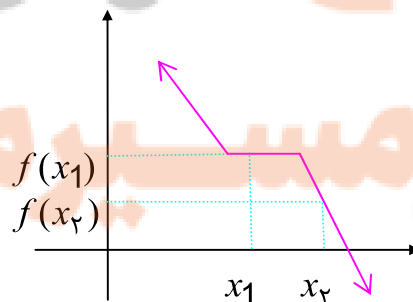
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



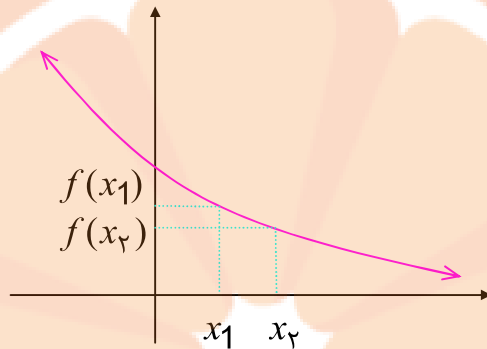
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش نزولی گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



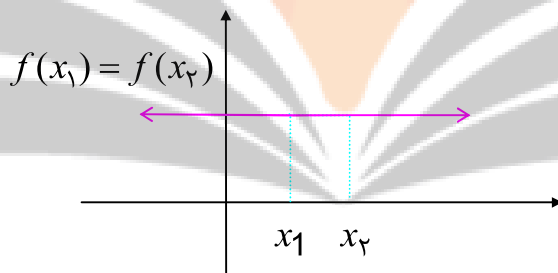
تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش **نزولی اکید (اکیداً نزولی)** گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



تابع $y = f(x)$ را روی دامنه اش **ثابت** است، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



توجه:

۱: هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را **تابع اکیداً یکنوا** می نامند.

۲: طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است ولی **اکیداً یکنوا** نیست.

۳: برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۴: به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

تمرین ۴: نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف: دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب: نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۱) $[0, 1]$

