


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.toranjbook.net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.toranjbook.net)



## درس اول

حد بی نهایت



بخش پذیری چندجمله ای ها بر  $x-a$

اگر چندجمله ای  $f(x)$  را بر  $x - a$  تقسیم کنیم، آنگاه خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای مانند  $Q(x)$  می باشد و این تقسیم باقی مانده ای دارد که این باقی مانده، عددی مانند  $R$  است:

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

رابطه تقسیم به صورت مقابل است:



قضیه

در تقسیم چندجمله ای  $f(x)$  بر دو جمله ای درجه اول  $x - a$ ، باقی مانده تقسیم برابر  $R = f(a)$  است.

$$(x - a = 0 \Rightarrow x = a)$$

به عنوان مثال، باقی مانده تقسیم  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$  بر  $x - 2$ ، برابر است با:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow R = f(2) = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 1 = 9$$

نتیجه

اگر  $f(a) = 0$  باشد، آنگاه  $f(x)$  بر  $x - a$  بخش پذیر است.



تست

اگر  $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax$  بر  $x - 3$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

2 (4

3 (3

-3 (2

-2 (1

تست

اگر  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$  بر  $x - 2$  بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 1$  برابر

$-18$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

- 1)  $-2$       2)  $-4$       3)  $5$       4)  $6$



مثال

نشان دهید چندجمله ای  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 16$  بر  $x + 2$  بخش پذیر است. سپس  $f(x)$  را

به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

رفع ابهام  $\frac{0}{0}$  با استفاده از تجزیه چندجمله ای ها

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2}$

تلاشی در مسیر موفقیت

رفع ابهام  $\frac{0}{0}$  به کمک قاعده هوییتال

در قاعده هوییتال از صورت کسر به طور جداگانه و از مخرج کسر نیز جداگانه مشتق می گیریم و به ترتیب در

صورت و مخرج می نویسیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم. عدد به دست آمده، حاصل  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

می باشد.



تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x + 4}$  کدام است؟

4 (4)

2 (3)

1 (2)

$\frac{1}{2}$  (1)

تست

اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 3$ ، مقدار  $a + b$  کدام است؟

-14 (4)

-12 (3)

8 (2)

6 (1)

تست

اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + ax + 5} = b$  و  $b \neq 0$ ، مقدار  $b$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (4)

$-\frac{1}{4}$  (3)

$\frac{1}{4}$  (2)

$\frac{1}{2}$  (1)

نکته

وقتی  $x \rightarrow 0$ ، آن گاه حد هر چند جمله ای با حد یک جمله ای با کم ترین توان برابر است. برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x) \xrightarrow{\text{کم توان}} \lim_{x \rightarrow 0} (4x) = 0$$



دا

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 4x}$  کدام است؟

- 1 (1)      -1 (2)       $-\frac{1}{2}$  (3)      4 (4) صفر

هم ارزی ها در حدهای مثلثاتی



$\sin u \sim u$  ,  $\tan u \sim u$

اگر  $u \rightarrow 0$  آن گاه:

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{\tan(x^2 + 5x)}$  کدام است؟

- 1 (1) صفر      1 (2)       $\frac{2}{5}$  (3)       $\frac{3}{5}$  (4)

نکته

هم ارزی مهم دیگری که در حدهای مثلثاتی به کار می رود، هم ارزی  $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$  یا  $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$

می باشد. ( $u \rightarrow 0$ )

