


تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)



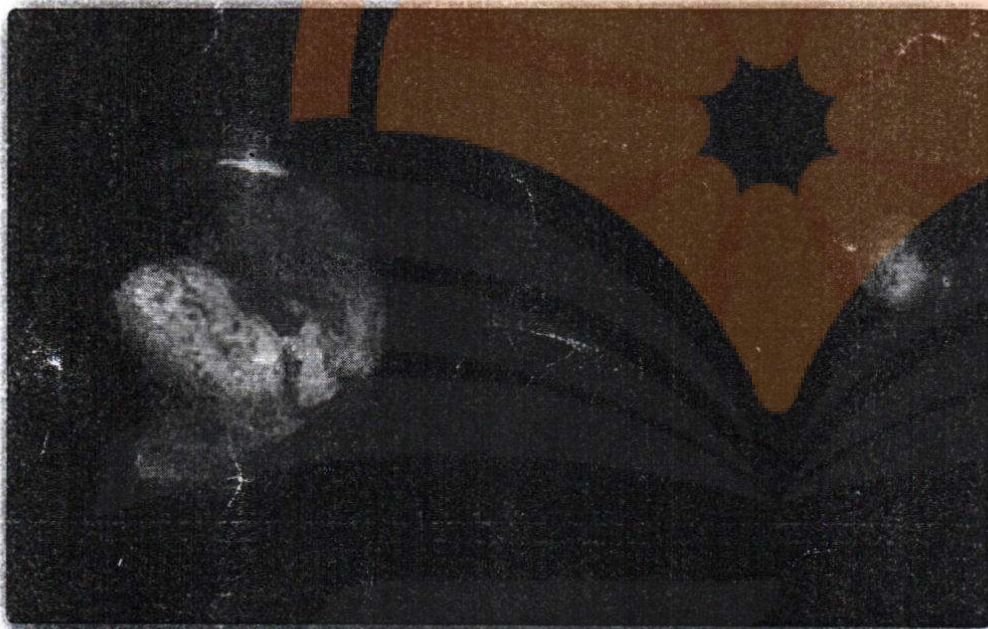


فصل

## مثلثات

السَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رحمان : ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره قطبی، ستاره ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه های ساعت به دور خود، دوران می کند.

نسبت های مثلثاتی

درس اول

دایره مثلثاتی

درس دوم

روابط بین نسبت های مثلثاتی

درس سوم

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

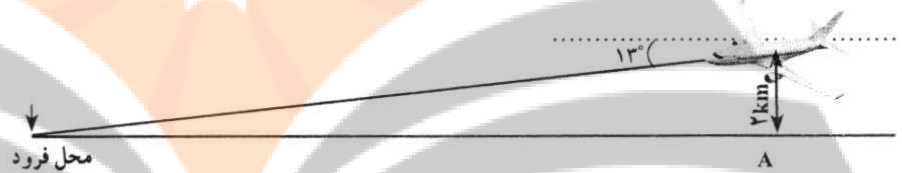




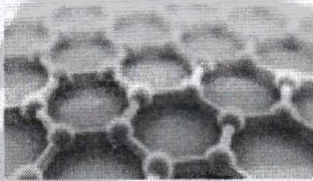
برای اینکه اتومبیل ها در پیچ جاده ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می کنند، یعنی آن را طوری می سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع تر باشد.

### درس اول: نسبت های مثلثاتی

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.

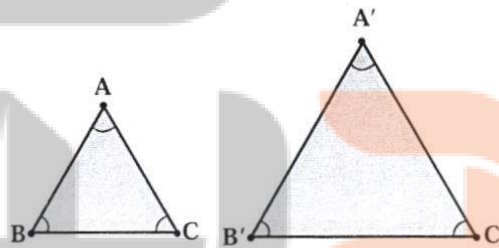


اگر زاویه هواپیما با افق  $13^\circ$  باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها  $120^\circ$  درجه است. در آینده ای نه چندان دور، بهترین میکروفن های جهان با استفاده از گرافن ساخته می شوند. این میکروفن ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوایی انسان را دارند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه



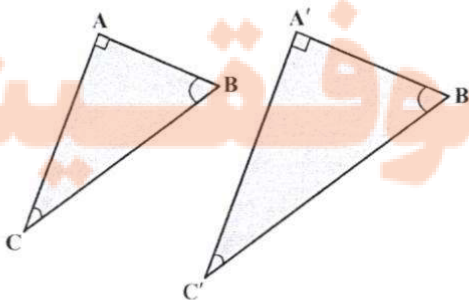
داریم:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$  و