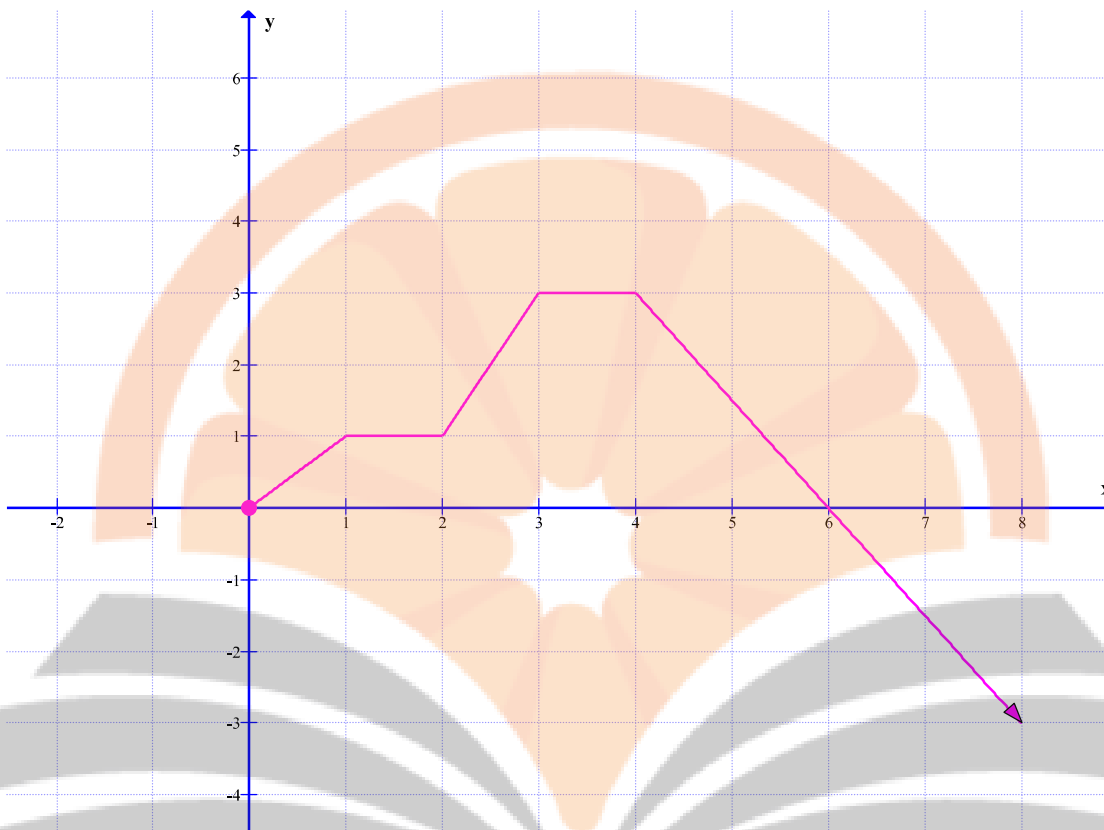
۳) $[1, 4]$

۵) $[3, 4]$

۲) $[1, 2]$

۴) $[3, 6]$

۶) $[4, +\infty)$



تمرین ۵: صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x) = [x - 1]$ را در دامنه‌اش به کمک تعریف بررسی کنید.

حل:

$$f(x) = [x] - 1$$

تابع صعودی است. $x_1 < x_2 \rightarrow [x_1] \leq [x_2] \rightarrow [x_1] - 1 \leq [x_2] - 1 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow$

تمرین ۶: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف) $y = 2^{x+1}$

ب) $y = -3x + 2$

حل:

(الف)

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \rightarrow 2^{x_1+1} < 2^{x_2+1} \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$$

تابع صعودی اکید است.

(ب)

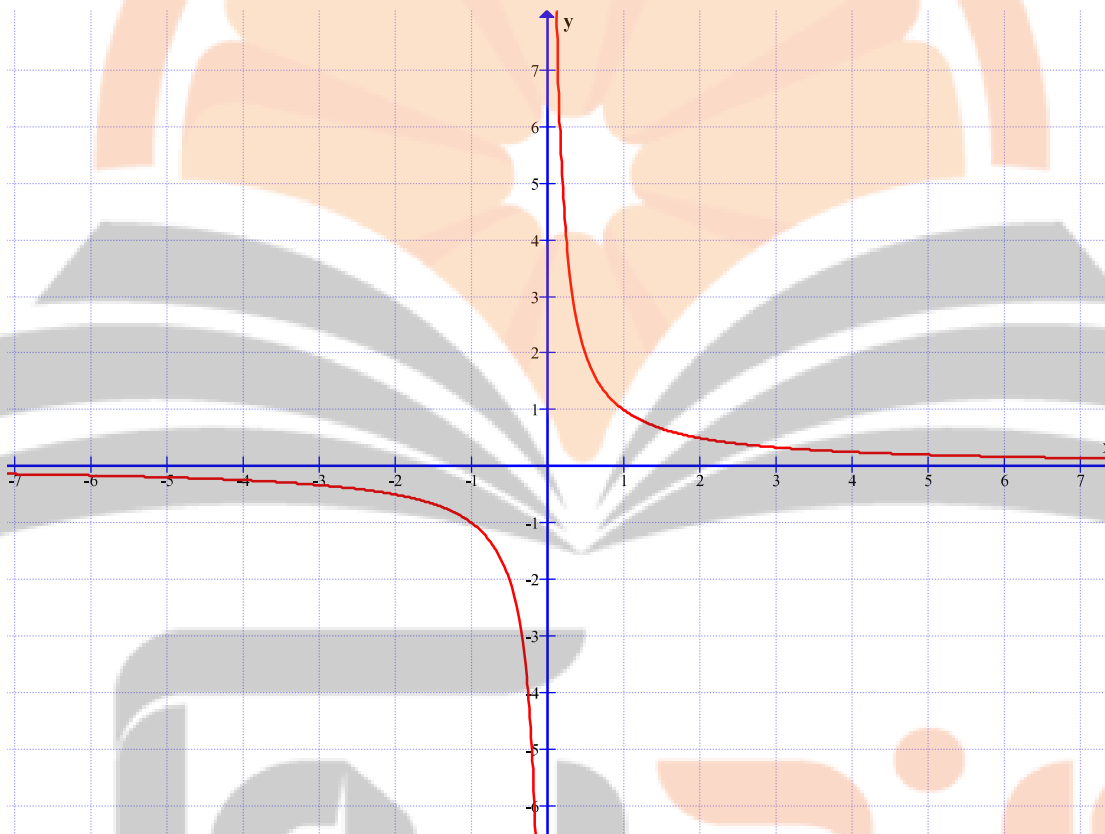
$$x_1 < x_2 \rightarrow -3x_1 > -3x_2 \rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$$

