

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

## فصل ۵: تابع

### درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

صفحه ۹۵

فعالیت ۱



در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه‌ی خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. درباره‌ی بقیه‌ی جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

به یک کالای معین تنها یک قیمت می‌توان نسبت داد.

پرگار	خطکش	مداد	دفتر	خودکار	کالا
۴۰۰۰	۱۵۰۰	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۱۵۰۰	قیمت (تومان)

به یک درس معین تنها یک قیمت می‌توان نسبت داد.

دینی	ادبیات	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۱۵	۱۸	۱۷	۱۶	۱۸	نمره

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

عزیزی	رستگار	کشاورز	احسانی	امیدی	فرد
یکشنبه	پنجشنبه	شنبه	دوشنبه	شنبه	روزتولد

به یک شخص معین فقط یک وزن می‌توان نسبت داد.

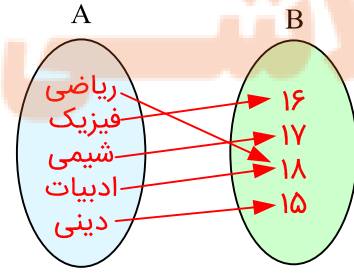
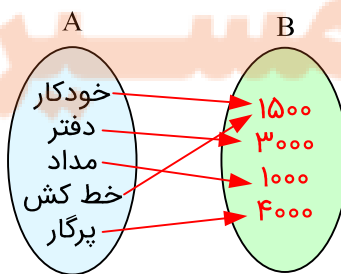
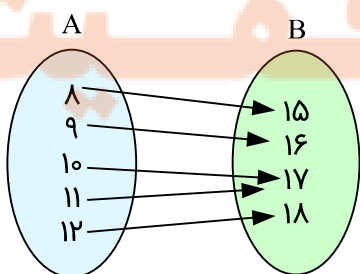
سعید	محمود	یوسف	یاس	علی	افراد
۸۰	۷۴	۲۱	۲۰	۶۵	وزن

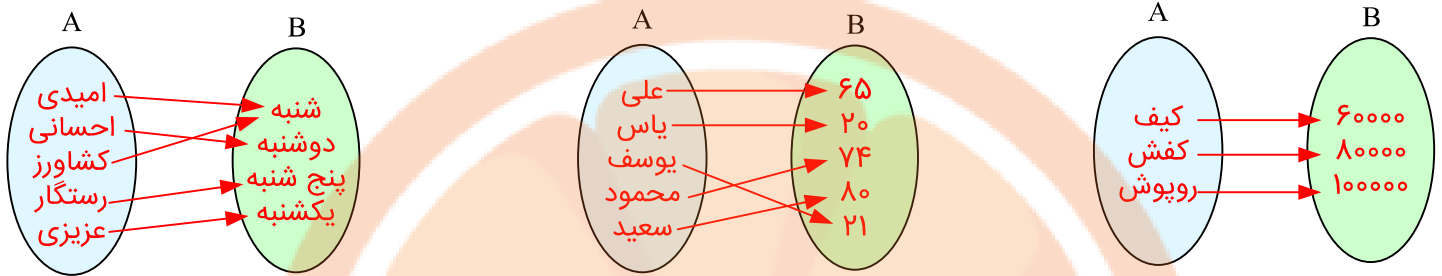
صفحه ۹۶

فعالیت ۲



جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوه‌ی نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



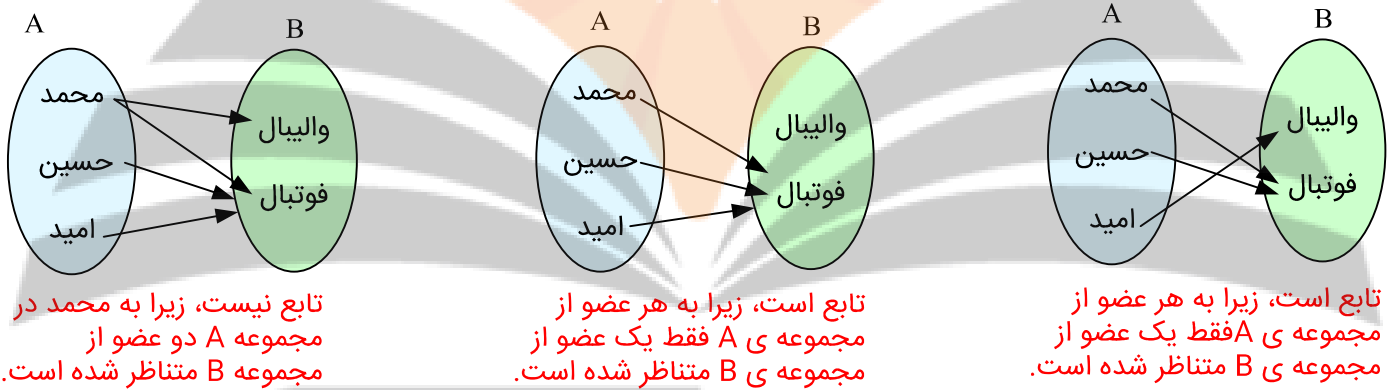


صفحه ۹۶

کار در کلاس



۱) مجموعه‌ی A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه‌ی B شامل دو رشته‌ی ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



۲) از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه‌ی X به مجموعه‌ی Y این کار به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.



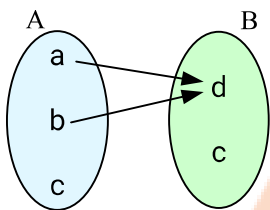
پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

می‌بینیم که برای تابع بودن رابطه‌ی A از B به تمام عضوهای مجموعه‌ی A دقیقاً یک پیکان خارج شده است و برای تابع نبودن رابطه‌ی A از X به Y از یک عضو در مجموعه‌ی X یا دو پیکان خارج شده یا پیکانی خارج نشده است.

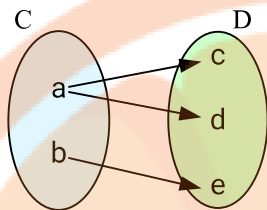
۳) الف) آیا رابطه‌ی که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ی که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟ بله، تابع است.

ب) آیا رابطه‌ی که به افراد غذای مورد علاقه‌ی آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید. بله، تابع است.

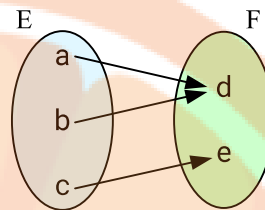
۴) کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



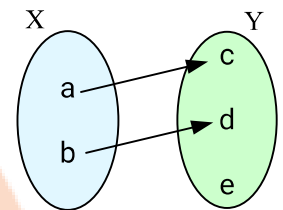
تابع نیست، چون به عضو C عضوی از مجموعه B نسبت داده نشده است.



تابع نیست، چون به a دو عضو از D را نسبت داده ایم.



تابع است.



تابع است.

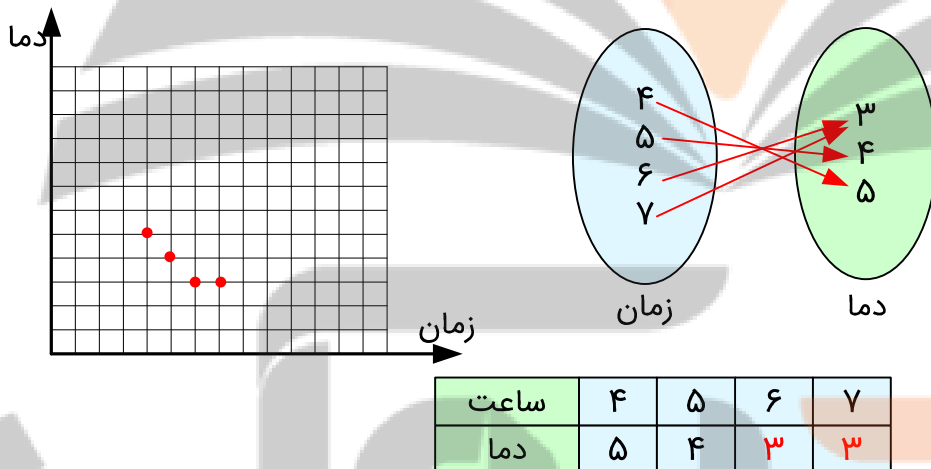
صفحه ۹۷

فعالیت



نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.

رابطه‌ی بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



اگر در نمودار بالا محور افقی را در محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)$

صفحه ۹۸

کار در کلاس

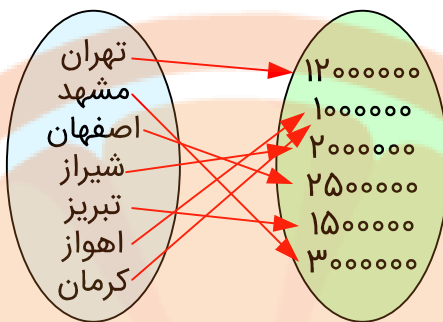


۱) نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت	۱۲۰۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰۰	۲۵۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰

رابطه‌ی بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

$f = \{(تهران, ۱۲۰۰۰۰۰۰), (مشهد, ۳۰۰۰۰۰۰), (اصفهان, ۲۵۰۰۰۰۰), (شیراز, ۲۰۰۰۰۰۰), (تبریز, ۱۵۰۰۰۰۰), (اهواز, ۱۰۰۰۰۰۰), (کرمان, ۱۰۰۰۰۰۰)\}$



بله، تابع است، زیرا به هر شهر تنها یک عدد به عنوان جمعیت نظیر شده است.

(۲) در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

وضعیت	جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه								
تابع نیست.			$\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.								
تابع است.	<table border="1"> <tr> <td>عدد</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>مجدور</td> <td>۴</td> <td>۹</td> <td>۱۶</td> </tr> </table>	عدد	۲	۳	۴	مجدور	۴	۹	۱۶		$\{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$	به هر عدد طبیعی بین ۱ تا ۵ مجذور آن را نسبت می‌دهد.
عدد	۲	۳	۴									
مجدور	۴	۹	۱۶									
تابع نیست.			$\{(4, 2), (4, -2), (7, \sqrt{7}), (7, -\sqrt{7}), (4, 3), (7, 3)\}$	به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.								
تابع است.			$\{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$	به هر عدد دو برابر آن را نسبت می‌دهد.								
تابع است.			$\{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -2)\}$	به هر عدد معکوس آن را نسبت می‌دهد.								

(۳) الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$$

$$f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 10)\}$$

رابطه  $g$  تابع نیست، چون به عضو ۲، دو عضو متمایز ۵ و ۹ نسبت داده شده است.

رابطه  $f$  تابع است، چون هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌ی اول برابر نیستند.

(ب) با تکمیل جمله‌ی زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورتزوج مرتبی ارائه می‌شود معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.

