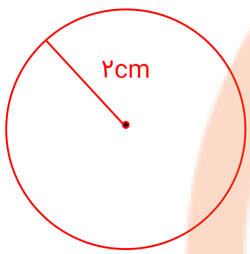
درس اول: ترسیم‌های هندسی

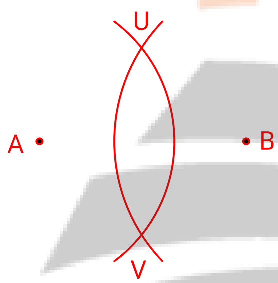
فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۰

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)



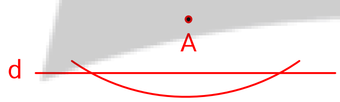
۱) نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید. نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی یکسانی از نقطه‌ی O دارند. (مثلاً همه‌ی نقاطی که فاصله‌شان از نقطه‌یO برابر ۲ سانتی‌متر است.)

کافی است دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنیم.



۲) نقاط A و B را در نظر بگیرد. دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یکبار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

فاصله U از A با فاصله U از B برابر است و فاصله‌ی V از Aبا فاصله‌ی V از B برابر است.



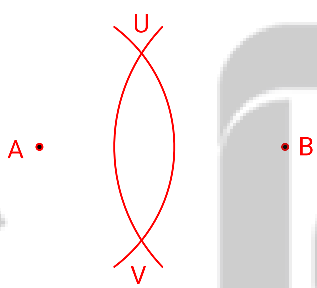
۳) نقطه‌ی A، مانند شکل مقابل به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A باشند.

کمانی به شعاع ۲ سانتی‌متر و مرکز A رسم می‌کنیم. محل برخورد خط و کمان نقاط مورد نظر هستند.

۴) نقاط A و B را به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه‌یA یک کمان بزنید. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه‌ی B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

فاصله‌ی همه‌ی این نقاط از نقطه‌ی A برابر با ۳ سانتی‌متر است.



ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

فاصله‌ی همه‌ی نقاط از نقطه‌ی B برابر با ۴ سانتی‌متر است.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط Aو B چگونه است؟ برای این که چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه‌ی شعاع آنها و فاصله‌ی نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

فاصله‌ی نقاط تقاطع از A برابر با ۳ سانتی‌متر و از B برابر با ۴ سانتی‌متر است. برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشد باید حاصل جمع شعاع‌های دو کمان از فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B بیشتر باشد.

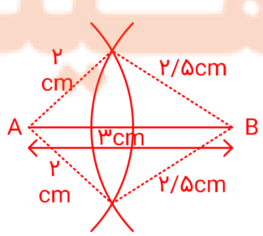
ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

۵ سانتی متر= AB

۳ سانتی‌متر= AU

۴ سانتی‌متر= BU

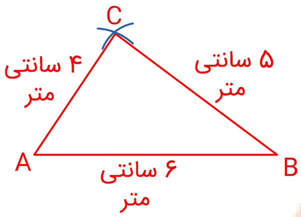
کار در کلاس ✍ صفحه ۱۱



۱) دو نقطه مانند A و B را به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

ابتدا دو نقطه A و B را به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از هم در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر و همچنین کمان دیگری به شعاع ۲/۵ سانتی‌متر و مرکز B رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان نقاط مورد نظر است. (نقاط نشان داده شده در شکل)

۲) توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.



ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ سانتی‌متر را رسم کرده و آن را $\overline{AB}$ می‌نامیم. از نقطه‌ی A کمانی به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر و همچنین کمان دیگری به مرکز B و شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را C می‌نامیم. نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

۳) جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دوجواب داشته باشد. ۶- ۴-۳

ب) یک جواب داشته باشد.۶-۳-۳

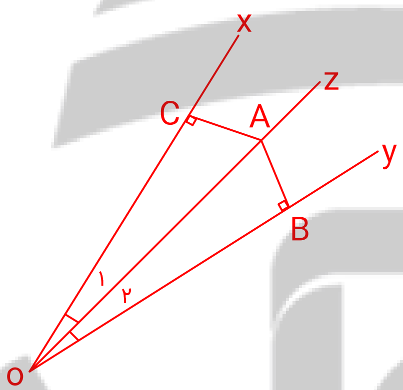
پ) جواب نداشته باشد.۶-۲-۳

نقاط A و Bبه فاصله‌ی .... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر .... و از نقطه‌ی B برابر .... باشد.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۱

۱) زاویه‌ی xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه‌ی Aنقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو ضلع زاویه‌ی xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه‌ی A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم کنید طول آنها با هم برابر است.