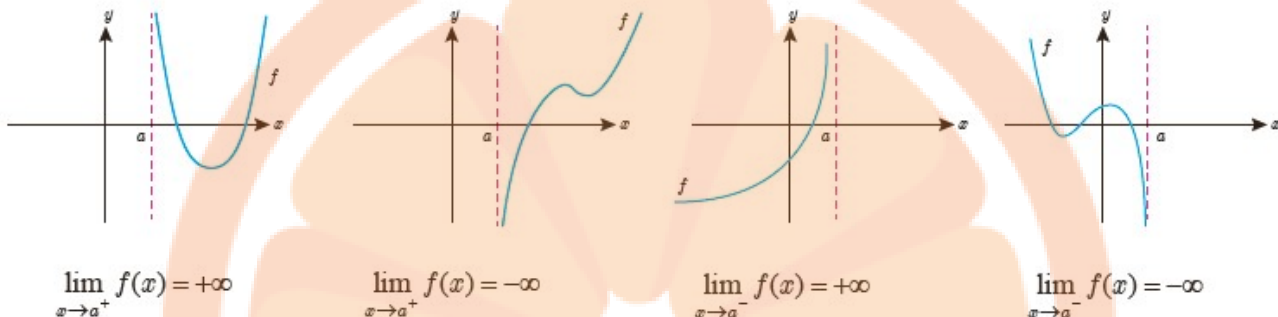


تست

حد کسر  $\frac{\sin x - \sin x \cos 2x}{2k \tan^3 x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  برابر یک است. مقدار  $k$  کدام است؟

- 1 (1)  $\frac{1}{2}$       2 (2)      1 (3)      4 (4) صفر

حد نامتناهی (حد بی نهایت)



محاسبه حدهای بی نهایت (X به سمت عدد a میل می کند و حاصل حد  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$



مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

مثال

نمودار تابعی مانند  $f$  را رسم کنید که در یک همسایگی معذوف  $-2$  تعریف شده باشد به طوری که  
 $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$  پاسخ خود را با جواب های دوستانتان مقایسه کنید.



تست

حاصل کدام یک از حدهای زیر نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{4x+3}{x+1} = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{2}{3})^+} \frac{4}{3x+2} = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]+4}{x} = +\infty \quad (3)$$

تست

مقدار  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+2}$  کدام است؟

$+\infty$  (4)

1 (3)

-1 (2)

$-\infty$  (1)

مثال

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}$





حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$



حدهای زیر را تعیین کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

چ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ)  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$

د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x$

ذ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x$

ر)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$



## تمرینات تکمیلی

1 نشان دهید چند جمله ای  $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است و سپس

$f(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

2 اگر  $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$  بر  $x - 1$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  را به دست آورید.

3 فرض کنیم  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 10$  باشد، اگر  $f(x)$  بر  $x+2$  بخش پذیر باشد و باقی

مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-2$  برابر 20 باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

4 حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{3-\sqrt{x+7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+12}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{4x-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-\sqrt{2x+6}}{x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-5x^2+3x+4}{2x^2-3x-20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sqrt{2x-1}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x^2+5x+6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{|x-2|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{3-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x+1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{[x]+2}{x^2+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+1}{3-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$$



رفع ابهام  $-\infty + \infty$  یا  $+\infty - \infty$

در حدها،  $+\infty + \infty = +\infty$  و  $-\infty - \infty = -\infty$ ، ولی  $+\infty - \infty$  و  $-\infty + \infty$  مبهم می باشند.

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$  کدام است؟

$+\infty$  (4)

$-\infty$  (3)

$\frac{1}{4}$  (2)

$-\frac{1}{4}$  (1)



تمرینات تکمیلی

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+7x^2}{3x^2+x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+\sqrt{6x+2}}{4x^2+5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2+x+1}}{7+5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4+3x+1}}{5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{6x+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+1+3x^4}{1-x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x-1}{x^3+4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3-2x^2+5}{-2x^4+3x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sqrt{x+1}}{5x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+\sqrt{x-2}}{5x^2-6x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x+\sqrt{x+1}}{3x-\sqrt{4x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+9}{2x+\sqrt{x^2-2}}$$

پنجم بولک  
تلاشی در مسیر موفقیت



## تست های تکمیلی

1 چندجمله ای  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$  بر  $x - 2$  بخش پذیر است و باقی مانده تقسیم

