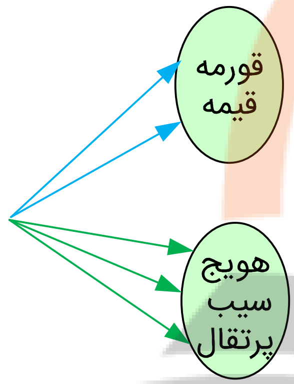
فصل ٦: شمارش بدون شمردن

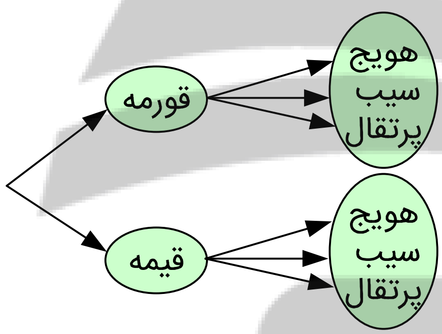
درس اول: شمارش

فعالیت -- صفحه ۱۱۹



۱) امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوان «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوی خورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه‌ی هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

پنج انتخاب وجود دارد.



۲) هفته‌ی بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

شش انتخاب خواهد داشت.

۳) چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

این تفاوت که پوریا می‌بایست از میان غذاها یا آب‌میوه‌ها فقط یکی را انتخاب کند اما امین هم یک غذا و هم یک آبمیوه باید انتخاب کند.

۴) در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب میوه فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در حالت اول تعداد حالت‌های جواب با مجموع انتخاب‌ها برابر است اما در حالت دوم با حاصل ضرب انتخاب‌ها برابر است.

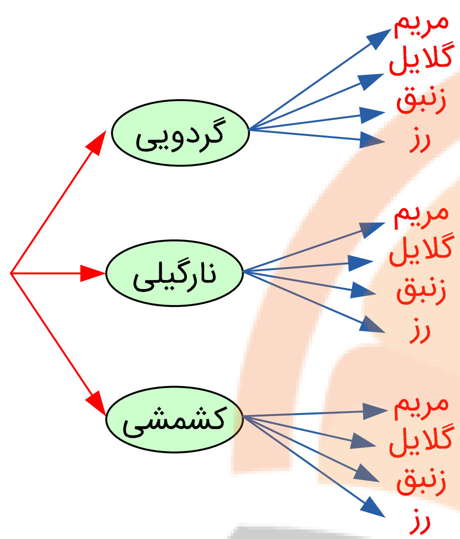
کار در کلاس -- صفحه ۱۲۱

۱) پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه‌ی گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه‌ی دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

هفت انتخاب دارد. زیرا طبق اصل جمع $۷ = ۴ + ۳$.

۲) هفته‌ی بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه‌ی جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

او این بار ۱۲ انتخاب دارد.



۳) در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در مسئله‌ی ۱ قرار است تنها یکی از انتخاب‌ها صورت گیرد و طبق اصل جمع باید پاسخ داده می‌شد و در مسئله ۲ قرار است هم شیرینی و هم گل انتخاب شود که بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ داده می‌شود. $(۳\times۴=۱۲)$

۴) دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

مسئله برای اصل جمع:

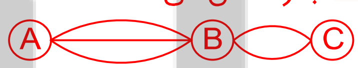
فرض کنید شما برای انجام کاری در بیرون از خانه هستید و مجبورید ناهار خود را از بیرون تهیه کنید. در اطراف شما یک رستوران ایرانی با ۵ نوع غذا و یک فست‌فود با ۳ نوع غذا وجود دارد. شما به چند طریق می‌توانید غذای امروز خود را تهیه کنید؟

پاسخ: غذای ما یا از رستوران ایرانی تهیه خواهد شد یا از فست‌فود، پس $۵+۳=۸$ روش برای انجام این کار وجود دارد.

مسئله برای اصل ضرب:

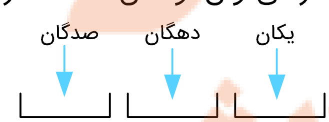
برای رفتن از شهر A به Cابتدا باید از B عبور کرد. اگر رفتن از A به B از سه راه و رفتن از B به Cاز دو راه امکان‌پذیر باشد، در اینصورت برای رفتن از A به C چند راه امکان‌پذیر است؟

پاسخ: کلاً ۶ راه امکان‌پذیر است. شکل زیر این مطلب را نشان می‌دهد.