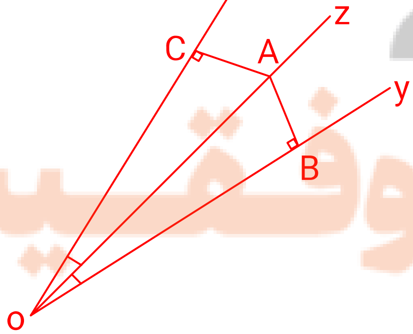
از نقطه A عمودهایی را بر Ox و Oy رسم می‌کنیم و آنها را B و Cمی‌نامیم. ثابت می‌کنیم دو مثلث OAB و OAC با هم، هم‌نهشت هستند.



$\overline{OA}$ ضلع مشترک
چون: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ نیمساز Oz زاویه O است.

$\xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \overset{\triangle}{OAC} \cong \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}$

نتیجه ۱: اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد فاصله‌اش از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



۲) زاویه‌ی xOy و نقطه‌ی A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم‌خط‌های Oy و Ox با هم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطه‌ی A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)

ابتدا از A عمودهایی را به Oy و Ox رسم می‌کنیم و آنها را B و C می‌نامیم. A را به O وصل کرده و ثابت می‌کنیم که دو مثلث AOB و AOC با هم هم‌نهشت هستند.

$\overline{OA}$ ضلع مشترک
$\overline{AB} = \overline{AC}$ طبق فرض مسئله

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{AOC} \Rightarrow A\hat{O}B = A\hat{O}C$

نتیجه۲: اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

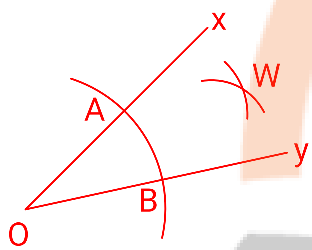
نتیجه: از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۲

۱) زاویه‌ی xOy را در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و Bقطع کند.

- طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند، چون در حقیقت شعاع‌های یک دایره به مرکز O هستند.



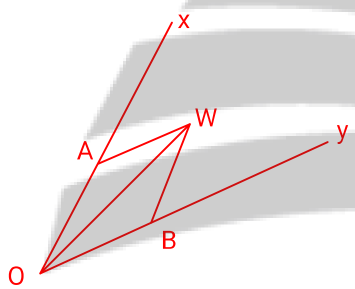
۲) دهانه‌ی پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB‌) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

- طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند، چون در هنگام رسم آنها طول دهانه پرگار تغییر نکرده است.

- پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم همنهشت هستند، زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OW \text{مشترک} \\ AW = BW \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{OAW} \cong \overset{\triangle}{WOB}$$

اندازه‌ی زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند، چون دو مثلث OAW و OBW با هم همنهشت هستند، بنا به قسمت قبل در نتیجه اجزای متناظرشان با هم برابرند.

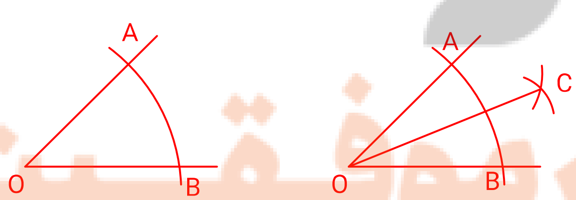
- پاره‌خط OW برای زاویه‌ی xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

نیمساز آن است.

