فصل ٤: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

فعالیت ---------- صفحه ۷۱

معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید را در نظر بگیرید.

۱) با تجزیه‌ی سمت چپ معادله‌ی بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x+۱)(x-۳)=۰$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = ۰$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = ۰ \Rightarrow A = ۰ \quad or \quad B = ۰$$

۲) از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x+۱)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x+۱ = ۰ \quad or \quad x-۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad or \quad x = ۳$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$x = ۳$
$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$
$(۳)^۲ - ۲(۳) - ۳ = ۰$
$۹ - ۶ - ۳ = ۰$
$۰ = ۰$ ☑

$x = -۱$
$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$
$(-۱)^۲ - ۲(-۱) - ۳ = ۰$
$۱ + ۲ - ۳ = ۰$
$۰ = ۰$ ☑

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره‌ی آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

خیر، جواب $x = -۱$ قابل قبول نیست، زیرا طول ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه همواره عددی مثبت است.

کار در کلاس ---------- صفحه ۷۱

معادله‌های درجه‌ی دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^۲ - ۳x = ۱۰$

$$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x-۵ = ۰ \quad or \quad x+۲ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \quad or \quad x = -۲$$

حالا جواب‌ها را امتحان می‌کنیم: $x = ۵ : ۵^۲ - ۳(۵) - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۲۵ - ۱۵ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ☑

$x = -۲ : (-۲)^۲ - ۳(-۲) - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۴ + ۶ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ☑

ب) $۳t^۲ - t = ۰$

$$\Rightarrow t(۳t-۱) = ۰ \Rightarrow t = ۰ \quad or \quad ۳t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۰ \quad or \quad t = \frac{۱}{۳}$$

حالا جواب‌ها را امتحان می‌کنیم: $t = ۰ : ۳(۰)^۲ - ۰ = ۰ \Rightarrow ۰ - ۰ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ☑

$t = \frac{۱}{۳} : ۳(\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۳} = ۰ \Rightarrow ۳(\frac{۱}{۹}) - \frac{۱}{۳} = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ☑

فعالیت ---------- صفحه ۷۲

معادله‌ی درجه دوم $x^۲ = ۲۵$ را در نظر بگیرید.

۱) جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

$$x^۲ = ۲۵ \Rightarrow x^۲ - ۲۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۵) = ۰ \Rightarrow x - ۵ = ۰ \;\; or \;\; x + ۵ = ۰$$
$$\Rightarrow x = ۵ \;\; or \;\; x = -۵$$

۲) از دو طرف معادله‌ی $x^۲ = ۲۵$، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x = \pm ۵$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

جواب‌های هر دو روش یکسان است.

۳) اگر $x^۲ = a$ یک معادله‌ی درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت $x = \pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

خیر، زیرا ممکن است a عددی منفی باشد و همان طور که می‌دانیم اعداد منفی ریشه دوم ندارند. بنابراین معادله جواب نخواهد داشت. فقط در صورتی که a عددی مثبت باشد می‌توانیم هر دو ریشه را به دست آوریم.

کار در کلاس ---------- صفحه ۷۳

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید.

الف) $۵x^۲ = ۲۰$
$r - ۲ = \pm ۴$
$r = ۶ \;\; or \;\; r = -۲$

ب) $t^۲ + ۷ = ۰$
$t^۲ = -۷$
این معادله جواب ندارد.

پ) $(r-۲)^۲ = ۱۶$
$x^۲ = ۴$
$x = \pm ۳$

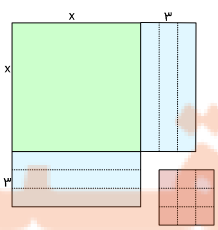
فعالیت ---------- صفحه ۷۳

۱) دو جمله‌ای $x^۲ + ۶x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^۲ + ۶x + ۹ = (x + ۳)^۲$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

عدد ۹ مساحت مربع کوچک ایجاد شده در سمت راست و پایین شکل است و عدد ۳ طول ضلع این مربع (جذر۹) است.



۲) اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^۲ + ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^۲ + ax + (\frac{a}{۲})^۲ = (x + \frac{a}{۲})^۲$$

کار در کلاس ---------- صفحه ۷٤

معادله‌های زیر ر ابه روش مربع کامل حل کنید.

الف)

$x^2+2x=24$

$x^2+2x+1=24+1$

$(x+1)^2=25$

$x+1=\pm 5 \Rightarrow x=\pm 5-1$

$x=4 \quad or \quad x=-6$

ت)

$2r^2+r-2=0$

$r^2+\frac{r}{x}-1=0 \Rightarrow r^2+\frac{r}{2}=1$

$r^2=\frac{r}{2}+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{16}$

$(r+\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16} \Rightarrow r+\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$r=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad or \quad r=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

ب)

$t^2+3t=3$

$t^2+3t+\frac{9}{4}=3+\frac{9}{4} \Rightarrow (t+\frac{3}{2})^2=\frac{21}{4}$

$t+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}-\frac{3}{2}$

$t=\frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad or \quad t=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

پ)

$n^2-4n+5=0$

$n^2-4n=-5$

$n^2-4n+4=-5+4$

$(n-2)^2=-1$

این معادله جواب ندارد.

فعالیت ---------- صفحه ۷٤

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه‌ی دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله‌ی درجه دوم را حل کرد؟

معلم: بله. برای حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$ax^2+bx+c=0$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

به دو طرف معادله $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

به دو طرف معادله، $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود.

$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$

دو طرف را ساده کرده‌ایم

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^2-4ac$؛ پس: $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

آیا می‌توانید با ریشه‌ی دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست آورید؟

دانش‌آموز: اگر $\Delta < ۰$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه‌ی دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > ۰$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به دست آورید؟

دانش‌آموز: بله. کافی است از دو طرف معادله‌ی $(x+\frac{b}{۲a})^۲ = \frac{\Delta}{۴a}$ ریشه‌ی دوم بگیریم:

$$x+\frac{b}{۲a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

دانش‌آموز: اگر $\Delta = ۰$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

معلم: بله و این ریشه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲ = \frac{\Delta}{۴a^۲} \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲ = ۰ \Rightarrow x+\frac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a}$$

دانش‌آموز: پس در حالت $\Delta = ۰$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ دارد.

معلم: این ریشه از معادله‌ی $(x+\frac{b}{۲a})^۲ = (x+\frac{b}{۲a})(x+\frac{b}{۲a}) = ۰$ به دست آمده است و چون هر دو معادله‌ی $x+\frac{b}{۲a} = ۰$ و $x+\frac{b}{۲a} = ۰$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه‌ی مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه‌ی دوم می‌گوییم.