### تمرین درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

صفحه ۱۰۰

(۱) کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

(الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

تابع است. چون یک مربع با یک ضلع معین تنها یک محیط می‌تواند داشته باشد.

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

تابع است. زیرا بدن هر فرد در یک زمان معین تنها یک دما دارد.

(ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

تابع است. زیرا هر فرد تنها یک گروه خونی دارد.

(د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

تابع نیست. زیرا یک فرد ممکن است با چند نفر دوست باشد، بنابراین به هر فرد می‌توان چند نفر را نسبت داد.

(ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

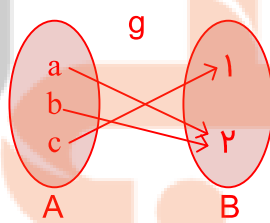
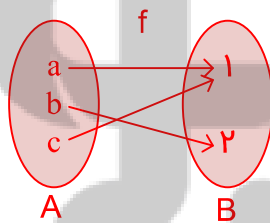
تابع نیست. زیرا هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم است و اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند.

(و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

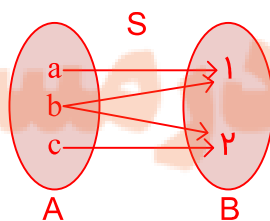
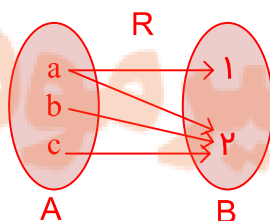
تابع است زیرا هر عدد تنها یک ریشه‌ی سوم دارد.

(۲) مجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{1, 2\}$  داده شده‌اند.

(الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از  $A$  به  $B$  ارائه کنید که تابع باشند.



(ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.



(ج) چهار رابطه‌ی بدست آمده را به کمک زوج‌ها مرتب و نمودار نمایش دهید.

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$$

$$g = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$$

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

$$S = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$$

۳) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$  تابع نیست.

$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$  تابع است.

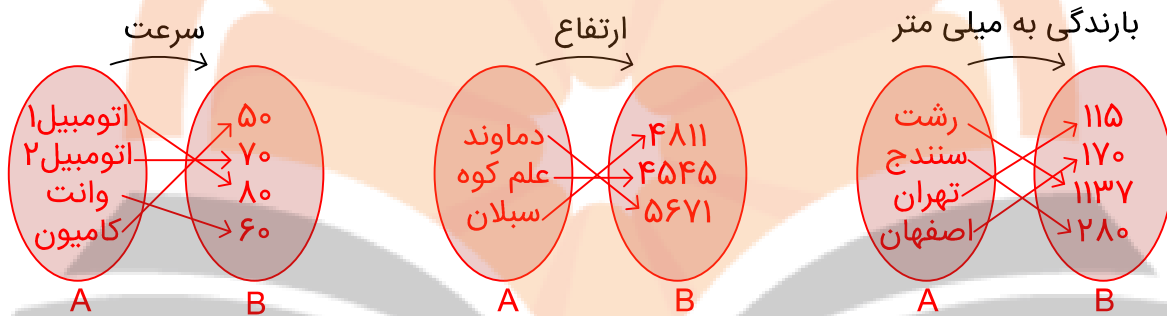
$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$  تابع است.

$k = \{(2, 5)\}$  تابع است.

$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$  تابع است.

$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$  تابع است.

۴) A و B مجموعه‌هایی غیر عددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



# نزدنجه بوک

## تلاشی در مسیر موفقیت

## فصل ۵: تابع

### درس دوم: دامنه و برد توابع

صفحه ۱۰۱

فعالیت



در جدول زیر رابطه‌ی بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چند ضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	$180^\circ$	$360^\circ$	$360^\circ$	$540^\circ$

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(3, 180), (4, 360), (5, 540), (6, 720), (7, 900), (8, 1080), (9, 1260), (10, 1440), (11, 1620), (12, 1800)\}$$

چرا  $f$  یک تابع است؟

چون به هر چند ضلعی دقیقاً یک عدد به عنوان مجموعه زاویه‌های داخلی نسبت داده شده است.

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی هر تابع را «دامنه» و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا:

$$f \text{ دامنه} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$f \text{ برد} = \{180, 360, 540, 720, 900, 1080, 1260, 1440, 1620, 1800\}$$

صفحه ۱۰۱

کار در کلاس



۱) در جدول زیر رابطه‌ی بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳	۵
محیط	۳	۴	۶	۸	۱۲	۲۰

نمایش رابطه‌ی داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید. از آنجا که به هر طول ضلع تنها یک محیط نسبت داده شده است این رابطه تابع است.

$$f = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 3 \right), (1, 4), \left( \frac{3}{2}, 6 \right), (2, 8), (3, 12), (5, 20) \right\}$$

$$f \text{ برد} = \{3, 4, 6, 8, 12, 20\}$$

$$f \text{ دامنه} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 5 \right\}$$

۲) الف) تابعی مثال بنویسید که دامنه‌ی آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

$$g = \{(1, 2), (3, 2), (2, 3)\}$$

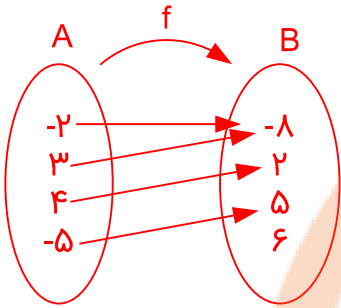
ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه‌ی آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

خیر، زیرا اگر به هر عضو دامنه یک عضو نسبت دهیم، مجموعه برد حداکثر به تعداد اعضای دامنه می‌تواند عضو داشته باشد.

۳) اگر  $f$  تابعی از مجموعه‌ی  $A$  به مجموعه‌ی  $B$  باشد، می‌دانیم که دامنه‌ی  $f$  همان مجموعه‌ی  $A$  است. آیا همیشه برد تابع  $f$  با مجموعه‌ی  $B$  برابر است؟ مثال بنویسید.

خیر، فرض کنید تابع  $f$  به صورت زیر باشد:





در این صورت  $A = \{-2, 3, 4, -5\}$  دامنه‌ی تابع  $f$  و  $B = \{-8, 2, 5, 6\}$  برد تابع  $f$ ، می‌بینیم که  $B \neq \text{برد تابع } f$ .

صفحه ۱۰۲

فعالیت



دنباله‌ی شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:

شکل اول



شکل دوم



شکل سوم



شکل چهارم



شکل پنجم



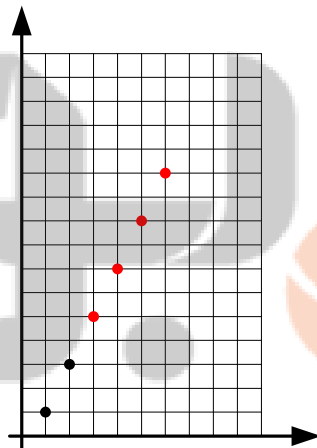
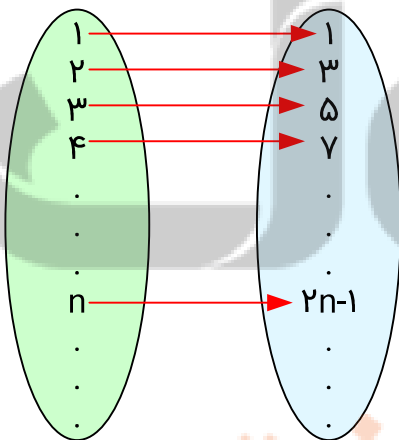
جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	$n$	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	$2n-1$	...

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots, (100, 199), \dots, (n, 2n-1), \dots\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.



دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  دامنه  $f$

مجموعه اعداد طبیعی فرد  $= \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  برد  $f$

صفحه ۱۰۲

کار در کلاس



اگر تابعی با نمایش جبری  $f(n) = n^2 + 1$  داده شده باشد و دامنه‌ی آن  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد، برد تابع  $f$  را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} n=1 &\Rightarrow f(n) = f(1) = 1^2 + 1 = 2 \\ n=2 &\Rightarrow f(n) = f(2) = 2^2 + 1 = 5 \\ n=3 &\Rightarrow f(n) = f(3) = 3^2 + 1 = 10 \\ n=4 &\Rightarrow f(n) = f(4) = 4^2 + 1 = 17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = \{2, 5, 10, 17\}$$

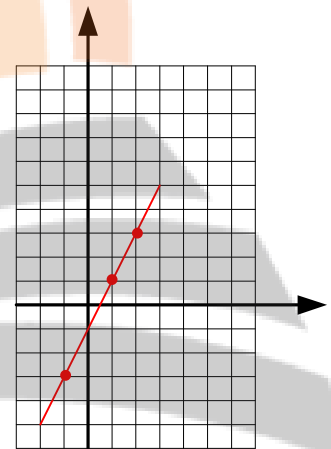
برد  $f = \{2, 5, 10, 17\}$

صفحه ۱۰۳

کار در کلاس

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط  $y = 2x - 1$  استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-۲
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	۰	$-\frac{5}{2}$	-۵



آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را  $g$  بنامید.

شباهت دو جدول در این است که مقدار  $y$  از دو برابر کردن مقدار  $x$  و سپس یک واحد کم کردن از آن به دست می‌آید. یعنی هر دو رابطه‌ای خطی به شکل  $y = 2x - 1$  دارند.

تفاوت دو جدول این است که دامنه‌ی جدول قبل اعداد طبیعی بود ولی این جدول دامنه‌اش هر عدد حقیقی می‌تواند باشد؛ به عبارت دیگر نمودار جدول قبل گسسته (نقطه به نقطه) بود و این جدول نموداری پیوسته دارد.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟

نمودار این تابع پیوسته است ولی نمودار تابع قبل یک نمودار گسسته است.

دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع  $f(n) = 2n - 1$  که در آن  $n \in N$  مقایسه کنید.

دامنه و برد تابع  $g$  مجموعه‌ی اعداد حقیقی یعنی  $\mathbb{R}$  است در حالی که دامنه‌ی تابع  $f$ ، اعداد طبیعی و برد آن اعداد طبیعی فرد است.

جاهای خالی را کامل کنید.

$$g(0) = 2(0) - 1 = -1$$

$$g(10) = 2x - 1$$

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = 2\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{7}{5}$$

$$g\left(\frac{2}{7}\right) = 2\left(\frac{2}{7}\right) - 1 = -\frac{3}{7}$$

$$g(\sqrt{5}) = 2(\sqrt{5}) - 1 = 2\sqrt{5} - 1$$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید.  $g(x) = 2x - 1$

در اینجا  $x$  یک عدد حقیقی است.



