


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

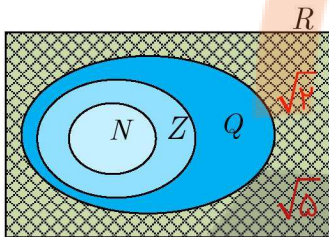
درس اول: مجموعه های منتهی و نامتناهی

صفحه ۲

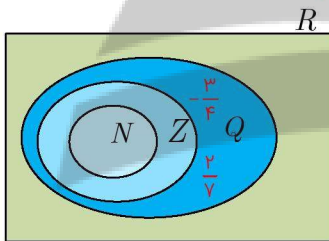
کار در کلاس



۱) الف) مجموعه $R - Q$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهی هاشور خورده بنویسید. مجموعه اعداد گنگ نام دارد و با Q' نمایش داده می شود.

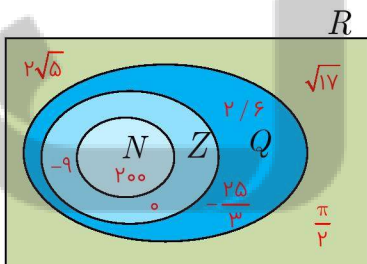


ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$



پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

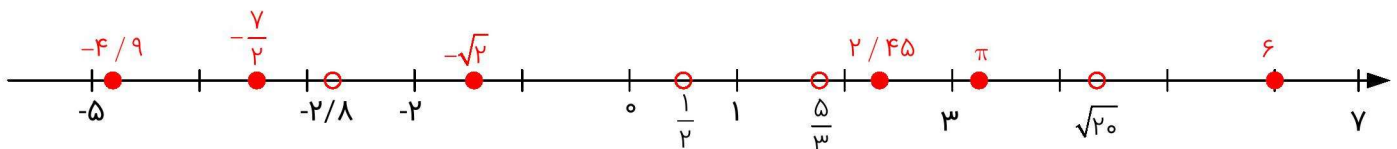


ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $Z - W = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

ث) مجموعه $W - N$ چند عضو دارد؟ فقط یک عضو دارد و آن عدد صفر است. $W - N = \{0\}$

۲) هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$$2/45, \frac{-7}{2}, 6, -4/9, \pi, \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$



اعداد $-\sqrt{2}$ و π اعدادی گنگ هستند.

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in R \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in R \mid -3 \leq x < 2\}$	

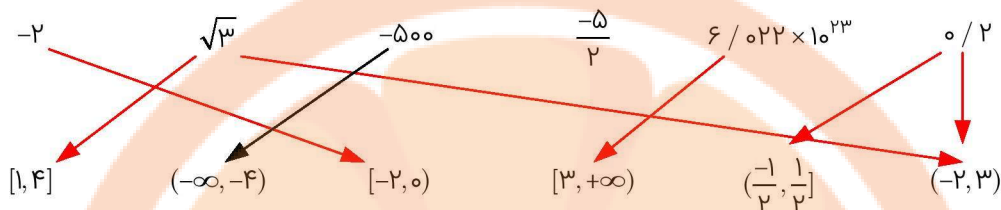
اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
نیم باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in R \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in R \mid x < 5\}$	

(۱) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

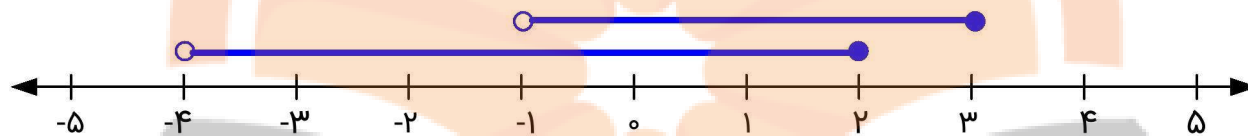
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$ ✓	ب) $-2 \in (-2, 0]$ ✗	پ) $0 \in (-2, 0]$ ✓	ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ✓	ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ✗
ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ ✗	چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ✓	ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ ✓	خ) $[2, 5) = (2, 5]$ ✗	د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$ ✗

۲) هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



$-\frac{5}{2}$ به هیچکدام از بازه‌ها تعلق ندارد.

۳) نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



$A \cup B = (-4, 3]$ (ب)

$A \cap B = (-1, 2]$ (الف)

$B - A = (2, 3]$ (ت)

$A - B = (-4, -1]$ (پ)

صفحه ۵

فعالیت



فرض کنید A مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 2, 1, 0, -1, \dots\}$

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) درباره‌ی تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ تعداد اعضای مجموعه B بی‌شمار است.

صفحه ۶

کار در کلاس



۱) منتهای یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره‌ی مجموعه‌های منتهای سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	نامتناهی	منتهای	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های منتهای)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	۴
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	حدود هفت میلیارد
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		-
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	حدود ۱۰۰ میلیارد
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		-
مجموعه دانش آموزان مدرسه شما		✓	حدود ۴۰۰ نفر
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		✓	۹/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓	حدود ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
مجموعه کسره‌های مثبت با صورت یک	✓		-
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		-
بازه (۰, ۱)	✓		-
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب	✓		برابر عدد آواگادرو $6 / 0.22 \times 10^{23}$

(۲) دو مجموعه‌ی منتهای نام ببرید.

(الف) مجموعه اعداد زوج کمتر از ۱۰۰

(ب) مجموعه حالت‌هایی که در پرتاب دو تاس اتفاق می‌افتند.

(۳) دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه‌ی دیگری باشد.

مجموعه اعداد گویا (Q) و مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) که $Z \subseteq Q$

(۴) دو مجموعه‌ی نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B-A$ تک عضوی باشد.

A را مجموعه اعداد طبیعی (N) و B را مجموعه اعداد حسابی (W) در نظر بگیرید در این صورت داریم:

$$A \subseteq B$$

$$B - A = \{0\}$$

صفحه ۷

فعالیت



(الف) $\frac{1}{3}$ ، عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه‌ی $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

تنوع عددها بسیار زیاد است. $\frac{300}{401}, \frac{17}{18}, \frac{5}{2016}, \frac{1}{8}$

(ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

(پ) در مورد منتهای یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه‌ی $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

بین صفر و یک، تعداد نامتناهی عدد گویا وجود دارد.

(ت) در مورد منتهای یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

Q مجموعه‌ای نامتناهی است.

(ث) اگر A دارای یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

تمرین درس اول: مجموعه‌های منتهای و نامتناهی

صفحه ۷

(۱) فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

(الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$

(ب) U منتهای است یا نامتناهی؟ نامتناهی

(پ) یک زیر مجموعه‌ی منتهای از U بنویسید. $B = \{10, 20, \dots, 80, 90\}$

(ت) دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی مانند C و D از U بنویسید، به طوری که $C \subseteq D$.

$$D = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, C = \{100, 200, 300, \dots\}$$

(۲) منتهای یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

(ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۳۶. منتهای است زیرا: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

(پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. نامتناهی

(ت) $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$ منتهای $A = \{ \}$

(ث) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

۳) دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای منتهای باشد.