کار در کلاس -- صفحه ۷۵

۱) با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^۲+bx+c=۰ \rightarrow \boxed{\Delta = b^۲-۴ac}$

- $\Delta > ۰ \rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی دارد. $x = -\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$
- $\Delta = ۰ \rightarrow$ معادله یک ریشه حقیقی دارد. $x = -\frac{b}{۲a}$
- $\Delta < ۰ \rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲) معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^۲-x+۱=۰$

در این معادله، $c=۱$ و $b=-۱$ و $a=۱$، پس $\Delta = b^۲-۴ac = ۱-۴ = -۳$ و چون $\Delta < ۰$ است، این معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب) $-۲x^۲+x+۳=۰$

در این معادله، $c=۳$ و $b=۱$ و $a=-۲$، پس $\Delta = b^۲-۴ac = ۱-۴(-۶) = ۱+۲۴ = ۲۵$ پس $\Delta > ۰$ و این معادله دو ریشه دارد که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱\pm۵}{-۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۱+۵}{-۴} = \frac{۴}{-۴} = -۱ \\ x = \frac{-۱-۵}{-۴} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

پ) $-x^2+4x-4=0$

$a=-1 \,,\, b=4 \,,\, c=-4$

$\Delta = b^2-4ac=(4)^2-4(-1)(-4)=16-16=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2$

چون Δ صفر است، معادله یک ریشه ی حقیقی دارد و از رابطه ی زیر به دست می‌آید:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2$

تمرین درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن صفحه ۷۶

۱) معادله‌های زیر را با کمک تجزیه حل کنید.

$1)\ x^2-11x=-10$

$x^2-11x+10=0 \Rightarrow (x-10)(x-1)=0 \Rightarrow x-10=0 \ or\ x-1=0 \Rightarrow x=10 \ or\ x=1$

$2)\ 5t^2=20$

$5t^2-20=0 \Rightarrow 5(t^2-4)=0 \Rightarrow 5(t-2)(t+2)=0 \Rightarrow t-2=0 \ or\ t+2=0 \Rightarrow t=+2 \ or\ t=-2$

$3)\ 5a^2-7a=2a(a-3)$

$5a^2-7a=2a^2-6a \Rightarrow 3a^2-a=0 \Rightarrow a(3a-1)=0 \Rightarrow a=0 \ or\ 3a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$4)\ 4k^2-12k+8=0$

$4(k^2-3k+2)=0 \Rightarrow 4(k-1)(k-2)=0 \Rightarrow k-1=0 \ or\ k-2=0 \Rightarrow k=1 \ or\ k=2$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

$1)\ n^2-2=26 \Rightarrow n^2=28 \Rightarrow n=\pm\sqrt{28} \Rightarrow n=\pm 2\sqrt{7}$

$2)\ x^2+12=3 \Rightarrow x^2=-9$ جواب حقیقی ندارد.

$3)\ (3t-2)^2=4 \Rightarrow 3t-2=\pm 2 \Rightarrow 3t=2\pm 2 \Rightarrow 3t=0 \ or\ 3t=4 \Rightarrow t=\frac{4}{3}$

$4)\ 3-3k=3k(2k-1) \Rightarrow 3-3k=6k^2-3k \Rightarrow k^2=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$1)\ x^2-6x=7$

$x^2-6x+9=7+9 \Rightarrow (x-3)^2=16 \Rightarrow x-3=\pm 4 \Rightarrow x=\pm 4+3 \Rightarrow x=7 \ or\ x=-1$

$2)\ s^2-3s+3=0$

$s^2-3s=-3 \Rightarrow s^2-3s+\frac{9}{4}=-3+\frac{9}{4} \Rightarrow (s-\frac{3}{2})^2=-\frac{3}{4}$ معادله جواب حقیقی ندارد.

$3)\ r^2+4r+4=0$

$(r+2)^2=0 \Rightarrow r+2=0 \Rightarrow r=-2$ ریشه مضاعف

$۴)\ ۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰$

$۲a^۲ + ۵a = ۳ \Rightarrow a^۲ + \frac{۵}{۲}a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲ + \frac{۵}{۲}a + \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۳}{۲} + \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow (a + \frac{۵}{۴})^۲ = \frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow a + \frac{۵}{۴} = \pm\frac{۷}{۴} \Rightarrow a = -۳ \ \ or \ \ a = \frac{۱}{۲}$

۴) هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$۱)\ ۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۴\ , b = -۱۳\ ,\ c = ۳$

$\Rightarrow \Delta = (-۱۳)^۲ - ۴ \times ۴ \times ۳ = ۱۶۹ - ۴۸ = ۱۲۱ \Rightarrow x = \frac{۱۳ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۸} \Rightarrow x = ۳ \ \ or \ \ x = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

$۲)\ r - r^۲ = ۳ \Rightarrow r^۲ - r + ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۱\ ,\ b = -۱\ ,\ c = ۳$

$\Rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴ \times ۱ \times ۳ = ۱ - ۱۲ = -۱۱ < ۰ \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد.

$۳)\ a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹ \Rightarrow a^۲ + ۲\sqrt{۳}a - ۹ = ۰ \Rightarrow a = ۱, b = ۲\sqrt{۳}\ ,\ c = -۹$

$\Rightarrow \Delta = (۲\sqrt{۳})^۲ - ۴ \times ۱ \times (-۹) = ۴۸ \Rightarrow a = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm \sqrt{۴۸}}{۲} = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = -۳\sqrt{۳} \ \ or \ \ a = \sqrt{۳}$

$۴)\ \frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲t^۲ - ۳t - ۹ = ۰ \Rightarrow a = ۲, b = -۳, c = ۹$

$\Rightarrow \Delta = (-۳)^۲ - ۴ \times ۲ \times (-۹) = ۸۱ \Rightarrow t = \frac{۳ \pm \sqrt{۸۱}}{۴} \Rightarrow t = ۳ \ \ or \ \ t = -\frac{۳}{۲}$

۵) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$۱)\ ۲x^۲ = ۲۵۰$

$\Rightarrow x^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱۲۵} \Rightarrow x = \pm ۵\sqrt{۵}$

$۲)\ ۹ - ۶z + z^۲ = ۰$

$\Rightarrow (z - ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow z - ۳ = ۰ \Rightarrow z = ۳$ ریشه مضاعف

$۳)\ ۴a^۲ + ۳a = ۱$

$\Rightarrow ۴a^۲ + ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۴, b = ۳, c = -۱$

$\Rightarrow \Delta = ۳^۲ - ۴ \times ۴ \times (-۱) = ۲۵ \Rightarrow a = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲۵}}{۸} \Rightarrow a = -۱ \ \ or \ \ a = \frac{۱}{۴}$

$۴)\ b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰$

$a = ۱, b = \sqrt{۲}, c = -۴ \Rightarrow \Delta = (\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times ۱ \times (-۴) = ۲ + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱۸}}{۲}$

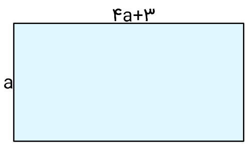
$\Rightarrow b = \frac{-\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow b = -۲\sqrt{۲} \ \ \ or \ \ \ b = \sqrt{۲}$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

فرض کنید این دو عدد x و x+۲ باشند:

$x^۲ + (x + ۲)^۲ = ۲۹۰ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ = ۲۹۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۲۸۶ = ۰$

$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱۴۳ = ۰ \Rightarrow (x + ۱۳)(x - ۱۱) = ۰ \Rightarrow x = -۱۳ \ \ or \ \ x = ۱۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱۱\ ,\ ۱۳ \\ -۱۱, \ -۱۳ \end{cases}$



۷) طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$$a(4a+3)=45 \Rightarrow 4a^2+3a=45 \Rightarrow 4a^2+3a-45=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\times4\times(-45)=729$$

$$\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{729}}{8}=\frac{-3\pm27}{8} \Rightarrow a=-\frac{15}{4} \quad or \quad a=3$$

$a=-\frac{15}{4}$ قابل قبول نیست. پس عرض مستطیل $a=3$ و طول آن $4\times3+3=15$ خواهد بود.