جدول زیر نشان‌دهنده‌ی وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله‌ی زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

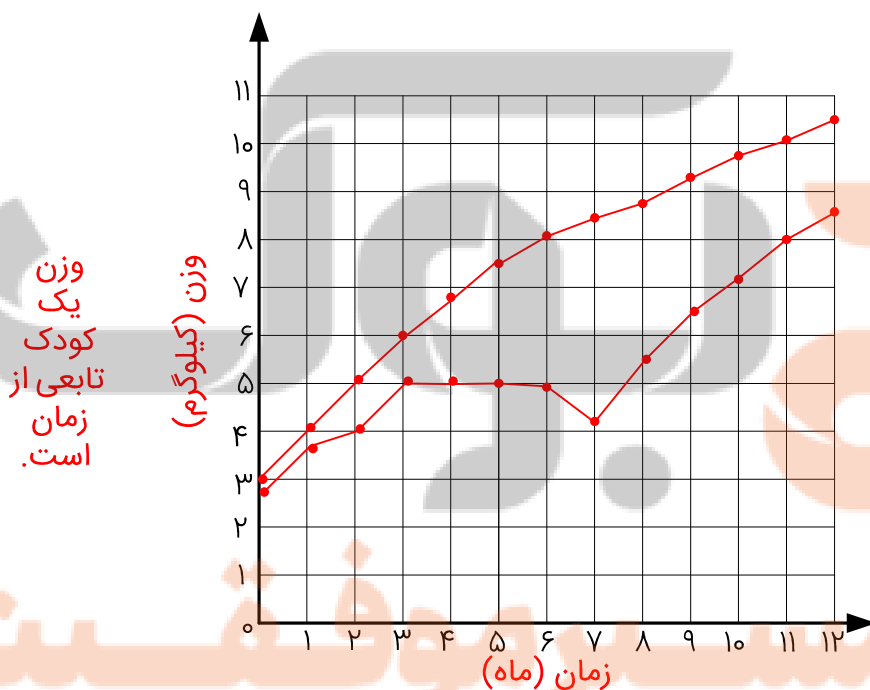
با وضعیت «کندی رشد» مطابقت دارد چرا که در پایان سه ماهه اول باید حدود ۶ کیلوگرم باشد.

ب) در چه فاصله‌ی زمانی‌ای وزن او ثابت مانده است؟

در فاصله زمانی سه ماهگی تا ۵ ماهگی وزن او ثابت مانده است.

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه‌ی این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله‌ی بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید می‌توانید وزن او را در فاصله‌ی بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

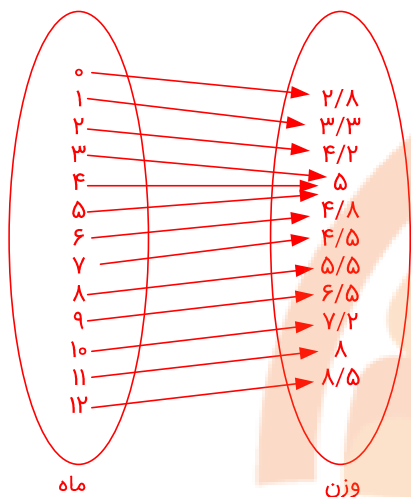


شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

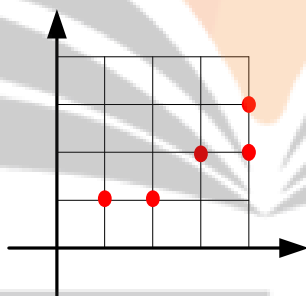
دامنه تابع =  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

برد تابع =  $\{2/8, 3/3, 4/2, 5, 4/8, 4/5, 5/5, 6/5, 7/2, 8, 8/5\}$



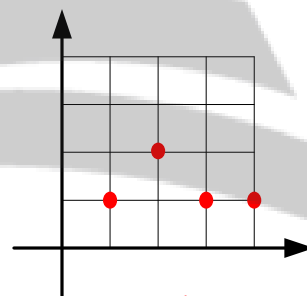
کار در کلاس  صفحه ۱۰۴

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



تابع نیست.

$$g = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$$



تابع است.

$$f = \{(1,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$$

می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

دامنه تابع  $f = \{1, 2, 3, 4\}$

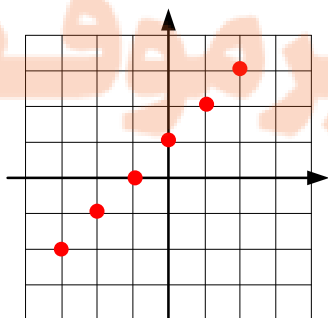
برد تابع  $f = \{1, 2\}$

با تکمیل جمله‌ی زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

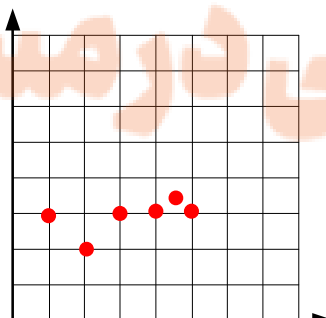
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در **یک نقطه** قطع کند.

کار در کلاس  صفحه ۱۰۵

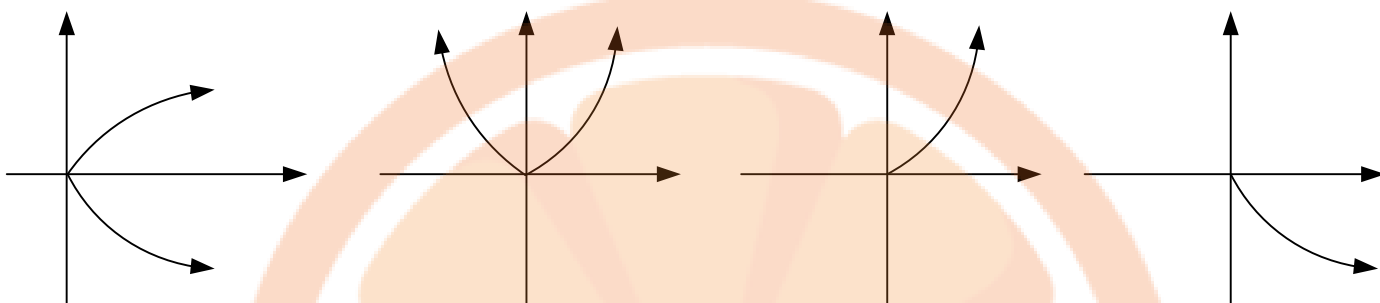
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



تابع است.



تابع است.

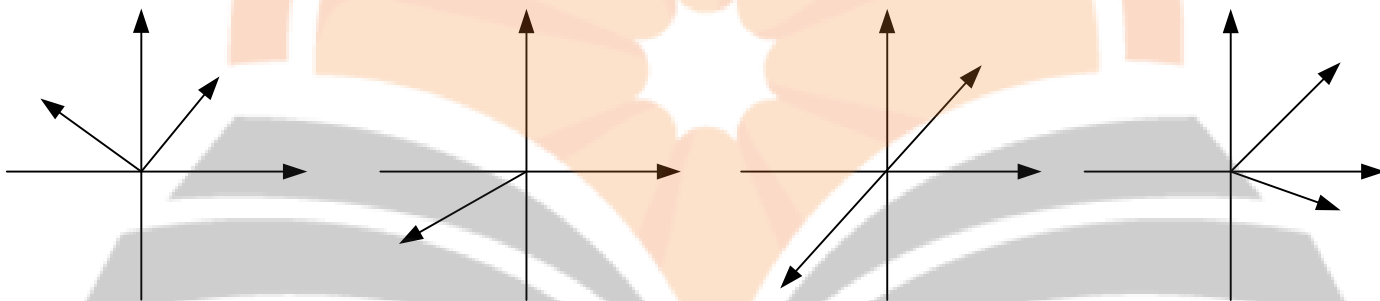


تابع نیست.

تابع است.

تابع است.

تابع است.



تابع است.

تابع است.

تابع است.

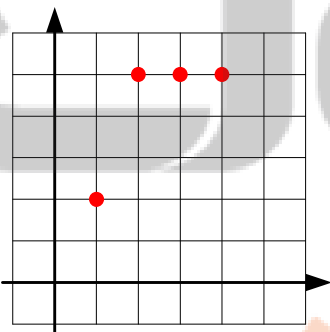
تابع نیست.

تمرین درس دوم: دامنه و برد توابع

صفحه ۱۰۵

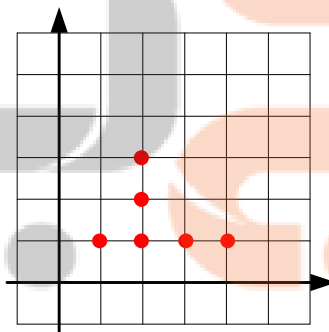
۱) کدام یک تابع است؟

دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

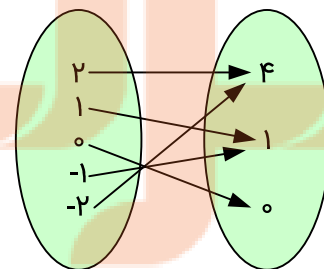


تابع است.

دامنه = {۱, ۲, ۳, ۴} برد = {۲, ۵}



تابع نیست.



نمودار تابع است.

دامنه = {۲, ۱, ۰, -۱, -۲} برد = {۰, ۱, ۴}

۲) تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.