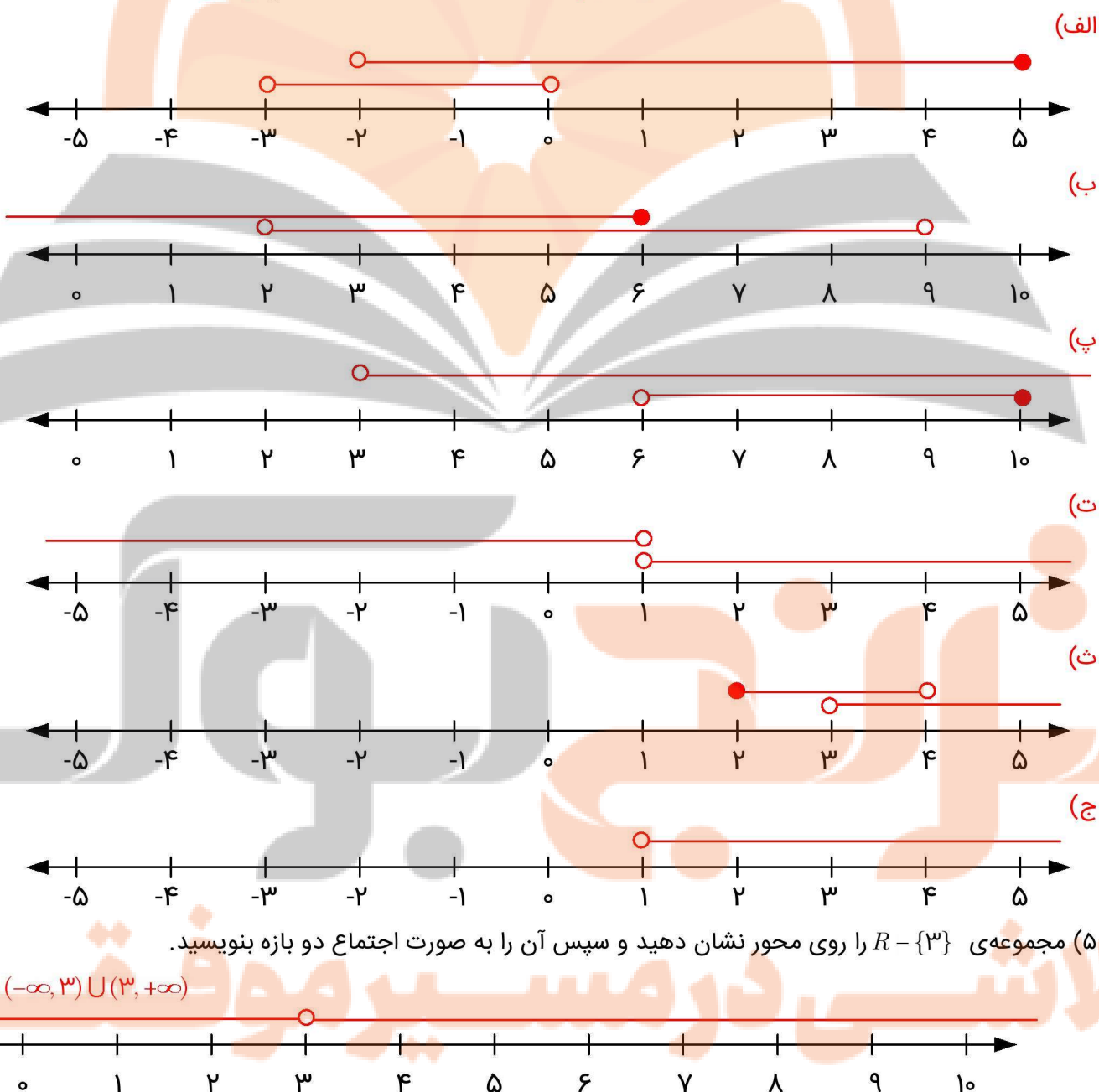
مجموعه اعداد طبیعی (N) و مجموعه‌ی اعداد صحیح بین -۵ تا $+۵$ (A).

$$\left. \begin{array}{l} N = \{1, 2, 3, \dots\} \\ A = \{-4, -3, \dots, 3, 4\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap N = \{1, 2, 3, 4\}$$

۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید.

الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5) = (-3, 5)$ ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$ پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$

ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$ ث) $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$ ج) $[2, 4) - (3, +\infty) = [2, 3]$



۵) مجموعه‌ی $R - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

$$R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

۶) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای منتهای باشد، آنگاه A منتهای خواهد بود یا نامتناهی؟

تعداد اعضای A از B کمتر است، بنابراین A هم منتهای خواهد بود.

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس دوم: متمم یک مجموعه

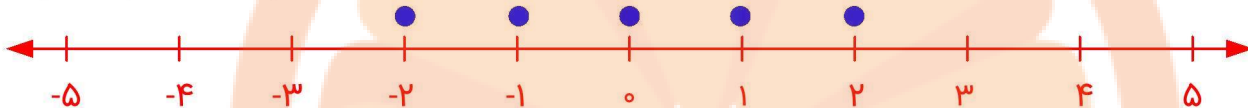
صفحه ۸

فعالیت

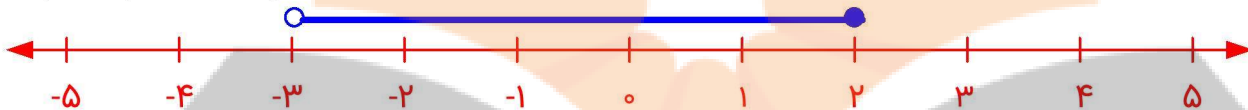


الف) دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$$



$$B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$$



ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

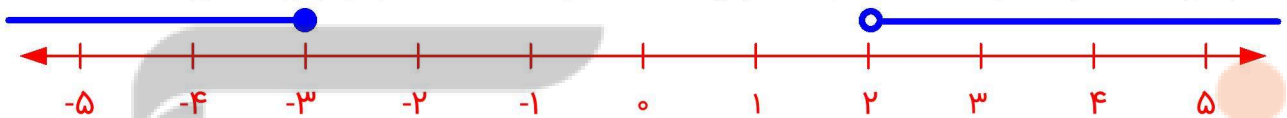
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = (-3, 2]$$

پ) در مورد A اگر مجموعه‌ی مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$$A' = \{\dots, -5, -4, -3, 3, 4, 5, \dots\}$$

ت) در مورد B با فرض این که R مجموعه‌ی مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



صفحه ۹

کار در کلاس



۱) اگر U مجموعه‌ی شامل تمام استان‌های کشورمان باشد، و A مجموعه‌ی استان‌های غیر ساحلی، آن گاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$A' = \{\text{هرمزگان، سیستان و بلوچستان، بوشهر، خوزستان، گلستان، مازندران، گیلان}\}$$

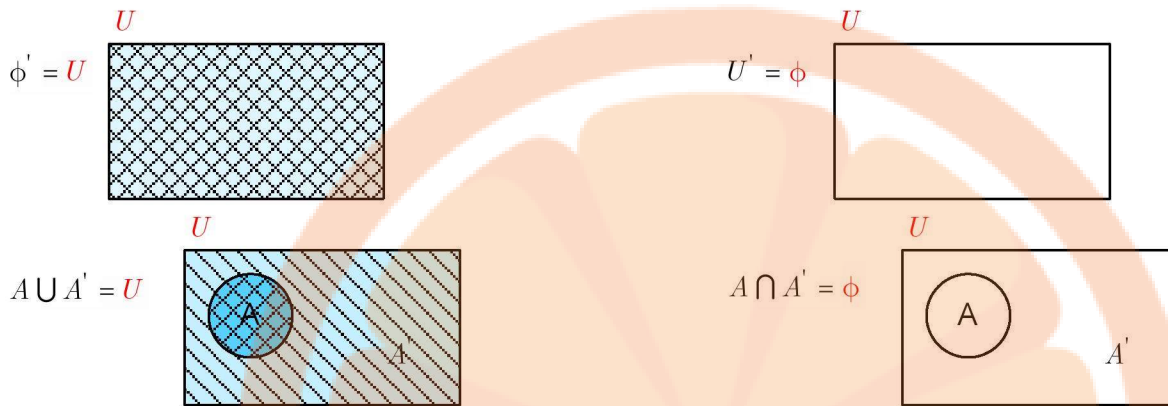
۲) فرض کنیم U مجموعه‌ی تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده‌ی کشور و B مجموعه‌ی اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

B' مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج خواهد بود.