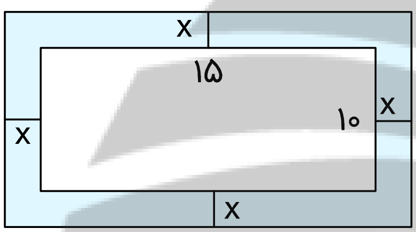
۸) اختلاف سنی دو برابر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

فرض کنید سن برادر کوچک‌تر x باشد، بنابراین سن برادر بزرگ‌تر x+4 خواهد بود.

$$x(x+4)=60 \Rightarrow x^2+4x-60=0 \Rightarrow (x+10)(x-6)=0 \Rightarrow x=-10 \quad or \quad x=6$$

۴ سال بعد برادر کوچک‌تر ۶ و برادر بزرگ‌تر ۱۰ سال خواهند داشت. بنابراین الان سن آنها به ترتیب ۲ و۶ سال است.

۹) یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قابل با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قابل عکس را پیدا کنید.



$$(2x+10)(2x+15)=300 \Rightarrow 4x^2+50x+150=300$$
$$\Rightarrow 4x^2+50x-150=0$$
$$\Rightarrow 4x^2+25(2x)-150 \Rightarrow (2x+30)(2x-5)=0$$
$$\Rightarrow x=2/5 \quad or \quad x=-15$$

که ۲/۵ قابل قبول است.

بنابراین ابعاد قاب عکس ۱۵ و ۲۰ خواهد بود.

۱۰) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید.

فرض کنید n تعداد تیم‌های لیگ باشد. چون هر تیم با بقیه تیم‌ها بازی می‌کند پس n(n-1) بازی انجام می‌شود. اما چون بازی تیم A و B همان بازی تیم B و A است پس $\frac{n(n-1)}{2}$ بازی مختلف انجام خواهد شد. داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2}=45 \Rightarrow n(n-1)=90 \Rightarrow n^2-n-90=0$$
$$(n-10)(n+9)=0 \Rightarrow n=10 \quad or \quad n=-9$$

بنابراین تعداد تیم‌ها ۱۰ تا است. به طور کلی برای یک لیگ با n تیم و Nبازی داریم: $N=\frac{n(n-1)}{2}$

۱۱) فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه $(mmHg)$ اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه‌ی $P=0/006s^2-0/02s+120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

$$0/006s^2-0/02s+120=125 \Rightarrow 0/006s^2-0/02s-5=0$$
$$\xrightarrow{\times1000} 6s^2-20s-5000=0 \Rightarrow \Delta=400-4\times6\times(-5000)=120400$$
$$\Rightarrow s=\frac{20+\sqrt{120400}}{12} \simeq \frac{20+347}{12}=\frac{367}{12} \simeq 31$$

سن شخص تقریباً ۳۱ سال است.

فصل ٤: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس دوم: سهمی

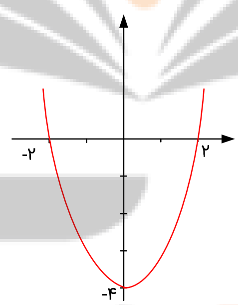
فعالیت ---------- صفحه ۷۸

معادله‌ی $y = x^۲ - ۴$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

(x,y)	$y = x^۲ - ۴$	x
$(-۲,۰)$	$y = (-۲)^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$	-۲
$(-۱,-۳)$	$y = (-۱)^۲ - ۴ = ۱ - ۴ = -۳$	-۱
$(۰,-۴)$	$y = (۰)^۲ - ۴ = ۰ - ۴ = -۴$	۰
$(۱,-۳)$	$y = ۱^۲ - ۴ = ۱ - ۴ = -۳$	۱
$(۲,۰)$	$y = ۲^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$	۲

نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).



ب) پایین‌ترین نقطه‌ی این نمودار چه نقطه‌ای است؟

نقطه $(۰,-۴)$

آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

بله، خط $x = ۰$ (محور yها) محور تقارن این نمودار است.

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کردیم؟ آیا با نقاط کمتر نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

از پنج نقطه استفاده کردیم تا نمودار را رسم کنیم. بله. با سه نقطه نیز می‌توان نمودار مورد نظر را رسم کرد. البته به شرطی که یکی از این سه نقطه، نقطه کمینه (پایین‌ترین نقطه) باشد و دو نقطه دیگر اطراف آن باشند.

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور x ها در چه نقاطی است؟

نقاط $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ است.

فعالیت ---------- صفحه ۷۹

معادله‌ی یک سهمی به صورت $y = x^۲ - ۴x + ۵$ است.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

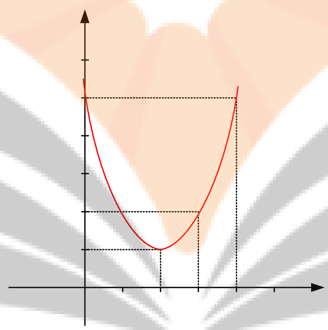
$$y = x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۱$$

ب) ریشه‌ی عبارت داخل پرانتز را بدست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

x	$y=x^۲-۴x+۵$	(x,y)
۰	$y=۰^۲-۴\times۰+۵=۵$	$(۰,۵)$
۱	$y=۱^۲-۴\times۱+۵=۲$	$(۱,۲)$
۲	$y=۲^۲-۴\times۲+۵=۱$	$(۲,۱)$
۳	$y=۳^۲-۴\times۳+۵=۲$	$(۳,۲)$
۴	$y=۴^۲-۴\times۴+۵=۵$	$(۴,۵)$

پ) پنج نقطه‌ی حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.



ت) آیا می‌توانید پایین ترین نقطه‌ی این سهمی را از معادله‌ی آن به شکل $y=(x-۲)^۲+۱$ به دست آورید.