$\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\hat{C} = \hat{C}'$

در هندسه ثابت می شود:

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می توان دید:



اگر  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم  $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آنگاه

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و A'B'C'،  $\hat{A} = \hat{A}'$ . جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی  $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$  (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

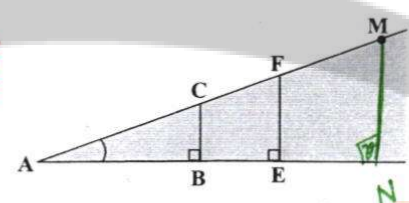
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی  $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$  را بررسی کنید.  
 ۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

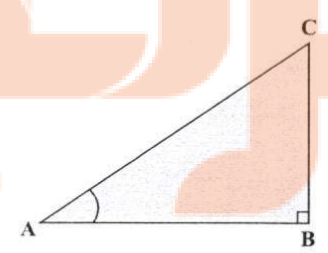
$$\triangle ACB \sim \triangle AFE \rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$



$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با  $\tan A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم:

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

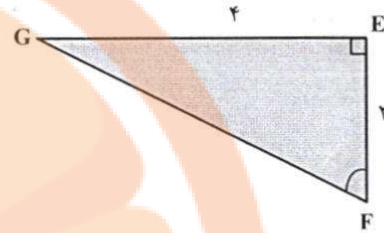
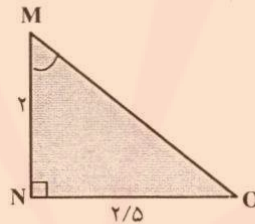
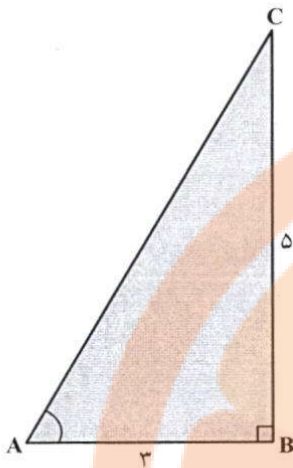


عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با  $\cot A$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$



۱ در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

۲ مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM، ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسره های زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\sqrt{3}^2 = 1^2 + AM^2 \rightarrow \sqrt{3} = AM$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را پیدا کنید.

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می نامیم و با sin A نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را

کسینوس زاویه A می نامیم و آن را با cos A نشان می دهیم. به عبارت دیگر  $\cos A = \frac{AB}{AC}$

تهیه کننده:

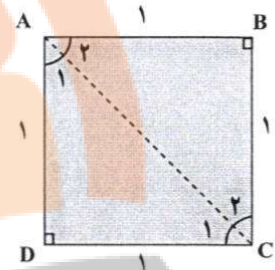
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به سادگی می توان دید در مثلث قائم الزاویه ABC،  $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$  و از این رو  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  به طور مشابه، می توان دید  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

**مثال**

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.



فربیا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم  $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$ . در نتیجه  $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  و از این رو  $(AC) = \sqrt{2}$ . پس  $AC = \sqrt{2}$ .

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$ .

میبنا: طبق تعریف سینوس،  $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس  $45^\circ$  را پیدا کنم.

$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

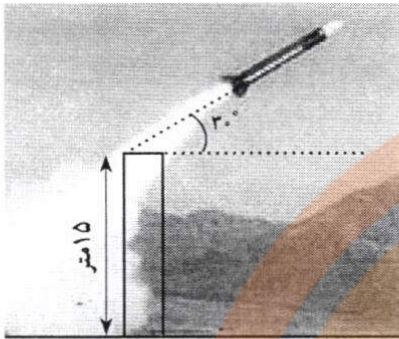
$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$  و  $\cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ .

**کاردر کلاس**

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های  $30^\circ$  و  $60^\circ$ ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

### مثال



یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $3^\circ$  پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟  
 حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

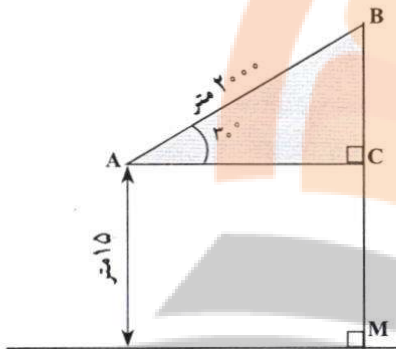
$$BC + MC = BC + \dots ۱۵.$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم  $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$ . پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{200} \Rightarrow BC = 100$$

