فصل ۳: توان های گویا و عبارت های جبری

درس اول: ریشه و توان

فعالیت ✍ صفحه ۴۸

۱) اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها:

$\sqrt{۸۱}=۹ \Leftrightarrow ۹^۲=۸۱$ $\qquad$ $(-۳)^۳=-۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

$\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow (۵\sqrt{۲})^۲=۵۰$ $\qquad$ $(-۵)^۳=-۱۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$

$\sqrt[۳]{-۸}=-۲ \Leftrightarrow (-۲)^۳=-۸$ $\qquad$ $۲^۴=۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[۴]{۱۶}=۲$

$\sqrt{۱۰۰}=۱۰ \Leftrightarrow ۱۰^۲=۱۰۰$ $\qquad$ $۱۱^۲=۱۲۱ \Leftrightarrow \sqrt{۱۲۱}=۱۱$

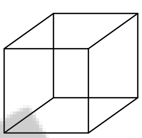
$\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳} \Leftrightarrow (۴\sqrt{۳})^۲=۴۸$ $\qquad$ $(۰/۲۵)^۲=۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۰۶۲۵}=۰/۲۵$

$\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۳\sqrt{۵})^۲=۴۵$ $\qquad$ $(۰/۵)^۲=۰/۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۲۵}=۰/۵$

۲) در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷	۱۲۵	-۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	-۳	۵	-۱۰	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس ✍ صفحه ۴۸



۱) حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر $a^۳$ متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه رو به دست آورده‌اند. روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد: چون $۳^۳=۲۷$ و $۸<۲۵<۲۷$ پس $۲<\sqrt[۳]{۲۵}<۳$ بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم. آیا: $(۲/۸)^۳=۲۵$ ؟

$(۲/۸)^۳=(۲/۸)^۲\times ۲/۸=۲۱/۹۵۲\simeq ۲۲$

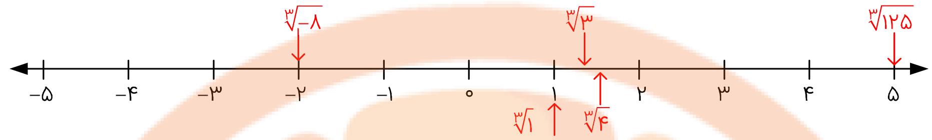
محسن: ۲۵ به ۲۷ نزدیک تر است تا ۸ پس بهتر است ۲/۹ را امتحان کنم:

$(۲/۹)^۳=(۲/۹)^۲\times ۲/۹=۲۴/۳۸۹\simeq ۲۴/۴$

احمد ابتدا با محاسبه $۳^۳=۲۷$, $۲^۳=۸$ و اینکه $a<\sqrt[۳]{۲۵}<\sqrt[۳]{۲۷}$ نتیجه گرفته است که $۲<\sqrt[۳]{۲۵}$ و $۲/۸$ را حدس زده و امتحان کرده است. محسن نیز با توجه به اینکه $۳^۳=۲۷$ و $۲۵<۲۷$ حدس زد که $\sqrt[۳]{۲۵}<۳$ و چون ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸ عدد ۲۸ را حدس زده و امتحان کرده است.

۲) مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

$\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۴}\simeq ۱/۵۸$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۳}\simeq ۱/۴$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱}=۱$



۳) مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون $۲۵ < ۳۰ < ۳۶$ پس $۵ < \sqrt{۳۰} < ۶$. همچنین چون $۱ < ۵ < ۸$ پس $۱ < \sqrt[۳]{۵} < ۲$.

ب) چون $۴ < ۷ < ۹$ پس $\sqrt{۴} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹}$ پس $۲ < \sqrt{۷} < ۳$

پ) چون $۹ < ۱۰ < ۱۶$ پس $\sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶}$ پس $۳ < \sqrt{۱۰} < ۴$

ت) چون $-۲۷ < -۱۷ < -۸$ پس $\sqrt[۳]{-۲۷} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \sqrt[۳]{-۸}$ پس $-۳ < \sqrt[۳]{-۱۷} < -۲$

ث) چون $۸ < ۲۰ < ۲۷$ پس $\sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{۲۷}$ پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۰} < ۳$

۴) زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

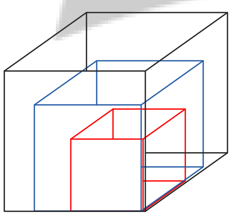
الف) $۴ < \sqrt{۲۲} < ۵$ (هر عددی بین ۱۶ و ۲۵) ب) $۹ < \sqrt[۳]{۸۵۶} < ۱۰$ (هر عددی بین ۷۲۹ و ۱۰۰۰)

۵) سه مکعب تودرتو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

مکعب میانی حجمی کمتر از ۶۴ و بیشتر از ۲۷ دارد. پس اگر طول ضلع مربع میانی را برابر a در نظر بگیریم داریم؛

$\sqrt[۳]{۲۷} < a < \sqrt[۳]{۶۴} \to ۳ < a < ۴$

پس طول ضلع مکعب میانی عددی حقیقی بین ۳ و ۴ است.