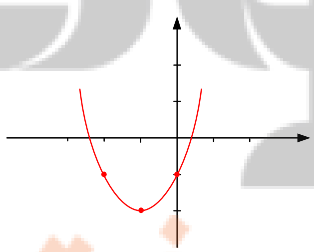
بله، برای بدست آوردن طول این نقطه، عبارت داخل پرانتز را مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای مشخص کردن عرض این نقطه جمله مربع کامل را صفر در نظر می‌گیریم، آنچه باقی می‌ماند عرض نقطه پایینی است. بنابراین نقطه $(۱,۲)$ نقطه مورد نظر است.

کار در کلاس -- صفحه ۸۰

۱) در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y=(x+۱)^۲-۲$

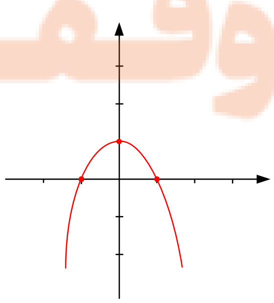
x	$y=(x+۱)^۲-۲$	(x,y)
۰	$y=(۰+۱)^۲-۲=-۱$	$(۰,-۱)$
-۱	$y=(-۱+۱)^۲-۲=-۲$	$(-۱,-۲)$
-۲	$y=(-۲+۱)^۲-۲=-۱$	$(-۲,-۱)$



$(-۱,-۲)$ = مختصات رأس سهمی

ب) $y=-۲x^۲+۱$

x	$y=-۲x^۲+۱$	(x,y)
۱	$y=-۲(۱)^۲+۱=-۱$	$(۱,-۱)$
۰	$y=-۲(۰)^۲+۱=۱$	$(۰,۱)$
-۱	$y=-۲(-۱)^۲+۲=-۱$	$(-۱,-۱)$



$(۰,۱)$ = مختصات رأس سهمی

فعالیت -- صفحه ۸۰

معادله‌ی سهمی به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a(x + \frac{b}{۲a})^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$$

$$y = ax^{۲} + bx + c = a(x^{۲} + \frac{b}{a}x) + c = a(x^{۲} + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{۲a})^{۲} - (\frac{b}{۲a})^{۲}) + c$$

$$\Rightarrow y = a(x^{۲} + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{۲a})^{۲}) + c - \frac{b^{۲}}{۴a} \Rightarrow y = a(x + \frac{b}{۲a})^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a} , \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

طبق رابطه به دست آمده در قسمت قبل، ریشه عبارت داخل پرانتز طول رأس سهمی و عبارت جمع شده با جمله کامل عرض رأس سهمی است پس خط $x = -\frac{b}{۲a}$ خط تقارن سهمی خواهد بود.

$$x + \frac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a}$$

رأس سهمی: $(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a})$

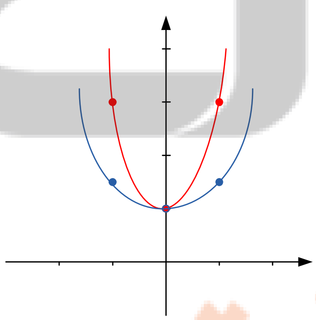
فعالیت -- صفحه ۸۱

معادله‌ی دو سهمی به صورت $y = \frac{x^{۲}}{۲} + ۱$ و $y = ۲x^{۲} + ۱$ است.

الف) مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دوسهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه‌ی $A(۰, ۱)$ است.

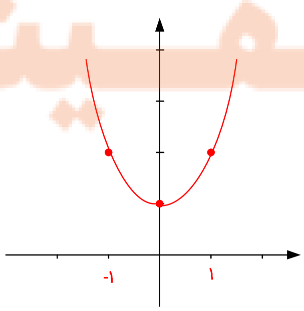
x	$y = \frac{x^{۲}}{۲} + ۱$	(x, y)
-۱	$y = \frac{(-۱)^{۲}}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$	$(-۱, \frac{۳}{۲})$
۰	$y = \frac{(۰)^{۲}}{۲} + ۱ = ۱$	$(۰, ۱)$
۱	$y = \frac{(۱)^{۲}}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$	$(۱, \frac{۳}{۲})$

x	$y = ۲x^{۲} + ۱$	(x, y)
-۱	$y = ۲(-۱)^{۲} + ۱ = ۳$	$(-۱, ۳)$
۰	$y = ۲(۰)^{۲} + ۲ = ۱$	$(۰, ۱)$
۱	$y = ۲(۱)^{۲} + ۱ = ۳$	$(۱, ۳)$



ب) معادله‌ی سهمی دیگری را که نقطه‌ی A رأس آن است، بنویسید و آن رادر دستگاه بالا رسم کنید.

x	$y = x^{۲} + ۱$	(x, y)
-۱	$y = (-۱)^{۲} + ۱ = ۲$	$(-۱, ۲)$
۰	$y = ۰^{۲} + ۱ = ۱$	$(۰, ۱)$
۱	$y = ۱^{۲} + ۱ = ۲$	$(۱, ۲)$



پ) ضرایب $x^{۲}$ در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

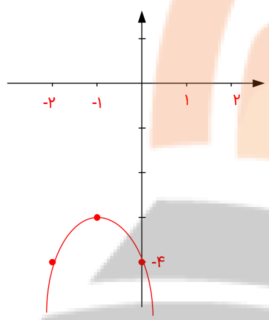
این ضرایب باعث بازتر شدن یا جمع‌تر شدن شاخه‌های سهمی شده‌اند. در واقع وقتی اندازه این ضریب بزرگ‌تر می‌شود شاخه‌ها جمع‌تر می‌شوند.

تمرین درس اول: سهمی
صفحه ۸۱

۱) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

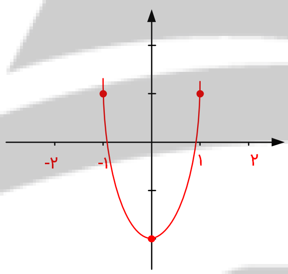
الف) $y=-(x+1)^2-3$

x	$y=-(x+1)^2-3$	(x,y)
۰	$y=-(0+1)^2-3=-4$	$(0,-4)$
-۱	$y=-(-1+1)^2-3=-3$	$(-1,-3)$
-۲	$y=-(-2+1)^2-3=-4$	$(-2,-4)$



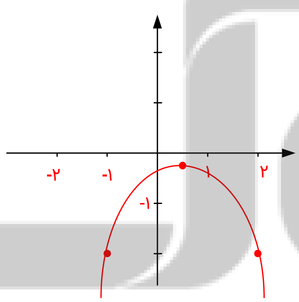
ب) $y=3x^2-2$

x	$y=3x^2-2$	(x,y)
۱	$y=3(1)^2-2=1$	$(1,1)$
۰	$y=3(0)^2-2=-2$	$(0,-2)$
-۱	$y=3(-1)^2-2=1$	$(-1,1)$