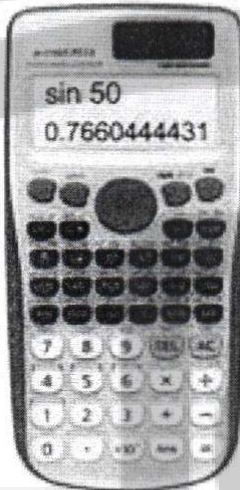
و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = 100 + 15 = 115$$



### فعالیت

۱ یک زاویه  $5^\circ$  رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $5^\circ$  را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

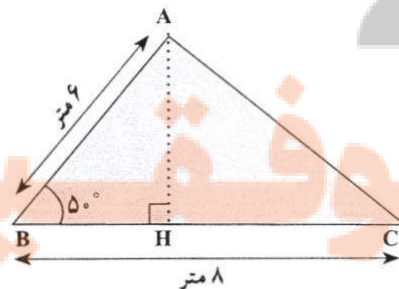
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

(الف) با توجه به اینکه  $\sin 5^\circ = 0.087$ ، داریم:

$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 0.087 \times 8 = 0.696$$

(ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 0.696 \times 8 = 2.808$$

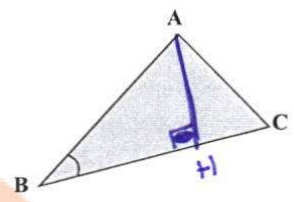


تهیه کننده:



کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:



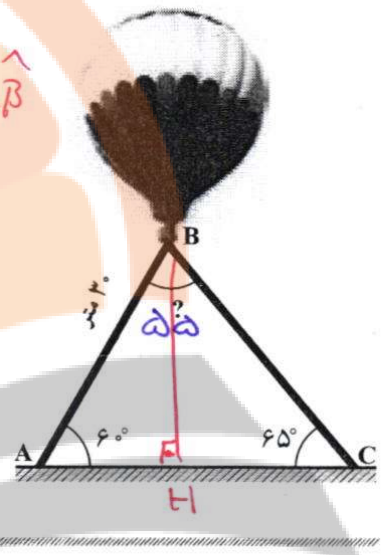
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \quad \frac{\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}}{\triangle ABH} \quad S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B}$$

۲ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

$$\hat{B} = 110^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$



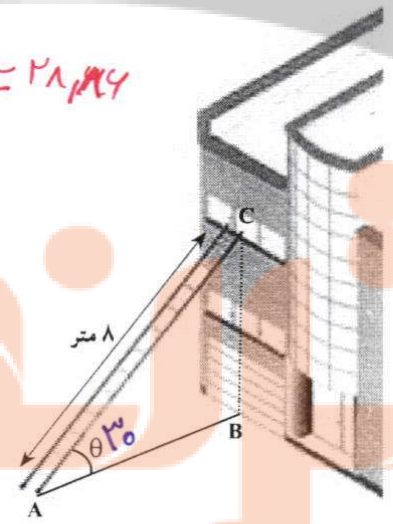
ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

$$\sin 40^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 = 15\sqrt{3}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه ۶۵، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\triangle BHC \rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 21.21$$

۳ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین  $\theta = 3^\circ$  باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin \theta = \frac{BC}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

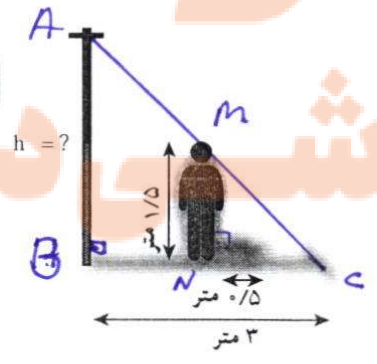
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

تمرین

۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۵/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

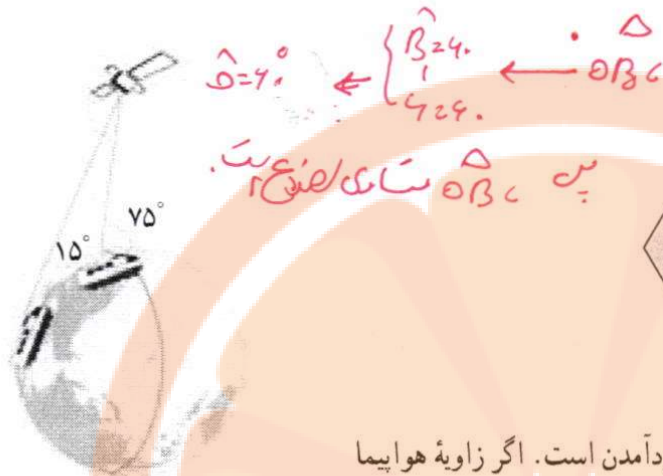
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB}$$





۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



$$\sin 30^\circ = \frac{OH}{OB}$$

$$OH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,0 \times \sqrt{3}$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1,0 \times \sqrt{3} = 1,0 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times 1,0 \sqrt{3} = 6 \sqrt{3}$$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

$$\tan 13^\circ = 0,23$$

$$B \parallel AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 13^\circ$$

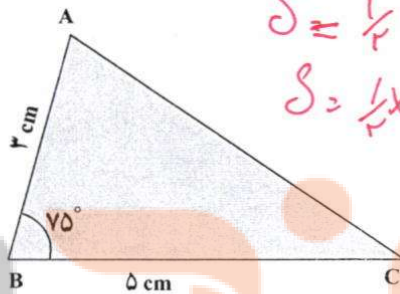


$$\tan 13^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{2}{0,23} \rightarrow AC = 1,49 \text{ km}$$

۴ فرض کنید  $\sin 75^\circ = 0,96$ . مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

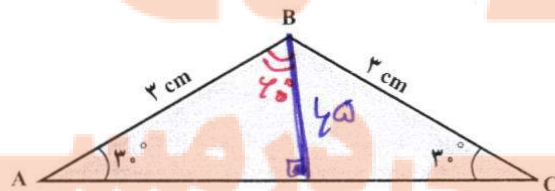
$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 75^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0,96 = 7,2$$



تهیه کننده:

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید. گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$\triangle ABH \rightarrow \sin A = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = 1,5$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1,5 \times \sin 60^\circ = 1,125 \sqrt{3}$$

ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

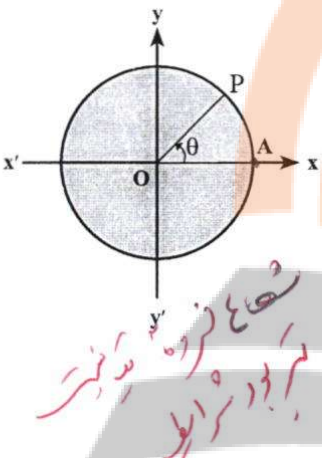
ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

**درس دوم: دایره مثلثاتی**



می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



دایره روبرو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

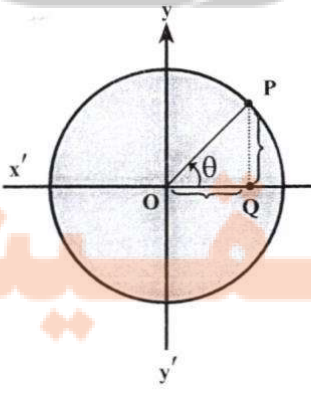
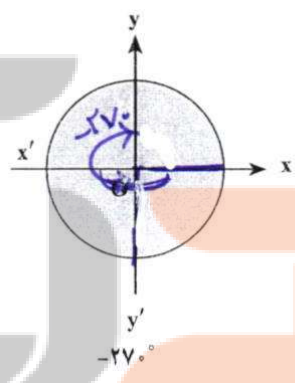
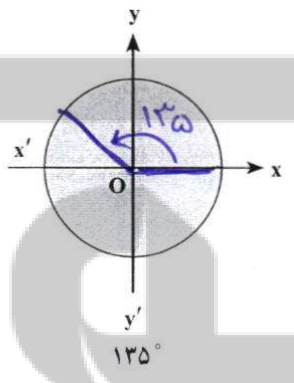
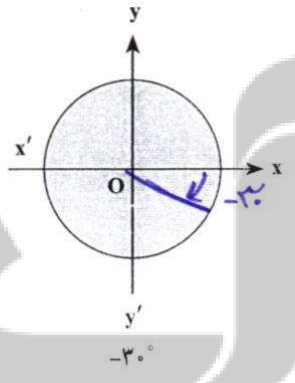
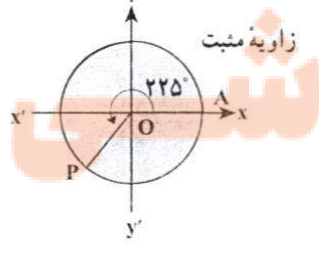
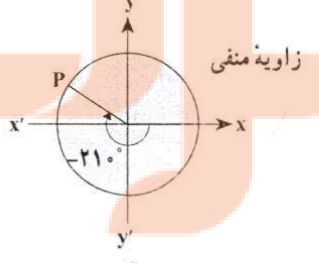
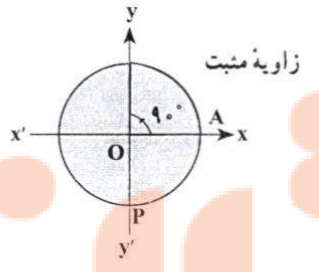
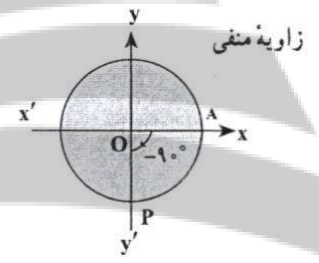
**مثال**

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های  $9^\circ$ ،  $-21^\circ$  و  $225^\circ$  داده شده‌اند.