$$f = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 2)\}$$

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

$$h = \{(1, 2)\}$$

ت) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

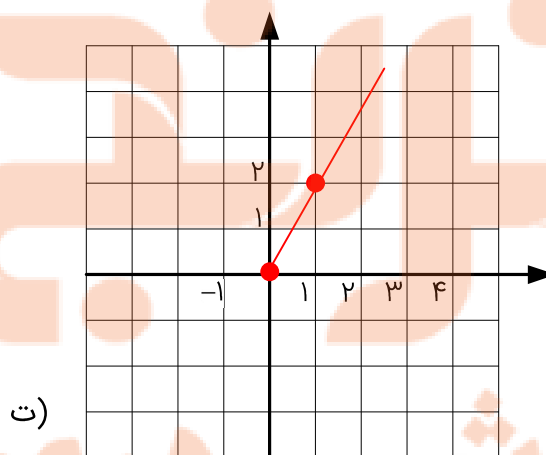
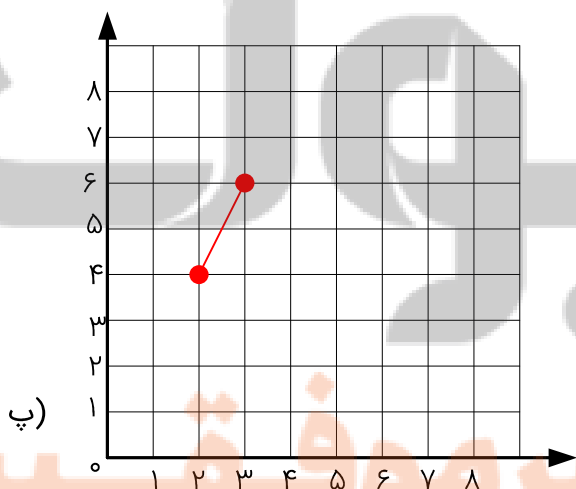
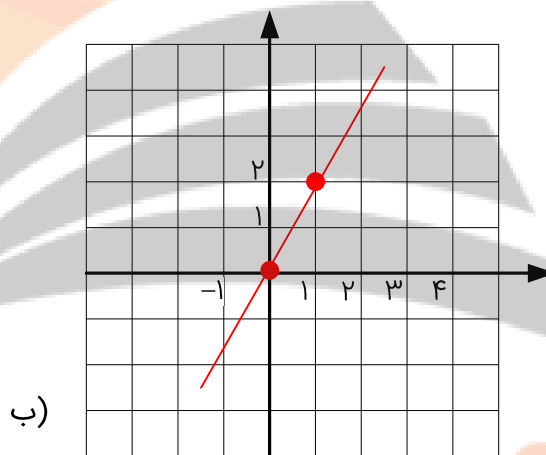
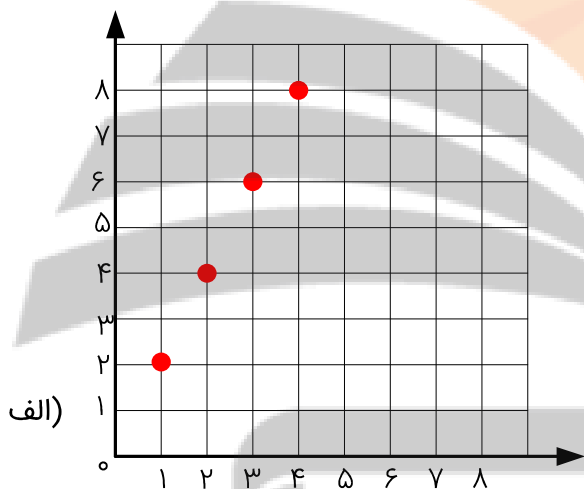
$$t = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (n, 1), \dots\}$$

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

$$k = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (n, n), \dots\}$$

۳) جاهالی خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

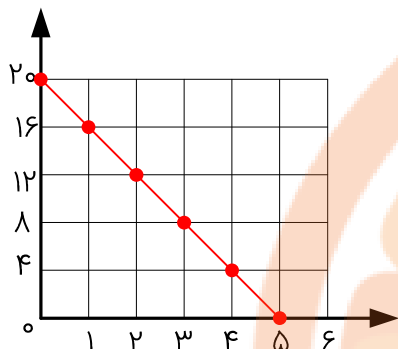
	الف)	ب)	پ)	ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی



۴) یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

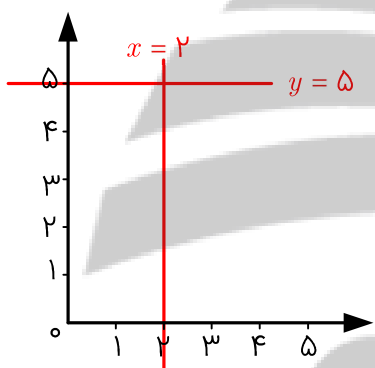
x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.



چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

چون نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه به تفاضل طول‌های آن دو نقطه مقدار ثابتی است، به عبارت دیگر همه نقاط روی کی خط راست واقع شده‌اند.



۵) آیا خط  $x = 2$  را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط  $y = 5$  را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

خیر،  $x = 2$  یک تابع نیست، زیرا بی‌شمار نقطه روی آن قرار دارند که در همه آنها مؤلفه اول ۲ است و مؤلفه دوم هر عدد می‌تواند باشد.

خط  $y = 5$  یک تابع است. زیرا هیچ دو نقطه روی آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نیستند. یعنی هر خط عمودی نمودار  $y = 5$  را تنها در یک نقطه قطع می‌کند.

در حالت کلی نموداری تابع است که هر خط موازی محور  $y$  ها، نمودار را تنها در یک نقطه قطع کند.

۶) نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه‌ی آن بازه  $[-3, 5]$  باشد، چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ بی‌نهایت تابع وجود دارد که دامنه‌ی آنها  $[-3, 5]$  باشد.

- ۱)  $f(x) = x$  ,  $\Rightarrow [-3, 5]$
- ۲)  $g(x) = 2x$  ,  $\Rightarrow [-3, 5]$
- ۳)  $h(x) = \sqrt{5x+1}$  ,  $\Rightarrow [-3, 5]$

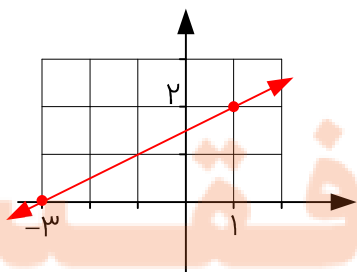
۷) نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

تابع خطی است، پس به شکل  $y = ax + b$  خواهد بود. تابع از دو نقطه‌ی  $(1, 2)$  و  $(-3, 0)$  می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases} 2 = a(1) + b \\ 0 = a(-3) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

پس معادله‌ی خط به صورت  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  است.

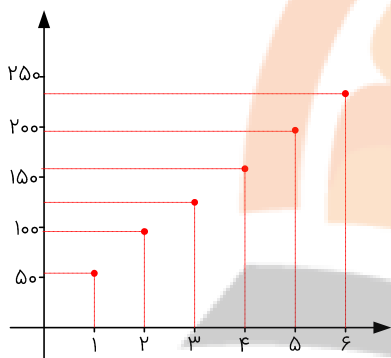


از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟  
از بین نمایش‌های مختلفی که می‌شناسیم نمایش ضابطه‌ای و نمودار مختصاتی مناسب‌تر است.

۸) جدول زیر دمای سنگ‌ها را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.  
چون به هر عمق فقط یک دمای معین نسبت داده شده است.



ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

$$y = ax + b$$

$$\left. \begin{aligned} (1, 55) &\Rightarrow 55 = a(1) + b \\ (2, 90) &\Rightarrow 90 = a(2) + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 35 \Rightarrow 55 = 35(1) + b \Rightarrow b = 20$$

معادله‌ی تابع  $y = 35x + 20$  است.

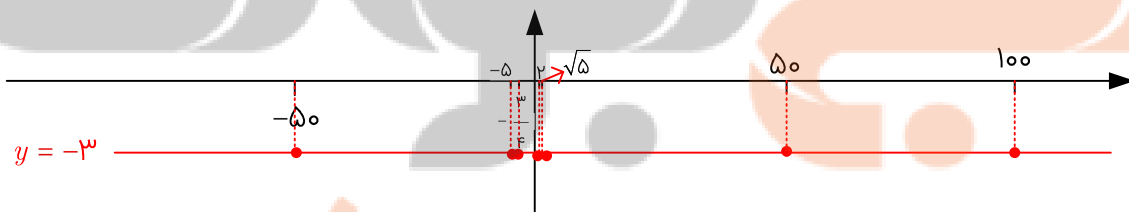
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

$$x = 10 \Rightarrow y = 35x + 20 \rightarrow y = 35(10) + 20 = 370$$

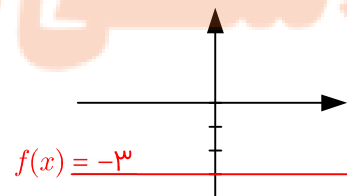
دما در عمق ۱۰ کیلومتری زمین ۳۷۰ درجه سانتی‌گراد است.

۹) الف) تابع  $f(x) = -3$  را رسم کنید و مقادیر  $f(2)$  و  $f(100)$  و  $f(-5)$  و  $f(\sqrt{5})$  و  $f(-\frac{3}{4})$  را به دست آورید.

$$f(2) = -3, f(100) = -3, f(-5) = -3, f(\sqrt{5}) = -3, f(-\frac{3}{4}) = -3$$

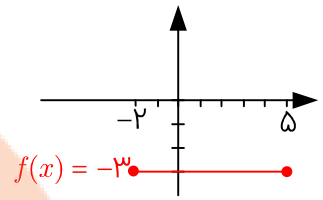


ب) اگر دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

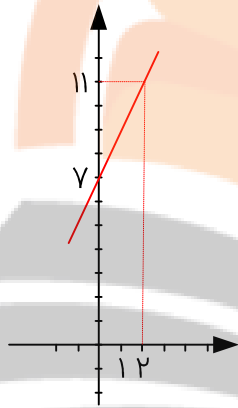


پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه‌ی آن بازه‌ی  $[-2, 5]$  باشد، نیز رسم کنید.





۱۰) برای یک تابع خطی می‌دانیم که:  $f(2) = 11$  و  $f(0) = 7$ . نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.



$$f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(2) = 11 \Rightarrow 11 = 2a + b \\ f(0) = 7 \Rightarrow 7 = 0 + b \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11 = 2a + 7 \Rightarrow a = 2 \quad \Rightarrow f(x) = 2x + 7$$

۱۱) آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۰	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

بله، این جدول یک تابع را نشان می‌دهد. زیرا هر  $x$  دقیقاً به یک  $y$  متناظر شده است.

۱۲) علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت  $0/1$  کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در  $t$  دقیقه طی می‌کند، با  $f(t)$  نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف)  $f(t) = t - 0/1$

پ)  $f(t) = t + 0/1$

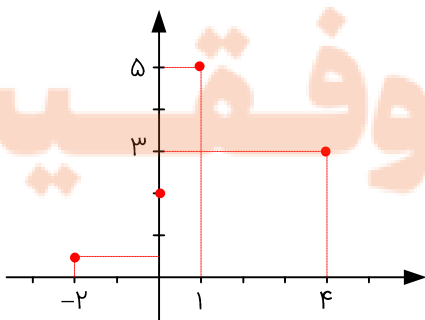
ب)  $f(t) = 0/1t$

ت)  $f(t) = 0/1 - t$

گزینه‌ی (ب) درست است. چون در هر دقیقه  $0/1$  کیلومتر را طی می‌کند و تابعی خطی با شیب  $0/1$  و عرض از مبدأ صفر (یعنی شروع حرکت در نقطه  $0$ ) است.

۱۳) اگر درباره‌ی تابع  $g$  داشته باشیم:  $g(4) = 3$ ،  $g(-2) = \frac{1}{3}$ ،  $g(1) = 5$ ،  $g(0) = 2$ ؛ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g = \left\{ (4, 3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), (1, 5), (0, 2) \right\}$$



۱۴) برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه  $F = \frac{9}{5}C + 32$  به یکدیگر وابسته‌اند.