$f(x)$  بر  $x + 1$  برابر  $-15$  است. مقدار  $f(-2)$  کدام است؟

- (1)  $-18$       (2)  $-26$       (3)  $-30$       (4)  $-36$

2 چندجمله ای  $4x^3 + ax^2 - 7x - 2$  به صورت  $(x - 1)Q(x)$  تجزیه شده است. مقدار  $Q(-1)$

کدام است؟

- (1)  $-3$       (2)  $-4$       (3)  $4$       (4)  $3$

3 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 5x - 3}$  کدام است؟

- (1)  $\frac{13}{7}$       (2)  $\frac{20}{7}$       (3)  $\frac{27}{7}$       (4)  $\frac{34}{7}$

4 اگر حد  $\frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1-a) - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر  $1$  باشد،  $a$  چقدر است؟

- (1)  $-3$       (2)  $-\frac{1}{3}$       (3)  $\frac{1}{3}$       (4)  $3$

5 اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 - x} = -1$ ، حاصل  $a \times b$  کدام است؟

- (1)  $-12$       (2)  $-6$       (3)  $6$       (4)  $12$

6 اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + x + a} = b$  و  $b \neq 0$ ، مقدار  $b$  کدام است؟

- (1)  $\frac{1}{7}$       (2)  $\frac{1}{6}$       (3)  $-\frac{1}{7}$       (4)  $-\frac{1}{6}$

7 قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست تابع  $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$  به معادله  $y = 1$  در نقطه  $x$  کدام است؟

- 2 (1) 3 (2) 4 (3) 6 (4)

8 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$  کدام است؟

- 1 (1)  $-\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3) 1 (4)

9 حد چپ  $f(x) = \frac{(2 - [-x])\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2x^2 - 5x + 2}$  در  $x = 2$  کدام است؟

- 4 (1)  $-\frac{4}{3}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3) 4 (4)

10 نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{2ax - \sqrt[3]{-x^2 - 7}}{-x^3 - x^2 + 3x + (a+2)}$  از نقطه  $(1, 1)$  می‌گذرد. حد  $f(x)$  وقتی

$x \rightarrow -1$  کدام است؟

- $-\frac{11}{6}$  (1)  $-\frac{5}{6}$  (2)  $\frac{5}{6}$  (3)  $\frac{11}{12}$  (4)

11 حد تابع با ضابطه  $y = \frac{x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3}$  وقتی  $x \rightarrow -2$  چقدر است؟

- $-\frac{3}{4}$  (1)  $\frac{3}{4}$  (2)  $\frac{9}{8}$  (3)  $-\frac{9}{8}$  (4)

12 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$  کدام است؟

- $-\frac{1}{6}$  (1)  $-\frac{1}{12}$  (2)  $\frac{1}{12}$  (3)  $\frac{1}{6}$  (4)

13 اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $b$  کدام است؟

- (1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

14 اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$  باشد،  $b$  کدام است؟

- (1) -8 (2) -6 (3) 4 (4) 5

15 حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$  ، کدام است؟

- (1) 8 (2) 12 (3) 16 (4) 24

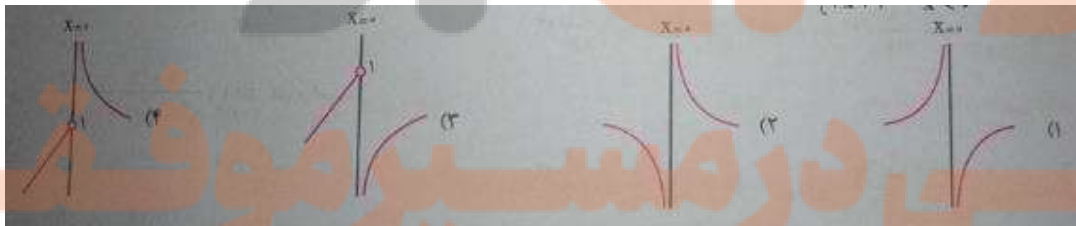
16 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$  ، کدام است؟