شعاع زاویه مثبت  
برای دایره اول

**فعالیت**

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



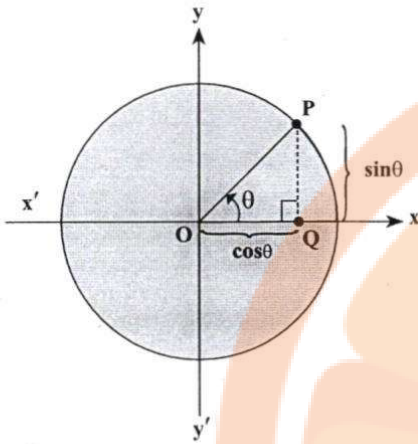
۲ فرض کنید نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبرو باشد و  $\theta$  زاویه‌ای است که نیم خط OP با محور Ox می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور Ox عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$  و  $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$  و  $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$

$\cos\theta = OQ$        $\sin\theta = PQ$

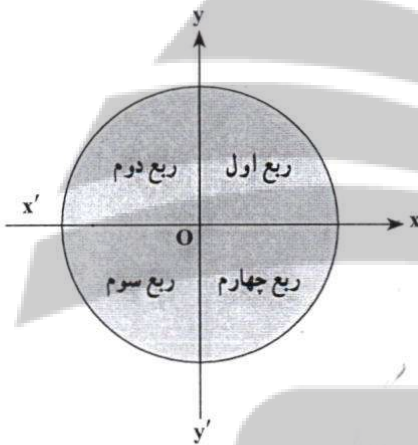


ب) با توجه به قسمت (الف) می توان دید فاصله Q تا مبدأ با  $\cos\theta$  برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با  $\sin\theta$  برابر است.



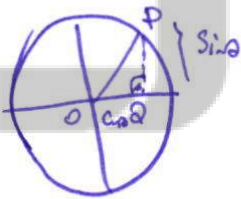
با توجه به قسمت (ب) محور  $x'Ox$  یا محور  $x$  ها را محور کسینوس ها و محور  $y'Oy$  یا محور  $y$  ها را محور سینوس ها می نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور  $x$  زاویه  $\theta$  می سازد، آنگاه P نقطه ای با مختصات  $(x, y)$  است که در آن  $x = \cos\theta$  و  $y = \sin\theta$ .

نکته: دو محور عمود بر هم  $x'Ox$  و  $y'Oy$  صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند. هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه  $xOy$  را ربع اول، ناحیه  $x'Oy$  را ربع دوم، ناحیه  $x'Oy'$  را ربع سوم و ناحیه  $xOy'$  را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم.  
نکته: زاویه های  $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ$  و  $36^\circ$  زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.



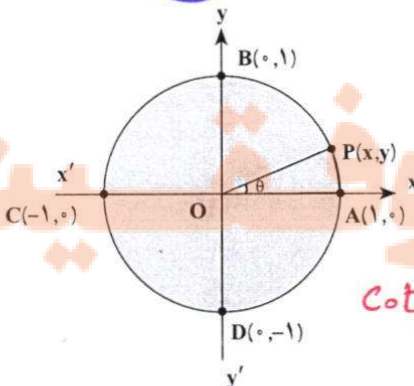
### کار در کلاس

مشخص کنید هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد؟  
الف)  $-3^\circ$  (چهارم)      ب)  $65^\circ$  (اول)      پ)  $182^\circ$  (سوم)      ت)  $-95^\circ$  (سوم)



با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه رو به زاویه ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت اند؟ در نامه اول

### مثال

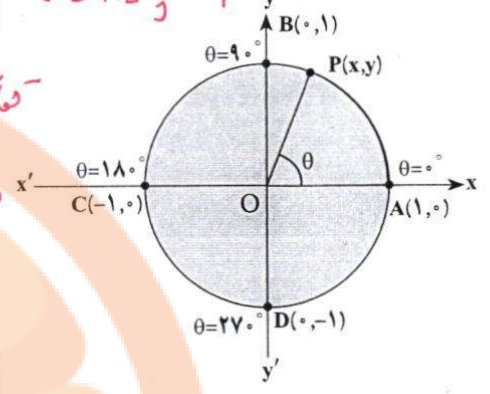


می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آوریم. می دانیم در دایره مثلثاتی روبه رو،  $\sin\theta = y$  و  $\cos\theta = x$ . اگر  $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می گیرد و داریم  $\sin 0^\circ = 0$  و  $\cos 0^\circ = 1$  همچنین  $\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ، اما  $\cot 0^\circ$  تعریف نمی شود (چرا؟).  $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$