کار در کلاس ✍ صفحه ۱۲

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

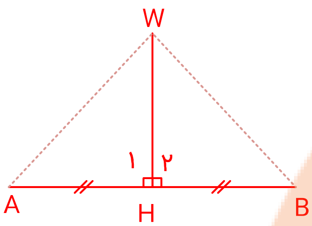
دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه باز کرده و به مرکز o کمانی می‌زنیم تا زاویه را در ۲ نقطه‌ی A و B قطع کند. حال دهانه‌ی پرگار را کمی بیش از فاصله A تا B باز می‌کنیم و به مرکز A و B، دو کمان رسم می‌کنیم و محل برخورد دو کمان را C می‌نامیم. O را به C وصل می‌کنیم. پاره‌خط حاصل نیمساز زاویه‌ی O است.



فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۳

۱) پاره خط ABو عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه‌ی W از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

W را به A و B وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $\overline{WA}=\overline{WB}$



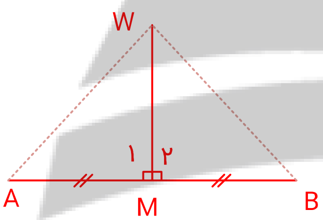
$$\left.\begin{array}{l}\overline{WH}\ \text{ضلع مشترک}\\ H_1=H_2=90^\circ\\ AH=BH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{WHA}\cong\overset{\triangle}{WHB}\Rightarrow \overline{WA}=\overline{WB}$$

نتیجه۱: اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

۲) پاره‌خط AB و نقطه‌ی W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه‌یW از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA=WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره‌خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده با هم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید w روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)

W را به A و B وصل می‌کنیم، همین طور W را به وسط پاره‌خط AB وصل کرده و آن نقطه را M می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث WAM و WBM با هم هم‌نهشتند.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{WA}=\overline{WB}\ \text{طبق فرض}\\ WM\ \text{ضلع مشترک}\\ MA=MB\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{WAM}\cong\overset{\triangle}{WBM}\Rightarrow M_1=M_2$$

از طرفی چون M_1 و M_2 مکمل هستند، پس $M_1=M_2=90$

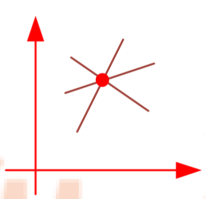
نتیجه۲: اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن نقطه روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

نتیجه: از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط به یک اندازه باشد روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۳

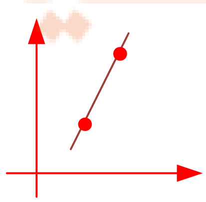
۱) یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟

بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد. از یک نقطه بی‌شمار خط عبور می‌کند.



۲) دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه‌ی مورد نظر بگذرد؟

فقط یک خط می‌توان رسم کرد.



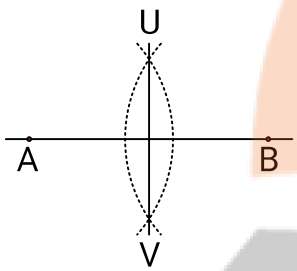
۳) به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

حداقل ۲ نقطه از خط باید مشخص باشد، زیرا از دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط راست عبور می‌کند.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۴

پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.

۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه‌ی A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه‌ی B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.



۲) طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

AU و BU با هم برابر هستند. چون دهانه‌ی پرگار در هنگام رسم کمان‌ها ثابت مانده است.

۳) طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابر هستند، چون دهانه‌ی پرگار درزمان رسم کمان‌ها ثابت است و تغییر نکرده است.

۴) آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟

بله، با توجه به نتیجه‌ای که در فعالیت قبل گرفتیم، اگر فاصله‌ی نقطه‌ای از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد، آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

۵) عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

کافی است دو نقطه‌ی U و V را به هم وصل می‌کنیم. خط ایجاد شده عمود منصف AB خواهد بود.

کار در کلاس ✍ صفحه ۱۴

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

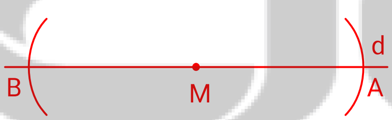
ابتدا دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکز دو سر پاره‌خط کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد دو کمان را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. این خط عمود منصف پاره‌خط مورد نظر است.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۴

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه‌ی M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

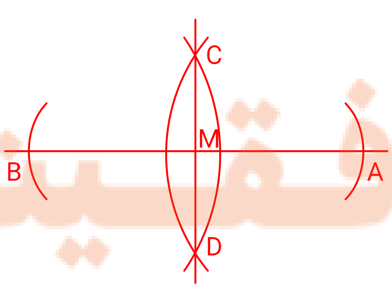
۱) به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.



