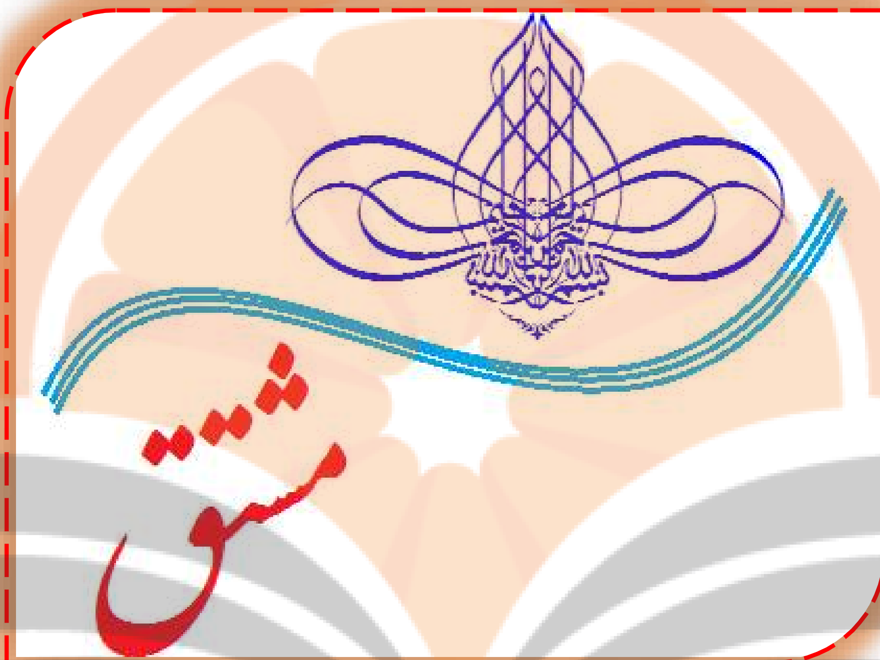
مشتق و کاربـــــــرد آن

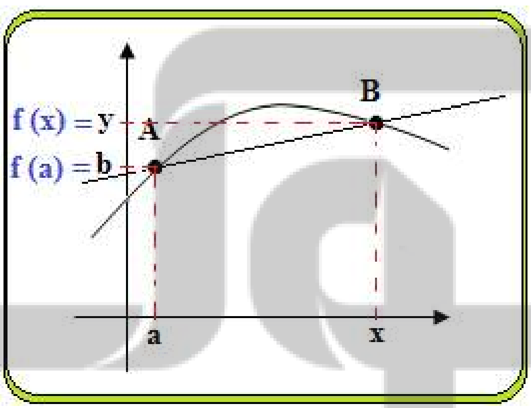
ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی



آهنگ تغییرات تابع :

اگرتغییرات تابع را با Δy و تغییرات متغیر را با Δx نمایش دهیم ، آهنگ تغییرات تابع به صورت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعریف می شود .



در شکل روبـــــرو می خواهیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بین دو نقطه A و B به دست آوریم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x - a}$$

و یا اگر بر حسب تابع $y = f(x)$ بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

توجه :

می دانیم شیب خطی که از دو نقطه A و B می گذرد برابر است با :

$$m_{AB} = \frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

این خط را قاطع (وتر) منحنی $y = f(x)$ می نامند .

نکته :

چنانچه در روابط بالا قرار دهیم : $\Delta x = x - a$ که در اینصورت : $x = a + \Delta x$ و آهنگ تغییرات تابع به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

تعریف مشتق:

فرض کنیم تابع f در یک بازه شامل a تعریف شده باشد اگر حدهای زیر موجود و عدد حقیقی باشد

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{و یا} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

آنها را مشتق متناهی تابع f و یا مشتق تابع f در نقطه ی x = a می نامیم . و با $f'(x)$ و $f'(a)$ نشان می دهیم .

مثال : مشتق تابع $y = ۳x + ۵$ را در نقطه $x = ۲$ به دست آورید :

حــــــل : تعریف مشتق در نقطه ی معلوم x = ۲ عبارتست از :

$$f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'\ ۲\ = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x + ۵ - ۱۱}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x - ۶}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳\cancel{(x-۲)}}{\cancel{x-۲}} = ۳$$

مثال : مشتق تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را با استفاده از تعریف بیابید .