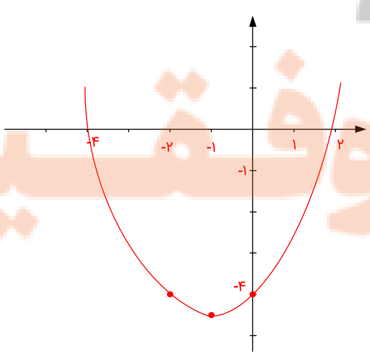
پ) $y=x-x^2$

x	$y=x-x^2$	(x,y)
-۱	$y=(-1)-(-1)^2=-2$	$(-1,-2)$
$\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
۲	$y=2-2^2=-2$	$(2,-2)$



ت) $y=\frac{x^2}{2}+x-4$

x	$y=\frac{x^2}{2}+x-4$	(x,y)
۰	$y=\frac{(0)^2}{2}+0-4=-4$	$(0,-4)$
-۱	$y=\frac{(-1)^2}{2}+(-1)-4=\frac{-9}{2}$	$(-1,\frac{-9}{2})$
-۲	$y=\frac{(-2)^2}{2}+(-2)-4=-4$	$(-2,-4)$



۲) اگر $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

چون سهمی دارای تقارن است و دو نقطه $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ در یک عرض قرار دارند پس این دو نقطه قرینه‌ی یکدیگر نسبت به محور تقارن هستند. یعنی خط تقارن دقیقاً از وسط خط واصل دو نقطه می‌گذرد. پس خط $x = -۱$ محور تقارن این سهمی است زیرا $x = -۱$ نقطه وسط $x = ۰$ و $x = -۲$ است.

۳) نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله‌ی این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

نمودار محور yها را در نقطه‌ی ۲ قطع کرده است، پس مختصات نقطه‌ی $(۰,۲)$ در معادله سهمی صدق می‌کند. از طرفی نمودار محور xها را در نقاط ۱- و ۲ قطع می‌کند، پس مختصات نقاط $(-۱,۰)$ و $(۲,۰)$ در معادله سهمی صدق می‌کنند، در نتیجه:

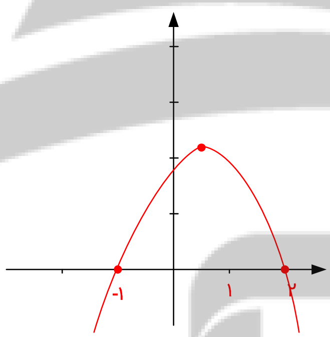
$$۲ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۲$$

$$\begin{cases} ۰ = a(-۱)^۲ + b(-۱) + ۲ \\ ۰ = a(۲)^۲ + b(۲) + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -۲ \\ ۴a + ۲b = -۲ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ \ , \ b = ۱$$

$$\Rightarrow y = -x^۲ + x + ۲$$

طول رأس سهمی: $\frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲(-۱)} = \frac{۱}{۲}$

x	$y = -x^۲ + x + ۲$	(x, y)
۱-	$y = -(-۱)^۲ - ۱ + ۲ = ۰$	$(-۱,۰)$
$\frac{۱}{۲}$	$y = -(\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۹}{۴}$	$(\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۴})$
۲	$y = -(۲)^۲ + ۲ + ۲ = ۰$	$(۲,۰)$

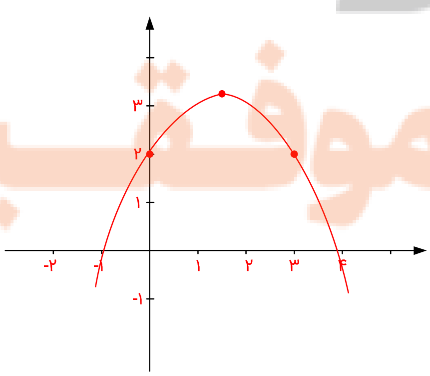


۴) دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه‌ی ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه‌ی α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y = -\frac{x^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}x + ۲$ به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه‌ی β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و xمسافت افقی طی شده بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

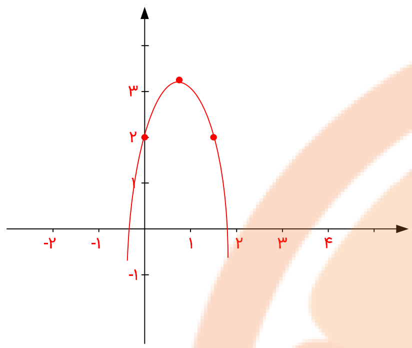
پرتاب گر A

x	$y = -\frac{x^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}x + ۲$	(x, y)
۰	$y = \frac{-(۰)^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}(۰) + ۲ = ۲$	$(۰,۲)$
$\frac{-b}{۲a} = \frac{۳}{۲}$	$y = \frac{-(\frac{۳}{۲})^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}) + ۲ = \frac{۲۵}{۸}$	$(\frac{۳}{۲}, \frac{۲۵}{۸})$
۳	$y = \frac{-(۳)^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}(۳) + ۲ = ۲$	$(۳,۲)$



پرتاب‌گر B

(x,y)	$y=-2x^2+3x+2$	x
$(0,2)$	$y=-2(0)^2+3(0)+2=2$	0
$(\frac{3}{4},\frac{25}{8})$	$y=-2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})+2=\frac{25}{8}$	$-\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$
$(\frac{3}{2},2)$	$y=-2(\frac{3}{2})^2+3(\frac{3}{2})+2=2$	$\frac{3}{2}$



ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

محل برخورد وزنه A با زمین

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+2=0 \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

مسافت منفی نمی شود بنابراین ۱- غیر قابل قبول است.

محل برخورد وزنه B با زمین

$$-2x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4(-2)(2)=25$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2(-2)}=\frac{-3\pm 5}{-4}\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

مسافت منفی نمی شود بنابراین $-\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است.

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه‌ی آنها را مشخص کنید.

هر دو وزنه در نقطه رأس خود به ارتفاع $\frac{25}{8}$ متر رسیده‌اند. یعنی بیشترین ارتفاع آن‌ها یکسان است.

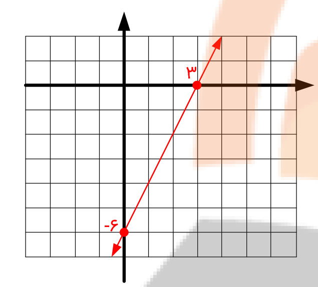
فصل ٤: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس سوم: تعیین علامت

فعالیت -- صفحه ۸۳

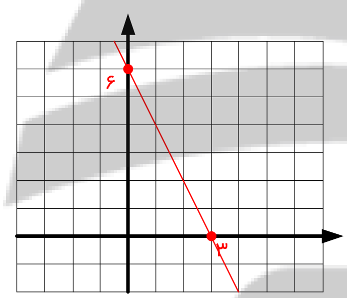
۱) نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت yرا در جدول زیر بنویسید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y = ۲x - ۶$	-	۰	+



۲) نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y = -۲x + ۶$	+	۰	-



۳) در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

علامت این عدد باعث شده است تا علامت y در قبل و بعد از عدد ۳ قرینه شود. در واقع طبق دو جدول فوق برای xهای بزرگ‌تر از ۳ علامت y همان علامت ضریب x است و برای xهای کوچک‌تر از ۳ علامت y مخالف علامت ضریب x است.