- (1) -112 (2) -96 (3) -84 (4) -72

17 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x^3-x}$  کدام است؟

- (1) صفر (2) -1 (3)  $+\infty$  (4)  $-\infty$

18 نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x > 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$  در نزدیکی  $x = 0$  به کدام صورت است؟



ریاضی دوازدهم ----- مهندس مرتضی مهرپویان 27 2 091076

19 نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  در همسایگی  $x = 0$  به کدام صورت است؟



20 نمودار تابع با ضابطه  $y = \frac{x+1}{x^3+x}$  در نزدیکی  $x = 0$  به کدام صورت است؟



21 مقادیر  $a$  و  $b$  برای آن که داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - ax + b} = +\infty$  کدام است؟

- (1)  $a = -b = 2$  (2)  $a = b = -2$  (3)  $a = b = 4$  (4)  $-a = b = -4$

22 اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2 + ax + b} = -\infty$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (1)  $-3$  (2)  $3$  (3)  $6$  (4)  $12$

23 حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$  کدام است؟

- (1)  $-\frac{7}{12}$  (2)  $-\frac{5}{12}$  (3)  $\frac{5}{12}$  (4)  $\frac{7}{12}$

24 حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$  کدام است؟

- (1)  $\frac{3}{8}$  (2)  $\frac{3}{16}$  (3)  $\frac{1}{8}$  (4)  $\frac{1}{16}$



حد عبارت  $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟

25

$+\infty$  (4)

1 (3)

$-\frac{1}{2}$  (2)

$-\infty$  (1)

پنجاه و یک بوک

تلاشی در مسیر موفقیت

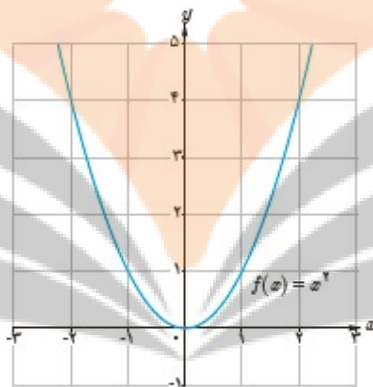
## درس دوم



حد در بی نهایت (رفتار تابع وقتی که  
 $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  باشد).

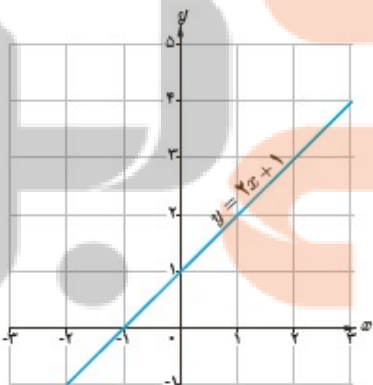
مثال

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی ها را بنویسید.



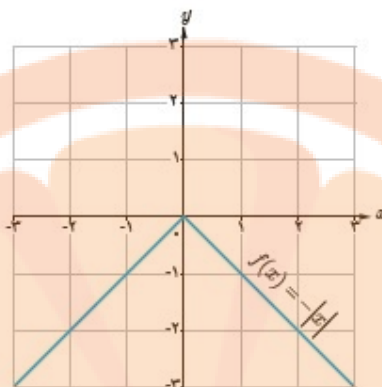
$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots$$



$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = \dots$$



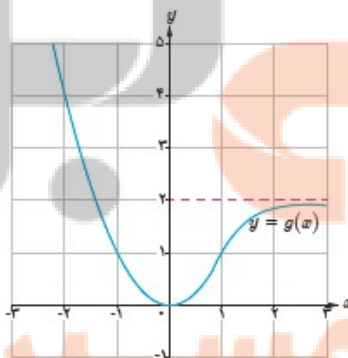
$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$



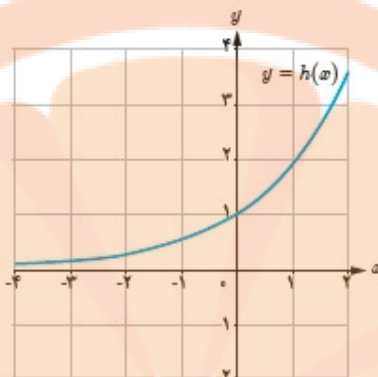
$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \dots$$