تهیه کننده:

**فعالیت**

$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$



۱ در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر  $\theta = 90^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

تعریف P روی دایره B  
 $\sin 90^\circ = y = 1$

$\cos 90^\circ = 0$     $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

۲ اگر  $\theta = 180^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$\sin 180^\circ = y = 0$   
 $\cos 180^\circ = x = -1$

$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

۳ اگر  $\theta = 270^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کنید.

$\sin 270^\circ = y = -1$   
 $\cos 270^\circ = x = 0$

$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \infty$

**کار در کلاس**

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$  در ربع اول است  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  در ربع دوم است  
 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  در ربع سوم است  
 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  در ربع چهارم است

**فعالیت**

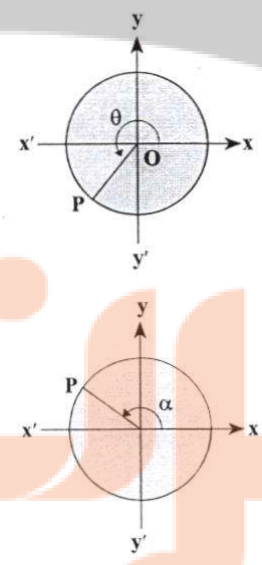
۱ فرض کنید زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه  $x = \cos \theta$  و  $y = \sin \theta$  و در ربع سوم،  $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin \theta < 0$     $\cos \theta < 0$     $\tan \theta > 0$     $\cot \theta > 0$

۲ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای  $\alpha$  نیز تکرار کنید.

$\sin \theta > 0$     $\cos \theta < 0$     $\tan \theta < 0$     $\cot \theta < 0$

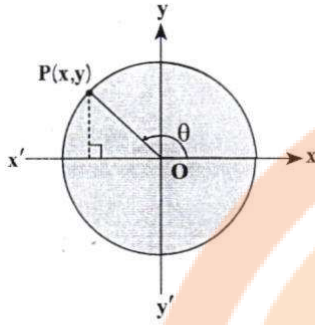
۳ جدول زیر را کامل کنید:



مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

نکته: برای هر زاویه دلخواه  $\theta$ ،  
 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  و  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$





آقای جلالی، از دانش آموزان پرسید: اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و  $\sin \theta = \frac{5}{7}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم  $\sin \theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض  $\frac{5}{7}$  ... است.

معلم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم:  $x^2 + y^2 = 1$ . بنابراین  $x = \pm \frac{24}{49}$  و در

نتیجه  $x^2 = \frac{24}{49}$ . اکنون با توجه به اینکه نقطه P در ناحیه دوم واقع است، داریم  $x = -\frac{24}{49}$ .

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی: چون زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطه P منفی است و از

این رو  $x = -\frac{24}{49}$  قابل قبول است.

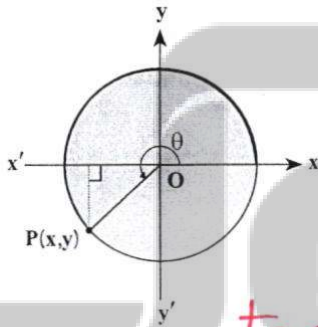
معلم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات

$(-\frac{24}{49}, \frac{5}{7})$  است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{24}{49}}{\frac{5}{7}} = -\frac{24}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{5}{7}}{-\frac{24}{49}} = -\frac{5}{24}, \quad \cos \theta = x = -\frac{24}{49}$$

تپه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  می‌دانیم

$\theta$  در ربع سوم قرار دارد، بنابراین  $y = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

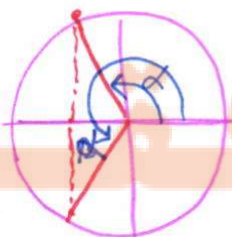
ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = 1$$

اگر  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که  $\alpha$  در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

نیم کره در ربع دوم یا سوم

زاویه‌ای مثال یزید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.