حــل :

ابتدا تعریف مشتق را در حالت کلی می نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(x+\Delta x)^۲ - ۲(x+\Delta x) - x^۲ + ۲x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{x^۲ + ۲x\Delta x + \Delta x^۲ - ۲x - \Delta x - x^۲ + ۲x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta x(۲x - \Delta x - ۲)}{\Delta x} = ۲x - ۲$$

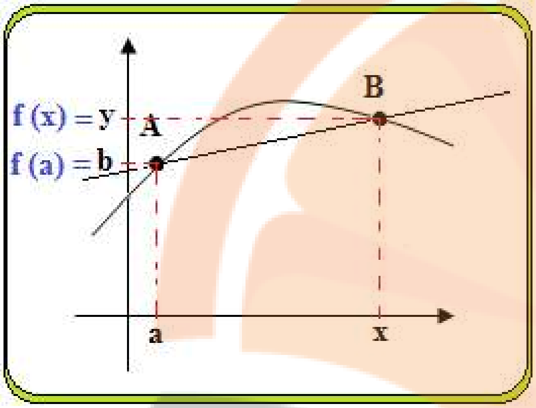
یعنی مشتق تابع داده شده برابر $f'(x) = ۲x - ۲$ است که برای محاسبه ی مشتق این تابع در هر نقطه ی دلخواه کافی است به جای x مقدار داده شده را قرار دهیم : مثلاً $f'(۳) = ۲(۳) - ۲ = ۴$

مشتق و کاربـــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

تعبیر هندسی



اگر در شـــکل روبرو اگر نقطه B به نقطه ی A نزدیک و نزدیکتر شود و یا بـه عبارتی $x \to a$ خط قاطع AB به صورت مماس بر منحنی تبدیل می شود و شیب آن بصورت زیر محاسبه می شود :

$$m_{AB} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته ۱ : از تعبیر هنـــــدسی خط مماس و تعریف مشتق در نقطه ی a نتیجه می گیریم که شیب خط مماس بر یک منحنی برابر است با اندازه ی مشتق در نقطه تماس . $\boxed{m = f'(a)}$

نکته ۲ : مشتق تابع $y = f(x)$ را با نمادهای زیر نیز نشان می دهند .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$$

مثال

معادله ی خط مماس بر منحنی $y = x^2$ را در نقطه ی به طول $x_\circ = 3$ واقع بر آن را بنویسید .

حل :

$$x_\circ = 3 \xrightarrow{y=x^2} y_\circ = 9$$

$$f'(x) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$$

$$\left| \begin{array}{l} A(3,9) \\ m = f'(3) = 6 \end{array} \right. \Rightarrow y - f(x_\circ) = f'(x_\circ)(x - x_\circ) \Rightarrow y - 9 = 6(x-3) = y = 6x - 9$$

مشتق به عنوان آهنگ تغییر لحظه ای و متوسط (مشتق در فیزیک)

اگر در تابع $y = f(x)$ متغیر x از x_1 به x_2 تغییر کند آهنگ متوسط تغییر f وقتی x از مقدار x_1 به مقدار x_2 تغییر کند را به صورت $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ تعریف می کنند .

و اگر $x_2 - x_1 = \Delta x$ آهنگ متوسط تغییر f به صورت زیر تعریف می شود :

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

دا

r

مشتق و کاربـــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

اگر میزان تغییر x یعنی Δx به سمت صفر میل کند ، در صورتی که حد کسر فوق وقتی Δx به صفر میل کند وجود داشته باشد ، آن را آهنگ لحظه ای تغییر y در واحد تغییر x در نقطه ی $x_۱$ گویند :

$$\text{آهنگ لحظه ای تغییر در } x_۱ = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} = f'(x)$$

نتیجه : در تابع $y = f(x)$ آهنگ لحظه ای تغییر y در نقطه ی $x_۱$ برابر مشتق تابع در $x_۱$ یعنی $f'(x_۱)$ است .

مثال : معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = -۵t^۲ + ۲۰t$ می باشد . سرعت لحظه ای این متحرک هنگامی که از مبدأ می گذرد را بیابید .

حـــــل : زمانی که متحرک از مبدأ می گذرد $f(t) = ۰$ لذا داریم :

$$f(t) = ۰ \Rightarrow -۵t^۲ + ۲۰t = ۰ \to t(-۵t + ۲۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = ۴ \end{cases}$$

$t = ۰$ همان لحظه شروع حرکت است . بنابراین در $t = ۴$ دوباره از مبدأ می گذرد .

$$v = f'(x) = -۱۰x + ۲۰ \to f'(۴) = -۴۰ + ۲۰ = -۲۰$$

نکته : در بازه ای که سرعت مثبت باشد متحرک به سمت راست حرکت می کند و برعکس .

$$x = -۱ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow A(-۱,-۱) \quad , \quad f'(x) = ۷x^۶$$

$$m = ۷(-۱)^۶ = ۷ \Rightarrow \qquad m'_{\text{قائم}} = \frac{-۱}{۷} \Rightarrow \quad y-(-۱) = -\frac{۱}{۷}(x-(-۱))$$

مشتق در علم اقتصاد

در اقتصاد مقدار نهایی تابع را مشتق تابع می گیرند ، به عبارتی اگر در یک شرکت ، برای تولید x واحد از یک کالا تابع $C(x)$ هزینه شود ؛ افزایش متوسط هزینه از x به $x+\Delta x$ برابر $\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$ تعریف می شود و حد این نسبت وقتی Δx به صفر میل می کند ، هزینه نهایی تولید x واحد کالا می نامند ، یعنی :

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

و این بدان معناست که اگر شرکتی در حال حاضر x واحد کالا تولید می کند ، میزان تولید را یک واحد افزایش دهد هزینه این یک واحد افزایش داده شده تقریباً برابر با $C'(x)$ است .