$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$



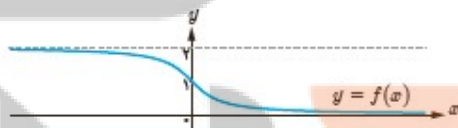
$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$$

مثال

با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

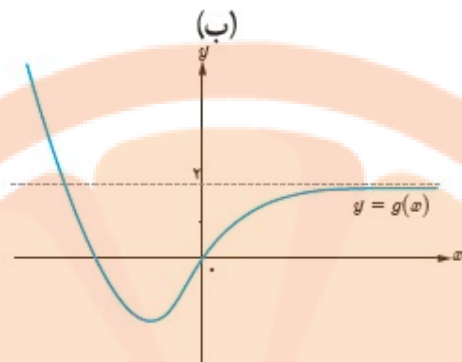
(الف)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

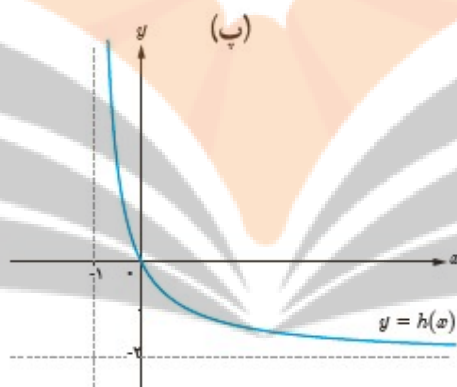
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$

تلاشی در مسیر موفقیت



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$$

مثال

نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:

پ)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

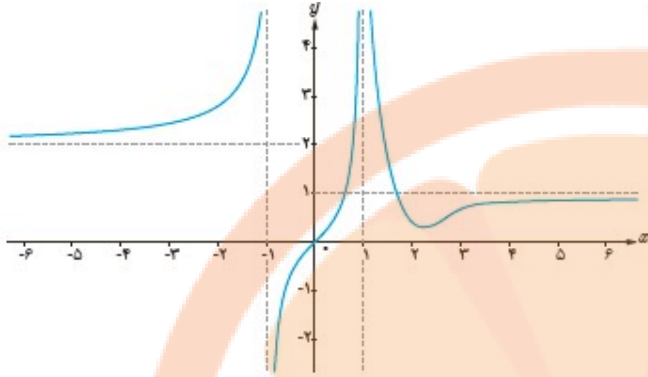
ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

تلاشی در مسیر موفقیت

# ریاضی دوازدهم ----- مهندس مرتضی مهرپویان



قضیه

فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

به عبارت دیگر:

قضیه

فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = M$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L \pm M \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right) = LM \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad (M \neq 0) \quad (\text{پ})$$

مثال

مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$  را به دست آورید.



تلاشی در مسیر موفقیت



مثال

مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$

ب)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$



نکته

با توجه به این که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  و با توجه به حد توان  $n$  هم یک تابع، حد تابع

$f(x) = x^n$  ( $n$  عدد صحیح مثبت) در  $+\infty$  و  $-\infty$  به صورت زیر تعیین می شود:

(1) اگر  $n = 2k$  و  $k \in N$  ( $n$  زوج باشد)، آنگاه:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = (+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

(2) اگر  $n = 2k + 1$  و  $k \in N$  ( $n$  فرد باشد)، آنگاه:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = (+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$

به عنوان مثال داریم:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = (\pm\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = (+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = (-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$



نکته

$+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نمی باشند، بلکه نمادهایی برای اعداد خیلی بزرگ مثبت و خیلی کوچک منفی هستند.