برای آنکه سینوس منفی و کسینوس

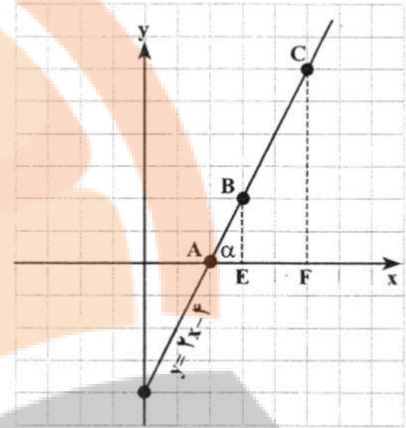
مثبت باشد کافی است زاویه

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط  $y=2x-4$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.  $\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$



ب) شیب این خط را پیدا کنید.  
شیب خط =  $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{4-0}{2-0} = 2$

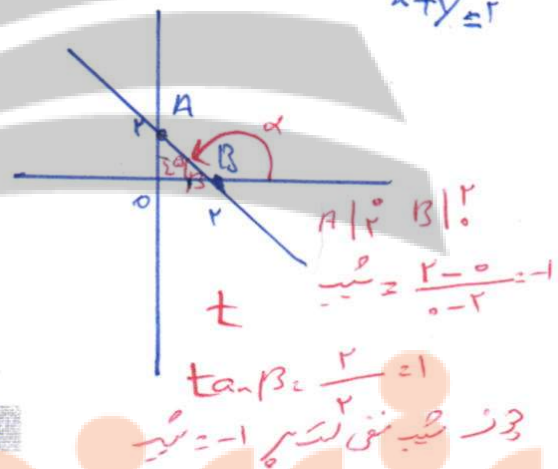
A [ 2 | 0 ]  
B [ 4 | 2 ]

پ) از مقایسه قسمت الف) و ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

توان نتیجه گرفت تانژانت زاویه مثبت محور x جهت مثبت محور x است.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

شیب خط =  $\tan \alpha$



کاربرگ کلاس

فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

ب)  $x+y=2$

الف)  $2y-3x=5$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها  $30^\circ$  است و از نقطه  $(1,0)$  می‌گذرد.

$\tan \alpha = a \rightarrow \tan 30^\circ = a \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + b \rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین

هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

- الف)  $270^\circ$
- ب)  $225^\circ$
- پ)  $135^\circ$
- ت)  $185^\circ$





در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیاز مندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدر مطلق برابر با نصف طول وتری به اندازه دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیبارک، اخترشناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهومی اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهومی‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تازانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، یا هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف)  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  (در ربع چهارم)  $\rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{9}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$   
 ب)  $\sin \beta = \frac{-1}{2}$  (در ربع سوم)

$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$   $\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

$\csc \alpha = \frac{4}{\sqrt{7}}$   $\sec \alpha = \frac{4}{3}$   $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$   $\cot \alpha = \sqrt{3}$

۳ اگر  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  هم علامت باشند، آنگاه  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

$\theta$  می‌تواند در ربع اول یا سوم باشد.

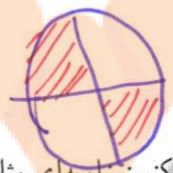


۴ حدود زاویه  $\theta$  را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف)  $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$  ب)  $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

۵ اگر  $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه  $\alpha$  در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

$\sin \alpha, \cos \alpha$  متعلق به ربع‌های مختلف هستند.



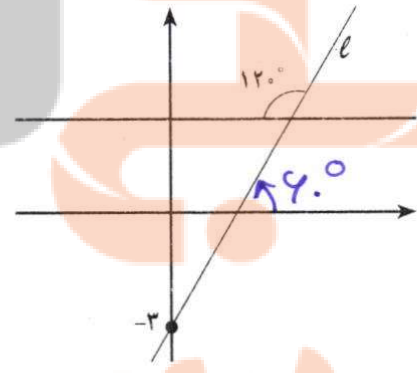
بر  $\alpha$  در ربع دوم یا سوم است.

۶ زاویه‌ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید به طوری که  $\tan \alpha > \cot \alpha$ . اکنون زاویه‌ای مثل  $\beta$  پیدا کنید، به طوری که  $\cot \beta > \tan \beta$ . از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1, \cot \alpha = 1 \rightarrow \tan \alpha = \cot \alpha$   
 $\beta = 30^\circ \rightarrow \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \beta = \sqrt{3} \rightarrow \cot \beta > \tan \beta$

۷ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها ۴۵ است و نقطه (۰، ۲) روی آن قرار دارد.

$\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow y = x + b$   
 با توجه به شکل زیر، معادله خط را به دست آورید.