مثال هزینه ساخت x تلویزیون از تابع $C(x) = ۶۰۰۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰۰x - ۳۰۰x^۲$ بر حسب تومان محاسبه می شود . هزینه تولید ۱۰۱اُمین یخچال چقدر است ؟ و معنی آن را توضیح دهید .

حـــــل :

هزینه نهایی xاُمین کالا $C'(x) = ۳۰۰۰۰۰ - ۶۰۰x$

تومان $C'(۱۰۰) = ۳۰۰۰۰۰ - ۶۰۰۰۰ = ۲۴۰۰۰۰$

۴

مشتق و کاربـــــــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ تلویزیون تولید کرده و بخواهد ۱۰۱اُمین تلویزیون را تولید کند تقریباً ۲۴۰۰۰۰تومان باید هزینه کند .

مثال

هزینه ساخت x یخچال از تابع $C(x)=۸۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰x-۵۰۰x^{۲}$ بر حسب تومان محاسبه می شود . هزینه تولید ۱۰۱اُمین یخچال چقدر است ؟

حــــــــل :

$$C'(x)=۴۰۰۰۰۰-۱۰۰۰x \quad \text{هزینه نهایی } x\text{اُمین کالا}$$

$$C'(۱۰۰)=۴۰۰۰۰۰-۱۰۰۰۰۰=۳۰۰۰۰۰ \quad \text{تومان}$$

مشتق های یک طرفه

از آنجایی که مشتق به صورت نوعی حد تعریف شده است ؛ با توجه به حد های چپ و راست تابع می توان مشتق های چپ و راست را نیز به صورت زیر معرفی کرد .

مشتق راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست x تعریف شده باشد در این صورت حد زیر در صورت وجود و متناهی بودن مشتق راست تابع نامیده می شود : $f'_{+}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to ۰^{+}}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مشتق چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ x تعریف شده باشد در این صورت حد زیر در صورت وجود و متناهی بودن مشتق چپ تابع نامیده می شود : $f'_{-}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to ۰^{-}}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

قضیه : تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و برابر باشد . $\boxed{f'_{+}(a)=f'_{-}(a)}$

مثال

تابع با ضابطه ی $y=x\mathrm{Sin}\dfrac{۱}{x}$ مفروض است مشتق های چپ و راست تابع را در نقطه $x=۰$ به دست آورید .

حــــــــل :

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\cancel{x}\sin\frac{۱}{x}-۰}{\cancel{x}-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\sin\frac{۱}{x}$$ ن دارد

مشتق راست نیز به همین صورت وجود ندارد .

مثال

تابع f با ضابطه ی $f(x)=x^{۲}[x]$ تعریف شده است ، آیا تابع f در نقطه ی $x=۰$ مشتق پذیر است ؟

حـــل :

مشتق و کاربـــــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2[x]}{x}=0 \\ f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2[x]-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}x[x]=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x[x]=0$$

پس تابع f در نقطه ی $x=0$ مشتق پذیر است .

ارتباط مشتق با پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x = a مشتق پذیر باشد ، آن گاه تابع در نقطه ی x = a پیوسته می باشد .

نکته : عکس این مطلب درست نیست .

f در a پیوسته است . $\Rightarrow$ f در a مشتقپذیر باشد .
f در a مشتق ناپذیر است . $\Rightarrow$ f در a نا پیوسته باشد .

مثال

به ازای چه مقدار از a و b تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}(x^2bx)([x]-2) & x\geq 3\\ x^2[x]+a & x<3\end{cases}$ مشتق پذیر است ؟

حـــــل : اولاً : باید پیوسته باشد :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2bx)([x]-2)=9-3b=f(3)\\ \lim\limits_{x\to 3^-}x^2[x]+a=18+a\end{array}\right\}\Rightarrow 18+a=9-3b\Rightarrow a+3b=-9\quad (1)$$

ثانیاً : باید مشتق چپ و راست برابر باشند :

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x^2bx)([x]-2)-(9-3b)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-bx+3b-9}{x-3}=6-b \\ f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2[x]+a-(9-3b)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+\overbrace{a+3b}^{(1)}-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2-18}{x-3}=12\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$6-b=12\Rightarrow b=-6\xrightarrow{(1)}a=9$$

مشتق عامل صفر شونده

اگر تابع $f(x)=(x-a)g(x)$ باشد و g(x) در نقطه ی x = a پیوسته باشد برای محاسبه مشتق f در x = a داریم :

$$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}g(x)$$

که با توجه به اینکه g(x) در نقطه ی x = a پیوسته است $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ و لذا $f'(a)=g(a)$

توجه :

در این حالت می توانیم از عامل صفر شونده مشتق گرفته و در بقیه عبارت ها ضرب کرده و نهایتاً به جای x مقدار a را قرار می دهیم .