الف)  $20$ -درجه سانتی‌گراد، چند درجه فارنهایت است؟

$$C = -20 \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -36 + 32 = -4$$

۴-درجه فارنهایت می‌شود.

ب)  $104$  درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

$$F = 104 \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow 104 = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow \frac{9}{5}C = 72 \rightarrow C = 40$$

۴۰ درجه سانتی‌گراد می‌شود.

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow \frac{9}{5} = F - 32 \Rightarrow C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

ت) آیا رابطه‌ی بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

بله، زیرا این رابطه به شکل  $y = ax + b$  است.

۱۵) طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

طول مستطیل را با  $x$  و عرضش را با  $y$  نشان می‌دهیم، پس:

$$x = y + 3$$

$$P = 2(x + y) \Rightarrow P(y) = 2(x + 3) + y \Rightarrow P(y) = 4y + 6$$

۱۶) دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

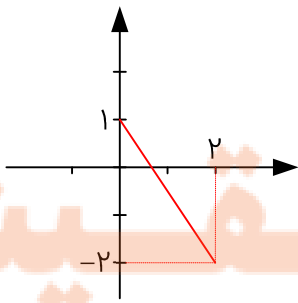
$$g = \{(1, d), (2, c), (3, b), (4, a)\}$$

$$\text{برد } f \text{ و دامنه } g = \{a, b, c, d\} = g$$

$$\text{دامنه } f = \{1, 2, 3, 4\} = g$$

۱۷) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن  $[0, 2]$  و برد آن  $[-2, 1]$  باشد. چه تعداد از این گونه توابع را می‌توان رسم کرد؟

بی‌نهایت تابع می‌توان رسم کرد که دامنه‌ی آن  $[0, 2]$  و برد آن  $[-2, 1]$  باشد.



تلاشی در مسیر موفقیت

## فصل ۵: تابع درس سوم: انواع توابع

صفحه ۱۰۹

فعالیت



جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	$\frac{2}{5}$	۵	۱۲	x
مساحت آن	۰/۰۱	$\frac{1}{4}$	۱	۹	۱۶	$\frac{6}{25}$	۲۵	۱۴۴	$x^2$

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۶	۲
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	$4\pi$	$9\pi$	$25\pi$	$36\pi$	$\pi r^2$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت  $f(x) = x^2$  قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه‌ی دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را بر حسب یک تابع درجه‌ی سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم. توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^2 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت  $y = 2x^2 + 5x + 1$  نیز نمایش می‌دهند. بقیه‌ی توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

$$g(x) = 4x^2 - 3 \Rightarrow y = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9 \Rightarrow y = x^3 + 2x^2 - 4x - 9$$

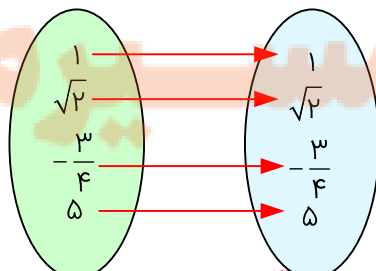
$$r(t) = -\frac{3}{5}t^2 + t + \sqrt{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x^2 + x + \sqrt{2}$$

۲) دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی دارند؟

$$f = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

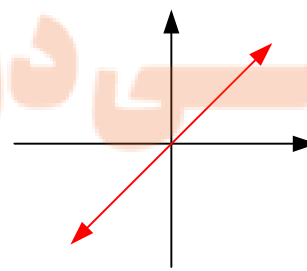
$$f \text{ دامنه} = \{a, b, c\}$$

$$f \text{ برد} = \{a, b, c\}$$



$$g \text{ دامنه} = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{5}, 5\}$$

$$g \text{ برد} = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{5}, 5\}$$



$$h \text{ دامنه} = \mathbb{R}$$

$$h \text{ برد} = \mathbb{R}$$

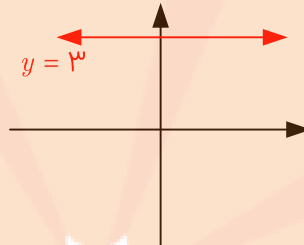
شبهات این سه تابع در آن جاست که در هر سه تابع به هر عضو از دامنه همان عضو نسبت داده شده است و دامنه و برد در هر کدام از آنها با هم برابر است. تفاوت آنها در اعضای دامنه و بردهایشان است.

۳) سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

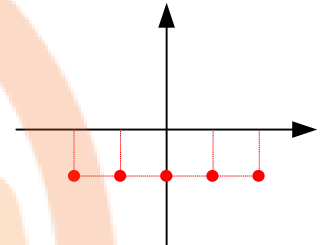
$$\text{دامنه} = \{8, 9, 10\}$$

$$\text{برد} = \{19\}$$



$$\text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$\text{برد} = \{3\}$$



$$\text{دامنه} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{برد} = \{-1\}$$

در هر سه تابع به هر عضو از دامنه‌شان تنها یک عدد خاص نسبت داده شده است. یعنی برد هر سه تابع مجموعه‌ای تک عضوی است. در واقع در هر سه همه اعضای دامنه به یک مقدار ثابت متناظر هستند. تفاوت این توابع در اعضای دامنه‌ها و بردهایشان است.

صفحه ۱۱۰

کار در کلاس



۱) برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.  
مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

$$f(x) = 2x^3 + 3x - 1$$

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه‌ی آن  $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$  باشد.

$$f = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2, 2), (5, 5)\}$$

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

$$g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه‌ی آن ۵ عضوی باشد.

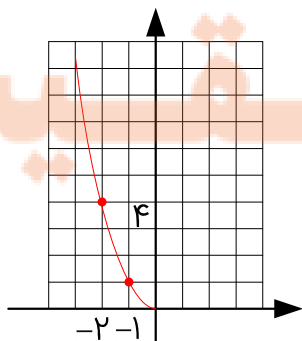
$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$$

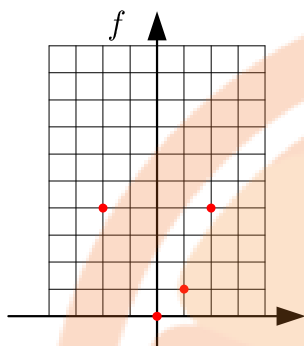
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

ارتفاع ۲ متری ساعت روی دیوار از سطح زمین نسبت به زمان همواره ثابت است. یعنی به صورت  $f(t) = 2$  است که در آن  $t$  زمان را نشان می‌دهد.

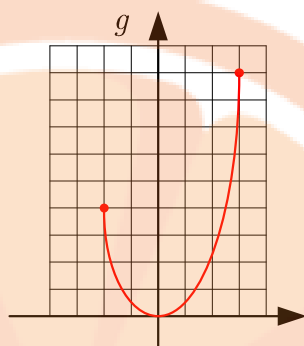
۲) نمودار توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع  $h$  رسم شده است. جدول را کامل کنید.

تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی	مجموعه‌ی اعداد حقیقی
برد	$\{4, 0, 1\}$	$[0, 9]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

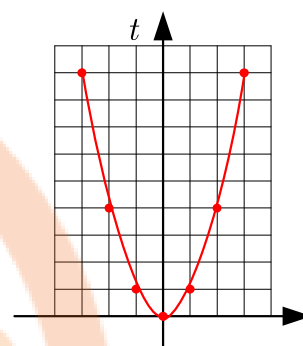




از محور  $x$  ها اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ از محور عرض ها اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ پوشیده شده اند.



از محور  $x$  ها بازه  $[-2, 3]$  و از محور  $y$  ها بازه  $[0, 9]$  پوشیده شده است.



از محور  $x$  ها اعداد حقیقی و از محور  $y$  ها اعداد حقیقی نامنفی پوشیده شده است.

**تذکر:** اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه‌ی آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه‌ی ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه‌ی تابع  $f(x) = x^2$  را مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

صفحه ۱۱۱

فعالیت

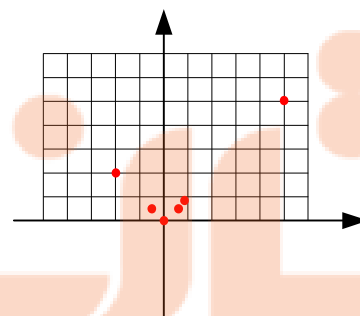


جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.

$x$	-۲	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵
$f(x)$	۲	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵

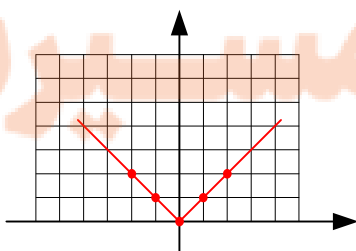
$$f \text{ دامنه} = \{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5\}$$

$$f \text{ برد} = \{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{4}, 5\}$$



تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را  $f(x) = |x|$  یا  $y = |x|$  نمایش می‌دهند.

اگر دامنه‌ی یک تابع قدر مطلق مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.



$$\text{تابع قدر مطلق را به صورت } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ نیز نمایش می‌دهند.}$$

با توجه به اینکه برای  $x \geq 0$  و  $x < 0$  توابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

صفحه ۱۱۲

فعالیت

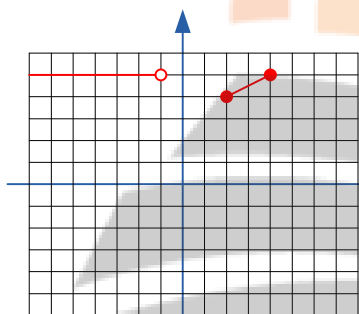


توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید. هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

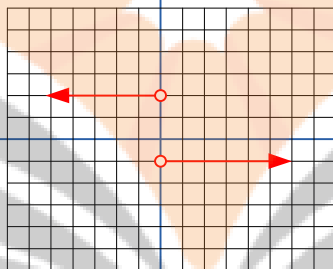
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

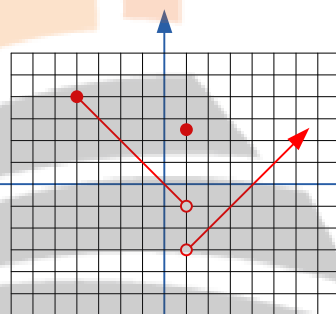
$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



$h$  دامنه  $= (-\infty, -1) \cup [2, 3]$   
برد  $= [4, 6]$



$f$  دامنه  $= \mathbb{R} - \{0\}$   
برد  $= \{-1, 2\}$



$g$  دامنه  $= [-4, +\infty)$   
برد  $= (-3, +\infty)$

مقادیر  $g(0)$ ،  $h(\sqrt{5})$ ،  $f(-\frac{1}{5})$ ،  $g(-2)$ ،  $f(3)$  را بیابید.