۳) با فرض آنکه N مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

- | | |
|---------------------------------|--|
| $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ | $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$ |
| $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ | $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ |
| $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ | $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$ |
| $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ | $\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$ |

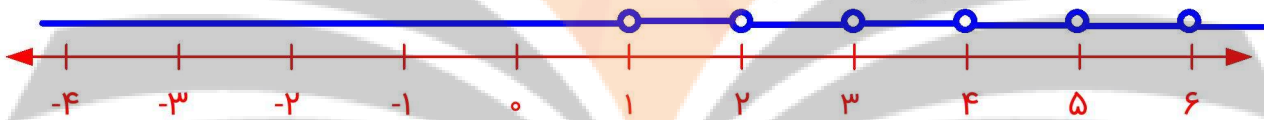
۴) U مجموعه‌ی مرجع و A زیر مجموعه‌ی دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی زیر را بنویسید.



۵ الف) اگر \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم آنگاه \mathbb{N}' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت \mathbb{N}' را روی محور نمایش دهید.



۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A' = \{4, 5\}$$

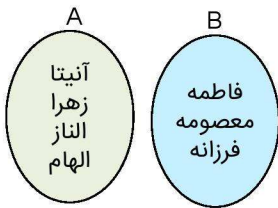
$$B' = \{1, 3, 5\}$$

(A')		(A')	\Rightarrow	(A')	$= A$
$\{1, 2, 3\}$					
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	\Rightarrow	$A' \cap B' = (A \cup B)'$	
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$			
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	\Rightarrow	$A' \cup B' = (A \cap B)'$	
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$			
$A - B$	$A - (A \cap B)$		\Rightarrow	$A - B = A - (A \cap B)$	
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$				



۱) یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه‌ی طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه‌ی هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.

اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه $A = \{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\}$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B = \{\text{فرزانه، معصومه، فاطمه}\}$ هستند. همان گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.



الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه، آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

تعداد عضوهای $A \cup B$ با حاصل جمع $n(A)$ و $n(B)$ برابر است یعنی:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

زمانی که $A \cap B = \emptyset$ یعنی دو مجموعه‌ی A و B هیچ اشتراکی نداشته باشند.

۲) الف) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸ : $A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$

مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰ : $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ : $A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

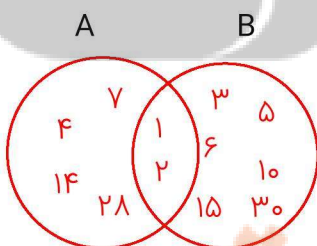
ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟

چون اشتراک A و B تهی نیست.

ت) با تکمیل نمودار مقابل سعی کنید رابطه‌ی درست برای $n(A \cap B)$ را حدس بزنید.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

همانطور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

چون زمانی که تعداد اعضای A و B با هم جمع می‌شوند، تعداد اعضای $A \cap B$ یک بار جزو اعضای A و یک بار جزو اعضای B

حساب شده‌اند و لذا باید یک بار تعداد اعضای $A \cap B$ کم شود تا تعداد اعضای $A \cup B$ به دست آید.



۱) یک دوره جشنواره‌ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

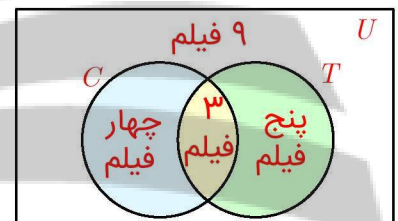
ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه‌ی شامل تمام فیلم‌ها را با U ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

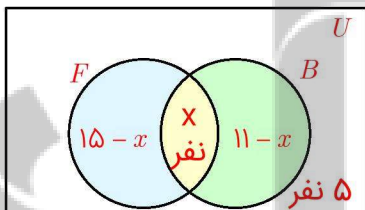
ب) $n(C \cup T)^c = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

روش دوم حل: در نمودار ون مقابل، دو مجموعه‌ی C و T سطح درون U را به چهار ناحیه‌ی جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.



الف) $4 + 3 + 5 = 12$
ب) ۹

۲) در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟ روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر، مقدار x را بیابید.



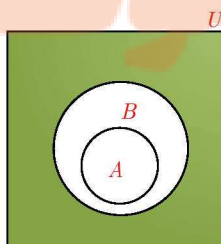
$(15 - x) + x + (11 - x) + 5 = 25 \Rightarrow x = 6$

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

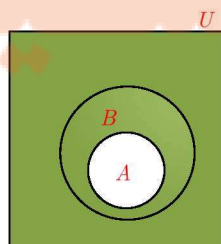
$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 15 + 11 - x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow n(B \cap F) = 6$

۳) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه‌ی مرجع است، در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه‌ی زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

بله، با توجه به نمودار ون داریم؛ $B' \subseteq A'$



نمودار B'



نمودار A'

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه‌ی زیر مجموعه بودن برقرار است.