مثال

مشتق تابع باضابطه ی $y=(x^{۳}-۱)(x^{۳}-۲)....(x^{۳}-۲۸)$ در $y=۳$ کدام است ؟ (آزاد – ۸۹)

۱) $۲۷!$ ۲) $۲۶!$ ۳) $-۲۷!$ ۴) $-۲۶!$

حـــــــل :

در این تابع $y=(x^{۳}-۱)(x^{۳}-۲)....(x^{۳}-۲۷)(x^{۳}-۲۸)$ عامل صفر شونده $x^{۳}-۲۷$ است که فقط از آن مشتق می گیریم :
$f'(x)=(x^{۳}-۱)(x^{۳}-۲)....(۳x^{۲})(x^{۳}-۲۸)$

بنابراین : $f'(۳)=(۲۶)(۲۵)....(۱)(۳\times ۳^{۲})(-۱)=-۲۷!$

مثال

مشتق تابع با ضابطه ی $f(x)=\dfrac{(x-۱).\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}}$ در نقطه $x=۱$ کدام است ؟ (ریاضی – ۸۳)

۱) $\dfrac{۱}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{۱}{۸}$ ۳) $\dfrac{۳}{۴۰}$ ۴) $\dfrac{۵}{۱۶}$.

حـــــــل :

عامل صفر شونده $(x-۱)$ است که مشتق آن ۱ است .

$$f'(x)=\frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۱۶}$$

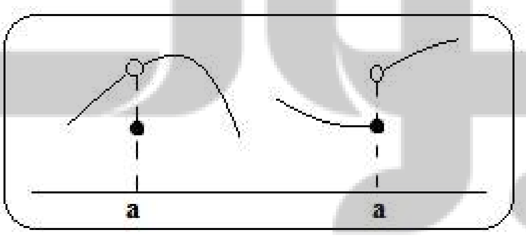
توجه : در این مسائل می توان از تعریف نیز استفاده کرد .

نقاط مشتق ناپذیر

اگر در تابعی $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود نباشد تابع در نقطه ی a مشتق ناپذیر است که ممکن است یکی از حالت های زیر اتفاق بیفتد :

حالت اول – نقطه ی ناپیوستگی :

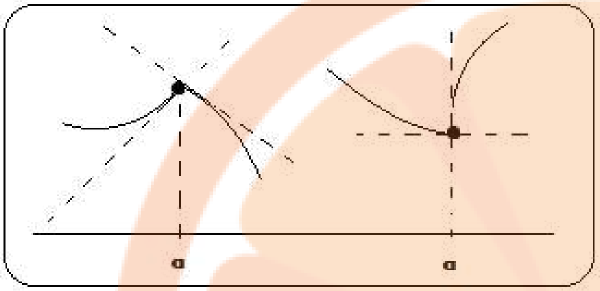
اگر تابع f در نقطه ی a پیوسته نباشد در این نقطه مشتق ناپذیر است . که ممکن است یکی از دو حالت ناپیوستگی (رفع شدنی و رفع ناشدنی) را داشته باشد



مثال

تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۰\\ ۲x & x\le ۰\end{cases}$ در $x=۰$ ناپیوسته است و در این نقطه مشتق ناپذیر است ، اما در این نقطه مشتق چپ وجود دارد و مقدار آن مساوی ۲ است .

حالت دوم - نقطه ی زاویه دار یا گوشه



اگر تابع f در نقطه ی درونی a پیوسته باشد ، ولی مماس های چپ و راست در آن نقطه نابرابر و حداقل یکی از آنها قائم نباشد تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است (زیرا مشتق های جزئی در این نقطه نابرابرند) و این نقطه را نقطه ی زاویه دار یا گوشه می نامیم به عبارت دیگر در این نقطه خط مماس وجود ندارد .)

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^3-1\right|$ را در نقطه ی $x=1$ را بررسی کنید .

حـــــل :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^3-1\right|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left|x-1\right|}{x-1}\times\left(x^2+x+1\right)=\begin{cases}f'_-(1)=-3\\ f'_+(1)=3\end{cases}$$

با توجه به اینکه مشتق های چپ و راست موجود ولی برابر نیستند تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است و تابع در این نقطه زاویه دار است .

بهتر است بدانیم :

تابع با ضابطه ی $f(x)=\left|(x-\alpha)(x-\beta)^n\right|$ به ازای ریشه های ساده ی داخل قدرمطلق یعنی $x=\alpha$ مشتق ناپذیر و به ازای ریشه های مکرر مرتبه زوج یا فرد مانند $x=\beta$ مشتق پذیر است .