تابع نزولی اکید است.

توجه: اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنسوایی آن (صعودی و نزولی بودن) آن بررسی نمی شود.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع $R - \{0\}$ است. همچنین این

تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف: تابع در فاصله‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی اکید است.

ب: تابع در فاصله‌ی $(0, +\infty)$ نزولی اکید است.

ج: تابع در فاصله‌ی $\{0\} - [-1, 1]$ ، نه صعودی و نه نزولی است.

د: صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً $[-1, 1]$ بررسی نمی شود.

تمرین ۷: ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

مثال: تابع $y = 2^{x+1}$ صعودی اکید و تابع $y = -3x + 2$ نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

تمرین برای حل :

۸: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله‌ی صعودی، در

چه فاصله‌ی نزولی و در چه فاصله‌ی ثابت است؟

الف) $f_1(x) = |x + 2| - 3$

ج) $f_3(x) = \sqrt{1-x}$

ب) $f_2(x) = -x^2 - 6x + 10$

د) $f_4(x) = |1+x| + |1-x|$

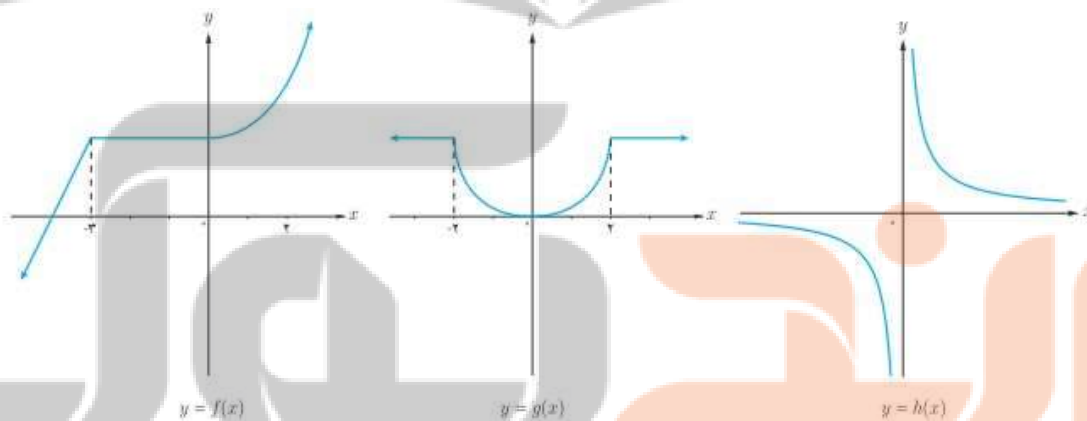
۹: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله‌ی صعودی و در چه

فاصله‌ی نزولی است و در چه فاصله‌ی ثابت است؟

الف) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$

۱۰: نمودار توابع f و g و h در زیر رسم شده‌اند.



الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۱۱: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود، اکیداً

یکنوا است؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$

ب) $g(x) = 2^{-x}$

ج) $h(x) = \log_2^x$

۱۲: تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.

ج) ضابطه‌ی f^{-1} را به دست آورید.

۱۳: آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد؟

۱۴:

الف: اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب: اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۱۵: اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً

صعودی است. برای $f - g$ می توان گفت؟

۱۶:

الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$

نشان دهید که $a \leq b$

ب) اگر $\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$ ، حدود x را به دست آورید.