کار در کلاس -- صفحه ۱۲۲

الف) با سه رقم ۵و ۳و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



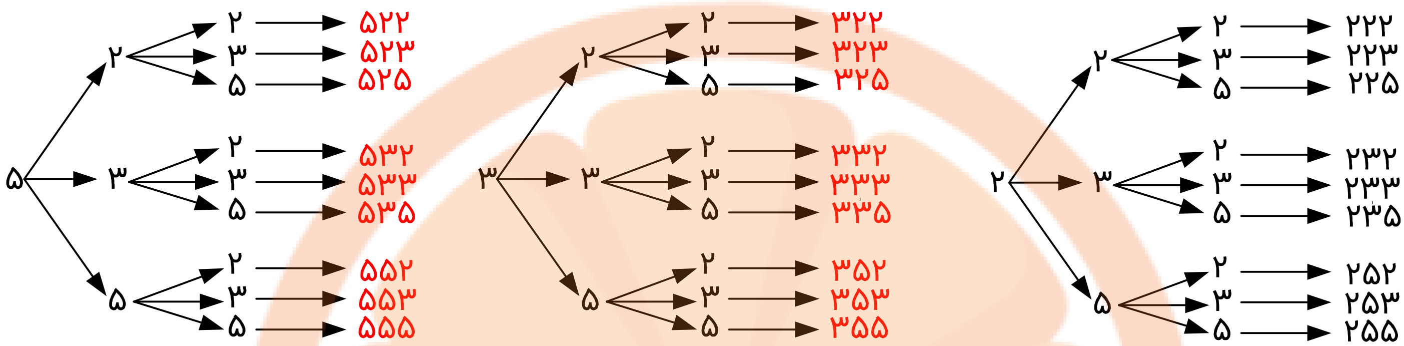
پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله‌ی آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا۲۷ عدد وجود دارد.

۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲

تعداد حالت ها $۳\times۳\times۳=۲۷$

با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه‌ی صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱) برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

یکان | دهگان | صدگان

تعداد حالت ها ← ...۳...... خانه اول ۳ حالت دارد

۲) حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ← ...۲.......

جایگاه دوم ۲ انتخاب دارد. زیرا یکی از اعداد در انتخاب قبل حذف شده و مجاز به استفاده از آن نیستیم.

۳) برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا ....= ......×......×..... عد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.

یک عدد قرار گرفته است | یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ← ...۱.....

لذا $۶ = ۱ \times ۲ \times ۳$ سه عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.

پ) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

به ۱ روش می‌تواند پر شود. (توسط عدد ۲)

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند، پر شوند؟

دو جایگاه دیگر هر یک به ۳ طریق می‌توانند پر شوند.

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با: $۹ = ۱ \times ۳ \times ۳$

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

به یک طریق می‌تواند پر شود. (توسط عدد ۲)

۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟

به ۲ طریق.

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟

به ۱ طریق.

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با: $۲ = ۱ \times ۲ \times ۱$

تمرین درس اول: شمارش
صفحه ۱۲۴

۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید. مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

طبق اصل جمع پاسخ $10+32=42$ حالت است. زیرا ده عدد $0,1,2,\dots,9$ یا ۳۲ حرف می‌توان انتخاب کرد.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده، که گزینه‌ی اول یک عدد و گزینه‌ی دوم یک حرف الفبای فارسی است.

این رمز طبق اصل ضرب $10\times 32=320$ حالت دارد. چون هر دو گزینه باید انتخاب شوند از اصل ضرب استفاده کردیم.

$$\overset{\text{عدد}}{10} \times \overset{\text{حرف}}{32} = 320$$

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه‌ی دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

این رمز دو حالت دارد، یا گزینه اول عدد و گزینه دوم حرف الفبای فارسی است و یا گزینه اول یک حرف الفبای فارسی و گزینه دوم یک عدد است.

$$\overset{\text{عدد}}{10} \times \overset{\text{حرف}}{32} = 320$$

$$\overset{\text{حرف}}{32} \times \overset{\text{عدد}}{10} = 320 \xrightarrow{\text{اصل جمع}} 320+320=640$$

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

$$\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{هر دو گزینه عدد}} 10\times 10=100 \\ \xrightarrow{\text{هر دو گزینه حرف}} 26\times 26=676 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{اصل جمع}} 100+676=776$$

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه‌ی اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه‌ی دوم حروف انگلیسی غیر تکراری‌اند.

$$\overset{\text{عدد}}{10} \times \overset{\text{عدد}}{9} \times \overset{\text{حرف}}{26} \times \overset{\text{حرف}}{25} = 58500$$

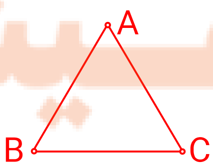
۲) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداقل تعداد کارخانه $\quad \overset{\text{بلوار}}{5}\quad \overset{\text{خیابان}}{8}\quad \overset{\text{کوچه}}{10}\quad \overset{\text{کارخانه}}{20} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5\times 8\times 10\times 20=8000$