حالت سوم – وجود مماس قائم

اگر تابع f در نقطه ی a پیوسته اما مشتق در این نقطه $\pm\infty$ شود آنگاه خط $x=a$ خط مماس قائم بر نمودار تابع f تعریف می شود که خود دو حالت دارد :

۱ – اگر شیب خطوط قاطع از چپ به راست هر دو به $-\infty$ یا هر دو به $+\infty$ میل کنند ، این نقطه را عطف قائم می نامیم

۲ – اگر این شیب یکی به $+\infty$ و دیگری به $-\infty$ میل کند ، این نقطه را نقطه ی بازگشتی می نامند .

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه ی $x=0$ را بررسی کنید .

حـــــل :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\begin{cases}f'_-(0)=+\infty\\ f'_+(0)=+\infty\end{cases}$$

چون مشتق های جزئی از چپ و راست به $+\infty$ میل کرده اند پس تابع درنقطه $x=0$ مشتق ناپذیر است و این نقطه برای تابع عطف قائم است .

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه ی $x=0$ را بررسی کنید .

حـــــــــل :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\begin{cases} f'_-(0)=-\infty \\ f'_+(0)=+\infty \end{cases}$$

چون مشتق های جزئی از چپ و راست به $-\infty$ و $+\infty$ میل کرده اند پس تابع درنقطه $x=0$ مشتق ناپذیر است و این نقطه برای تابع نقطه ی بازگشتی است .

دستورات و قواعد مشتق گیری

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=a$	$y'=0$	
۲	$y=ax+b$	$y'=a$	
۳	$y=ax^n$	$y'=nax^{n-1}$	$y=5x^3\Rightarrow y'=3(5)x^{3-1}=15x^2$
۴	$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=3x^4-18x^5\Rightarrow y'=12x^3-90x^4$
۵	$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=(x^2-3x)(3x-1)\Rightarrow$ $y'=(2x-3)(3x-1)+3(x^2-3x)$
۶	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$y=\frac{x^2+2x}{3x+4}\Rightarrow y'=\frac{(2x+2)(3x+4)-3(x^2+2x)}{(3x+4)^2}$
۷	$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(x^2-3x)^7\Rightarrow y'=7(2x-3)(x^2-3x)^6$
۸	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^2+5x}\Rightarrow y'=\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$
۹	$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y=\sqrt[5]{x^3-x^2}\Rightarrow y'=\frac{3x^2-2x}{5\sqrt[5]{(x^3-x^2)^4}}$
۱۰	$y=\sqrt[n]{u^m}$	$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\sqrt[7]{(x^2-4x+1)^3}\Rightarrow y'=\frac{3(2x-4)}{7\sqrt[7]{(x^2-4x+1)^4}}$
۱۱	$y=\sin x$	$y'=\cos x$	
۱۲	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	
۱۳	$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x$	
۱۴	$y=\operatorname{Cot}x$	$y'=-(1+\operatorname{Cot}^2 x)$	
۱۵	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	

۱۶	$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
۱۷	$y=\tan u$	$y'=u'\left(۱+\tan^{۲}u\right)$	$y=\tan x^{۲}\Rightarrow y'=۲x\left(۱+\tan^{۲}x^{۲}\right)$
۱۸	$y=\mathrm{Cot}u$	$y'=-u'\left(۱+\mathrm{Cot}^{۲}u\right)$	
۱۹	$y=\sin^{n}u$	$y'=nu'\cos u\sin^{n-۱}u$	
۲۰	$y=\cos^{n}u$	$y'=-nu'\sin u\cos^{n-۱}u$	
۲۱	$y=\tan^{n}u$	$y'=nu'\left(۱+\tan^{۲}u\right)\tan^{n-۱}u$	
۲۲	$y=\mathrm{Cot}^{n}u$	$y'=-nu'\left(۱+\mathrm{Cot}^{۲}u\right)\cot^{n-۱}u$	

مثال

مشتق توابع زیر را بدست آورید :

الف) $f(x)=\frac{\left(۳x^{۲}-۱\right)^{۳}}{x+۱}$ (خرداد ۹۰)

$$f'(x)=\frac{۳(۶x)\left(۳x^{۲}-۱\right)^{۲}(x+۱)-۱\times\left(۳x^{۲}-۱\right)^{۳}}{(x+۱)^{۲}}$$

ب) $g(x)=\sqrt{۱-۲\cos ۳x}$ (خرداد ۹۰)

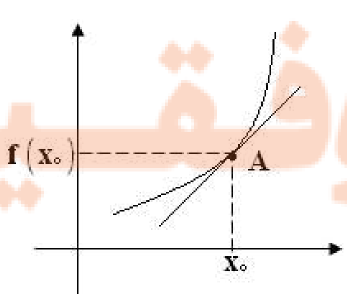
$$g'(x)=\frac{۶\sin x}{۲\sqrt{۱-۲\cos ۳x}}$$

ج) $y=\sin^{۲}(\cos\pi x)$

$$y'=۲(-\pi\sin\pi x)\cos(\cos\pi x)$$

د) $y=\cos^{۳}۲x+\sqrt[۳]{x^{۲}}$

$$y'=-۳(۲\sin n۲x)\cos^{۲}۲x+\frac{۲(۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$



معادله ی خطوط مماس و قائم بر منحنی

الف ـ از نقطه ای روی منحنی

برای نوشتن معادله خط به شیب آن و یک نقطه از آن نیاز داریم .