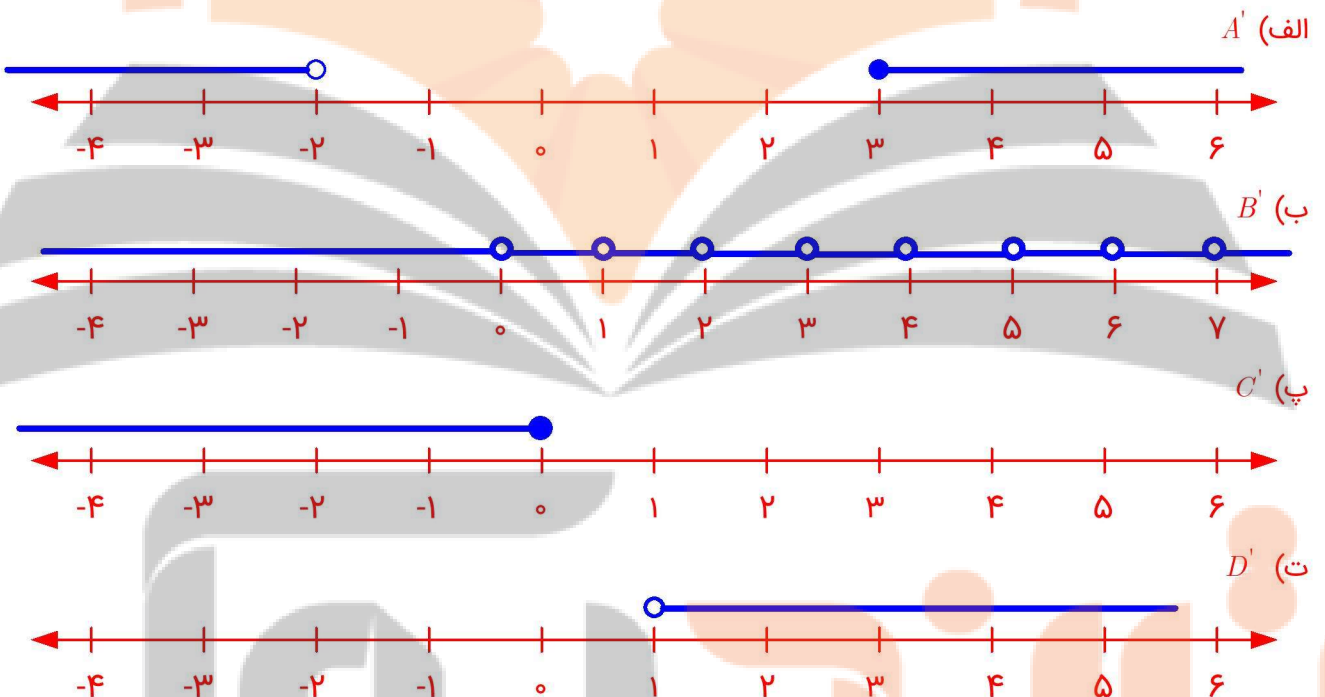
$$\left. \begin{array}{l} A' = \{c, d, e\} \\ B' = \{d, e\} \end{array} \right\} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

تمرین درس دوم: متمم یک مجموعه

صفحه ۱۲

۱) R را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3)$ ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ پ) $C = (0, +\infty)$ ت) $D = (-\infty, 1]$



۲) N را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$$B = \{101, 102, 103, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2, \dots, 100\}$$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \Rightarrow C' = \{101, 102, 103, 104, \dots\}$$

۳) اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

۴) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و

$$n(A \cap B) = 20 \text{ مطلوب است:}$$

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

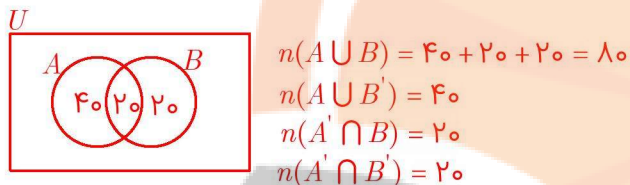
پ) $n(A' \cap B)$

ت) $n(A' \cap B')$

برای حل این تمرین می‌توان از فرمول یا نمودار ون استفاده کرد:
استفاده از فرمول:

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 20 = 80$
 ب) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$
 پ) $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$
 ت) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = 100 - 80 = 20$

استفاده از نمودار ون:



۵) در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:
الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

$$14 - 5 = 9$$

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

$$n(A \cup B) = 14 + 19 - 5 = 28 \text{ دانش‌آموزانی که حداقل عضو یک گروه هستند}$$

$$31 - 28 = 3 \text{ نفر عضو هیچ گروهی نیستند.}$$

۶) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:
الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 32 = 38$$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

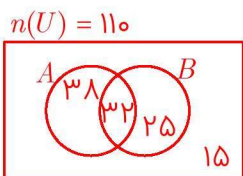
دقیقاً از یکی از دو شرکت خرید کرده باشند یعنی یا فقط از شرکت A و یا فقط از شرکت B خرید کرده باشند:

$$\left. \begin{array}{l} A \Rightarrow n(A - B) = 70 - 32 = 38 \\ B \Rightarrow n(B - A) = 57 - 32 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow 38 + 25 = 63 \text{ نفر}$$

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

$$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$$

با استفاده از نمودار ون نیز می‌توانید به همان پاسخ‌های فوق برسید.



فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

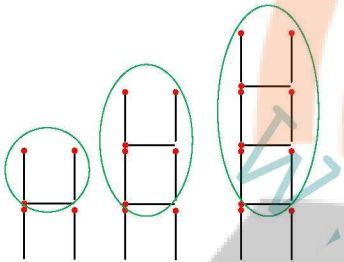
درس سوم: الگو و دنباله

صفحه ۱۵

فعالیت

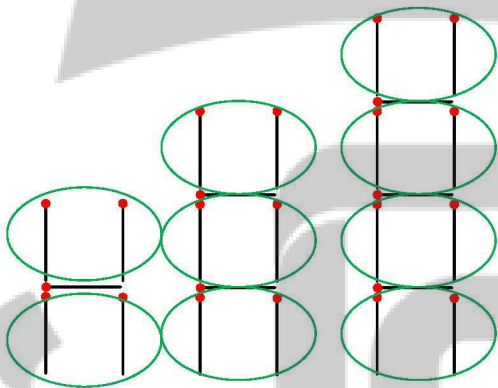


۱) آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_n و a_{10} را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 = 32 \rightarrow a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$

۲) آیساً روش دیگری را به کار برد، او تعداد چوب کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.

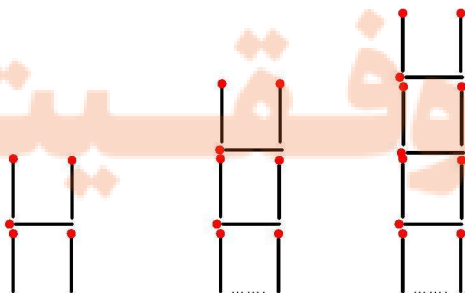


$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2)$$

چوب‌های افقی چوب‌های عمودی

$$a_{10} = 10 + (10 + 1)2 \rightarrow a_n = n + (n + 1)2 = 3n + 2$$

۳) آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟



اگر در هر شکل یک چوب کبریت فرضی اضافه کنیم، آنگاه در هر شکل به تعداد (شماره شکل + ۱) $3 \times$ چوب کبریت خواهیم داشت:

$$a_1 = 2(3) - 1 \quad a_2 = 3(3) - 1 \quad a_3 = 4(3) - 1 \quad a_{10} = 11(3) - 1 \rightarrow a_n = (n + 1)(3) - 1 = 3n + 2$$

۴) همان طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آید و آیساً مقدار a_n را به ترتیب به صورت‌های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آورند. جواب آیساً را ساده کنید تا به شکل جواب آید در آید.

$$a_n = n + (n+1)(2) = n + 2n + 2 = 3n + 2$$

۵) به کمک رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

$$a_{20} = 3 \times (20) + 2 = 62$$

۶) با استفاده از رابطه‌ی $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 77 \Rightarrow 77 = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

پس شکل بیست و پنجم دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

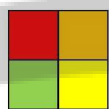
صفحه ۱۷

کار در کلاس

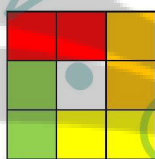


۱) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

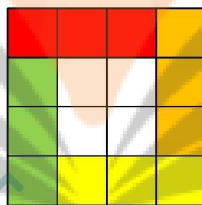
شکل ۱



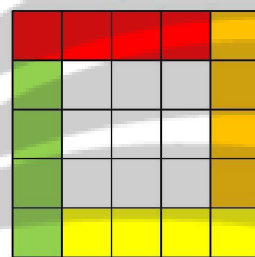
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع‌های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1 = 4 \times 1$	$b_2 = 4 \times 2$	$b_3 = 4 \times 3$	$b_4 = 4 \times 4$	$b_5 = 4 \times 5$

۲) توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود. چون فاصله هر دو جمله‌ی متوالی برابر مقدار ثابت ۴ است.