فعالیت ---------- صفحه ۵۰

۱) مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌ی چهارم را تعریف کرد. با هر تساویِ توانی یک تساوی رادیکالی داریم:

$۵^۴ = ۶۲۵$ ، $(-۵)^۴ = ۶۲۵$ $\Rightarrow$ ریشه های چهارم ۶۲۵: ۵ و -۵

$۲^۴ = ۱۶$ ، $(-۲)^۴ = ۱۶$ $\Rightarrow$ ریشه های چهارم ۱۶: ۲ و -۲

$\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی مثبت و برابر است با ریشه‌ی چهارم مثبت عدد ۶۲۵ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$. همچنین $-\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی منفی است و برابر است با ریشه‌ی چهارم منفی عدد ۶۲۵ یعنی $-\sqrt[۴]{۶۲۵} = -۵$.

آیا -۱۶ ریشه‌ی چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر -۱۶ شود.

خیر، ۱۶- ریشه‌ی چهارم ندارد؛ زیرا هر عددی (چه مثبت یا منفی) که ۴ بار در خودش ضرب شود (به توان ۴ برسد) علامتش حتماً مثبت خواهد بود.

اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی چهارم است که قرینه‌ی یکدیگرند.
عددهای منفی ریشه‌ی چهارم ندارند.

کار در کلاس ------------------------------------ صفحه ۵۱

۱) جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۳۰۰۰۰		۳۱۲۵		۱۰/۰۰۰		۶۲۵		۱۶	
ریشه‌های چهارم	$-10\sqrt[4]{3}$	$10\sqrt[4]{3}$	$-5\sqrt[4]{5}$	$5\sqrt[4]{5}$	۱۰	-۱۰	-۵	۵	-۲	۲

۲) جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	۲۴۳	۱۹	-۱۰۰۰۰۰	-۱	-۲۴۳	۷۱	۳۱۲۵	-۳۲
ریشه پنجم	۳	$\sqrt[5]{19}$	-۱۰	-۱	-۳	$\sqrt[5]{71}$	۵	-۲

۳) ریشه‌ی پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

صفر، ۱ و -۱

۴) محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{-32} = -2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$

$\sqrt[5]{-0/00032} = -0/2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} = 0/5$

۵) عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یامنفی دارای یک ریشه‌ی پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه‌ی پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه‌ی پنجم آن منفی است.

تمرین درس اول: ریشه و توان
صفحه ۵۱

۱) برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$-\sqrt{35}$ بین -۵ و -۶ $\sqrt{20}$ بین ۴ و ۵ $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt[3]{20}$ بین ۲ و۳ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt{75}$ بین ۸ و ۹

$\sqrt[4]{16} = 2$ $\sqrt[3]{250}$ بین ۶ و ۷ $\sqrt[3]{-90}$ بین -۴ و -۵

$\sqrt[4]{400}$ بین ۴ و ۵ $-\sqrt[4]{120}$ بین -۳ و -۴ $-\sqrt[4]{20}$ بین -۲ و -۳

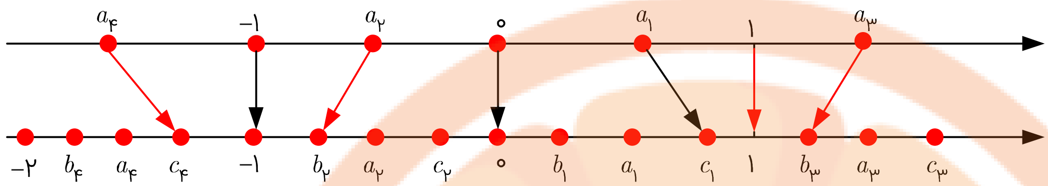
$\sqrt[5]{400}$ بین ۳ و ۴ $\sqrt[5]{-32} = -2$ $\sqrt[5]{1} = 1$

۲) مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید. (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

$\sqrt[3]{7/25} \simeq 1/9$ $\sqrt[3]{25} \simeq 2/9$ $\sqrt{10} \simeq 3/2$

$\sqrt[4]{90} \simeq 3/0$ $\sqrt[5]{64} \simeq 2/3$ $\sqrt[5]{16} \simeq 1/7$

۳) مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است، وصل کنید. (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید.)



۴) با توجه به آنچه درباره‌ی ریشه‌ی سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$ ، a چه عددی می‌تواند باشد؟

عددی بین صفر و یک

ب) a عددی است که ریشه‌ی سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$ ، a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱ و ۱- و صفر

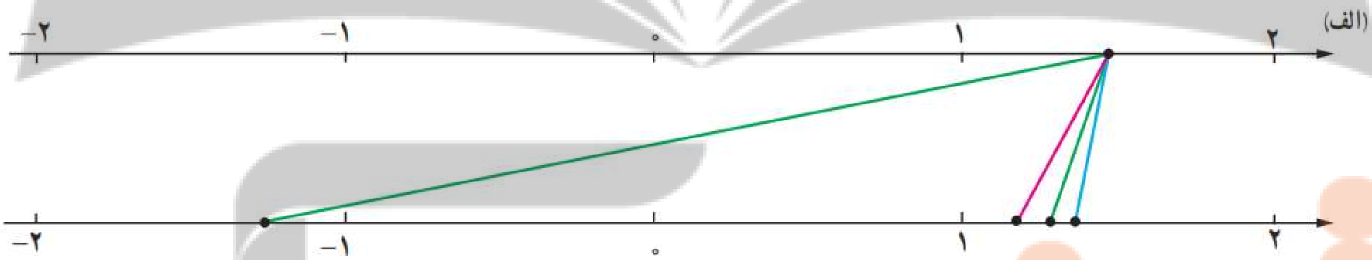
پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$ ، a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