مشتق و کاربـــــــــــرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x_0 برابر است با شیب خط مماسی که در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ بر منحنی تابع رسم می شود . بنابراین معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

مثال : معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه ی به طول ۱ واقع بر منحنی بیابید .

حـــــــل :

$$x_0=1\rightarrow y_0=1\Rightarrow A(1,1)$$

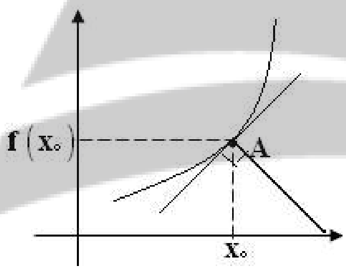
$$f'(x)=3x^2 \quad \Rightarrow \quad \text{شیب خط مماس } m=f'(x_0)=f'(1)=3$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-1=3(x-1)\Rightarrow y=3x-2$$

خط قائم بر منحنی:

در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ واقع بر منحنی $y=f(x)$ خط مماسی بر منحنی رسم می کنیم اگر در نقطه ی تماس خطی بر خط مماس عمود کنیم خط حاصل را عمود بر منحنی در نقطه ی $A(x_0,f(x_0))$ می گویند .

شیب خط قائم بر منحنی ، عکس و قرینه ی شیب خط مماس است .



$$\text{شیب خط قائم } m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{f'(x_0)}$$

مثال : معادله ی خط قائم بر منحنی نمایش تابع $y=x^7$ در نقطه متناظر $x=-1$ را بیابید .

حـــــــل :

$$\text{معادله ی خط قائم } y=-\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$$

ب-از نقطه ای خارج از منحنی

برای یافتن خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه ی $B(x_0,y_0)$ واقع در خارج از منحنی تابع f به دو روش زیر عمل می کنیم :

روش اول)

نقطه ی تماس را به صورت $T(\alpha,f(\alpha))$ فرض می کنیم و معادله ی خط مماس را مانند قبل به صورت $\boxed{y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)}$ می نویسیم چون این خط ار نقطه ی معلوم B می گذرد ، باجایگذاری مختصات این نقطه در معاده ی مماس مقدار α و نهایتاً خط مماس مشخص می شود .

روش دوم)

ابتدا معادله ی تمامی خطوطی که از نقطه $B(x_0,y_0)$ واقع در خارج از منحنی میگذرد را به صورت زیر می نویسیم :

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

سپس محل تلاقی این خط با منحنی داده شده را تشکیل می دهیم :

$$\begin{cases}y-y_0=m(x-x_0)\\ y=f(x)\end{cases}\Rightarrow f(x)-y_0=m(x-x_0)$$ معادله ی تلاقی :

حال m را چنان تعیین می کنیم که معادله ی اخیر ریشه ی مضاعف داشته باشد .

مثال

به ازای کدام مقدار k ، زاویه ی بین مماس های رسم شده از مبدأ مختصات بر نمودار تابع $y=x^2+x+k$ برابر 90° است ؟

حـــل :

معادله ی خطوط گذرنده از مبدأ به صورت $y = mx$ است . این معادله را با تابع داده شده قطع می دهیم :

$$\begin{cases}y=mx\\ y=x^2+x+k\end{cases}\Rightarrow x^2+x+k=mx\Rightarrow x^2+(1-m)x+k=0$$

این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد یعنی :

$$\Delta=b^2-4ac=(1-m)^2-4k=0\Rightarrow m^2-2m+(1-4k)=0$$

ریشه های این معادله شیب مماس های رسم شده بر منحنی اند که طبق فرض سئوال باید بر هم عمود باشند لذا :

$$m_1m_2=-1\Rightarrow p=\frac{c}{a}=1-4k=-1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

مشتق تابع مرکب

اگر تابع u در x مشتق پذیر و f تابعی باشد که در $u(x)$ مشتق پذیر باشد خواهیم داشت :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'.f'(u)$$

یا می توان نوشت :

$$y=fog(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$$

و یا اگر y تابعی بر حسب u باشد $(y=f(u))$ و u تابعی بر حسب x باشد $(y=g(u))$ آنگاه خواهیم داشت :

$$y'_x=y'_u\times u'_x$$

مثال

اگر $y=u^2-2u$ و $u=\text{Cos}x$ باشد . y'_x را بنویسید .

$$y'_x=(2u-2)(-\text{Sin}\,x)=(2\text{Cos}x-2)(-\text{Sin}x)$$

مشتق توابع معکوس

تعریف : تابع f بر بازه $[a,b]$ معکوس پذیر است هرگاه یک به یک باشد .