۱۷:

الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$

نشان دهید که $a \geq b$

ب) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود x را به دست آورید.

تلاشی در مسیر موفقیت

قسمت سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری

در سال‌های گذشته با تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا شده‌اید. می‌دانید که برای تقسیم چند جمله

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم علیه} \\
 A(x) \mid B(x) \\
 \dots \quad \mid \quad Q(x) \text{ خارج قسمت} \\
 \hline
 R(x) \text{ باقی مانده}
 \end{array}$$

ای $A(x)$ را بر چند جمله‌ای غیر صفر $B(x)$ که درجه‌ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $B(x)$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می‌کنیم.

مرحله‌ی اول: ابتدا چند جمله‌ای‌های مقسوم $(A(x))$ و مقسوم علیه $(B(x))$ را استاندارد می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم: اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند) و حاصل را به عنوان اولین جمله‌ی خارج قسمت قرار می‌دهیم.

مرحله‌ی سوم: خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله‌ای مقسوم علیه ضرب می‌کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می‌کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اولین باقی مانده را نتیجه می‌دهد.

مرحله‌ی چهارم: مانند مرحله‌ی دوم، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم.

توجه: مراحل فوق را تا زمانی ادامه می‌دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله‌ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال: تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-3x^2 + 3x^3 + x^5 + 3x - 5) \div (1 + x^2)$$

حل: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & x^2 + 1 \\
 \hline
 -x^5 + x^3 & \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & \\
 -2x^3 + 2x & \\
 \hline
 -3x^2 + x - 5 & \\
 +3x^2 - 3 & \\
 \hline
 x - 2 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 \frac{2x^3}{x^2} = 2x \\
 \frac{-3x^2}{x^2} = -3
 \end{array}$$

تمرین ۱۷: تقسیم‌های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

- ۱) $(x^2 - 5x - 1) \div (x - 3)$
- ۲) $(3x^2 + 2x^3 - 4x - 1) \div (x - 1)$
- ۳) $(x^4 - 5x^2 - 1 + 7x) \div (-2 + x)$
- ۴) $(x^5 + 1) \div (x^3 + x^2 - 1)$
- ۵) $(x^3 + x^2y - 2y^3 - xy^2) \div (x + y)$

تمرین ۱۸: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ شود.

قضیه‌ی تقسیم

اگر چند جمله‌ای $A(x)$ را بر چند جمله‌ای غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم

داشت:

$$\begin{array}{r|l}
 A(x) & B(x) \\
 \dots & Q(x) \\
 \hline
 R(x) &
 \end{array}$$

$$A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

تلاشی در مسیر موفقیت

مثال: تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^3 + x^2 + 6x + 1) \div (x + 2)$$

حل:

$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 + 6x + 1 \\ +x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 6x + 1 \\ -3x^2 - 6x \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} x + 2 \\ \hline -x^2 + 3x \end{array}$	$\frac{-x^3}{x} = -x^2$ $\frac{3x^2}{x} = 3x$
---	--	---

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^2 + 3x)(x + 2) + 1 = -x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1 = -x^3 + x^2 + 6x + 1$$

تمرین ۱۹: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $x^2 + kx + 1$ بر $x + 1$ برابر ۵ شود.

تمرین ۲۰: مقدار k را چنان بیابید که چندجمله‌ای های $2 - 4x + 3x^2 - x + 2x^2 + kx^3$ در تقسیم

بر $x + 1$ هم باقی مانده شوند.

بخش پذیری در چند جمله‌ای‌ها

$\begin{array}{r} A(x) \\ \dots \\ \hline R(x) \end{array}$	$\begin{array}{r} B(x) \\ \hline Q(x) \end{array}$	<p>چند جمله‌ای $A(x)$ را بر چند جمله‌ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود. در این صورت خواهیم داشت:</p> $A(x) = Q(x) \times B(x)$
---	--	--

تمرین ۲۱: نشان دهید که $3x + 5$ بر $3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 5 + 7x$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۲: نشان دهید که عبارت $x - 2$ بر $4x^5 - 3x^2 + x - 2$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۳: مقدار k را طوری بیابید که $4x^2 + kx + 2$ بر $x + 1$ بخش پذیر شود.