در محاسبه حد می توان از قواعد مقابل استفاده کرد:

$$(عدد مثبت) \times (+\infty) = +\infty, \quad (عدد مثبت) \times (-\infty) = -\infty$$

$$(عدد منفی) \times (+\infty) = -\infty, \quad (عدد منفی) \times (-\infty) = +\infty$$

بنابراین در محاسبه حد، حاصل ضرب یک عدد غیرصفر در بی نهایت ( $+\infty$  یا  $-\infty$ )، برابر  $\infty$  می شود و علامت آن با توجه به علامت های عدد و  $\infty$  مشخص می شود و با توجه به آن ها می توانیم حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$  را که در آن  $a$  یک عدد حقیقی غیر صفر و  $n$  یک عدد صحیح مثبت است، به دست آوریم.

به عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = -3 \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \right) = -3 \times (-\infty)^3 = -3 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = 5 \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \right) = 5(+\infty)^2 = 5 \times (+\infty) = +\infty$$

نکته مهم

(حد چندجمله ای ها): حد هر چند جمله ای به صورت  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1$ ،  $n$  عدد صحیح مثبت، در  $\pm\infty$ ، مساوی حد جمله ای است که بزرگترین درجه را دارد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

در این حالت می گوئیم حد هر چندجمله ای با حد جمله ای که بزرگترین درجه را دارد هم ارز است.



مثال

حاصل هر یک از حدهای زیر را تعیین کنید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 3x^3 + x - 1)$

آ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 2x + 7)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3 + x^2 + 1)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + x^2 + 2)$



مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 9 + \frac{7}{x^3}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

چ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

ح)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

خ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

د)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

مثال

حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x + 11}{x^2 + 7x - 11}$

آ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 + 7x + 1}{5x + 2}$

مثال

حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x^2 + 3}$

آ)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 5x}$

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{4x - \sqrt{9x^2 + x}}$  کدام است؟

5 (4

4 (3

3 (2

2 (1



نکته مهم

اگر در محاسبه حدها از هم ارزی استفاده کنیم و تمام عوامل آن حذف شوند، باید از روش های دیگر برای محاسبه حد استفاده کرد و استفاده از هم ارزی نتیجه ای ندارد.

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1}$  کدام است؟

2 (4

3 (3

-1 (2

-2 (1

نکته مهم

در توابع رادیکالی می توان از هم ارزی قوی تر زیر برای محاسبه حدها وقتی که  $x \rightarrow \pm\infty$  استفاده کرد.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|, (a > 0)$$

$$\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} \sim \sqrt[3]{a} \left( x + \frac{b}{3a} \right)$$



تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4x})$  کدام است؟

-1 (4

-2 (3

-3 (2

-4 (1

تست

حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1}-6x}{x+\sqrt{x^2-1}}$  کدام است؟

4 (4)

-4 (3)

3 (2)

-3 (1)

## تمرینات تکمیلی



1 a و b را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3+x^2+1}{6x^b-1} = -\frac{2}{3}$  باشد.

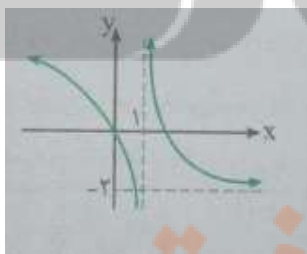
2 نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (ب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (آ)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  (ت)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (پ)



تلاشی در مسیر موفقیت

3 نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل است. حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

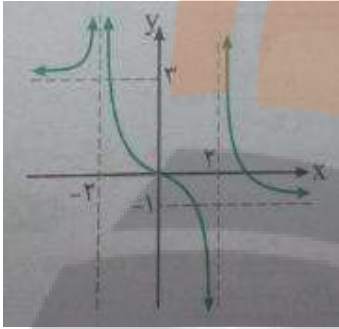
آ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ث)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$



تست های تکمیلی



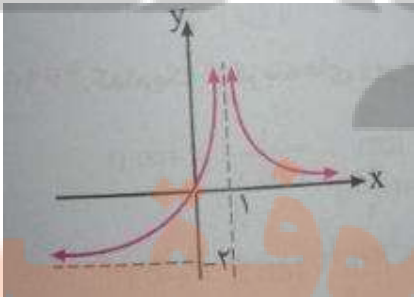
1 نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