حداکثر تعداد کارخانه $\quad \overset{\text{بلوار}}{5}\quad \overset{\text{خیابان}}{10}\quad \overset{\text{کوچه}}{12}\quad \overset{\text{کارخانه}}{30} \rightarrow 5\times 10\times 12\times 30=18000$

۳) می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟



$$\overset{A}{2}\quad \overset{B}{2}\quad \overset{C}{2} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 2\times 2\times 2=8$$

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند هم رنگ نباشند؟

برای رأس A دو انتخاب داریم. برای رأس B یک انتخاب داریم زیرا به A وصل است. حال برای رأس C انتخاب نداریم زیرا رأس C هم به A و هم به B وصل است و دیگر رنگی متفاوت با آبی و قرمز نداریم که بخواهیم Cرا با آن رنگ کنیم. پس به هیچ طریقی نمی‌شود این کار را انجام داد.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

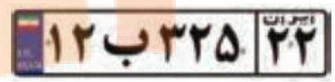
قسمت الف: $\underset{A}{3} \times \underset{B}{3} \times \underset{C}{3} = 27$ قسمت ب: $3 \times 2 \times 1 = 6$

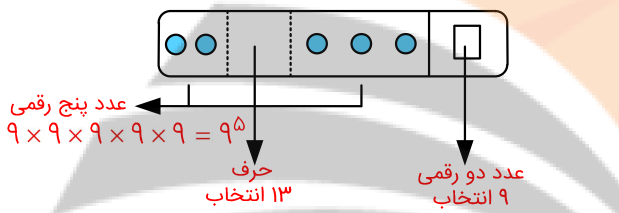
۴) با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه‌ی A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه‌ی C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟

A={۱۱، ۲۲، ....، ۹۹}

B ={۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ ، ۹}

C={ب، ج، د، س، ص، ط، ق، ل، م، ن، و، ه، ی}





اصل ضرب $\rightarrow 9^5 \times 13 \times 9 = 9^6 \times 13$ اتومبیل را می توان پلاک کرد.

۵) در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{10} \times \underset{\text{حجم}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{2} = 300$ نوع

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

چون نوع رنگ مشخص شده پس یک انتخاب برای رنگ داریم:

$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{1} \times \underset{\text{حجم}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{2} = 30$ نوع

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{1} \times \underset{\text{حجم}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{1} = 15$ نوع

۶) یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله- خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه‌ی سؤال‌ها جواب دهد؟

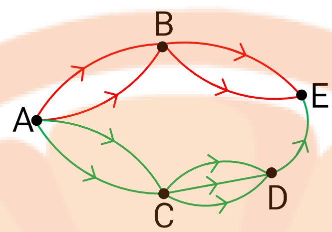
$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{\text{سؤالات چهار گزینه ای}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{سؤالات دو گزینه ای}} = 4^{10} \times 2^5 = 2^{25}$

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

چون می‌تواند جواب هم ندهد پس یک انتخاب دیگر به جز آن گزینه خواهد داشت:

$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 5^{10} \times 3^5$

۷) اگر شکل مقابل نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



از مسیر A به B و سپس از B به E ⇒ ۲ × ۲ = ۴

از مسیر A به C و سپس C به D و سپس D به E ⇒ ۲ × ۳ × ۱ = ۶

⇒ ۴ + ۶ = ۱۰

۸) مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت؛ به طوری که دهگان عددی اول باشد؟

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹) مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

۲ × ۲ × ۲ + ۳ × ۳ × ۳ = ۳۵

«پرسش‌نامه ای دارای سه سؤال ۲ گزینه‌ای و سه سؤال ۳ گزینه‌ای است. اگر شخصی موظف باشد حتماً به هر شش سؤال پاسخ دهد به چند طریق می‌تواند پرسش‌نامه را پر کند؟

دو گزینه ای = ۲ × ۲ × ۲

سه گزینه ای = ۳ × ۳ × ۳

⇒ ۲ × ۲ × ۲ + ۳ × ۳ × ۳ = ۳۵

فصل ٦: شمارش بدون شمردن

درس دوم: جایگشت

فعالیت -- صفحه ۱۲۷

۱) فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
c	b	a
c	a	b
b	c	a

۲) آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

خیر، چون عددی که در یک جایگاه قرار گیرد نمی‌تواند در جایگاه دیگری مجدداً استفاده کرد.