در صورتی که $y = f(x)$ تابع معکوس آن به صورت $y=f^{-1}(x)$ خواهد بود که اگر $(a,b)\in f$ آن گاه $(a,b)\in f^{-1}$.

برای یافتن مشتق تابع $y=f^{-1}(x)$ در $x=b$ واقع بر این تابع باید مشتق تابع f را در $x=a$ به دست آوریم و :

$$\boxed{(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}}$$

مثال

تابع $f(x)=x^{2}-4x+7$ با دامنه ی $[4,+\infty)$ مفروض است ، مقدار مشتق تابع معکوس تابع f را در $b=7$ $(b\in D_{f^{-1}})$ را پیدا کنید .

حل :

چون عدد ۷ متعلق به دامنه ی f^{-1} است این عدد متعلق به برد f است پس :

$$x^{2}-4x+7=7\Rightarrow x^{2}-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\notin D_f & \text{ق}\\ x=4\end{cases}$$

$$f(4)=7\quad,\quad f'(x)=2x-4$$

$$(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{4}$$

مثال

تابع $f(x)=2x^{3}+x+1$ مفروض است ، معادله خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطه ی به طول ۴ واقع بر آن بنویسید .

حل :

می دانیم : $4\in D_{f^{-1}}$ در اینصورت $4\in R_f$ و لذا می توان نوشت :

$$2x^{3}+x+1=4\Rightarrow 2x^{3}+x-3=0$$

$$\Rightarrow 2x^{3}+x-2-1=0$$

$$\Rightarrow 2(x^{3}-1)+(x-1)=0\Rightarrow 2(x-1)(x^{2}+x+1)+(x-1)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^{2}+2x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}2x^{2}+2x+3=0\Rightarrow\Delta<0\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

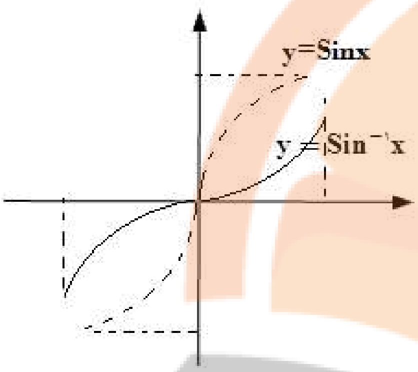
برای نوشتن معادله ی خط مماس باید شیب خط مماس را در نقطه $(4,1)\in f^{-1}$ به دست آوریم :

$$f(x)=2x^{3}+x+1\Rightarrow f'(x)=6x^{2}+1\Rightarrow f'(1)=7$$

$$m=(f^{-1})'\ 4\ =\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{7}$$

و معادله ی خط مماس عبارتست از :

$$\begin{cases}(4,1)\\ m=\frac{1}{7}\end{cases} \Rightarrow y-1=\frac{1}{7}(x-4) \Rightarrow x-7y+3=0$$



مشتق توابع معکوس مثلثاتی

در توابع معکوس مثلثاتی می توان نوشت :

$$y=\mathrm{Sin}^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x=\mathrm{Sin}\,y$$

با توجه به مشتق توابع معکوس داریم :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \Rightarrow y'=\frac{1}{(\mathrm{Sin}\,y)'}=\frac{1}{\mathrm{Cos}\,y}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 y}}$$

$$\xrightarrow{x=\mathrm{Sin}\,y} \boxed{y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

برای بقیه نسبتهای مثلثاتی معکوس خواهیم داشت :

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=\mathrm{Sin}^{-1}x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
۲	$y=\mathrm{Cos}^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
۳	$y=\tan^{-1}x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	
۴	$y=\cot^{-1}x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$	
۵	$y=\mathrm{Sin}^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=\mathrm{Sin}^{-1}x^2 \Rightarrow y'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
۶	$y=\mathrm{Cos}^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=\mathrm{Cos}^{-1}\lvert x\rvert \Rightarrow y'=\frac{-\frac{x}{\lvert x\rvert}}{\sqrt{1-x^2}}$
۷	$y=\tan^{-1}u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$	$y=\tan^{-1}\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\lvert x\rvert}$
۸	$y=\cot^{-1}u$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$	$y=\cot^{-1}\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'=-\frac{\frac{2\times 1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1+x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}\;1+\sqrt[3]{x}}$

۱۴

مشتق و کاربرد آن

ویژه دانش آموزان رشته های

تجربی و ریاضی

خواص و نکات توابع معکوس مثلثاتی

۱ – در تابع $y=\sin^{-1}x$ دامنه برابر بازه ی $[-1,1]$ و برد آن بازه ی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\sin x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۲ – در تابع $y=\cos^{-1}x$ دامنه برابر بازه ی $[-1,1]$ و برد آن بازه ی $[0,\pi]$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\cos x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۳ – در تابع $y=\tan^{-1}x$ دامنه مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن بازه ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\tan x$ نسبت به خط $y=x$ است .