اعداد بزرگ‌تر از یک

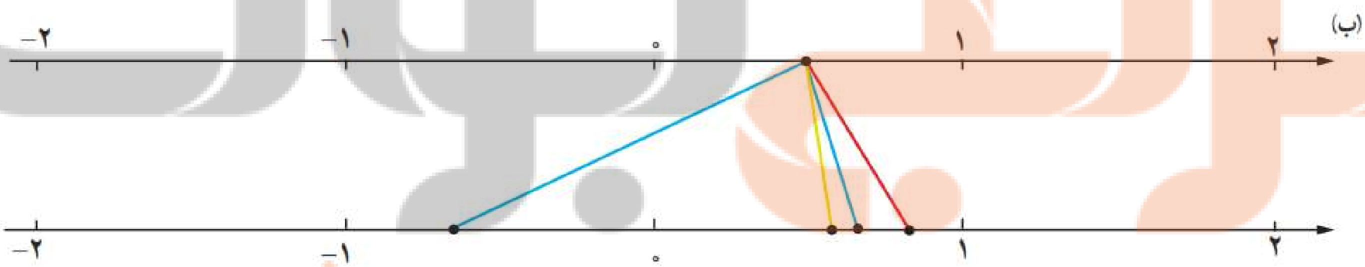
ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

اگر a منفی باشد و کمتر از ۱- باشد $\sqrt[3]{a} > a$ اگر a منفی باشد و عددی بین ۰ و ۱- باشد $\sqrt[3]{a} < a$

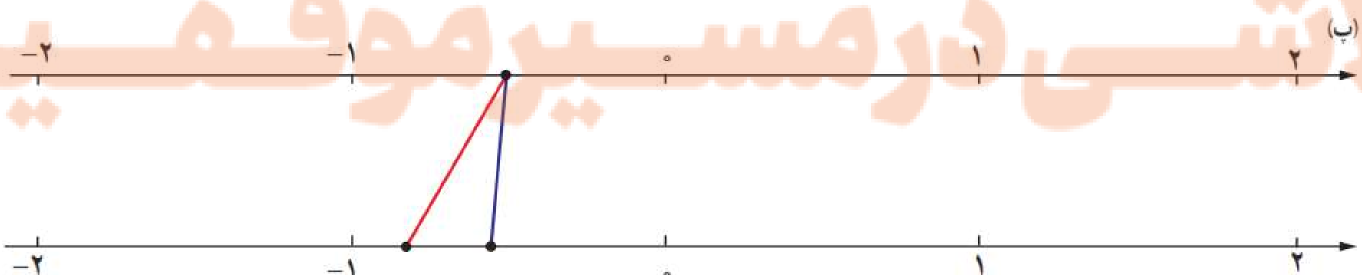
۵) در هر یک از شکل‌های زیر نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است؟



(الف) ریشه سوم= آبی ریشه پنجم= قرمز ریشه های چهارم= سبز

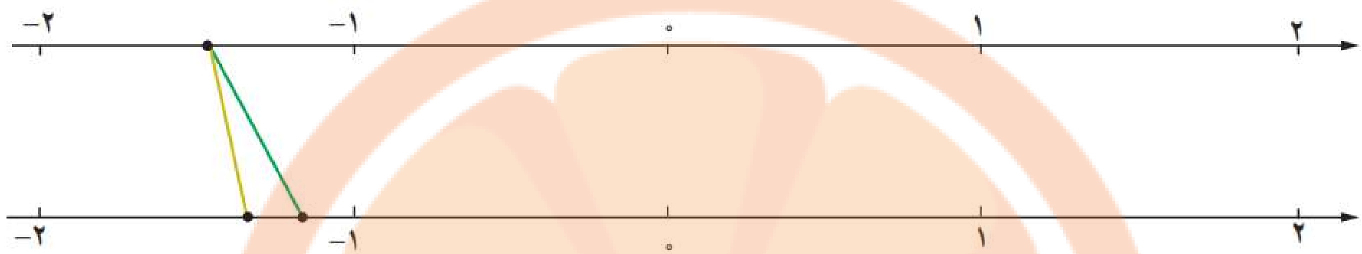


(ب) ریشه های چهارم= آبی ریشه پنجم= قرمز ریشه سوم= سبز



(پ) ریشه سوم= آبی ریشه پنجم= قرمز

(ت)



(ت) ریشه‌سوم= سبز کم‌رنگ   ریشه پنجم= سبز پررنگ

۶) جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ۳- ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ می‌باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[۴]{۱۶}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^۳ + ۵$ را بیابید.

چون $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$ پس $a = ۲$ بنابراین $۲^۳ + ۵ = ۱۳$

۷) می‌دانیم $\sqrt[۵]{۱۶۱۰۵۱} = ۱۱$ ، آنگاه $\sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

چون $۱۶۱۰۵۱ < ۱۷۰۰۰۰ < ۲۴۸۸۳۲$ پس $۱۱ = \sqrt[۵]{۱۶۱۰۵۱} < \sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰} < \sqrt[۵]{۲۴۸۸۳۲} = ۱۲$ یعنی $۱۱ < \sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰} < ۱۲$

۸) در جاهای خالی یکی از علامت های «>» ، «<» یا «=» را قرار دهید.