۳) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه‌ی $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h حاصل b_n را به دست

آورید. مقدار a همان فاصله بین جملات الگو است که برابر ۴ است. با توجه به جدول فوق داریم؛ $b_n = 4n$ و $h = 0$

$$b_{250} = 250 \times 4 = 1000$$

۴) شکل شماره‌ی ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟ مرحله ۳۶ام

$$b_n = 144 \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36$$

شکل ۳۶ام دارای ۱۴۴ مربع رنگی است.

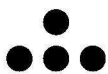
صفحه ۱۷

فعالیت



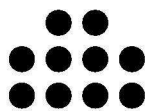
۱) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

شکل ۱



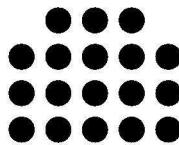
۵ نقطه

شکل ۲



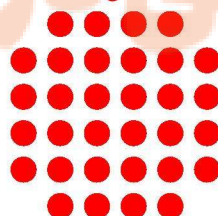
۱۲ نقطه

شکل ۳



۲۱ نقطه

شکل ۴



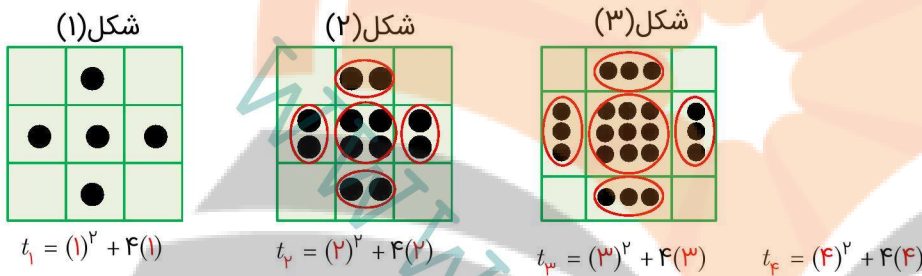
۳۲ نقطه

شماره‌ی شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها : t_n	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه بین n و t_n	$t_1 = ۵$	$t_2 = ۲^2 + ۴ \times ۲$ $t_2 = ۱۲$	$t_3 = ۳^2 + ۴ \times ۳$ $t_3 = ۲۱$	$t_4 = ۴^2 + ۴ \times ۴$ $t_4 = ۳۲$	$t_5 = ۵^2 + ۴ \times ۵$ $t_5 = ۴۵$

۲) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

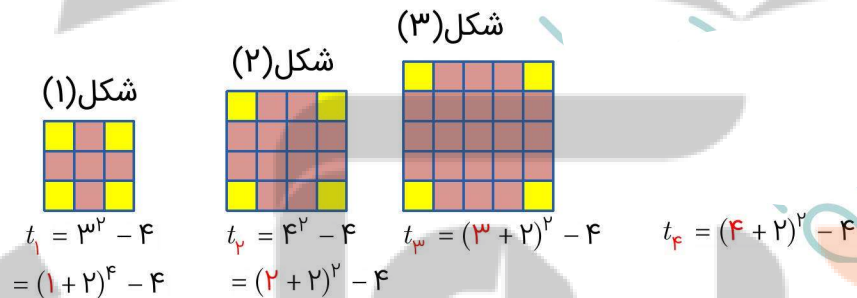
خیر، چون فاصله‌ی هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی نیست.

۳) امیررضا برای یافتن جمله‌ی عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



جمله عمومی دنباله با روش امیررضا $t_n = n^2 + 4n$

۴) امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



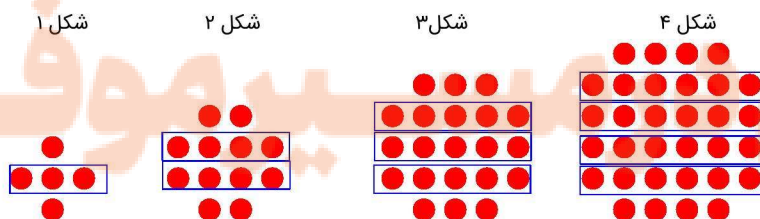
جمله عمومی دنباله با روش امیرمحمد $t_n = (n+۲)^2 - ۴$

۵) نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

(روش امیررضا) $t_n = n^2 + 4n$

(روش امیرمحمد) $t_n = (n+۲)^2 - ۴ = n^2 + 4n + ۴ - ۴ = n^2 + 4n$

۶) آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.



$t_1 = 1 \times (1+2) + 2(1) = 5$ $t_2 = 2 \times (2+2) + 2(2) = 12$ $t_3 = 3 \times (3+2) + 2(3) = 21$ $t_4 = 4 \times (4+2) + 2(4) = 32$...

$\rightarrow t_n = n(n+2) + 2n \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$



(۱) دو دنباله‌ی دلخواه مثال بزنید.

(الف) $4, 7, 10, 13, \dots$

(ب) $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

(۲) جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $a_n = n^2 - 1 : 0, 3, 8, 15, 24$

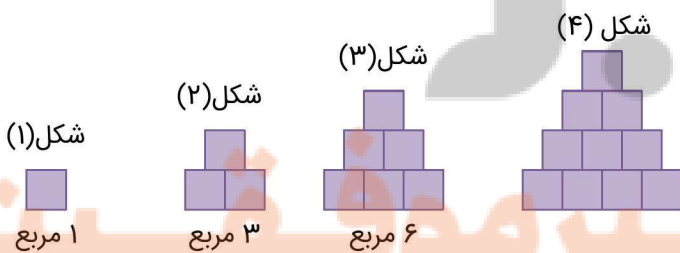
(ب) $b_n = -n + 4 : 3, 2, 1, 0, -1, -2$

(ج) $c_n = -13 + 2n : -11, -9, -7, -5, -3$

در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله‌ی بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله‌ی عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	$-n$...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
1	4	9	16	25	36	49	...	n^2	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	10^{-n}	...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n n^3$...
5	18	31	44	57	70	83	...	$5 + 13(n-1)$...
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$...	$\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}$...
1	2	4	7	11	16	22	...	$\frac{n(n-1)}{2} + 1$...
3	1	4	1	5	1	6
1	1	2	3	5	8	13	...	$a_1 = a_p = 1$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$...
2	3	5	7	11	13	17	...	اعداد اول	...