۳) با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

فعالیت -- صفحه ۱۲۷

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱) اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟

۴ طریق

- پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟

۳ عدد

- حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

۲طریق، یک طریق

- حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

۲) به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی $\theta, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

۳) تعداد کلمات هفت‌حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

$۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰$

۴) با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۶۲۸۸۰$

۵) تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۶۲۸۸۰۰$

۶) اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

$n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳) \times \ldots \times ۲ \times ۱$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصلضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال : $۱! = ۱$ $\quad ۲! = ۱ \times ۲$ $\quad ۳! = ۱ \times ۲ \times ۳$ و الی آخر

قرارداد: $۰! = ۱$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

کار در کلاس صفحه ۱۲۸

۱) مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $۶! = ۶ \times \overbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}^{۵!} = ۶ \times ۵!$

ب) $۸! = ۸ \times \underbrace{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۷!} = ۸ \times ۷!$

پ) $۱۰! = ۱۰ \times \underbrace{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۹!} = ۱۰ \times ۹!$

ت) $n! = n \times \underbrace{(n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times ۲ \times ۱}_{(n-۱)!} = n \times (n-۱)!$

۲) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\dfrac{۵!}{۴!} = \dfrac{۵ \times \overbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}^{۴!}}{\underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!}} = ۵$

ب) $\dfrac{۱۰!}{۹!} = \dfrac{۱۰ \times ۹!}{۹!} = ۱۰$

پ) $\dfrac{n!}{(n-۱)!} = \dfrac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

ت) $\dfrac{۸!}{۶!} = \dfrac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۶!} = ۵۶$

ث) $\dfrac{۱۰!}{۸!} = \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸!} = ۹۰$

ج) $\dfrac{n!}{(n-۲)!} = \dfrac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$

چ) $\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336$

ح) $\frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7}!}{\cancel{7}!} = 720$

خ) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

د) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

ذ) $\frac{n!}{(n-5)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = n\times(n-1)\times(n-2)\ldots(n-(k-1))$

۳) حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $9\times8 = \frac{9!}{7!}$

ب) $9\times8\times7\times6 = \frac{9!}{5!}$

پ) $11\times10\times9 = \frac{11!}{8!}$

ت) $8 = \frac{8!}{7!}$

ث) $n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$

ج) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$

فعالیت ----- صفحه ۱۲۹

۱) تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با $7!$.

۲) حال باتوجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی باحروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت به دست آوریم.

برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه‌ی سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟

۷ انتخاب، ۶ انتخاب و ۵ انتخاب

بنابراین تعداد کلمات سه حرفیِ مورد نظر برابر است با $7\times6\times5 = 210$.

۳) تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.

$9\times8\times7\times6 = 3024$

۴) اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$9\times8\times7\times6 = \frac{9!}{5!}$ ، $7\times6\times5 = \frac{7!}{4!}$

۵) تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$

۶) تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز ($0 \le r \le n$) را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(4-2))(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$

کار در کلاس ---------- صفحه ۱۳۱

۱) یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهارپست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

روش ۱: با استفاده از اصل ضرب

$\underset{\text{جلو}}{۶} \times \underset{\text{راست}}{۵} \times \underset{\text{عقب}}{۴} \times \underset{\text{چپ}}{۳} = ۳۶۰$

روش ۲: با استفاده از جایگشت ۴ شی از ۶ شی متمایز $P(۶,۴) = \frac{۶!}{۲!} = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰$

۲) با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

روش ۱: $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$ روش ۲: $P(۴,۳) = \frac{۴!}{۱!} = ۲۴$

تمرین درس دوم: جایگشت
صفحه ۱۳۱

۱) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

روش اول:

$\underset{۱}{۱۸} \times \underset{۲}{۱۷} \times \underset{۳}{۱۶} = ۴۸۹۶$

روش دوم:

$P(۱۸,۳) = \frac{۱۸!}{۱۵!} = ۴۸۹۶$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چندتاست؟

$P(n,۳) = ۲۱۰ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۳)!} = ۲۱۰ \Rightarrow n(n-۱)(n-۲) = ۲۱۰$

حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی ۲۱۰ شده است که عبارتند از ۵ و ۶ و ۷، پس n=۷. یعنی تعداد کتاب‌ها ۷ تا است.

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶! = ۶ \times ۵!$ درست

$۶! = ۳! + ۳!$ نادرست $۷۲۰ \neq ۶+۶$

$۲ \times ۳! = ۶!$ نادرست $۲ \times ۶ \neq ۷۲۰$

$۸! = ۴! \times ۲!$ نادرست $۴۰۳۲۰ \neq ۲۴ \times ۲$

$۴! = \frac{۸!}{۲!}$ نادرست $۲۴ \neq ۲۰۱۶۰$

$(۳!)^۲ = ۹!$ نادرست $۶^۲ \neq ۳۶۲۸۸۰$

۴) در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردای نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

چون ترتیب فشردن کلیدها مهم است پس با مسئله جایگشت ۳ شیء از میان ۲۰ شیء متمایز مواجهیم:

تعداد کل حالت‌های انتخاب سه کلید و فشردن آنها با ترتیب خاص $P(۲۰,۳) = \frac{۲۰!}{۱۷!} = ۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ = ۶۸۴۰ \rightarrow$

$۶۸۴۰ \times ۲ = ۱۳۶۸۰ S = ۲۲۸ \min$

۵) با حروف کلمه‌ی «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟

تعداد کلمات ۶ حرفی !۶ است. تعداد آنهایی که با «گل» شروع شوند !۴ است، زیرا جای اول و دوم با حروف «گ» و «ل» پر شده‌اند.