کافی است که به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم که خط d را در دو نقطه قطع کند. یکی از نقاط ایجاد شده را A و دیگری را B می‌نامیم.

۲) عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

کافی است با استفاده از گونیا عمودی رسم کنیم که از نقطه‌ی M عبور کند، البته از آنجا که M وسط AB است می‌توانستیم عمودمنصف AB را به روش قبل رسم کنیم که حتماً از M عبور می‌کند، چون هر نقطه که از ۲ سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن قرار دارد.



۳) عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود بوده و ازنقطه‌ی M عبور می‌کند.

کار در کلاس ✍ صفحه ۱۴

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

فرض کنیم خط d و نقطه‌ی M روی آن داده شده است. ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه دو کمان می‌زنیم. (هر دو کمان به یک اندازه) محل برخورد دو کمان و خط d را A و B می‌نامیم. حال عمودمنصف پاره‌خط AB را به روشی که قبلاً گفته شد رسم می‌کنیم. عمود منصف پاره‌خط AB همان عمود بر خط d است که از نقطه‌ی Mنیز عبور می‌کند.

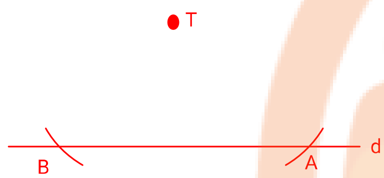
فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۵

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه‌ی T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

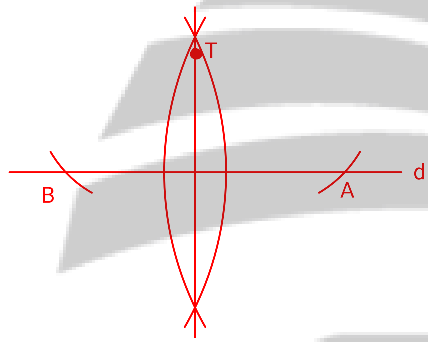
۱) به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه‌ی T به یک فاصله باشند.

کمانی به مرکز T رسم می‌کنیم که طول این کمان از فاصله‌ی T تا d باید بیشتر باشد. این کمان الزاماً dرا در دو نقطه قطع می‌کند.



۲) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

دهانه پرگار را به اندازه‌ای کمتر از طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم. فقط باید حواسمان باشد که اندازه دهانه پرگار از نصف اندازه AB کمتر نشود. سپس دو کمان می‌زنیم یکی به مرکز نقطه A و دیگری به مرکز B اکنون نقاط تلاقی دو کمان را به هم وصل می‌کنیم که عمود منصف AB را تشکیل می‌دهد.



۳) آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطه‌ی T می‌گذرد؟ چرا؟

بله، چون فاصله‌ی T از دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است.

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط dعمود است و از نقطه‌ی T عبور می‌کند.

کار در کلاس ✍ صفحه ۱۵

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

فرض کنیم خط d و نقطه‌ی T خارج از آن داده شده است. ابتدا کمانی به مرکز T و به اندازه‌ی بیشتر از فاصله‌ی T تا d رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از نقطه‌ی T عبور می‌کند و بر خط d نیز عمود است.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۵

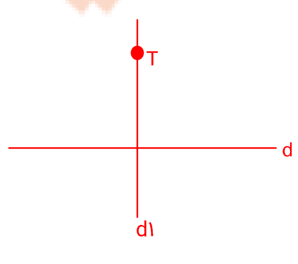
رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه‌ی غیر واقع بر آن

خط d و نقطه‌ی T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه‌ی T بگذرد و با خط d موازی باشد.

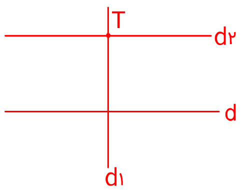
۱) خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

با استفاده از گونیا عمودی از نقطه‌ی T به خط d رسم می‌کنیم.



۲) خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

با استفاده از گونیا عمودی از نقطه‌ی T خارج می‌کنیم و آن را d_2 می‌نامیم.



۳) خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید.)