$۲^۵ > ۲^۲$ $(۰/۱)^۵ < (۰/۱)^۳$ $(-۰/۱)^۵ > (-۰/۱)^۳$

$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = ۰/۱$ $(-۲)^۵ < (-۲)^۳$ $(-۲)^۵ < (-۲)^۴$

۹) قرار دهید $\square = \sqrt[۵]{a}$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید $\square^۵$ برابر چه عددی است.

برابر با a است.

بنابراین داریم $(\sqrt[۵]{a})^۵ = a$ درباره‌ی $(\sqrt[۴]{a})^۴$ چه می‌توان گفت؟

$(\sqrt[۴]{a})^۴$ نیز برابر با a است.

فصل ۳: توان های گویا و عبارت های جبری

درس دوم: ریشهٔ n ام

فعالیت -- صفحه ۵۴

۱) مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشه‌ی ششم نیز عمل کنید. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$\sqrt[8]{64}$ $-\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[6]{64}=2$ $-\sqrt[6]{64}=-2$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}\ ,\ -\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt{64}=8$ $-\sqrt{64}=-8$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان ۲ و ۲- هستند؛ زیرا $2^6=64$ و $(-2)^6=64$. درباره‌ی ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟

۶۴ یک ریشه هفتم و دو ریشه هشتم دارد.

به طور کلی اگر $n\in\mathbb{N}$ درباره‌ی ریشه‌ی nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر عددی زوج باشد، آن‌گاه ریشه‌های nام عدد ۶۴ برابر است با $\sqrt[n]{64}$ و $-\sqrt[n]{64}$ و اگر $n\in\mathbb{N}$ عددی فرد باشد آنگاه ریشه‌ی nام عدد ۶۴ برابر است با: $\sqrt[n]{64}$

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n\in\mathbb{N}$، درباره‌ی تعداد ریشه‌های nام a چه می‌توان گفت؟

اگر n فرد باشد a یک ریشه nام دارد که همان $\sqrt[n]{a}$ است و اگر n زوج باشد a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

۲) جدول زیر را که درباره‌ی ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است تکمیل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج -64 وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی -64 شود.

درباره‌ی ریشه‌های nام -64 $(n\in\mathbb{N})$ بحث کنید.

ریشه nام ۶۴- برای n های فرد برابر $\sqrt[n]{-64}$ است و ریشه nام ۶۴- برای n های زوج وجود ندارد.

اگر a یک عدد منفی و $n\in\mathbb{N}$ باشد، درباره‌ی ریشه nام a چه می‌توان گفت؟

ریشه nام عدد a برای n های فرد برابر $\sqrt[n]{a}$ است و ریشه nام عدد a برای n های زوج وجود ندارد.

۳) جدول زیر را کامل کنید.

۸۱ دارای دو ریشه‌ی چهارم $\sqrt[4]{81}=3$ و $-\sqrt[4]{81}=-3$ است.	$a=81$ $n=4$	a دارای دو ریشه‌ی nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.	n زوج	$a>0$
۱۲۵ دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{125}=5$ است.	$a=125$ $n=5$	a دارای یک ریشه nام، $\sqrt[n]{a}$ است.	n فرد	
۱۶- ریشه چهارم ندارد.	$a=-16$ $n=4$	ریشه‌ی nام وجود ندارد.	n زوج	$a<0$
۲۷- دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{-27}=-3$ است.	$a=-27$ $n=3$	a دارای یک ریشهnام $\sqrt[n]{a}$ است.	n فرد	

کار در کلاس -- صفحه ۵۵

۱) حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[8]{۲۵۶} = ۲$ $\sqrt[7]{۱۲۸} = ۲$ $\sqrt[5]{-۳۲} = -۲$ $\sqrt[3]{۱۲۵} = ۵$

$\sqrt[5]{\frac{-۱}{۳۲}} = \frac{-۱}{۲}$ $-\sqrt[4]{۱۶} = -۲$ $\sqrt[4]{۶۲۵} = ۵$ $\sqrt[9]{-۱} = -۱$

$\sqrt[6]{۰} = ۰$ $-\sqrt{۱} = -۱$ $\sqrt[3]{-۰/۰۰۱} = -۰/۱$ $\sqrt[7]{-۱۲۸} = -۲$

۲) الف) می‌دانید که $\sqrt{x^۲} = |x|$ درباره‌ی $\sqrt[4]{x^۴}$ چه حدسی می‌زنید؟

$\sqrt[4]{x^۴} = |x|$

درستی خود را درباره‌ی چند عدد آزمایش کنید.

$\sqrt[4]{۴^۴} = ۴$ $\sqrt[4]{(-۵)^۴} = ۵$ $\sqrt[4]{(-۳)^۴} = ۳$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$\sqrt[6]{(-۲)^۶} = -۲$ نادرست $\sqrt[5]{۳^۵} = ۳$ درست $\sqrt[4]{(-۳)^۴} = -۳$ نادرست

$\sqrt[6]{(-۲)^۶} = ۲$ درست $\sqrt[5]{(-۳)^۵} = -۳$ درست $\sqrt[4]{(-۳)^۴} = ۳$ درست

پ) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$.

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$

اگر $a = -۱$ و $n = ۶$ باشد، آنگاه $(\sqrt[6]{-۱})^۶$ اصلاً وجود ندارد در حالی که $\sqrt[6]{(-۱)^۶}$ برابر با ۱ است.

ث) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟

در صورتی که داشته باشیم؛ $a \geq ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۲$

فعالیت -- صفحه ۵۵

در سال نهم دیدید که:

برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

آیا رابطه‌ی بالا درباره‌ی $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید.