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

پ) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

«پ» و «ر» را با هم یک حرف در نظر می‌گیریم که به شکل «پر» یا «رپ» خواهد بود. حال به تعداد ۲ حرف دیگر باید کنار این دو قرار گیرند تا کلمه ۴ حرفی ایجاد شود.

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\text{پر}}\ \boxed{\ }\ \boxed{\ } \\ ۱\times۴\times۳=۱۲ \\ \boxed{\ }\ \boxed{\text{پر}}\ \boxed{\ } \\ ۴\times۱\times۳=۱۲ \\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\text{پر}} \\ ۴\times۳\times۱=۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳\times۱۲=۳۶ \xrightarrow[\text{(ر، پ) می توان ساخت.}]{\text{چون همین تعداد با}} ۳۶\times۲=۷۲$$

ت) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که در انها حروف کلمه‌ی «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

اولاً توجه کنید که حروف کلمه «پیرا» خودشان به معنی !۴ یعنی ۲۴ طریق مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرد. حالا ۱ حرف دیگر می‌خواهیم از بین دو حرف «گ» و«ل» انتخاب شود.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{حرف پنجم}}{۲}\times\underset{\text{پیرا}}{۲۴}=۴۸ \\ \underset{\text{پیرا}}{۲۴}\times\underset{\text{حرف پنجم}}{۲}=۴۸ \end{array}\right. \Rightarrow ۴۸+۴۸=۹۶$$

فصل ٦: شمارش بدون شمردن

درس سوم: ترکیب

فعالیت -- صفحه ۱۳۳

۱) همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $۶۰ = \frac{۵!}{(۵-۳)!}$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:

۳۴۵	۲۴۵	۲۳۵	۲۳۴	۱۴۵	۱۳۵	۱۳۴	۱۲۵	۱۲۴	۱۲۳
۳۵۴	۲۵۴	۲۵۳	۲۴۳	۱۵۴	۱۵۳	۱۴۳	۱۵۲	۱۴۲	۱۳۲
۴۳۵	۴۲۵	۳۲۵	۳۲۴	۴۱۵	۳۱۵	۳۱۴	۲۱۵	۲۱۴	۲۱۳
۴۵۳	۴۵۲	۳۵۲	۳۴۲	۴۵۱	۳۵۱	۳۴۱	۲۵۱	۲۴۱	۲۳۱
۵۳۴	۵۲۴	۵۲۳	۴۲۳	۵۱۴	۵۱۳	۴۱۳	۵۱۲	۴۱۲	۳۱۲
۵۴۳	۵۴۲	۵۳۲	۴۳۲	۵۴۱	۵۳۱	۴۳۱	۵۲۱	۴۲۱	۳۲۱

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

همگی آنها با سه رقم خاص ساخته شده‌اند. در واقع با جابجایی (جایگشت) ۳ رقم خاص از میان پنج عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و۵ به دست آمده‌اند.

۲) با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیر مجموعه‌های سه عضویِ مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را بنویسیم؟ این زیر مجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

۱۰ زیر مجموعه سه عضوی می‌توان نوشت:

$\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۲,۵\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳,۵\},\{۱,۴,۵\},\{۲,۳,۴\}\{۲,۳,۵\}\{۲,۴,۵\},\{۳,۴,۵\}$

۳) چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

در فعالیت ۱ جایگاه سه رقم انتخاب شده از میان ۵ عدد مهم است ولی در فعالیت ۲ نه.

۴) هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعه‌ی سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟

یک زیر مجموعه سه عضوی.

۵) با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیر مجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

با تقسیم جواب فعالیت ۱ بر عدد ۶ تعداد زیر مجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود. عدد ۶ همان تعداد جایگشت‌های ۳ عدد مختلف است.

کار در کلاس -- صفحه ۱۳٦

۱) در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های rشیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (با معنی و بی معنی).

ترتیب اشیاء مهم است و تعداد حالت‌ها برابر است با: $P(۵,۳) = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.

ترتیب انتخاب اهمیتی ندارد و تعداد حالت‌ها برابر است با: $\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.

ترتیب اشیاء مهم است. زیرا جایگاه افراد مشخص شده است. داریم:

$$P(7,3)=\frac{7!}{4!}=7\times6\times5=210 \text{ طریق}$$

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!3!}=35 \text{ طریق}$$

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.