۴ – در تابع $y=\cot^{-1}x$ دامنه مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن بازه ی $(0,\pi)$ و نمودار آن قرینه نمودار تابع $y=\cot x$ نسبت به خط $y=x$ است .

مشتق تابع نمایی و لگاریتمی

عدد نپر : با حرف e نمایش داده می شود و مقدار آن حدوداً ... ۲/ ۷۱۸۲ می باشد .

برای محاسبه مشتق توابع نمایی از دستورات زیر استفاده می کنیم :

۱) $y=a^x \Rightarrow \boxed{y'=a^x\ln a}$

۲) $y=a^u \Rightarrow \boxed{y'=u'a^u\ln a}$

۳) $y=e^x \Rightarrow \boxed{y'=e^x}$

۴) $y=e^u \Rightarrow \boxed{y'=u'e^u}$

۵) $y=u^v \xrightarrow{\ln} \ln y=v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{vu'}{u} \Rightarrow \boxed{y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)}$

مشتق توابع لگاریتمی:

۱) $y=\log_a x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e}$

۲) $y=\log_a u \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'}{u}\log_a e}$

۳) $y=\ln x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x}}$

۴) $y=\ln|u| \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{u}}$

تذکر : لگاریتم x در پایه ی e را با lnx نمایش می دهیم .

مثال :

۱) $y=5^x \Rightarrow y'=5^x\ln 5$

۲) $y=2^{x^2-3x} \Rightarrow y'=(2x-3)2^{x^2-3x}\ln 2$

۳) $y=x^3e^x \Rightarrow y'=3x^2e^x+x^3e^x$

۴) $y=e^{x^2-\sin x} \Rightarrow y'=(2x-\cos x)e^{x^2-\sin x}$

۵) $y=\ln|x^2-\sin x| \Rightarrow y'=\frac{2x-\cos x}{x^2-\sin x}$

توابع ضمنی:

توابعی که در آنها ضابطه ی تابع برحسب هیچ کدام از متغییرها نوشته نشده و به صورت $F(x,y)=0$ باشد . که ممکن است نتوانیم این رابطه را به صورت $y=f(x)$ بنویسیم .

برای محاسبه ی مشتق این توابع از دستور زیر استفاده می کنیم : $\boxed{F'(x,y)=y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}}$

F'_x : یعنی مشتق F نسبت به متغییر x با فرض اینکه y عدد ثابت فرض شود .

F'_y : یعنی مشتق F نسبت به متغییر y با فرض اینکه x عدد ثابت فرض شود .

مثال مشتق y نسبت به x را در رابطه ی ضمنی $x^2+2xy-3y^2+5x=7y$ را بیابید .

حـــل :

$$x^2+2xy-3y^2+5x-7y=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{2x+2y+5}{2x-6y-7}$$

روش دیگر برای مشتق گیری ضمنی :

از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می گیریم و از معادله ی حاصل y' را به دست می آوریم ، با این فرض که همواره معادله ی داده شده y را تابعی از x در نظر می گیریم که مشتق پذیر باشد . (همه جا مشتق y را y' می نویسیم .)

مثال اگر $x+y^4+1=y+x^2+xy^2$ ، حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بنویسید .

حـــــل :

از دو طرف معادله مشتق می گیریم :

$$x+y^4+1=y+x^2+xy^2 \Rightarrow 1+4y'y^3=y'+2x+\left(1\times y^2+2yy'x\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(4y^3-1-2xy\right)=2x+y^2-1 \Rightarrow y'=\frac{2x+y^2-1}{4y^3-2xy-1}$$

تمرین وتکلیف

ردیف	سئوالات
۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x\leq 3\\ 4x-1 & x>3\end{cases}$ را در نقطه ی $x_0=3$ بررسی کنید .
۲	در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x>2\\ 6x & x<2\end{cases}$ الف) مقدار $f'_-(-1)$ را به دست آورید . ب) مشتق پذیری تابع را در نقطه $x=2$ بررسی کنـــــید .
۳	هرگاه $f(x,y)=e^x+e^y+x^2+y^2-2=0$ ؛ الف) مشتق ضمنی y نسبت به x را به دست آورید . ب) معادله خط مماس بر منحنی این معادله را در نقطه $O(0,0)$ بنویسید .
۴	مشتق تابع $y=\ln\left\|x^2-\cos x\right\|$ را به دست آورید .
۵	مشتق تابع ضمنی $x\cos y-x^2y=4y$ را به دست آورید
۶	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x)=e^{x^2-4x}-5$ را در نقطه ی برخورد منحنی با محور عرض ها را بنویسید .

کاربرد مشتق

۱ـ جهت تغییرات تابع (صعودی یا نزولی) (یکنوایی تابع)

به عنوان اولین کاربرد مشتق ، تعیین می کنیم که تابع در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی و در چه نقاطی ثابت است .

الف : تابع صعـــــــــودی