(۲) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



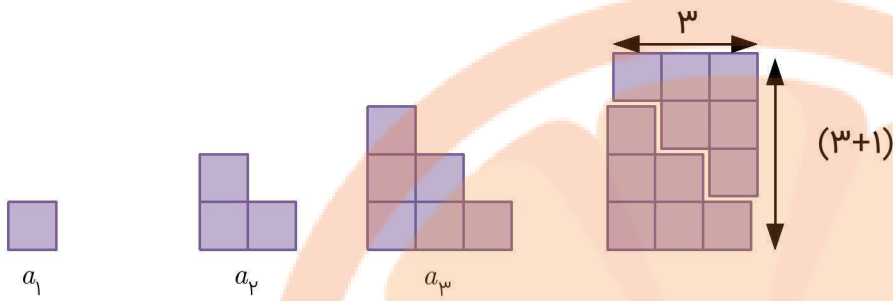
(الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

$1, 3, 6, 10, 15, 21$

(ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله‌ی خطی است؟ چرا؟

خیر، چون فاصله‌ی هر دو جمله متوالی از این دنباله مقدار ثابتی نیست.

(پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n بدست آورید.



$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + 2 \quad a_3 = 1 + 2 + 3 \quad \dots \quad a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

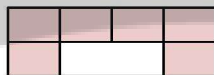
(ت) به کمک مرحله‌ی قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین درس سوم: الگو و دنباله

صفحه ۲۰

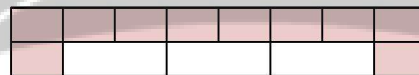
(ا) به الگوی زیر توجه کنید.



۶ کاشی تیره
۶ کاشی سفید

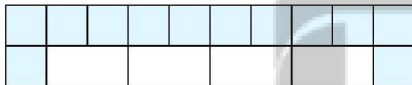


۸ کاشی تیره
۸ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره
۱۰ کاشی سفید

(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.



شامل ۱۲ کاشی تیره و ۱۲ کاشی سفید

(ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله n به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

$$6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$$

(پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

$$t_n = 2n + 4$$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$$t_{100} = 2 \times (100) + 4 = 204$$

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، چندتا است؟

$$t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$$

بله، با توجه به معادله، شکل ۲۳ام چنین وضعیتی دارد.

به ازای ۲۳ کاشی تیره، ۵۰ کاشی سفید لازم است.

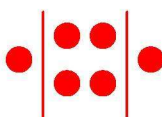
(۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

شکل ۱



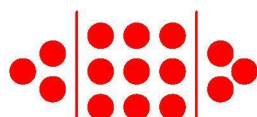
۱ نقطه

شکل ۲



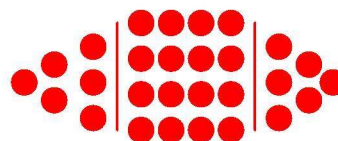
۶ نقطه

شکل ۳

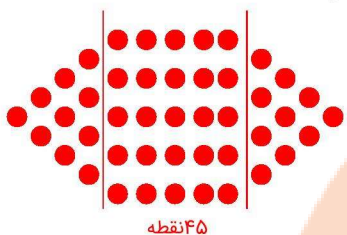


۱۵ نقطه

شکل ۴



الف) شکل بعدی را رسم کنید. سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.



تعداد نقاط در هر شکل : ۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶

ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

دقت کنید که دایره‌های داخلی دنباله اعداد مربعی و دایره‌های جانبی دنباله‌ی اعداد مثلثی را تشکیل می‌دهند. بنابراین کل دنباله مجموعه‌ای از دنباله مربعی و دو برابر دنباله مثلثی است.

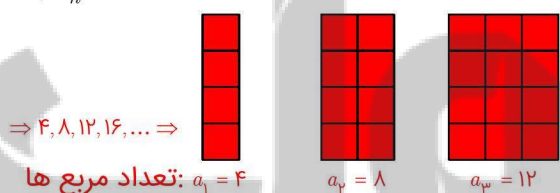
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1^2 + 2\left(\frac{(1-1)(1)}{2}\right) \\ a_2 &= 2^2 + 2\left(\frac{(2-1)(2)}{2}\right) \\ a_3 &= 3^2 + 2\left(\frac{(3-1)(3)}{2}\right) \\ a_4 &= 4^2 + 2\left(\frac{(4-1)(4)}{2}\right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = n^2 + 2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = n^2 - 2n$$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

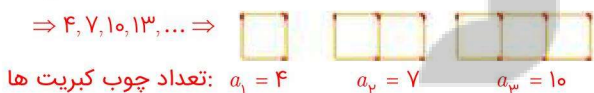
$$a_{10} = 2(10)^2 - 10 = 200 - 10 = 190$$

۳) جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

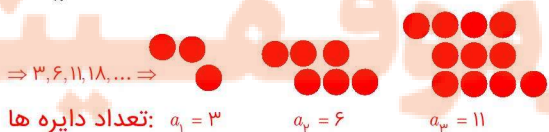
الف) $a_n = 4n$



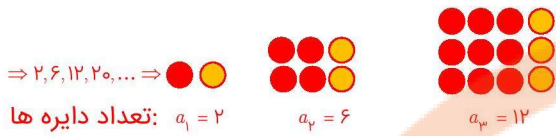
ب) $b_n = 3n + 1$



پ) $c_n = n^2 + 2$

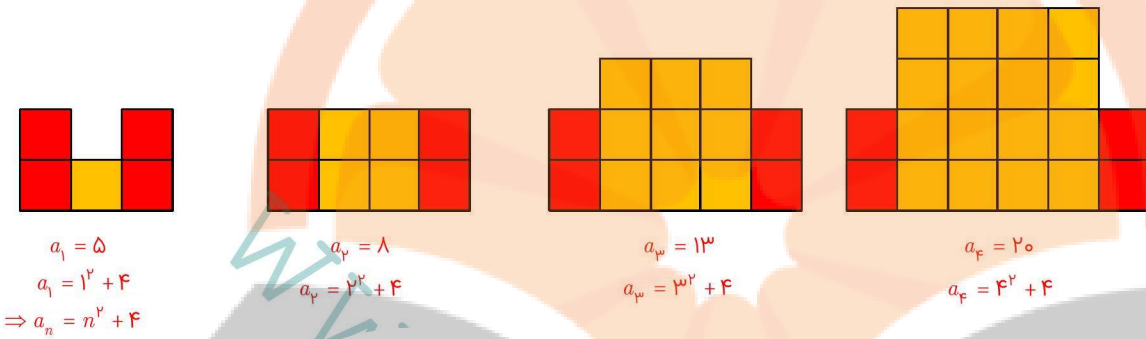


ت) $d_n = n^2 + n$

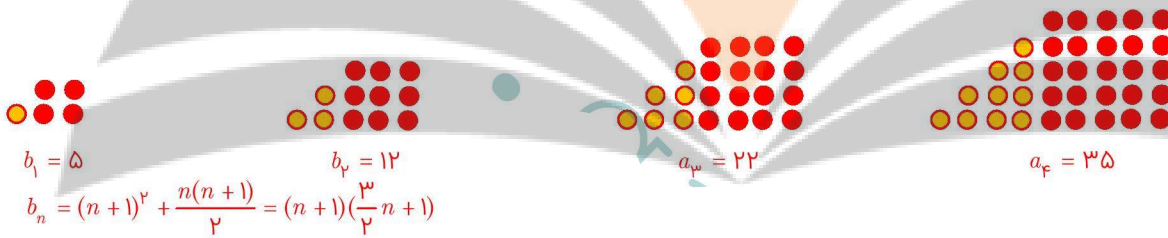


۴) برای دنباله‌های درجه‌ی دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$



ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$



نزد پنجه بوبک
تلاشی در مسیر موفقیت

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

صفحه ۲۱



سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره‌ی سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله‌ی حسابی‌اند.
 $۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, \dots$

(الف) جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = ۲۰۰۰$, $d = ۴$

(ب) نهمین دوره‌ی المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ ۲۰۳۲

$۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ۲۰۲۴, ۲۰۲۸, \boxed{۲۰۳۲}$

(پ) با تکمیل جدول زیر، جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n	...
۲۰۰۰	$۲۰۰۰ + ۱(۴)$	$۲۰۰۰ + ۲(۴)$	$۲۰۰۰ + ۳(۴)$...	$۲۰۰۰ + (n-1)(۴)$...