چون جایگاه اهمیتی ندارد و تنها انتخاب سه نفر اول مهم است، پس ترتیب اهمیتی ندارد و داریم:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!3!}=120 \text{ طریق}$$

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

ترتیب مهم است زیرا جنس مدال‌های نفرات اول تا سوم متفاوت است. بنابراین با مسئله تعداد جایگشت‌های ۳ شیء از ۱۰ شیء مواجهیم:

$$P(10,3)=\frac{10!}{7!}=10\times9\times8=720$$

۲) در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

در کار در کلاس ۱ پاسخ داده شد.

۳) از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته‌ی ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

$$\begin{array}{ccccc} \text{ریاضی دان} & & \text{فیزیک دان} & & \text{شیمی دان} \\ \binom{8}{2} & \times & \binom{6}{2} & \times & \binom{5}{2} \end{array} =28\times15\times10=4200$$

ب) کمیته‌ی ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشد؟

چون سه رشته مختلف داریم، حداقل یک نفر از هر رشته همان دقیقاً یک نفر از هر رشته است:

$$\begin{array}{ccccc} \text{ریاضی دان} & & \text{فیزیک دان} & & \text{شیمی دان} \\ \binom{8}{1} & \times & \binom{6}{1} & \times & \binom{5}{1} \end{array} =8\times6\times5=240$$

پ) کمیته‌ی ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

(دو ریاضی‌دان) یا (یک غیر ریاضی‌دان) و (یک ریاضی‌دان)= حداقل یک ریاضی‌دان

$$\Rightarrow \binom{8}{1}\binom{11}{1}+\binom{8}{2}=8\times11+28=116$$

فعالیت -- صفحه ۱۳۶

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی قرار است یک کمیته‌ی دو نفره انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است دقت کنید.

محمد: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته‌ی سوم کسی انتخاب نشود؛ لذا سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{0} = 2\times 2\times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1} = 2\times 1\times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 1\times 2\times 2 = 4$$

پس در کل $4+4+4=12$ حالت امکان دارد.

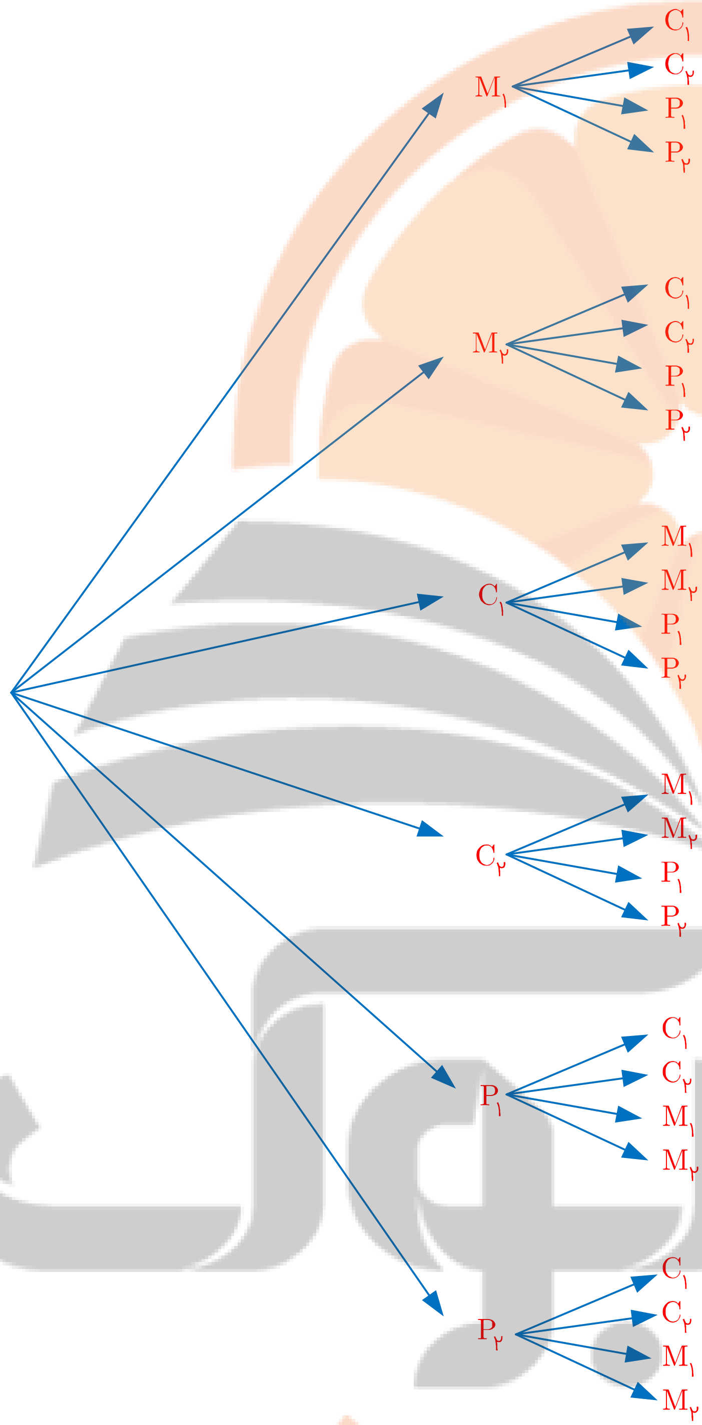
پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{3}{2}$ راه امکان دارد. حال از هر کدام دو رشته‌ی انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب کرد. لذا جواب برابر است با: $\binom{3}{2}\times 2\times 2 = 12$.