$\sqrt[4]{۱۶} = ۲$ ، $\sqrt[4]{۶۲۵} = ۵$ ، $\sqrt[4]{۱۶ \times ۶۲۵} = \sqrt[4]{۱۰۰۰۰} = ۱۰$

با توجه به این که ۴ یک عدد زوج است، باید a و b نامنفی باشند.

$\sqrt[4]{۱۶} \times \sqrt[4]{۸۱} = ۲ \times ۳ = ۶$

$\sqrt[4]{۱۶} \times \sqrt[4]{۸۱} = \sqrt[4]{۱۶ \times ۸۱} = ۶$

درباره‌ی $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ خیر

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است؟

$$\begin{cases}\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=\sqrt[۵]{۳۲\times ۲۴۳}=\sqrt[۵]{۷۷۷۶}=۶\\ \sqrt[۵]{-۳۲}\times\sqrt[۵]{-۲۴۳}=(-۲)\times(-۳)=۶\\ \sqrt[۵]{-۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=\sqrt[۵]{-۳۲\times ۲۴۳}=\sqrt[۵]{-۷۷۷۶}=-۶\\ \sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{-۲۴۳}=۲\times(-۳)=-۶\end{cases}$$

کار در کلاس -- ✍ صفحه ۵۶

۱) آیا $(\sqrt[۳]{۲})^{۵}$ و $\sqrt[۳]{۲^{۵}}$ با هم برابرند؟ بله

درباره‌ی $(\sqrt[۴]{-۲})^{۴}$ و $\sqrt[۴]{(-۲)^{۴}}$ چه می‌توان گفت؟ خیر، برابر نیستند، زیرا $(\sqrt[۴]{-۲})^{۴}$ تعریف نشده است.

۲) با توجه به اینکه:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$(\sqrt[۵]{۲})^{۳}=\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}=\sqrt[۵]{۲^{۳}}$$

۳) درستی رابطه‌ی $(\sqrt[k]{a})^{m}=\sqrt[k]{a^m}$ را با مقداردهی‌های مختلف به k، m و a بررسی کنید. (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد.)

$$\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[k]{a\times a\times\ldots\times a}=\sqrt[k]{a}\times\sqrt[k]{a}\times\ldots\times\sqrt[k]{a}=(\sqrt[k]{a})^m$$

k	a	m	$\sqrt[k]{a^m}$	$(\sqrt[k]{a})^m$
۲	۴	۳	$\sqrt[۲]{۴^{۳}}=۸$	$(\sqrt[۲]{۴})^{۳}=۸$
۳	-۲۷	۵	$\sqrt[۳]{-۲۷^{۵}}=-۲۴۳$	$(\sqrt[۳]{-۲۷})^{۵}=-۲۴۳$

فعالیت -- ✍ صفحه ۵۷

۱) جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	n زوج	$a>۰$	$n=۴$ $a=۲$	$\sqrt[۴]{۲^{۴}}=۲ \quad (۲=\lvert ۲\rvert)$
		$a<۰$	$n=۴$ $a=-۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^{۴}}=۲ \quad (۲=\lvert -۲\rvert)$
	n فرد	$a>۰$	$n=۳$ $a=۲$	$\sqrt[۳]{۲^{۳}}=۲$
		$a<۰$	$n=۳$ $a=-۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}}=-۲$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

نتیجه می‌گیریم که برای nهای زوج $\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$ و برای n های فرد $\sqrt[n]{a^n}=a$

۲) جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۱۶$	$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ = ۲^۴$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۱۶$	$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \rightarrow$ تعریف نشده
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۸$	$(\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۲^۳ = ۸$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۸$	$(\sqrt[۳]{-۸})^۳ = (-۲)^۳ = -۸$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

نتیجه می‌گیریم که برای nهای فرد $(\sqrt[n]{a})^n = a$ و برای n های زوج اگر $a > ۰$ باشد، $(\sqrt[n]{a})^n = a$

تمرین درس دوم: ریشه nام
صفحه ۵۸

۱) الف) یکی از علامت‌های > یا < را در □ قرار دهید.

$\sqrt{۰/۲۵} = \sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$ 　　 $(۰/۵)^۲ > (۰/۵)^۳$

ب) وقتی $۰ < a < ۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □قرار دهید.

$\sqrt{a} < \sqrt[۳]{a}$ 　　 $a^۲ > a^۳$

۲) فرض کنیم $a = -۱$ است، در □علامت مناسب را قرار دهید.

$\sqrt[۵]{a} = \sqrt[۱۱]{a}$ 　　 $\sqrt[۳]{a} = \sqrt[۵]{a}$

$a^۳ = a^۵$ 　　 $a^۲ > a^۳$

۳) با توجه به تعریف ریشه‌ی (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$$

اگر $\sqrt[n]{a} = b$ در این صورت $b^n = a$. پس داریم؛ $b^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

۴) آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

خیر، این رابطه برقرار نیست.

$$n = ۳ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{۲۷+۸} = \sqrt[۳]{۳۵} \simeq ۳ \\ \sqrt[۳]{۲۷} + \sqrt[۳]{۸} = ۳ + ۲ = ۵ \end{cases}$$

$$n = ۴ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۴]{۱۶+۱} = \sqrt[۴]{۱۷} \simeq ۲ \\ \sqrt[۴]{۱۶} + \sqrt[۴]{۱} = ۲ + ۱ = ۳ \end{cases}$$

$$n = ۵ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۵]{۳۲+۱} = \sqrt[۵]{۳۳} \simeq ۲ \\ \sqrt[۵]{۳۲} + \sqrt[۵]{۱} = ۲ + ۱ = ۳ \end{cases}$$