۴) نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{a>۰} ax > -b \Rightarrow ax + b > ۰ \Rightarrow y > ۰ \rightarrow a$ موافق علامت

$x < -\frac{b}{a} \xrightarrow{a>۰} ax < -b \Rightarrow ax + b < ۰ \Rightarrow y < ۰ \rightarrow a$ مخالف علامت

$x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{a<۰} ax < -b \Rightarrow ax + b < ۰ \Rightarrow y < ۰ \rightarrow a$ موافق علامت

$x < -\frac{b}{a} \xrightarrow{a<۰} ax > -b \Rightarrow ax + b > ۰ \Rightarrow y > ۰ \rightarrow a$ مخالف علامت

کار در کلاس -- ✍ صفحه ۸۵

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(۳x+۱)(x-۲)$

$۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۰	
$۳x+۱$	−	۰	+		+
$x-۲$	−	۰	−	۰	+
A	+		−	۰	+

ب) $B=(۲x-۳)^۲$

عبارت B چون یک مربع کامل است، بنابراین همواره نامنفی است. در واقع به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ مقدار B صفر است و به ازای $x\neq\frac{۳}{۲}$ مقدار آن مثبت است. این موضوع را از جدول تعیین علامت نیز می‌توان دریافت.

x		$\frac{۳}{۲}$	
$۲x-۳$	−	۰	+
$۲x-۳$	−	۰	+
B	+	۰	+

پ) $C=x^۳(۷-x)$

$C=x^۳.(۷-x) \Rightarrow x=۰, ۷-x=۰ \Rightarrow x=۷$

x		۰		۷	
x	−	۰	+		+
x	−	۰	+		+
x	−	۰	+		+
$۷-x$	+		+	۰	−
C	−		+	۰	−

ت) $D=\frac{x-۱}{۵-۲x}$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$۵-۲x=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$

x		۱		$\frac{۵}{۲}$	
$x-۱$	−	۰	+		+
$۵-۲x$	+	۰	+		−
D	−	۰	+	ت ن	−

۱) فرض کنید که معادله‌ی $P(x)=۰$، دو ریشه متمایز $x_۱$ و $x_۲$ ($x_۱<x_۲$) داشته و به شکل $P(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x های مختلف تعیین کنید.

فعالیت -- صفحه ۸٦

x		x_1		x_2	
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$	موافق a	0	مخالف علامت a	0	موافق a

۲) اگر معادله‌ی $P(x)=0$ ریشه‌ی مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		x_1	
$(x-x_1)$	$+$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$+$

۳) اکنون فرض کنید $\Delta<0$ باشد، در این صورت معادله‌ی $P(x)=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

$\Delta<0\Rightarrow-\Delta>0\Rightarrow\frac{-\Delta}{4a}>0\Rightarrow(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}>(x+\frac{b}{2a})^2$

$\Rightarrow(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}>0\Rightarrow$ علامت $P(x)$ همان علامت a است.

۴) با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

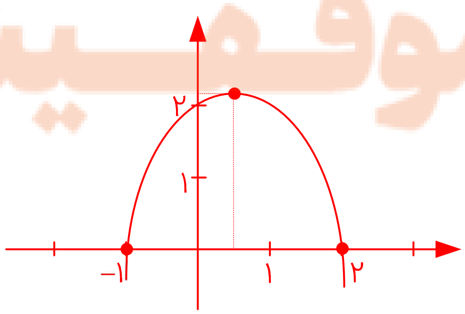
با توجه به قسمت قبل اگر $P(x)$ به ازای هر x، مقدار مثبتی باشد باید $a>0$ و $\Delta<0$ باشد. به طور مشابه اگر $P(x)$ به ازای هر مقدار x، مقداری منفی باشد باید $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

کار در کلاس -- صفحه ۸۸

۱) چند جمله‌ای $y=-x^2+x+2$ را با محاسبه‌ی ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$-x^2+x+2=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2\ or\ x=-1$

طول سهمی: $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{9}{4}$



x		-1		2	
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{+1}{3}$

x		-3		$\frac{1}{3}$		3	
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
A	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

ب) $B = \dfrac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

$-x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ ریشه مضاعف

$x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$ ریشه حقیقی ندارد.

x		3	
$-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$
x^2+x+3	$+$		$+$
B	$-$	0	$-$

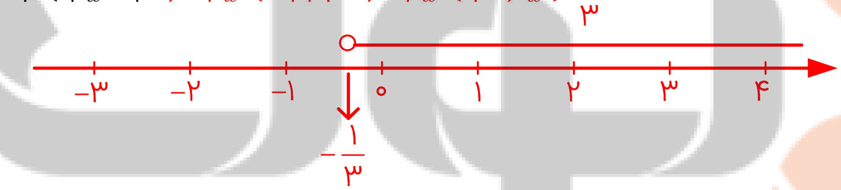
فعالیت ✍ صفحه ۸۹

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله‌ی زیر صدق می‌کند:

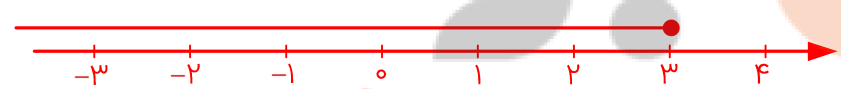
$-2 < 3x - 1, \; 3x - 1 \le 8$

۱) هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

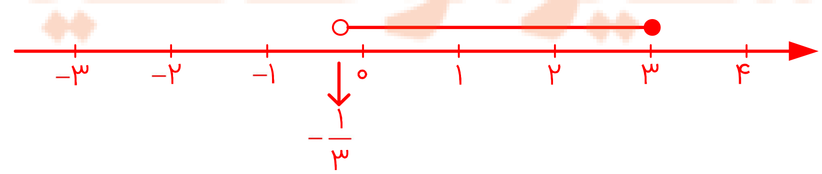
$-2 < 3x - 1 \Rightarrow -3x < -1 + 2 \Rightarrow -3x < 1 \Rightarrow x > \frac{-1}{3}$



$3x - 1 \le 8 \Rightarrow 3x \le 8 + 1 \Rightarrow 3x \le 9 \Rightarrow x \le 3$



به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های بدست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲) می‌توانیم دو نامعادله‌ی فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله‌ی دوگانه به صورت $-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله‌ی دو گانه را حل کنید:

$-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$

به دو نامعادله ۱+ را اضافه می‌کنیم.

$-۱ < ۳x \le ۹$

دو نامعادله را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم.