(ت) بیست و چهارمین دوره‌ی المپیک در هزاره‌ی سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = ۲۰۰۰ + (۲۴ - 1)(۴) = ۲۰۹۲$$

(۲) با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی را بدست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$...	$t_1 + (n-1)d$...

مجموع جمله اول با مضربی از یک عدد ثابت جمله‌های این دنباله را تشکیل می‌دهند.

صفحه ۲۲

کار در کلاس



(۱) در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله‌ی بعدی را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست آورید.

(الف) $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, \dots$ $d = ۵$, $a_n = ۵n$

(ب) $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \dots$ $d = ۲$, $b_n = ۲n - ۱$

(پ) $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \dots$ $d = ۴$, $c_n = ۴n + ۱$

(ت) $۱۳, ۷, ۱, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳, \dots$ $d = -۶$, $d_n = -۶n + ۱۹$

(۲) A و B دو شرکت عرضه کننده‌ی سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت های شرکت B
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده‌ی هزینه‌ی کل n دقیقه مکالمه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه‌ی مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

(الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه‌ی ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n : هزینه‌ی سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
b_n : هزینه‌ی سیم کارت B	۳۰۰۰	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟ چرا؟

بله، زیرا هر دو دنباله‌های خطی با قدرنسبت ثابت هستند.

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

a_n = ۱۲۰۰ قدرنسبت دنباله

b_n = ۸۰۰ قدرنسبت دنباله

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

$$\left. \begin{aligned} a_{60} &= 2000 + (60)(30) = 3800 \\ b_{60} &= 3000 + (60)(20) = 4200 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_{60} < b_{60}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{150} &= 2000 + (150)(30) = 6500 \\ b_{150} &= 3000 + (150)(20) = 6000 \end{aligned} \right\} \rightarrow b_{150} < a_{150}$$

سیم کارت شرکت A برای سارا به صرفه‌تر و سیم کارت شرکت B برای فاطمه به صرفه‌تر است.

صفحه ۲۳

کار در کلاس



۱) الف) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

$d = 4$ $-2, 2, 6, 10, 14, \dots$

ب) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

$d = -3$ $19, 16, 13, 10, 7, \dots$

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله‌ی مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

$16, 9, 2, -5, -12, -17, \dots$

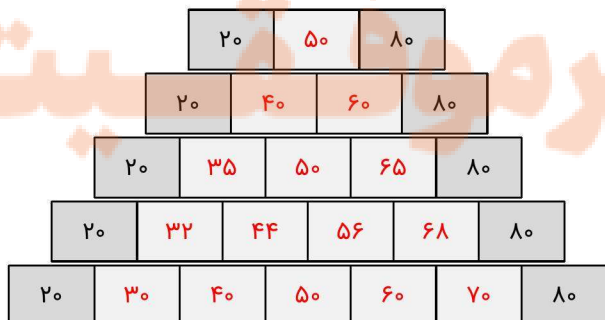
۲) الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کرده ایم.

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = \frac{62 - 18}{4} = \frac{44}{4} = 11 \end{cases}$$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه‌ی حسابی درج کنید.



تمرین دنباله‌های حسابی صفحه ۲۴

۱) از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدر نسبت، جمله‌ی بیست و یکم را بیابید.

الف) $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$ (دنباله حسابی)

$$a_1 = 3, d = 7 \Rightarrow a_n = 7n - 4 \Rightarrow a_{21} = 7(21) - 4 = 147 - 4 = 143$$

ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$ (دنباله حسابی نیست)

پ) $\sqrt{3}, ۲\sqrt{3}, ۳\sqrt{3}, ۴\sqrt{3}, \dots$ (دنباله حسابی)

$$a_1 = \sqrt{3}, d = \sqrt{3} \Rightarrow a_n = \sqrt{3}n \Rightarrow a_{21} = 21\sqrt{3}$$

ت) $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$ (دنباله حسابی)

$$a_1 = 10, d = -3 \rightarrow a_n = -3n + 13 \rightarrow a_{21} = -3(21) + 13 = -63 + 13 = -50$$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ (دنباله حسابی)

$$a_1 = \frac{2}{5}, d = \frac{1}{5} \rightarrow a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5} \rightarrow a_{21} = \frac{1}{5}(21) + \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$$

ج) $۲, ۲, ۲, ۲, \dots$ (دنباله حسابی)

$$a_1 = 2, d = 0 \rightarrow a_n = 0 \times n + 2 = 2 \rightarrow a_{21} = 2$$

۲) در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله‌ی اول و قدر نسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a + 2d = 20 \\ a_7 &= a + 6d = 56 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4d = 36 \rightarrow d = 9$$

$$a + 2d = 20 \rightarrow a + 18 = 20 \rightarrow a = 2$$

$$2, 11, 20, 29, \dots$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر هستند:

۳) در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

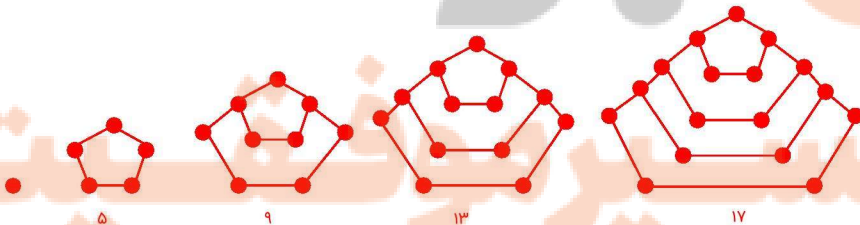
$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 3 \rightarrow a + (a+d) + (a+2d) = 3 \\ a_4 + a_5 + a_6 &= 39 \rightarrow (a+3d) + (a+4d) + (a+5d) = 39 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3a + 3d &= 3 \\ 3a + 12d &= 39 \end{aligned} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$3a + 3d = 3 \Rightarrow 3a + 12 = 3 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

$$-3, 1, 5, \dots$$

جملات دنباله به صورت زیر خواهد بود:

۴) الف) دو جمله‌ی بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



این الگو یک دنباله حسابی است که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن ۴ است

ب) جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

$$\begin{cases} a = 1 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)(4) = 4n - 3$$

(پ) جمله‌ی چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

$$a_n = 397 \Rightarrow 397 = 4n - 3 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$$

بنابراین جمله صدم برابر ۳۹۷ است.

(۵) الف) واسطه‌ی حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$5, x, 11 \Rightarrow x = \frac{11+5}{2} = 8$$

ب) واسطه‌ی حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

$$20, x, 30 \Rightarrow x = \frac{30+20}{2} = 25$$

(پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

واسطه حسابی بین دو عدد میانگین آن دو عدد است.