۵) عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$۵^{-۳} = \frac{۱}{۵^۳} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۳ \rightarrow \sqrt[۳]{۵^{-۳}} = \frac{۱}{۵}$$

$\sqrt[۴]{۳^{-۴}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۳^{۴}}} = \frac{۱}{۳}$ $\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}} = \frac{۱}{۲}$ $\sqrt[۵]{۲^{-۵}} = \sqrt[۵]{\frac{۱}{۲^{۵}}} = \frac{۱}{۲}$

۶) به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$\frac{\sqrt[۴]{۱۶}}{\sqrt[۴]{۸۱}} = \frac{۲}{۳}$ ، $\sqrt[۴]{\frac{۱۶}{۸۱}} = \frac{۲}{۳}$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت‌اند.)

$\frac{\sqrt[۴]{-۱۶}}{\sqrt[۴]{-۸۱}} \neq \sqrt[۴]{\frac{-۱۶}{-۸۱}} \Rightarrow$ تعریف نشده است: $\frac{\sqrt[۴]{-۱۶}}{\sqrt[۴]{-۸۱}}$ ، $\sqrt[۴]{\frac{-۱۶}{-۸۱}} = \frac{۲}{۳}$

فصل ۳: توان های گویا و عبارت های جبری

درس سوم: توان های گویا

فعالیت ---------- صفحه ۶۰

۱) توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۴}$ $\quad$ $۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$ $\quad$ $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$

$(-۳)^{\frac{۱}{۵}} =$ تعریف نشده است. $\quad$ $۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$ $\quad$ $۵^{\frac{۱}{۷}} = \sqrt[۷]{۵}$

$(-۵)^{\frac{۱}{۴}} =$ تعریف نشده است. $\quad$ $۸۱^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱}$ $\quad$ $۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۶}$

۲) کدام درست است؟

ب) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$ درست است.

الف) $(-۳۲)^{\frac{۱}{۵}} = -۲$ درست است.

فعالیت ---------- صفحه ۶۰

اکنون شما اعداد توان‌دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۵^۲}$ $\quad$ ب) $۳^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{۳^۲}$ $\quad$ پ) $۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۲]{۲^۳}$

ت) $(-6)^{\frac{2}{7}}$ تعریف نمی شود $\quad$ ث) $۱۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶}$ $\quad$ ج) $(-3)^{\frac{2}{3}}$ تعریف نمی شود

کار در کلاس ---------- صفحه ۶۱

۱) تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$۳^{\frac{۵}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^۵} = \sqrt[۴]{۳^۴ \times ۳} = \sqrt[۴]{۳^۴} \times \sqrt[۴]{۳} = ۳\sqrt[۴]{۳}$ $\quad$ $۳^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^۲}$

$۴^{\frac{۷}{۵}} = \sqrt[۵]{۴^۷} = \sqrt[۵]{۴^۵} \times \sqrt[۵]{۴^۲} = ۴\sqrt[۵]{۱۶}$ $\quad$ $۴^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۴}$

$(۴ \times ۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴ \times ۲} = \sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$ $\quad$ $۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۳]{۲^۲} \times \sqrt{۲^۳} = \sqrt[۳]{۲^۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt[۳]{۴}$

$۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۵} \times \sqrt[۳]{۵^۲} = \sqrt[۳]{۵^۳} = ۵$ $\quad$ $۶^{\frac{۳}{۸}} = \sqrt[۸]{۶^۳}$ $\quad$ $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ $\quad$ $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = 5\sqrt[3]{5}$

۲) رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[۳]{-۱} = -۱$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۷^۲} = ۷^{\frac{۲}{۳}}$ $\quad$ $\sqrt{۲^۵} = ۲^{\frac{۵}{۲}}$ $\quad$ $\sqrt[۷]{۳^۲} = ۳^{\frac{۲}{۷}}$

$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$ $\quad$ $\sqrt[3]{-27} = ((-3)^3)^{\frac{1}{3}} = (-3)^1 = -3$ $\quad$ $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}} = (2^6)^{\frac{1}{5}} = (2)^{\frac{6}{5}}$ $\quad$ $\sqrt[۵]{۱۹} = ۱۹^{\frac{۱}{۵}}$

۳) جدول‌های زیر را کامل کنید.

$a > ۰$	$a^۳$	$a^{-۳}$	$a^۰$	$a^{\frac{۱}{۲}}$	$a^{\frac{۲}{۳}}$
$a = ۵$	$۵^۳$	$\frac{۱}{۵^۳}$	۱	$۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$	$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

$a<0$	a^{3}	a^{-3}	a^{0}	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=-5$	$(-5)^{3}$	$\frac{1}{(-5)^{3}}$	۱	تعریف نمی‌شود	$(-5)^{2}=25$	تعریف نمی‌شود

فعالیت --- صفحه ۶۱

۱) با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a>0$).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۲) دبیر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فروجه‌ی زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81}=3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^{4}}$ را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^{4}}=\left[(-3)^{4}\right]^{\frac{1}{4}}=\left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^{4}=(-3)^{\frac{1}{4}\times 4}=(-3)^{1}=-3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^{4}$ را حساب کنیم، یعنی:

$$\sqrt[4]{(-3)^{4}}=\sqrt[4]{81}=3$$

دبیر: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^{4}}=|-3|=3$$

۳) با توجه به فعالیت ۱ در صفحه‌ی قبل، تساوی‌ها را کامل کنید.

الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}}=\sqrt[3\times 2]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

ب) $(4^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}}=(\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\sqrt[7]{4}}=\sqrt[5\times 7]{4}=4^{\frac{1}{35}}=4^{\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}$

پ) اکنون برای هر عدد $a>0$، به ازای هر دو عدد گویای غیر صحیح r و s درستی تساوی $(a^{r})^{s}=a^{rs}$ را برای $r=\frac{1}{4}$ و $s=\frac{1}{2}$، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a}=a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}$$

۱) هر یک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(4^{\frac{1}{2}})^2} = \sqrt[3]{4} \qquad 4^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{4^3} \qquad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} \qquad 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \qquad 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \qquad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3} \qquad a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$$

$$17^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{17}} \qquad 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{(2^5)^2} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = 2^2 = 4 \qquad 32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$$

۲) هر یک از رادیکال‌ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه‌ی عدد مثبت باشد.

$$\sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}} \qquad \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} \qquad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 4 \qquad \sqrt[n]{a^2} = a^{\frac{2}{n}} \qquad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$$

۳) می‌دانیم:

$$\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ همواره برقرار است؟ $(a > 0)$ m و n و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

با توجه به اینکه $a > 0$ است، بله درست است، زیرا: $a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$

$2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$ زیرا

۴) فرض کنیم $a = 64$، $r = \frac{1}{2}$ و $s = \frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$r = \frac{1}{2} , s = \frac{1}{3} , a = 64 \Rightarrow \frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$$

حاصل هر دو با هم برابر است.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$r = \frac{1}{2} \ , \ s = \frac{1}{6} \ , \ a = 64 \Rightarrow \frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{6}}} = \frac{8}{2} = 4 \ , \ 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 64^{\frac{2}{6}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$r = \frac{2}{3} , s = \frac{1}{3} , a = 27 \Rightarrow \frac{27^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{9}{3} = 3 \ , \ 27^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$r = \frac{1}{2} , s = \frac{1}{4} , a = 625 \Rightarrow \frac{625^{\frac{1}{2}}}{625^{\frac{1}{4}}} = \frac{25}{5} = 5 \ , \ 625^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 625^{\frac{1}{4}} = 5$$

در نتیجه داریم $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

۵) حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{3^4}} = \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

$\sqrt[۳]{\sqrt{۵}} = \sqrt[۶]{۵}$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس چهارم: عبارت‌های جبری

فعالیت -- ✍ صفحه ۶۳

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

اتحاد گفته می‌شود؟

چون این تساوی به ازای هر عدد حقیقی که به جای a و b قرار گیرد، درست است.

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به‌دست آورد. برای مثال اگر $a=\frac{1}{5}$ و $b=3$ اختیار شود.

$$(\frac{1}{5}+3)^2 = (\frac{1}{5})^2 + 2\times\frac{1}{5}\times 3 + 3^2$$
$$(\frac{16}{5})^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \to \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه‌ی (۱) به جای b، -b قرار دهیم به دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱) با محاسبه‌ی $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$
$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^{2a} + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به –b تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲) یکبار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره‌ی (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$$
$$= (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۳) اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه‌ی فوق را بنویسیم، مثلاً:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \qquad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارتهای $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند.

کار در کلاس -- صفحه ۶۴

۱) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۲-a^۲b+ab^۲+ba^۲-ab^۲+b^۳=a^۳+b^۳$$
$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳+a^۲b+ab^۲-ba^۲-ab^۲-b^۳=a^۳-b^۳$$

۲) با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^۳+b^۳$ و $a^۳-b^۳$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

$$\begin{cases} a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲) \\ a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲) \end{cases}$$

۳) عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$۸x^۳-۲۷=(۲x)^۳-۳^۳=(۲x-۳)[(۲x)^۲+۲x\times۳+۳^۲]=(۲x-۳)(۴x^۲+۶x+۹)$$
$$x^۳+۱=x^۳+۱^۳=(x+۱)(x^۲-x+۱)$$
$$x^۳-۸=x^۳-۲^۳=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$$
$$x^۳-۱۲۵=x^۳-۵^۳=(x-۵)(x^۲+۵x+۲۵)$$
$$x^۶-۱=(x^۲)^۳-۱^۳=(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)=(x-۱)(x+۱)(x^۴+x^۲+۱)$$

فعالیت -- صفحه ۶۵

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به خاطر دارید:

$$۱۲=۳\times۴$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده‌ی عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶ و ۹ و ۱۵ و ...
مشابه این در اتحاد مزدوج

$$a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده‌ی $a^۲-b^۲$ است. همچنین $a^۲-b^۲$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.
آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

بله، تمام عبارت‌هایی که در تجزیه آنها عامل $a+b$ وجود دارد، مضرب $a+b$ است، مانند: $(a+b)(۸b^۲+۱)$

۱) مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند:

بعضی از مضرب‌های $a+b$: $a+b$ و $۲(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^۲$ و $-۴(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و ......