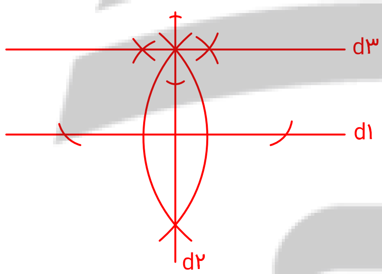
d و d_2 با هم موازی‌اند. می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند. اگر خط d_1 را مورب در نظر می‌گرفتیم و خط d_2 را طوری رسم می‌کردیم که زاویه‌ی بین d_1 و d_2 با زاویه‌ی بین d و d_1 برابر باشد، باز دو خط d و d_2 با هم موازی می‌شدند.

کار در کلاس — صفحه ۱۵

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

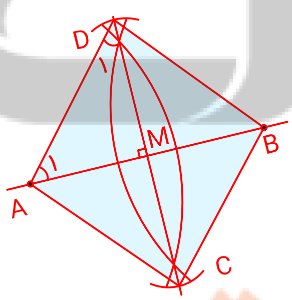
ابتدا فرض می‌کنیم که خط d_1 و نقطه T داده شده است. می‌توانیم از نقطه‌ی T خطی موازی d_1 رسم کنیم. برای انجام این کار ابتدا عمودی به d_1 رسم می‌کنیم که از T عبور کند آن را d_2 می‌نامیم. از آنجا که d_1 و d_3 هر دو بر d_2 عمود هستند، پس d_1 و d_3 الزاماً با هم موازی‌اند.

روش دوم: با استفاده از گونیا عمودی بر d_1 رسم می‌کنیم که از نقطه‌ی T عبور کند و آن را d_2 می‌نامیم. سپس عمود بر d_2 رسم می‌کنیم که از نقطه T عبور کرده و آن را d_3 می‌نامیم. حال چون d_1 و d_3 به d_2 عمود هستند، بنابراین الزاماً با هم موازی‌اند.



فعالیت کلاسی — صفحه ۱۵

پاره‌خط داده شده‌ی AB در شکل مقابل را با اندازه‌ی ۴ واحد در نظر بگیرید.



الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیدو فرض کنید نقطه‌ی برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟

چون C و D روی عمودمنصف AB است، پس تساوی روبه‌رو را داریم:

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{DB} \\ \overline{AC} = \overline{BC} \end{cases}$$

همچنین چون مثلث‌های ایجاد شده‌ی MDB، MDA، MBC و MAC با هم هم‌نهشت هستند، تساوی زیر را داریم:

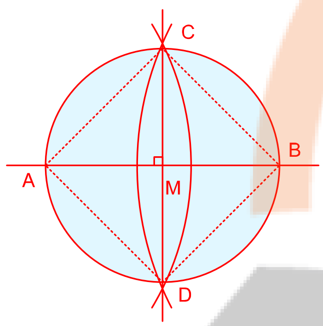
$$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{AC} = \overline{BC}$$

از طرفی چون $\overline{MD} = \overline{MA}$ است، بنابراین در مثلث MDA اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{D}_1 = A_1 = 45°$ است و با همین استدلال داریم: $\hat{D} = A = \hat{B} = C = 90°$.
چهارضلعی‌ای را که ضلع‌هایش با هم برابر و تمام زاویه‌های آن ۹۰ درجه است، مربع گوییم.

کار در کلاس صفحه ۱۶

طریقه‌ی رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

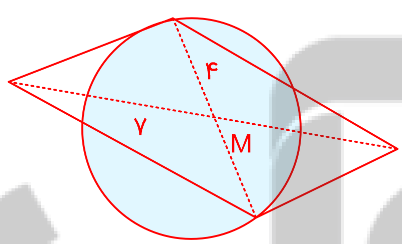
می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که قطرهای آن ۶ سانتی‌متر باشد. ابتدا یک پاره‌خط به اندازه‌ی ۶ سانتی‌متر رسم کرده آن را AB می‌نامیم. سپس محل برخورد عمود منصف خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد دایره با عمود منصف AB را C و D می‌نامیم. حال نقاط A، C، B و D را به هم وصل می‌کنیم. شکل حاصل مربع خواسته شده است.