حمید: ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن را حل کرد.
اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد، پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته‌ی او باشد، پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $6\times 4 = 24$ حالت است.

- دونفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 در نظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

$\{M_1,P_1\},\{M_1,C_1\},\{M_2,P_1\},\{M_2,C_1\},\{M_1,P_2\},\{M_1,C_2\},\{M_2,P_2\},\{M_2,C_2\},\{P_1,C_1\},\{P_2,C_1\},\{P_1,C_2\},\{P_2,C_2\}$



جواب حمید اشتباه است و علت غلط بودنش این است که انتخاب $\{C_1, M_1\}$ را با انتخاب $\{M_1, C_1\}$ دو حالت مجزا در نظر گرفته است. (برای آنها ترتیب در نظر گرفته است.) بنابراین تعداد جواب‌های او دو برابر تعداد واقعی است.

فعالیت -- صفحه ۱۳۷

۱) می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های rتایی از یک مجموعه‌ی n عضوی است.

حال $\binom{n}{\circ}$ و $\binom{n}{۱}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ و یک بار با فرمول، به دست آورید.

$\binom{n}{\circ}$ یعنی تعداد زیر مجموعه‌های صفر عضوی (بدون عضو) یک مجموعه nعضوی که همان مجموعه تهی می‌شود و تعداد آن یکی است. $\binom{n}{۱}$ تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی یک مجموعه n عضوی است که تعداد آن n تا است. پس:

$$\binom{n}{۱} = n \quad , \quad \binom{n}{\circ} = ۱$$

از نظر فرمولی داریم:

$$\binom{n}{\circ} = \frac{n!}{(n-\circ)!\circ!} = \frac{n!}{n!} = ۱$$

$$\binom{n}{۱} = \frac{n!}{(n-۱)!\times ۱!} = \frac{n!}{(n-۱)!} = n$$

۲) الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵و ۴ و ۳و ۲و ۱ سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این امکان دارد؟

$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{(۵-۳)!۳!} = \frac{۵\times ۴}{۲} = ۱\circ$ حالت امکان پذیر است.

با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

به زمین نمی‌روند.	به زمین می‌روند.
۴,۵	۱,۲,۳
۳,۵	۱,۲,۴
۳,۴	۱,۲,۵
۱,۵	۲,۳,۴
۱,۴	۲,۳,۵
۱,۲	۳,۴,۵
۲,۵	۱,۳,۴
۲,۴	۱,۳,۵
۱,۳	۲,۴,۵
۲,۳	۱,۴,۵

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

$\binom{۵}{۲}$ حالت امکان دارد.

$\{۴,۵\},\{۳,۵\},\{۳,۴\},\{۱,۵\},\{۱,۴\}$
$\{۱,۲\},\{۲,۵\},\{۲,۴\},\{۱,۳\},\{۲,۳\}$

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟

$\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ با هم برابرند. دلیل برابری این دو این است که $\binom{۵}{۳}$ یعنی تعداد انتخاب‌های ۳شیء از میان ۵ شیء متمایز که این با تعداد روش‌های حذف ۲ شیء از میان همان ۵ شیء متمایز یعنی $\binom{۵}{۲}$ هم معنی است و برابر است.

ت) درستی تساوی $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ را یک بار با استفاده از توجیه بالا و یک بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

دلیل برابر این است که روش انتخاب r شیء از میان n شیء با روش حذف $(n-r)$شیء از میان n شیء یکی است.

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\ ,\ \binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

۳) جاهالی خالی را پر کنید:

الف) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{۲۶}{۵}$

ب) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست، برابر است با: $\binom{۲۵}{۴}$

حرف a انتخاب شده است، پس از بین ۲۵ حرف باقی مانده باید ۴ حرف دیگر انتخاب کنیم.

پ) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{۲۶}{۵}$

حرف a را از ۲۶ حرف حذف می‌کنیم و از باقی‌مانده ۵ حرف انتخاب می‌کنیم.