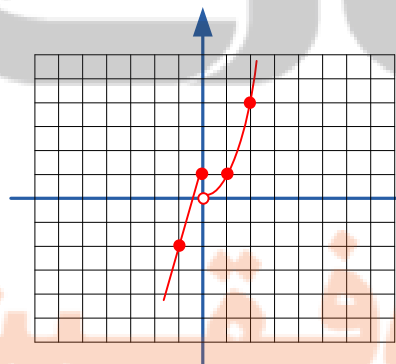
$$g(0) = 0, \quad h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, \quad f(-\frac{1}{5}) = 2, \quad g(-2) = 2, \quad f(3) = -1$$

صفحه ۱۱۳

کار در کلاس



۱) نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

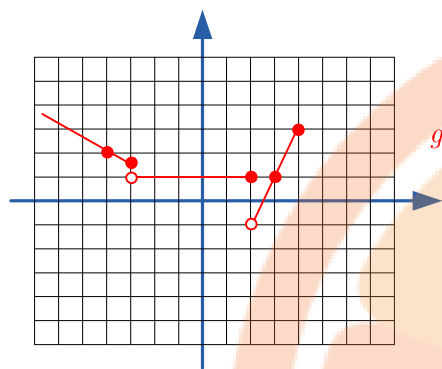


$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

دامنه  $f = \mathbb{R}$   
برد  $f = \mathbb{R}$

$x$	۱	۲
$y$	۱	۴

$x$	۰	-۱
$y$	۱	-۲



$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

$x$	۲	۳
$y$	-۱	۱

$x$	-۳	-۴
$y$	$\frac{۳}{۲}$	۲

$g$  دامنه =  $\mathbb{R}$   
 $g$  برد =  $(-1, +\infty)$

مقادیر  $f(0)$ ،  $f(5)$ ،  $g(2)$ ،  $f(-2)$  و  $g(-\frac{1}{5})$  را به دست آورید.

$f(0) = 3(0) + 1 = 1$

$g(0) = 1$

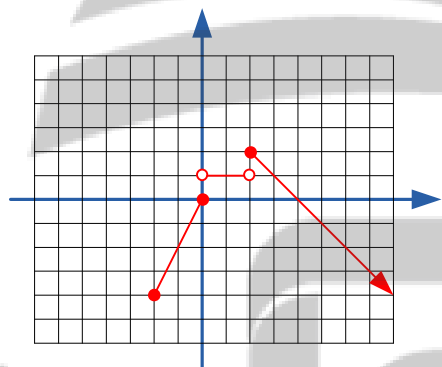
$f(5) = 5^2 = 25$

$g(2) = 1$

$f(-2) = 3(-2) + 1 = -5$

$g(-\frac{1}{5}) = 1$

(۲) نمودار تابع قطعه‌ای  $f$  داده شده است. ضابطه‌ی آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

$f$  دامنه =  $[-2, +\infty)$

$f$  برد =  $(-\infty, 2]$

صفحه ۱۱۳

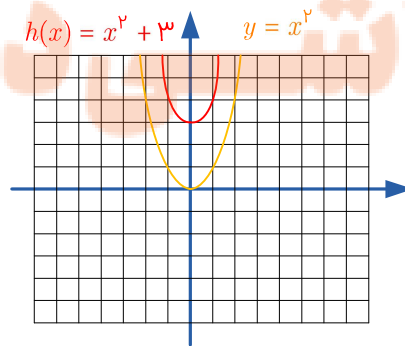
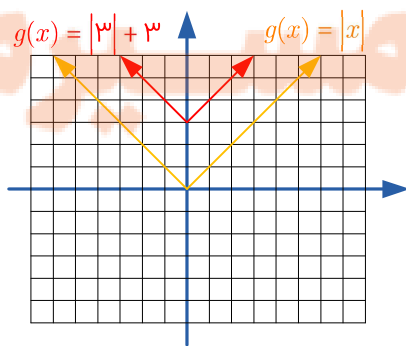
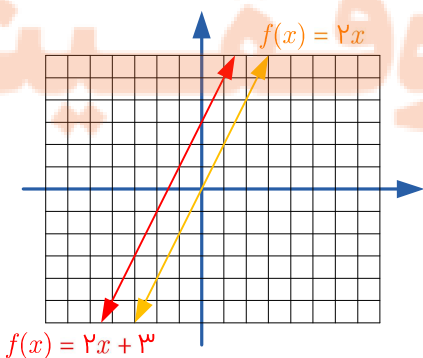
فعالیت



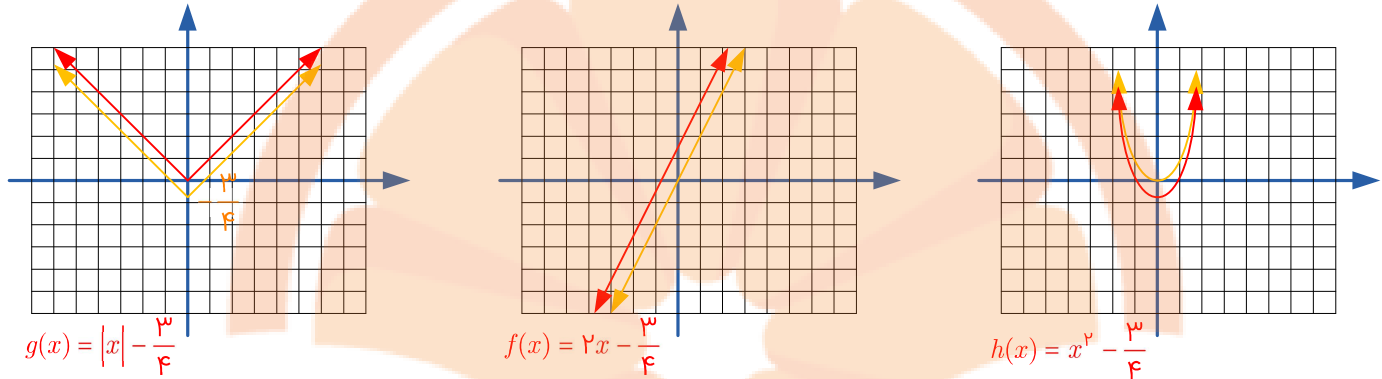
نمودارهای توابع  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = |x|$  و  $h(x) = x^2$  و توابع  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x) = |x| + 3$  و  $h(x) = x^2 + 3$  داده شده-

اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع  $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$  و  $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$

را به همین روش رسم کنید.



تابع  $f(x) = 2x + 3$  با سه واحد انتقال تابع  $f(x) = 2x$  در راستای  $y$  به سمت بالا به دست می‌آید. تابع‌های  $f(x) = |x| + 3$  و  $f(x) = x^2 + 3$  نیز به همین ترتیب از روی  $f(x) = |x|$  و  $f(x) = x^2$  رسم می‌شوند.

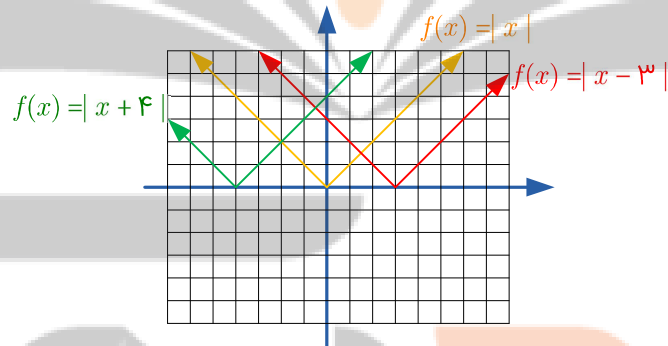


۱۱۴ صفحه

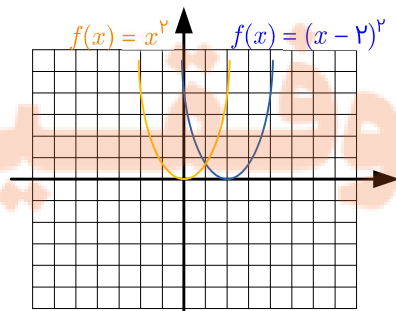
کار در کلاس



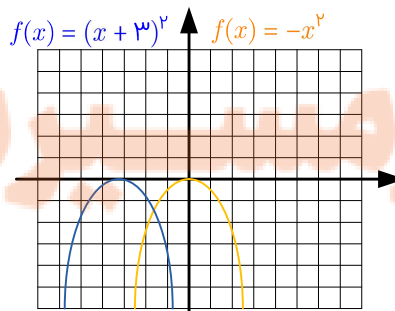
۱) در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع  $f(x) = |x|$  رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



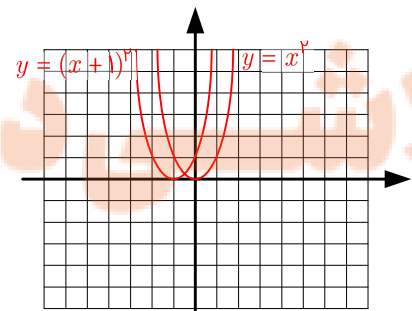
۲) تابع  $f(x) = |x - 3|$  از انتقال سه واحد تابع  $f(x) = |x|$  در راستای محور  $x$  به سمت راست رسم شده است و تابع  $f(x) = |x + 4|$  با انتقال ۴ واحد تابع  $f(x) = |x|$  به سمت چپ رسم شده است. در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع  $f(x) = x^2$  و  $f(x) = -x^2$  نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار  $f(x) = (x + 1)^2$  را نیز رسم کنید.



دامنه هر دو تابع  $= \mathbb{R}$   
برد هر دو تابع  $= [0, +\infty)$



دامنه هر دو تابع  $= \mathbb{R}$   
برد هر دو تابع  $= (-\infty, 0]$



دامنه هر دو تابع  $f(x) = (x + 1)^2$   $= \mathbb{R}$   
برد هر دو تابع  $= [0, +\infty)$





در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه‌ی دوم  $f$ ،  $g$  و  $t$  رسم شده‌اند.

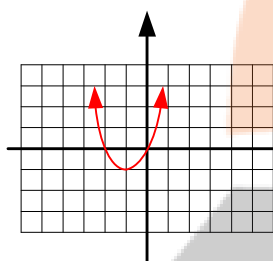
$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

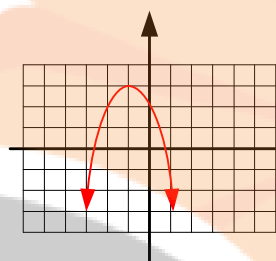
$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟  
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید.