2

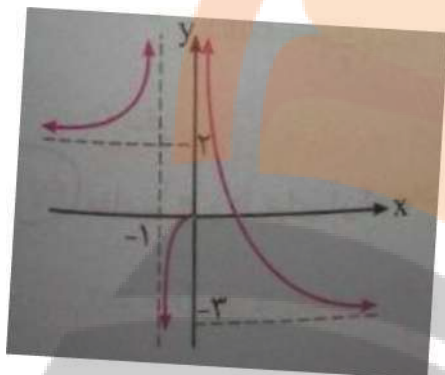
ممودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad (3)$$



3

کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 4x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 1) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + x^4 - 1) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 5x^2 + x) = +\infty \quad (3)$$

4

کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x^2+4} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x^2-4x+1)}{5x^2+x+2} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^3+1)}{x+2} = -\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{2x^2-4} = -\infty \quad (3)$$

5

حد کسر  $\frac{x^n+3x^2+1}{3x^n+5x^2+7}$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  برابر  $\frac{1}{2}$  است.  $n$  کدام است؟

$$n = 2 \quad (4)$$

$$n = 1 \quad (3)$$

$$n < 2 \quad (2)$$

$$n > 2 \quad (1)$$

6 حد کسر  $\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$  با شرط  $n > 3$ ، وقتی  $x \rightarrow \infty$  برابر  $-2$  است.  $m + n$  کدام است؟

- (1) 3/5 (2) 4 (3) 4/5 (4) 5

7 حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + \sqrt{-x+1}}{6x + \sqrt{4x^2-1}}$  کدام است؟

- (1)  $\frac{3}{4}$  (2)  $\frac{3}{2}$  (3)  $-\frac{3}{4}$  (4)  $-\frac{3}{2}$

8 اگر  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2+4x+2}{x+1} + ax + b \right) = 2$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

- (1) صفر (2) -1 (3) -2 (4) -3

9 حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 8x})$  کدام است؟

- (1) -8 (2) -4 (3) 4 (4) 8

10 حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$  کدام است؟

- (1) -8 (2) صفر (3) 4 (4)  $\infty$

11 حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$  کدام است؟

- (1)  $-\frac{1}{3}$  (2)  $-\frac{1}{4}$  (3)  $\frac{1}{3}$  (4)  $\frac{2}{3}$

12 در تابع ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$  باشد،  $f(-1)$  کدام است؟

- (1) -2 (2)  $\frac{3}{2}$  (3) 2 (4) 3

13 در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$  ، اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  باشد، آن گاه

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟

- 5 (4)                      3 (3)                      -4 (2)                      -6 (1)

14 در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$  ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$  باشد، آن گاه

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  کدام است؟

- $\frac{1}{3}$  (4)                       $\frac{1}{4}$  (3)                       $-\frac{1}{8}$  (2)                       $-\frac{1}{6}$  (1)

15 اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$  باشد، آن گاه حد این کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟

- 5 (4)                      4 (3)                      2 (2)                      1 (1)

16 نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$  از نقطه (1 و 2) می گذرد. حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

- 1 (4)                       $\frac{2}{3}$  (3)                       $\frac{1}{3}$  (2)                       $-\frac{1}{3}$  (1)

17 در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$  ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- $\frac{3}{2}$  (4)                       $\frac{3}{4}$  (3)                       $\frac{2}{3}$  (2)                       $\frac{1}{3}$  (1)

در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$  باشد، آن گاه حد وقتی

18

$x \rightarrow -1$  کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (4)

$\frac{3}{2}$  (3)

$\frac{5}{6}$  (2)

$\frac{2}{3}$  (1)



پنجاه و پنج سالگی

تلاشی در مسیر موفقیت




تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)