ت) بنابراین: $\binom{۲۶}{۵}=\binom{۲۵}{۴}+\binom{۲۵}{۵}$

۴) فرض کنیم A یک مجموعه‌ی n عضوی و aیکی از اعضای آن باشد. $(a\in A)$

الف) تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r-۱}$

پ) تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}$

تمرین درس سوم: ترکیب
صفحه ۱۳۹

۱) یک فروشنده ی تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه‌ی کدو، تخمه‌ی ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

او می‌تواند ۲۱ نوع آجیل درست کند:

$$\binom{۷}{۵} = \frac{۷!}{۲!۵!} = ۲۱$$

۲) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$۱ \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۱۴}{۳} = ۳ \times \frac{۱۴!}{۱۱! \times ۳!} = ۳ \times \frac{۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲}{۳!} = ۱۰۹۲$$

انتخاب رئیس | انتخاب کارشناس حقوقی | انتخاب بقیه اعضای گروه ۵ نفره

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$۱ \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۱۱}{۲} = ۳ \times ۳ \times ۵۵ = ۴۹۵$$

انتخاب رئیس | انتخاب کارشناس حقوقی | انتخاب معاون | انتخاب ۲ نفر باقیمانده

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$۱ \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۹}{۱} = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۹ = ۱۶۲$$

انتخاب رئیس | انتخاب کارشناس حقوقی | انتخاب معاون | انتخاب یک حسابدار | انتخاب یک نفر باقیمانده

۳) در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

فرض کنیم تعداد افراد داوطلب n نفر بوده است:

$$\binom{n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!۲!} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۲۸ \Rightarrow n(n-۱) = ۵۶$$

حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی ۵۶ شده است. یکی ۷ و دیگری ۸ است. پس n=۸ است. یعنی تعداد داوطلبان ۸ نفر است.

۴) گل‌فروشی در فروشگاه خود نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

دسته‌های گل فروش ۳ شاخه گل یا ۴ شاخه گل یا ۵ شاخه گل دارند. پس داریم:

$$\text{تعداد روش‌های ساختن دسته گل} = \binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۵} = ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۲۵۲ = ۵۸۲$$

او ۵۸۲ دسته گل مختلف می‌تواند درست کند.

۵) یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

تعداد کل رنگ‌های مختلف ترکیبی= ترکیب ۴ رنگ یا ترکیب ۳ رنگ یا ترکیب ۲ رنگ

$$\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱ \Rightarrow ۱۱ + ۴ = ۱۵$$ ۱۵ رنگ مختلف

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

چون نسبت مقدار هر رنگ به رنگ‌های دیگر در هر ترکیب روی نوع رنگ حاصل تأثیر دارد و آن را تغییر می‌دهد.

۶) هفت نقطه‌ی A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

با انتخاب هر ۳ نقطه از بین این هفت نقطه می‌توان یک مثلث ایجاد کرد. پس تعداد مثلث‌ها $\binom{۷}{۳}$تاست یعنی ۳۵ مثلث می‌توان کشید.

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{(۷-۳)!۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳!} = ۳۵$$

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟ نوع $\binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

روش اول: از کل انواع ادویه‌های قابل ساختن، ادویه‌هایی که این دو نوع با هم در ساخت آن نقش داشته‌اند را حذف می‌کنیم.

$$\text{کل ادویه‌ها} = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$$

$$\text{ادویه‌هایی که آن دو نوع خاص در آن باشند} = \binom{۸}{۱} = ۸ \Rightarrow ۱۲۰ - ۸ = ۱۱۲$$ ۱۱۲ ادویه ساخته می‌شود.

روش دوم:

دو ادویه‌ای که نمی‌توانند با هم ترکیب شوند را جدا می‌کنیم، پس یا دو ادویه در ترکیب نیستند، یا فقط یکی از آنها در ترکیب هست:

$$\binom{۸}{۳} + \binom{۸}{۲}\binom{۲}{۱} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۳ \times ۲} + \frac{۸ \times ۷}{۲} \times ۲ = ۵۶ + ۵۶ = ۱۱۲$$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

از کل ادویه‌های ممکن ادویه‌ای که با این سه تا ساخته می‌شود را حذف می‌کنیم:

$$\binom{۱۰}{۳} - ۱ = ۱۲۰ - ۱ = ۱۱۹$$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{ادویه های قابل ساخت با دسته اول}} + \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{ادویه های قابل ساخت با دسته دوم}} = ۱۰ + ۱۰ = ۲۰$$

۸) مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{۶}{۲} \times \binom{۵}{۳}$

درون کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۵ مهره از این کیسه خارج کرد به طوری که ۳ تا قرمز و ۲ تا آبی باشد؟

ب) $\binom{۶}{۲} + \binom{۵}{۳}$

تیم فوتبال A برای تکمیل شدن می‌تواند با دو دفاع وسط یا ۳ هافبک دیگر قرارداد امضا کند. اگر ۵ هافبک و ۶ دفاع وسط در لیست این تیم باشند، به چند طریق این تیم تکمیل می‌شود؟