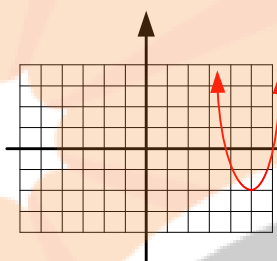
$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

دامنه  $g = \mathbb{R}$   
برد  $g = [-1, +\infty)$



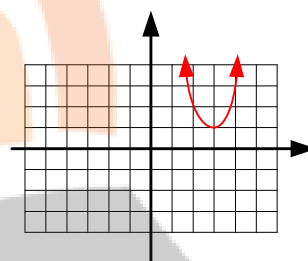
$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

دامنه  $t = \mathbb{R}$   
برد  $t = (-\infty, 3]$



$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

دامنه  $f = \mathbb{R}$   
برد  $f = [-2, +\infty)$



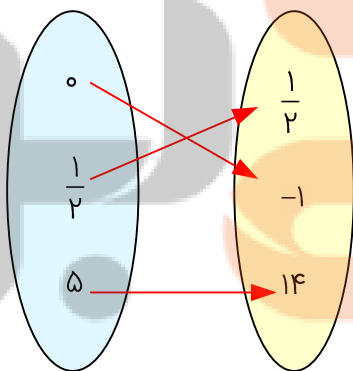
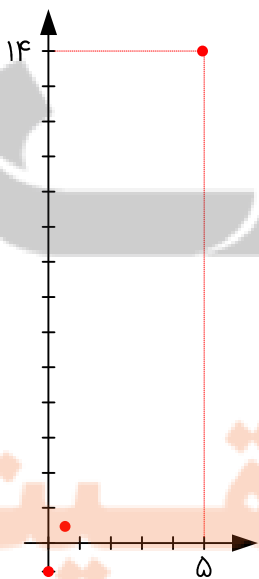
$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

دامنه  $h = \mathbb{R}$   
برد  $h = [1, +\infty)$

تمرین درس سوم: انواع توابع

صفحه ۱۱۵

۱)  $f(x) = 3x - 1$  را که دامنه‌ی آن مجموعه  $\{\frac{1}{3}, 0, 5\}$  است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه‌ی این تابع  $\mathbb{R}$  باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

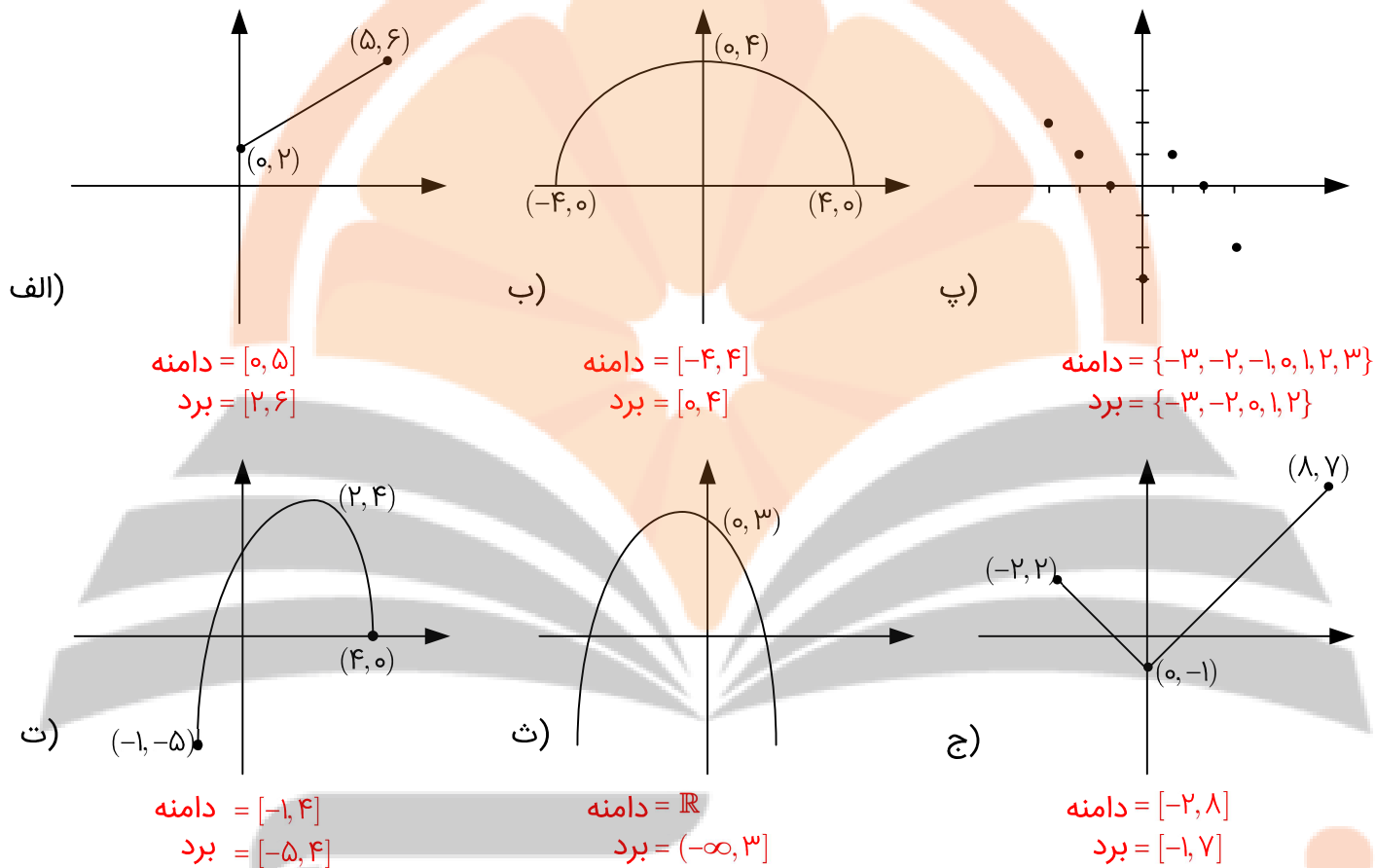


$$\text{برد } f = \{-1, \frac{1}{3}, 14\}$$

$$f = \{(0, -1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (5, 14)\}$$

اگر دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، برد  $f$  هم  $\mathbb{R}$  خواهد بود و نمودار تابع  $f$  یک خط راست پیوسته خواهد بود.

۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



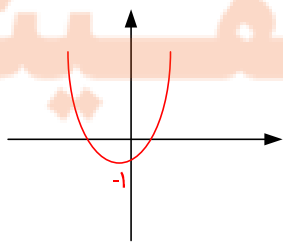
نمایش جبری (ضابطه) تابع قسمت (الف): 
$$\begin{cases} \text{شیب خط} = \frac{6-2}{5-0} = \frac{4}{5} \\ \text{عرض از مبدأ} = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{5}x + 2$$

نمایش جبری (ضابطه) تابع قسمت (ج): 
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 8 \\ -\frac{3}{2}x-1, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

۳) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

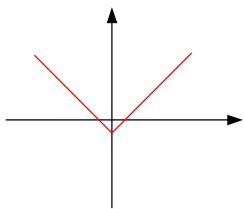
الف) دامنه‌ی تابع  $f(x) = x^2 - 1$  برابر  $(0, +\infty)$  و برد آن نیز  $(0, +\infty)$  است.

نادرست است. دامنه‌ی این تابع  $\mathbb{R}$  و برد آن  $[-1, +\infty)$  است.



ب) دامنه‌ی تابع  $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$  همه‌ی اعداد حقیقی و برد آن  $(2, +\infty)$  است.

نادرست است. برد این تابع  $(-\frac{1}{3}, +\infty)$  است.

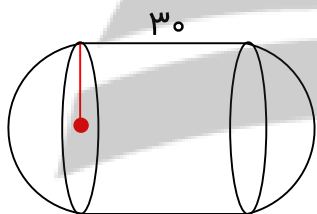


پ) دامنه‌ی تابع ثابت  $f(x) = 2$  برابر  $(-\infty, +\infty)$  است. درست است.

ت) اگر  $f(x) = 2x + 1$  آنگاه  $f(1) = \frac{f(2)}{2}$ .

نادرست است. زیرا:  $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$ ,  $\frac{f(2)}{2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow f(1) \neq \frac{f(2)}{2}$

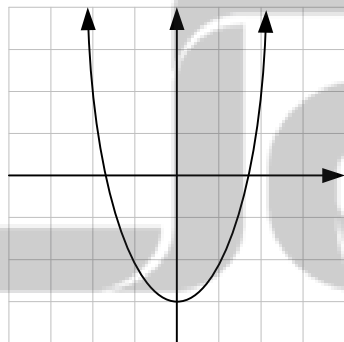
۴) یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع ۲ در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از ۲ بنویسید.



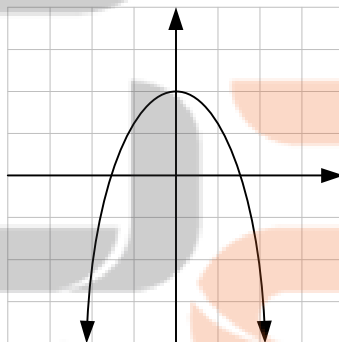
حجم استوانه + حجم نیم کره  $V(r) = 2 \times$

$$V(r) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 \times 30 = \frac{4}{3} \pi r^3 + 30 \pi r^2$$

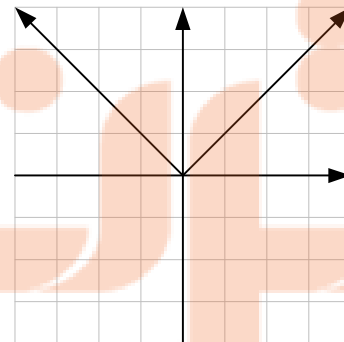
۵) هر یک از نمودارهای زیر کدام تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



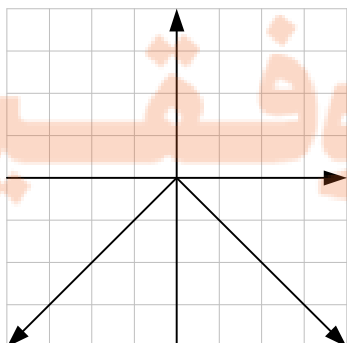
الف)  $y = x^2 - 3$  برد  $[-3, +\infty)$