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ را بر $x - a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} P(x) \quad | \quad x - a \\ \dots \quad | \quad Q(x) \\ \hline R(x) \end{array} \quad P(x) = Q(x) \times (x - a) + R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x = a$

$$\Rightarrow P(a) = Q(a) \times \underbrace{(a - a)}_0 + R(a) \rightarrow P(a) = R(a)$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین ۲۴: باقی مانده‌ی تقسیم $3x^2 - 5x + 4$ بر $x - 1$ را حساب کنید.

تمرین ۲۵: باقی مانده‌ی تقسیم $2x^3 - 5x^2 + x + 3$ بر $x + 1$ را حساب کنید.

تمرین ۲۶: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ را حساب کنید. ($a \neq 0$)

حل:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R(x)$$

$$\rightarrow P(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R(x)$$

$$\xrightarrow{x = -\frac{b}{a}} P\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(\underbrace{-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}_0\right)Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

یعنی برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ کافی است ریشه‌ی $ax + b$ را در

عبارت $P(x)$ جایگزین کنیم.

نتیجه: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

تمرین ۲۷: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ بر $2x + 3$ را حساب کنید.

تمرین برای حل :

۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم $3x^2 - 2x - 8$ بر $x - 2$ را حساب کنید.

۲۹: مقدار m را طوری بیابید که $P(x) = x^2 + mx - 2$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد.

۳۰: نشان دهید که $P(x) = x^4 - 16$ بر $x - 2$ بخش پذیر است.

۳۱: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 + x - 2$ بر $2x + 1$ را حساب کنید.

۳۲: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

قسمت چهارم : معرفی چند اتحاد دیگر

در این جا در پی آن هستیم که چند اتحاد مفید دیگر را ارائه کنیم. در سال های قبل به یاد دارید که :

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

اکنون می خواهیم این اتحاد ها را تعمیم دهیم. برای این کار تمرین زیر را انجام دهید.

تمرین ۳۳: از تقسیم $x^4 - a^4$ بر $x - a$ نشان دهید که

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

نتیجه: برای هر عدد طبیعی n عبارت $x^n - y^n$ بر $x - y$ بخش پذیر است. همچنین :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

تمرین ۳۴: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^5 - 1$

ب) $x^6 - 64$

تمرین ۳۵: اگر n فرد باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

حل: اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x - (-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \dots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n فرد است لذا، $n-1$ زوج می باشد و پس:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

تمرین ۳۶: عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^y + 128$$

حل:

$$A = x^y + 128 = x^y + 2^y$$

$$= (x + 2)(x^6 - x^5(2) + x^4(2)^2 - x^3(2)^3 + x^2(2)^4 - x(2)^5 + (2)^6)$$

$$= (x + 2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

تمرین ۳۷: اگر n زوج باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که:

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

حل: اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x - (-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \dots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n زوج است لذا، $n-1$ فرد می باشد و پس:

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

تمرین ۳۸: عبارت زیر را طوری تجزیه کنید که $x + 2$ یک عامل آن باشد.

$$A = x^4 - 16$$

توجه: اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد. به کمک اتحادهای فوق داریم:

الف:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4} + \dots + a^2 + a + 1)$$

مثال:

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب: در حالتی که n فرد باشد.

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - a^{n-4} + \dots + a^2 - a + 1)$$

مثال:

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

مثال: عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^7 - x^3$$

حل:

$$A = x^7 - x^3 = x^3(x^4 - 1) = x^3(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

تمرین برای حل:

۳۹: عبارت $x^6 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد.

۴۰: عبارت $x^6 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x + 1$ یک عامل آن باشد.

۴۱: عبارت $x^5 + 32$ را طوری تجزیه کنید که $x - 2$ یک عامل آن باشد.

۴۲: تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱) $x^5 - y^5 =$

۳) $1 - x^6 =$

۲) $x^4 - y^4 =$

۴) $x^5 - 32y^5 =$


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)