تمرین درس اول: ترسیم‌های هندسی صفحه ۱۶

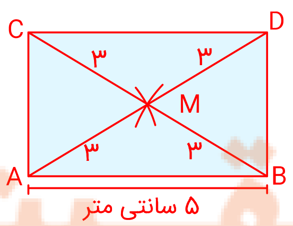
۱) می‌دانیم چند ضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

ابتدا یک پاره‌خط به طول ۷ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، نقطه‌ی وسط آن را پیدا می‌کنیم و M می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. یک قطر از دایره را به دلخواه رسم می‌کنیم. این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنیم، چهار ضلعی مورد نظر به دست می‌آید. به تعداد تمام قطرهای دایره رسم شده می‌توان متوازی‌الاضلاع به قطر ۴، ۷ سانتی‌متر رسم کرد و چون دایره بی‌شمار قطر دارد، بی شمار متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد.

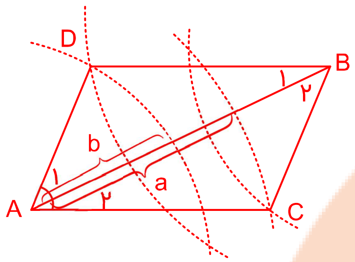


۲) می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

ابتدا پاره‌خط دلخواه AB را رسم می‌کنیم، مثلاً به طول ۵ سانتی‌متر. سپس از دو سر آن دو کمان به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر امتداد می‌دهیم و نقاط پایانی را C و D می‌نامیم. نقاط A و C و D و B را به هم وصل می‌کنیم.



۳) پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه‌ی AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم.
چهارضلعی ACBD چه نوع چند ضلعی‌ای است؟ چرا؟
(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)



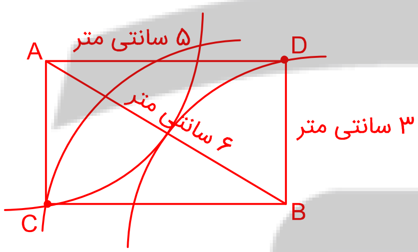
AD شعاع دایره‌ای به مرکز A و BCشعاع دایره‌ای به مرکز B است. چون دو کمان با شعاع‌های برابر و مرکزهای مختلف زدیم، پس $\overline{AD}=\overline{BC}$ و با همین استدلال $\overline{AC}=\overline{DB}$ می‌شود.

با توجه به مطالب فوق، دو مثلث $ADB \cong ABC$ در نتیجه $\hat{D}=C ,\ A_2=\hat{B}_1,\ A_1=\hat{B}_2$.

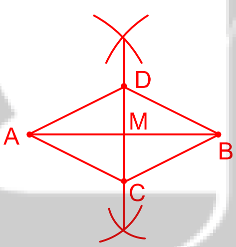
از طرفی با توجه به اینکه $A_2=\hat{B}_1$ و قضیه‌ی توازی دو خط و قطع کردن خط مورب می‌توان نتیجه گرفت که $AC \parallel DB$ با توجه به مطالب بیان شده چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است.

۴) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

ابتدا پاره‌خط AB را به اندازه‌ی ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، از نقطه‌ی A و B دو کمان به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. ۴ نقطه‌ی برخورد وجود دارد. دو نقطه را انتخاب می‌کنیم به طوری که در یک طرف پاره‌خط AB نباشند. آنها را D و C نامگذاری می‌کنیم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم. چهار ضلعی حاصل شکل خواسته شده است.

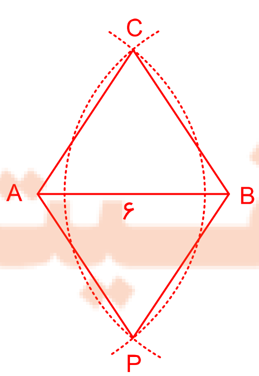


۵) می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.



الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ابتدا قطری به طول ۵ سانتی‌متر را رسم کرده و آن را AB می‌نامیم. عمود منصف AB را رسم کرده و محل برخورد آن با ABرا M می‌نامیم. نقاط D و C را روی عمود منصف چنان اختیار می‌کنیم که فاصله‌شان از M، ۱/۵ سانتی‌مترباشد. این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



ب) یک لوزی به طول ۵ و طول ۶ رسم کنید.