$\tan 45^\circ = 1 \rightarrow y = x + b$   
 با توجه به شکل زیر، معادله خط را به دست آورید.  
 $(0, -3) \rightarrow -3 = \sqrt{3} \times 0 + b$   
 $\rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$

$y = \sqrt{3}x - 3$

تهیه کننده:

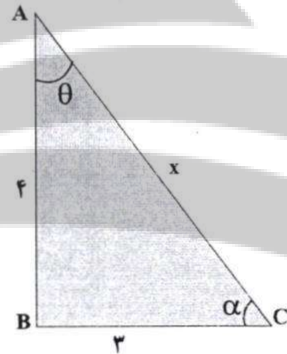
**درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی**

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

**فعالیت**

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

**الف** اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه  $\theta$  و  $\alpha$  به دست آورید.



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

**ب** با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  و  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$  را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

**ب** درستی رابطه  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

**ب** مشابه قسمت (ب) درستی رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  را بررسی کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر  $\alpha$  زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  جاهای خالی را پر کنید:

الف)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

ب)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را با توجه به ناحیه‌ای که زاویه  $\alpha$  در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

استنباطی

مثال

اگر  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار  $\tan \alpha$ ،  $\cos \alpha$  و  $\cot \alpha$  را به دست آورید.

$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  در ناحیه سوم  $\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

تهیه کننده:

اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$  ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست

آوردید.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$   $\frac{90^\circ < \alpha < 180^\circ}{\cos \alpha < 0} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$\cot \alpha = \frac{-4}{3} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{5}{9}$   $\frac{90^\circ < \alpha < 180^\circ}{\sin \alpha > 0} \rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{9}$

**اتحاد مثلثاتی**

هر یک از تساوی های  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  و  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ) ، یک اتحاد مثلثاتی

می نامیم.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ) را که به ازای هر  $\alpha$  همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید :



ساعت آفتابی وسیله ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می سنجد و از میله ای ساخته شده است که روی صفحه ای قرار دارد و ساعت های شبانه روز، روی صفحه نشانه گذاری شده اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابه جا می شود و ساعت را نشان می دهد.

**مثال**

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

اتحاد مزدوج  $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

حل :

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

**کار در کلاس**

با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید :

الف)  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

طرف چپ  $= \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times 1$



ب)  $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

طرف راست =  $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha$

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

ب)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$  اتحاد است زیرا:

$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$   
 $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$\alpha = 30^\circ \Rightarrow (\frac{1}{2})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  در  $\cot \alpha$  یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \cot \alpha \rightarrow \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \frac{\cot \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

زاویه‌ها در این نسبت!

تمرین

۱ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$   
 اگر  $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$  و  $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$   
 $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

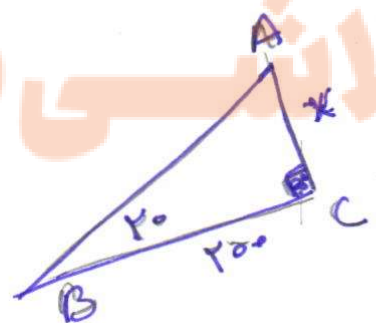
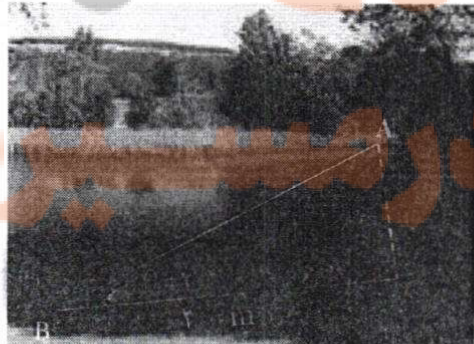
۲ اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید.

$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\tan 135^\circ = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$   
 $\cot \alpha = -1$

۳ اگر  $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $24^\circ$  را به دست آورید.

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + 3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$   
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)،  $20^\circ$  باشد و  $\sin 20^\circ = \frac{0.34}{1}$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (باسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{34}{100}$

$\rightarrow AB = \frac{34}{\sin 20^\circ} \quad AC = \frac{34}{100} \cdot AB$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (\frac{0.34}{100} \cdot AB)^2 + 200^2 = AB^2$



با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$\cos \theta = 1 - \sin^2 \theta$   
 $\cos^2 \theta = (1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$   
 تقسیم‌پذیر بر  $\cos \theta (1 + \sin \theta)$   
 $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

(ب)  $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

(الف)  $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

(ج)  $\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} =$

(ت)  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

(پ)  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

$\frac{1 + \sin x - 1 + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x$

(ث)  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.

(پ)  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

(ث)  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x (1 + \sin x)}$




تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)