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

$$a^۳-b^۳\ ,\ (a-b)^۳\ ,...$$

۲) دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد؟

$$(a-b)^۲, a^۲-b^۲$$

۳) عبارت $۲۷a^۳ - ۱$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-۱$ × ب) $۳a-۱$ ✓ پ) $۹a^۲+۳a+۱$ ✓ ت) $۳a+۱$ ×

می‌دانیم $۲۷a^۳-۱=(۳a-۱)(۹a^۲+۳a+۱)$ بنابراین گزینه‌های ب و پ درست است.

نکته: عبارت $\sqrt{۳}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴) کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف) $\frac{۳x-\sqrt{۷}}{x^۲}$ گویا است ب) $\frac{x^۳-۱}{x^۳+۱}$ گویا است پ) $\sqrt[۳]{x}-۱$ گویا نیست ت) $\sqrt[۳]{x^۲}+x-۱$ گویا نیست

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد.)

۵) عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^۲+۴}$$

به ازای $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف نمی‌شود زیرا این دو عدد، عبارت‌های $x-۱$ و $x+۱$ که در مخرج هستند را صفر می‌کنند.

۶) حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۳}{x-۱}=\frac{\sqrt{x}+۱+۲\sqrt{x}-۲+۳}{x-۱}=\frac{۳\sqrt{x}+۲}{x-۱}$$

ب) $$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^۲-۱}+\frac{۱}{x^۲+۱}=\frac{(x+۱)(x^۲+۱)(x-۱)(x^۲+۱)-(x^۲+۱)+(x^۲-۱)}{x^۴-۱}$$

$$=\frac{x^۳+x+x^۲+۱+x^۳+x-x^۲-۱-x^۲-۱+x^۲-۱}{x^۴-۱}=\frac{۲x^۳+۲x-۲}{x^۴-۱}$$

کار در کلاس -- ✍ صفحه ۶۶

۱) صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید.)

الف) $$\frac{x^۶+۱}{x^۴+۲x^۲+۱}=\frac{(x^۲+۱)(x^۴-x^۲+۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{x^۴-x^۲+۱}{x^۲+۱}$$

ب) $$\frac{x^۳-۱}{(x-۱)^۳}=\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)^۳}=\frac{x^۲+x+۱}{(x-۱)^۲}$$

پ) $$\frac{x^۲+۱}{x^۴-۱}=\frac{x^۲+۱}{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}=\frac{۱}{x^۲-۱}$$

ت) $$\frac{y^۷-y}{y^۳+y^۲+y}=\frac{y(y^۶-۱)}{y(y^۲+y+۱)}=\frac{y(y^۲-۱)(y^۴+y^۲+۱)}{y(y^۲+y+۱)}=\frac{(y^۲-۱)(y^۴+y^۲+۱)}{(y^۲+y+۱)}$$

ث) $$\frac{y^۵-y^۳-۱۲y}{۸y^۲+۱۶y}=\frac{y(y^۴-y^۲-۱۲)}{۸y(y+۲)}=\frac{y(y^۲-۴)(y^۲+۳)}{۸y(y+۲)}=\frac{y(y-۲)(y+۲)(y^۲+۳)}{۸y(y+۲)}=\frac{(y-۲)(y^۲+۳)}{۸}$$

۲) در اتحاد

$$a^۳+۱=(a+۱)(a^۲-a+۱)$$

قرار دهید $a=\sqrt[۳]{x^۲}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[۳]{x^۲})^۳+۱=(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)\times\left((\sqrt[۳]{x^۲})^۲-\sqrt[۳]{x^۲}+۱\right)$$

$$x^۲+۱=(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)\left(\sqrt[۳]{x^۴}-\sqrt[۳]{x^۲}+۱\right)$$

۳) گویا کردن مخرج‌های گنگ: صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت‌هایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\qquad (x\neq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

تمرین درس سوم: عبارت‌های جبری
صفحه ۶۷

۱) هر یک از عبارت‌ها را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

ب) $x^4-y^4=x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x^2+y^2)$

پ) x^2+y^2 تجزیه نمی‌شود.

۲) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}+\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}-1-5x}{x-1}$

۳) بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

ب) $105^2 \Rightarrow (100+5)^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

پ) $1007^2 \Rightarrow (1000+7)^2 = 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$

ت) $99^2 \Rightarrow (100-1)^2 = 1000000 - 3000 + 300 - 1 = 970299$

۴) کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} + \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$= \frac{2+\sqrt{x}+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

۵) عبارت $a^6 - 2b^6 + 3a^3b^3$ را تجزیه کنید.

توضیح: این سؤال را اگر بخواهیم به صورت ضرایب صحیح تجزیه کنیم می‌بایست ضرایب b^3 عدد ۳- باشد یعنی:

$$a^6 - 3b^6 + 2a^3b^3 = a^6 - b^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$$
$$= a^6 - b^6 + 2b^3(a^3 - b^3)$$
$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) + 2b^3(a^3 - b^3)$$
$$= (a^3 - b^3)[a^3 + b^3 + 2b^3]$$
$$= (a^3 - b^3)[a^3 + 3b^3]$$

اما اگر بدون تغییر سؤال بخواهیم آنها را تجزیه کنیم ضریب گنگ ایجاد می‌شود یعنی:

$$a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6 - 3b^6$$
$$= (a^3 + b^3)^2 - 3b^6$$
$$= (a^3 + b^3 - \sqrt{3}b^3)(a^3 + b^3 + \sqrt{3}b^3)$$