$\frac{-۱}{۳} < x \le ۳$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

نامعادله‌ی فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳x - ۱ > -۲ \\ ۳x - ۱ \le ۸ \end{cases}$$

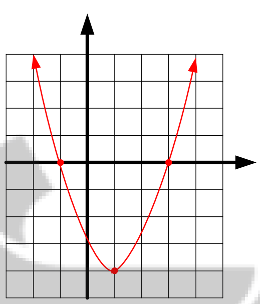
کار در کلاس ---------- صفحه ۹۰

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه‌ی سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجه‌ی فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵ \le C \le ۲۵$؛ سپس رابطه‌ی داده شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادله‌ی دوگانه‌ی بدست آمده را حل کنید.

$$۱۵ \le C \le ۲۵ \Rightarrow ۱۵ \le \frac{۵}{۹}(F - ۳۲) \le ۲۵ \xrightarrow{\times ۹} ۱۳۵ \le F - ۳۲ \le ۲۲۵ \xrightarrow{+۳۲} ۱۶۷ \le F \le ۲۵۷$$

فعالیت ---------- صفحه ۹۰

سهمی $y = x^۲ - ۲x - ۳$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

به ازای $-۱ < x < ۳$ نمودار پایین محور xها می‌افتد.

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y = x^۲ - ۲x - ۳$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \,, x = -۱$$

x		-۱		۳	
$y = x^۲ - ۲x - ۳$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow$ اگر $-۱ < x < ۳$ علامت y منفی است.

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های بدست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان بر حل نامعادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۳ < ۰$ استفاده کرد.

در قسمت الف و به مشخص شده، به ازای $-۱ < x < ۳$ مقدار y منفی است ($y < ۰$) و چون $y = x^۲ - ۲x - ۳$ پس $x^۲ - ۲x - ۳ < ۰$ است. یعنی $-۱ < x < ۳$ جواب‌های نامعادله $x^۲ - ۲x - ۳ < ۰$ هستند.

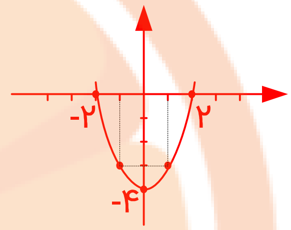
کار در کلاس ---------- صفحه ۹۰

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^2 \leq 4$

روش هندسی: $x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow y = x^2 - 4 \Rightarrow$

x	-1	0	1
y	-3	-4	-3



طبق نمودار رسم شده به ازای $-2 \leq x \leq 2$ نمودار پایین یا روی محور xها است. یعنی $[-2,2]$ مجموعه جواب این نامعادله است.

روش تعیین علامت: $x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

x		-2		2	
$y = x^2 - 4$	+	0	−	0	+
		ج	ج	ج	

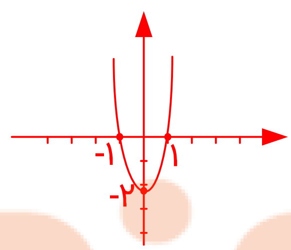
مجموعه جواب نامعادله بازه $[-2,2]$ است.

ب) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

رأس سهمی: $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{6}$

روش هندسی: $y = 3x^2 - x - 2 \Rightarrow$

x	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
y	0	$-\frac{25}{12}$	0



طبق نمودار به ازای $x \geq 1$ یا $x \leq -\frac{2}{3}$ نامساوی (ب) برقرار است. پس مجموعه جواب این نامعادله $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1, +\infty)$ است.

روش تعیین علامت: $3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$

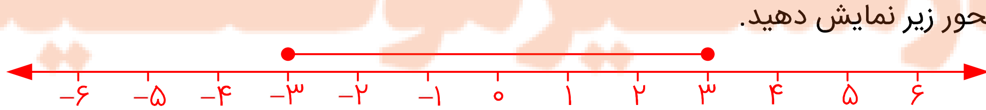
$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow x = 1 \quad or \quad x = -\frac{2}{3}$

x		$-\frac{2}{3}$		1	
$y = 3x^2 - x - 2$	+	0	−	0	+
	ج	ج		ج	ج

$\Rightarrow (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1, +\infty)$

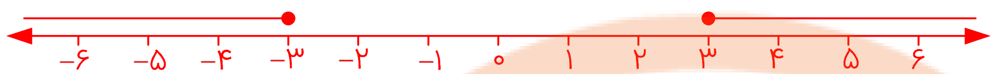
فعالیت ---------- صفحه ۹۱

۱) نامعادلهٔ $|x| \leq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید. $[-3,3]$

۲) نامعادلهٔ $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه‌ی این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید. $(-\infty,-۳]\cup[+۳,+\infty)$

۳) با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$\left\{\begin{array}{l} |x|\le ۳ \Rightarrow -۳\le x\le ۳ \\ |x|\ge ۳\Rightarrow x\ge ۳ \quad or \quad x\le -۳ \end{array}\right.$

مجموعه جواب (به شکل بازه) = $[-۳,۳]$

مجموعه جواب (به شکل بازه) = $(-\infty,-۳]\cup[+۳,+\infty)$

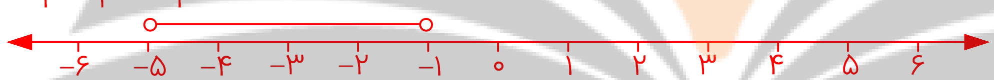
کار در کلاس ----- صفحه ۹۳

۱) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{۳}+۱\right|<\frac{۲}{۳}$

$\left|\frac{x}{۳}+۱\right|<\frac{۲}{۳}\Rightarrow -\frac{۲}{۳}<\frac{x}{۳}+۱<\frac{۲}{۳}\Rightarrow -\frac{۲}{۳}-۱<\frac{x}{۳}<\frac{۲}{۳}-۱$

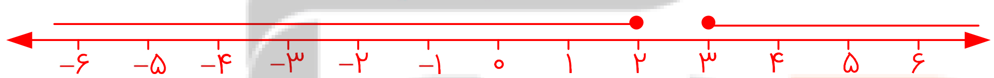
$\Rightarrow -\frac{۵}{۳}<\frac{x}{۳}<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow -۵<x<-۱\Rightarrow(-۵,-۱)$



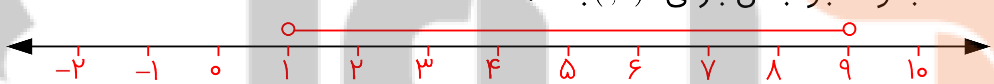
ب) $|۵-۲x|\ge ۱$

$|۵-۲x|\ge ۱\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} ۵-۲x\ge ۱\Rightarrow -۲x\ge -۴\Rightarrow x\le ۲ \\ ۵-۲x\le -۱\Rightarrow -۲x\le -۶\Rightarrow x\ge ۳ \end{array}\right.$

$\Rightarrow x\le ۲ \quad or \quad x\ge ۳ \quad \Rightarrow(-\infty,۲]\cup[۳,+\infty)$



۲) یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازه‌ی $(۱,۹)$ باشد.