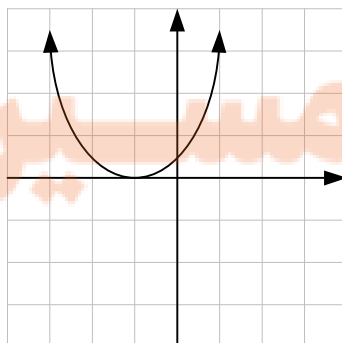
ب)  $y = -x^2 + 2$  برد  $(-\infty, 2]$



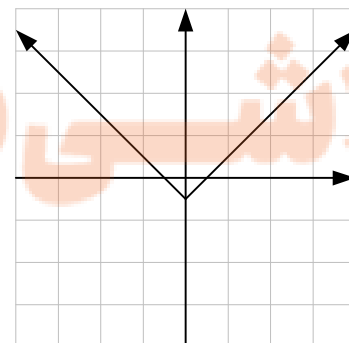
پ)  $y = |x|$  برد  $[0, +\infty)$



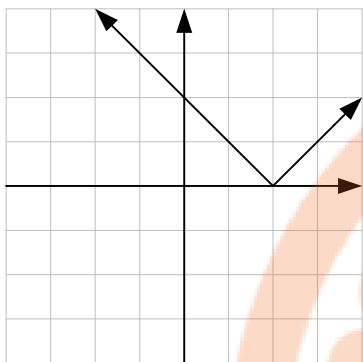
ت)  $y = -|x|$  برد  $(-\infty, 0]$



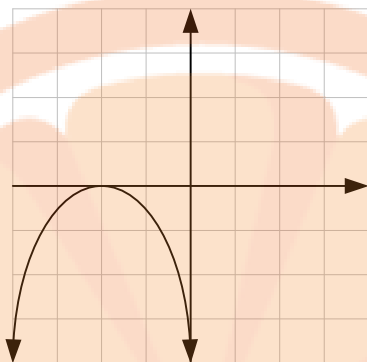
ث)  $y = (x + 1)^2$  برد  $[0, +\infty)$



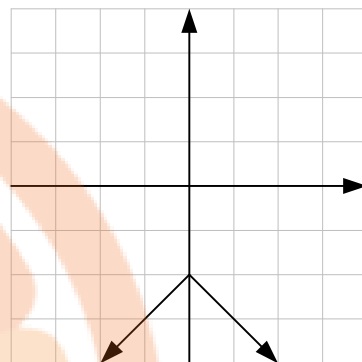
ج)  $y = |x - \frac{1}{2}|$  برد  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$



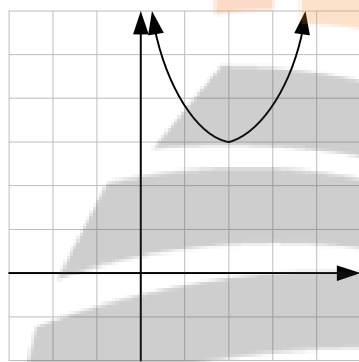
ج)  $y = |x - 2|$  برد  $\rightarrow [0, +\infty)$



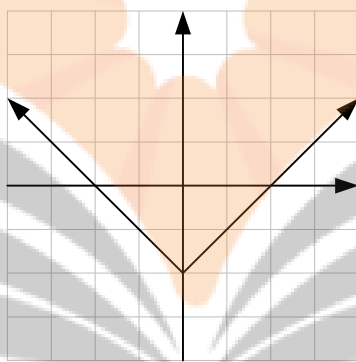
ح)  $y = -(x + 2)^2$  برد  $\rightarrow ]-\infty, 0]$



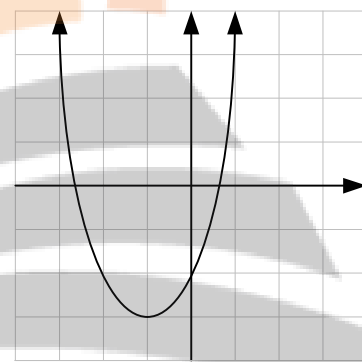
خ)  $y = -|x| - 2$  برد  $\rightarrow ]-\infty, -2]$



د)  $y = (x - 2)^2 + 3$  برد  $\rightarrow [3, +\infty)$



ذ)  $y = |x| - 2$  برد  $\rightarrow ]-2, +\infty)$



ر)  $y = (x + \frac{1}{4})^2 - 3$  برد  $\rightarrow (-3, +\infty)$

الف)  $y = x^2 - 3$

ب)  $y = -x^2 + 2$

پ)  $y = |x|$

ت)  $y = -|x|$

ث)  $y = (x + 1)^2$

ج)  $y = |x| - \frac{1}{4}$

چ)  $y = |x - 2|$

ح)  $y = -(x + 2)^2$

خ)  $y = -|x| - 2$

د)  $y = (x - 2)^2 + 3$

ذ)  $y = |x| - 2$

ر)  $y = (x + \frac{1}{4})^2 - 3$

دامنه‌ی همهی توابع داده شده در قسمت‌های (الف) تا (ر) برابر  $\mathbb{R}$  است.

۶) فرض کنیم دامنه‌ی هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه‌ی  $[-2, 3]$  محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

الف) برد =  $[-3, 6]$

ب) برد =  $[-7, 2]$

پ) برد =  $[0, 3]$

ت) برد =  $[-3, 0]$

ث) برد =  $[0, 16]$

ج) برد =  $[\frac{-1}{4}, \frac{5}{4}]$

چ) برد =  $[0, 4]$

ح) برد =  $[-25, 0]$

خ) برد =  $[-5, -2]$

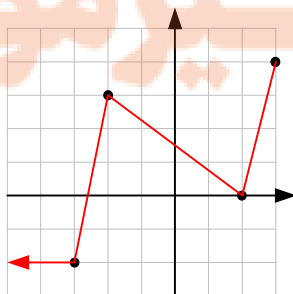
د) برد =  $[3, 19]$

ذ) برد =  $[-2, 1]$

ر) برد =  $[-3, 9/25]$

۷) نمودار تابع  $f$  داده شده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -3 \\ 5x + 13 & -3 \leq x < -2 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} & -2 \leq x < 2 \\ 4x - 8 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



$$f(\sqrt{5}) = 4(\sqrt{5}) - 8 = 4\sqrt{5} - 8$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

تعریف نشده  $f(6)$

$$f(0) = \frac{3}{2}$$

$$f(3) = 4$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 5\left(-\frac{5}{2}\right) + 13 = \frac{1}{2}$$

۸) نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(0, 3)$  و  $(4, 3)$  می‌گذرد.  $f(-1)$  و  $f(-4)$  را به دست آورید. چون  $f$  خطی است پس  $f(x) = ax + b$  و چون از نقاط  $(0, 3)$  و  $(4, 3)$  می‌گذرد، پس:

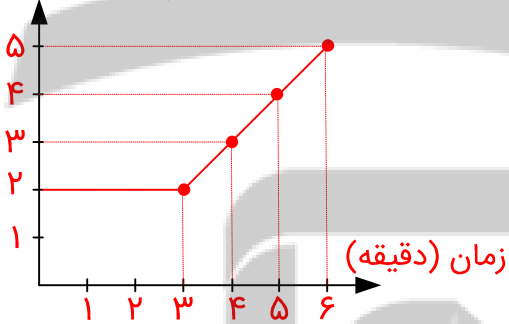
$$3 = a(4) + b \xrightarrow{b=3} 4a + 3 = 3 \Rightarrow a = 0$$

$$3 = a(0) + b \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(-4) = 3 \end{cases}$$

۹) هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایین زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

هزینه (۱۰۰۰) تومان



$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x-1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

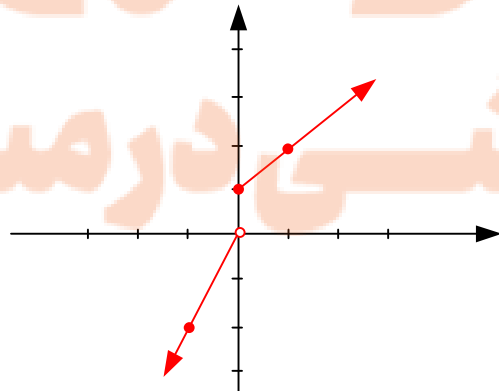
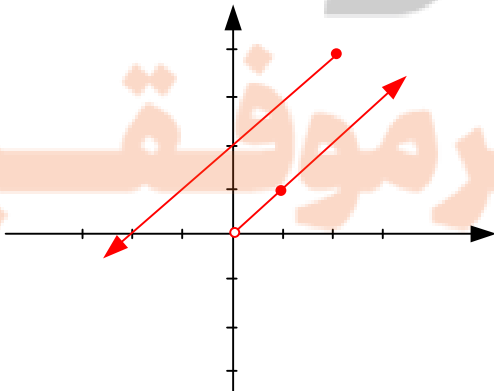
۱۰) کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

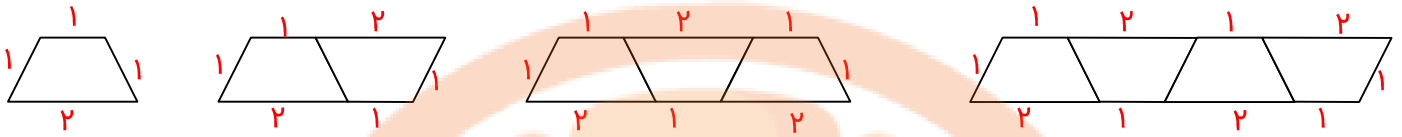
$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

تابع نیست، زیرا مقدار  $f(1)$  با ضابطه بالایی برابر ۱ است و با ضابطه پایینی برابر ۳ است.

تابع است.



۱۱) الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.

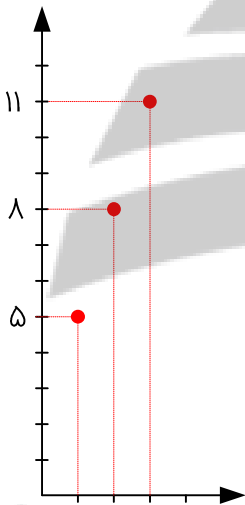


الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n + 2$

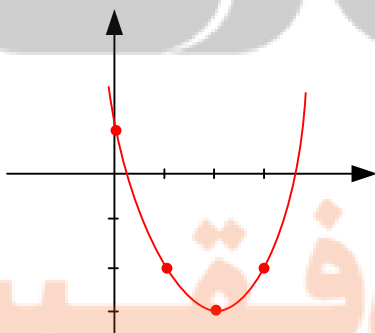
ب) چرا رابطه‌ی بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

این رابطه یک تابع است زیرا به هر شکل (به هر تعداد دوزنقه) یک عدد را به عنوان محیط نسبت می‌دهد. ضابطه‌ی آن به شکل  $f(n) = an + b$  است. به عبارت دیگر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطه از تابع به تفاضل طول‌های همان دو نقطه عددی ثابت برابر ۳ است.



اعداد طبیعی  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  = دامنه تابع  
 برد تابع =  $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$

۱۲) نمودار تابعی، یک سهمی که از نقاط  $(1, -2)$  و  $(2, -3)$  می‌گذرد و محورهای آن را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(1) = -2 \Rightarrow a + b + 1 = -2 \Rightarrow a + b = -3$$

$$f(2) = -3 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = -4$$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$\text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$\text{برد} = [-3, +\infty)$$

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 [www.ToranjBook.Net](http://www.ToranjBook.Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook\\_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)