(۶) مسئله زیر در پایپروس رابند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100 & (\otimes) \\ a_1 + a_2 = \frac{1}{3}(a_3 + a_4 + a_5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 100 & (*) \\ 2a_1 + d = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 2d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} 5(2d) + 10d = 100 \Rightarrow d = 5 \xrightarrow{(\otimes)} 5a_1 + 50 = 100 \Rightarrow 5a_1 = 50 \Rightarrow a_1 = \frac{50}{5} = 10 \Rightarrow 10, 15, 20, 25, 30$$

دنباله هندسی

صفحه ۲۵

فعالیت



(۱) جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

روز: n	t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند.
۱	(امید و محسن) ۲
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
⋮	⋮
n	$t_n = 2^n$

(۲) در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

۲۱۰ فرد جدید

(۳) در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

۲۱۱ فرد جدید

(۴) در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

$$2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14 \Rightarrow \text{روز چهاردهم}$$



در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله‌ی اول t_1 و قدر نسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$...	$t_1 r^{n-1}$...



۱) نرگس و نگار برای محاسبه‌ی هفتمین جمله‌ی دنباله‌ی هندسی $۹, ۳, ۱, \dots$ روش‌های مقابل را به کار برده‌اند. کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

نگار

$$r = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

$$t_7 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{۸۱}$$

نرگس

$$r = \frac{۹}{۳} = ۳$$

$$t_7 = 9(3)^{7-1}$$

$$= ۶۵۶۱$$

نگار درست حل کرده است. زیرا قدر نسبت در دنباله هندسی برابر نسبت جمله دوم به جمله اول در هر دو جمله‌ی متوالی است. ۲) در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله‌ی بعدی را بنویسید.

الف) $۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, ۴۸۶, \dots \rightarrow r = \frac{۶}{۲} = ۳, a_n = ۲ \times 3^{n-1}$

ب) $۵, ۱۵, ۴۵, ۱۳۵, ۴۰۵, ۱۲۱۵, \dots \rightarrow r = \frac{۱۵}{۵} = ۳, b_n = ۵ \times 3^{n-1}$

پ) $۶, -۶, ۶۰۰, -۶۰۰۰, ۶۰۰۰۰, -۶۰۰۰۰۰, \dots \rightarrow r = \frac{-۶۰}{۶} = -۱۰, c_n = ۶ \times (-10)^{n-1}$

ت) $۴, ۲, ۱, \frac{1}{۲}, \frac{1}{۴}, \frac{1}{۸}, \dots \rightarrow r = \frac{۲}{۴} = \frac{1}{۲}, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

۳) الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطه‌ی هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = ۳ \\ t_3 = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow t_3 = t_1 r^{3-1} = ۴۸ \Rightarrow 3r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$$

	t_1	t_2	t_3
$r = 4$	۳	۱۲	۴۸
$r = -4$	۳	-۱۲	۴۸

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

خیر، جواب یکتا نیست و دو دنباله حاصل می‌شود یکی به قدرنسبت $+4$ و دیگری با قدرنسبت -4 .

$$\begin{cases} t_1 = ۳ \\ t_5 = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ ar^4 = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸ \\ ۳, -۶, ۱۲, -۲۴, ۴۸ \end{cases}$$

(پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله‌ی هندسی حاصل شود.

	۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	$10r^{3-1} = 4000 \Rightarrow r = 20$		
	۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰۰	$10r^{4-1} = 80000 \Rightarrow r = 20$	
۴	۱۲	۳۶	۱۰۹	۳۲۴	۹۷۲	$4r^{6-1} = 972 \Rightarrow r = 3$

(۴) یک کوه یخی هزار تُنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

(الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند. (ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند.

(پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود. (ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

$a_1 = 1000$

اگر a_n را دنباله مقدار یخ باقی‌مانده پس از n روز در نظر بگیریم، در این صورت در هر روز $\frac{4}{5}$ مقدار قبلی باقی ماند.

$a_2 = 1000 - 1000 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times 1000$

یعنی جمله اول برابر $a_1 = 1000$ و قدر نسبت برابر $r = \frac{4}{5}$ است. پس داریم:

$a_n = 1000 \times (\frac{4}{5})^{n-1} \Rightarrow a_5 = 1000 \times (\frac{4}{5})^4 = 4096/625$

بنابراین تقریباً نصف آن آب می‌شود و گزینه (پ) درست است

تمرین درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

صفحه ۲۷

(۱) از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

(الف) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, ...

دنباله هندسی با قدر نسبت $r = \frac{28}{7} = \frac{112}{28} = 4$

(ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 2\sqrt{5}$

(پ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

دنباله هندسی با قدرنسبت $r = \frac{-1}{1} = \frac{1/2}{1/2} = \frac{1/4}{1/4} = -\frac{1}{2}$

(ت) ۵, ۵, ۵, ۵, ...

دنباله هندسی با قدرنسبت $r = \frac{5}{5} = 1$ و دنباله حسابی با قدرنسبت صفر

(۲) چند دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

بی‌شمار دنباله، با جمله‌ی اول دلخواه می‌توان ساخت:

$a_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, -\frac{64}{125}, \dots$

$a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{16}{125}, \dots$

۳) درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

نادرست است، مثلاً دنباله مربعی $1, 4, 9, \dots$ نه حسابی است و نه هندسی

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

نادرست است. همانطور که در فعالیت‌ها دید دنباله‌هایی مانند $3, 3, 3, 3, \dots$ هم حسابی‌اند (با $d = 0$) و هم هندسی (با $r = 1$).

۴) علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

پس از هر سال قیمت دوچرخه ۸۰٪ قیمت سال قبلش است بنابراین تصاعدی هندسی با قدر نسبت $\frac{80}{100}$ داریم. بعد از سال هم یعنی جمله‌ی چهارم این تصاعد:

$$a_4 = a_1 r^3 = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 256000$$

بنابراین، بعد از سه سال دوچرخه را به قیمت ۲۵۶ هزار تومان می‌تواند بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$\left. \begin{aligned} a &= 500000 \\ r &= \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = 500000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

۵) حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را محاسبه کنید. $2, 4, 8, \dots$

$$\Rightarrow a = 2, r = \frac{4}{2} = \frac{1}{2} = 2$$

$$6) \text{ جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب } 12 \text{ و } 96 \text{ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.} \\ = a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \dots \times ar^{19} = a^{20} \times r^{1+2+\dots+19} = a^{20} \times r^{\frac{20 \times 19}{2}} \Rightarrow 2^{20} \times 2^{190} = 2^{210}$$

۶) جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\left\{ \begin{aligned} a_3 = a_1 r^2 = 12 \\ a_6 = a_1 r^5 = 96 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \xrightarrow{a_1 = 3} 3, 6, 12, 24, \dots$$

۷) بنا بر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده‌ی حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد:

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۷	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

آمار مربوط به سال ۱۳۹۴ را به عنوان جمله اول در نظر بگیرید. بنابراین دنباله هندسی با جمله‌ی عمومی $a_n = 16584 \left(\frac{95}{100}\right)^{n-1}$ حاصل

میشود.


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)