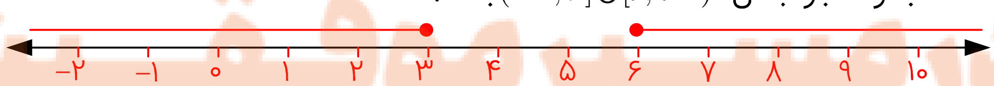


طبق آنچه در مورد نامعادلات قدر مطلقی می‌دانیم باید نقطه وسط بازه $(۱,۹)$ را بیابیم تا بتوانیم آن را به صورت $|x-a|<b$ در آوریم.

نقطه وسط بازه $(۱,۹): \frac{۱+۹}{۲}=۵$

$۱<x<۹\Rightarrow -۴<x-۵<۴\Rightarrow|x-۵|<۴$

۳) یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,۳]\cup[۶,+\infty)$ باشد.



$x\le ۳ \; or \; x\ge ۶\Rightarrow x-\frac{۹}{۲}\le -\frac{۳}{۲} \quad or \quad x-\frac{۹}{۲}\ge\frac{۳}{۲}\Rightarrow|x-\frac{۹}{۲}|\ge\frac{۳}{۲}$

تمرین درس سوم: تعیین علامت
صفحه ۹۳

۱) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $۱ < ۲x - ۳ \leq ۳ \Rightarrow ۴ \leq ۲x \leq ۶ \Rightarrow ۲ \leq x \leq ۳ \Rightarrow x \in [۲,۳]$

ب) $x + ۱ \leq ۵ - x < ۲x + ۳$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۱ \leq ۵ - x \rightarrow ۲x \leq ۴ \rightarrow x \leq ۲ \\ ۵ - x < ۲x + ۳ \rightarrow ۳x > ۲ \rightarrow x > \frac{۲}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳} < x \leq ۲ \Rightarrow x \in (\frac{۲}{۳}, ۲]$$

پ) $-۲ < \frac{۵ - x}{۲} < ۰$

$\Rightarrow -۴ < ۵ - x < ۰ \Rightarrow -۹ < -x < -۵ \Rightarrow ۵ < x < ۹ \Rightarrow x \in (۵,۹)$

ت) $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$

ریشه ها $\rightarrow \begin{cases} ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴ - ۲x$	+		+	۰	−
$۳x + ۱$	−	۰	+		+
$\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱}$	−	تعریف نشده	+	۰	−
			ج	ج	

ث) $x(x^۲ + ۴) < ۰$

ریشه ها $\rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} \text{ریشه ندارد} \end{cases}$

x		۰	
x	−	۰	+
$x^۲ + ۴$	+		
$x(x^۲ + ۴)$	−	۰	+

طبق جدول بازه $(-\infty, ۰)$ مجموعه جواب نامعادله است.

چ) $\frac{x^۳ - x}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰$

$\frac{x^۳ - x}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{x^۳ - x}{x^۲ - ۲x + ۲} = \frac{x(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ x^۲ - ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \end{cases}$ ریشه حقیقی ندارد.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{x^3-x}{x^2-2x+1}$	$-$ ج	0 ج	$+$	0 ج	$-$ ج	0 ج	$+$

طبق جدول مجموعه جواب نامعادله $(-\infty,-1]\cup[0,1]$ است.

چ) $|7-2x|<1$

$\Rightarrow -1<7-2x<1 \Rightarrow -8<-2x<-6 \Rightarrow 3<x<4 \Rightarrow x\in(3,4)$

ح) $\left|\frac{x-1}{2}-1\right|\geq 3$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2}-1\geq 3 \quad or \quad \frac{x-1}{2}-1\leq -3$

$\frac{x-1}{2}-1\geq 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2}\geq 4 \Rightarrow x-1\geq 8 \Rightarrow x\geq 9$

$\frac{x-1}{2}-1\leq -3 \Rightarrow \frac{x-1}{2}\leq -2 \Rightarrow x-1\leq -4 \Rightarrow x\leq -3$

$\Rightarrow x\geq 9 \quad or \quad x\leq -3 \Rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[9,+\infty)$

۲) به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^2+3x+k$ همواره مثبت است؟

با ضریب x^2 مثبت و مقدار دلتا Δ منفی باشد تا یک عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد.

$$\begin{cases} x^2 = 1>0 \quad \boxtimes \\ \Delta = 3^2-4\times1\times k = 9-4k<0 \Rightarrow -4k<-9 \Rightarrow k>\frac{9}{4} \end{cases}$$

۳) به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=mx^2-mx-1$ همواره پایین محور xهاست؟

برای آنکه نمودار سهمی، همواره زیر محور xها باشد باید ضریب x^2 منفی باشد و $\Delta<0$ پس باید:

$$\begin{cases} m<0 \quad (I) \\ \Delta=(-m)^2-4(m)(-1)=m^2+4m<0 \end{cases}$$

$$m^2+4m=m(m+4)<0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m+4=0 \rightarrow m=-4 \end{cases}$$

m		-4		0	
m	$-$		$-$	0	$+$
$m+4$	$-$	0	$+$		$+$
Δ	$+$		$-$ ج	0	$+$

$\Rightarrow m\in(-4,0) \quad (II)$

اشتراک رابطه‌های I و II نتیجه می‌دهد که باید $-4<m<0$ باشد.

۴) یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی t از رابطه‌ی $h=-5t^2+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصله‌ی زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

ارتفاع بیشتر از ۱۳ متر باشد یعنی $h>۱۳$ و این یعنی $-۵t^۲+۱۸t+۱۳>۱۳$ حال نامعادله اخیر را حل می‌کنیم تا t مورد نظر را بیابیم.

$$-۵t^۲+۱۸t+۱۳>۱۳ \Rightarrow -۵t^۲+۱۸t>۰ \Rightarrow t(-۵t+۱۸)>۰$$

ریشه ها $\longrightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=\frac{۱۸}{۵} \end{cases}$

t		۰		$\frac{۱۸}{۵}$	
h			+		−

ج

طبق جدول تعیین علامت برای $۰<t<\frac{۱۸}{۵}$ ارتفاع توپ از ۱۳ متر بیشتر است.

۵) تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه‌ی $y=\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

باید نامعادله‌ی $\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰>۱۱۰$ را حل کنیم تا زمان‌های مورد نظر را بیابیم:

$$\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰>۱۱۰ \Rightarrow ۱۵x^۲-۲۴۰x+۱۶۰۰>۸۸۰ \Rightarrow ۱۵x^۲-۲۴۰x+۷۲۰>۰$$

$$\xrightarrow{\div ۱۵} x^۲-۱۶x+۴۸>۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۱۲)>۰$$

ریشه ها $\longrightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=۱۲ \end{cases}$

x		۰		۴		۱۲	
$x^۲-۱۶x+۴۸$			+		−		+

طبق جدول $x\in(۰,۴)\cup(۱۲,+\infty)$ زمان‌های مورد نظر هستند. زمان‌های کمتر از صفر قابل قبول نیستند، زیرا زمان منفی نداریم و همواره زمان کمیتی نامنفی است.