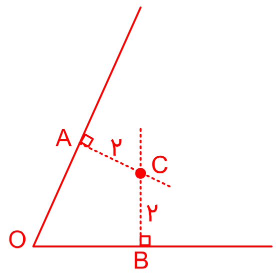
ابتدا قطری به طول ۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و آن را AB می‌نامیم. به مرکز A و B کمان‌هایی به اندازه‌ی ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد کمان‌ها را D و C می‌نامیم و به هم وصل می‌کنیم.

۶) دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۲ واحد باشد.

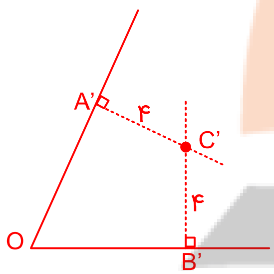
یک زاویه دلخواه (O) رسم کرده و بر روی هر ضلع آن یک نقطه با فاصله مشخص از رأس زاویه انتخاب می‌کنیم.

($\overline{OA}=\overline{OB}$) سپس از هر یک از این نقطه‌ها، خطی عمود بر ضلع زاویه رسم می‌کنیم (خط‌های m و n). این دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع خواهند کرد (نقطه C) که فاصله این نقطه دو ضلع زاویه با هم برابر است (با استفاده از تشابه مثلث‌ها این قضیه قابل اثبات است.) حالا با استفاده از خط‌کش فاصله نقطه تقاطع عمودها با ضلع‌های زاویه ($\overline{AC},\overline{BC}$) را اندازه می‌گیریم. اگر این فاصله برابر ۲ بود، نقطه به دست آمده جواب مسئله است. در غیر این صورت باید آنقدر عمودها را جابجا کنیم تا فاصله نقطه تقاطع آنها از دو ضلع زاویه برابر ۲ شود.



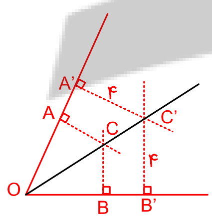
ب) نقطه‌ای که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۴ واحد باشد.

مانند روش قبل عمل می‌کنیم؛ یعنی آنقدر عمودها را جابه‌جا می‌کنیم تا فاصله نقطه تقاطع آنها از دو ضلع زاویه برابر ۴ باشد.



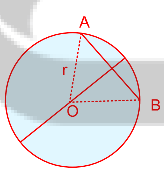
پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.

کافی است دو نقطه‌ی C و C' را به هم وصل کرده و امتداد دهیم. همان‌طور که می‌دانیم این خط الزاماً نیمساز است، چون فاصله نقطه‌های روی آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



۷) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

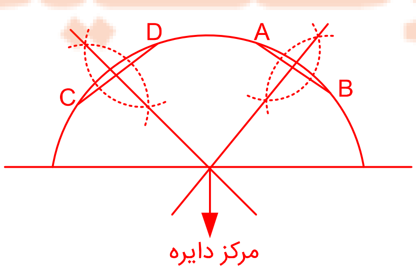
عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم، O روی عمودمنصف AB قرار دارد، چون فاصله‌ی O از دو سر پاره‌خط با هم برابر است زیرا OA=OB=r و همین‌طور عمودمنصف نقش قطر را دارد.



آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه‌ی پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه‌ی جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه‌ی پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه‌ی هجده قدم، نقطه‌ی پنالتی را مشخص کند؟

کافی است روی قوس مورد نظر دو وتر به دلخواه رسم کنید. سپس عمودمنصف‌های آن وترها را رسم کرده و امتداد دهد. این عمودمنصف‌ها در حقیقت قطر هستند و محل برخورد آنها نشان‌دهنده‌ی مرکز است. AB و CD دو وتر دلخواه هستند که عمودمنصف آنها را رسم می‌کنیم.



درس دوم: استدلال

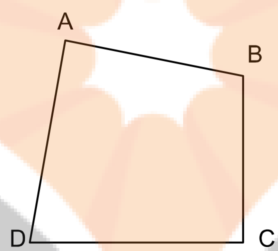
فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۱۹

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هر یک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.



مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث ABD و BCD برابر است. بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360°.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

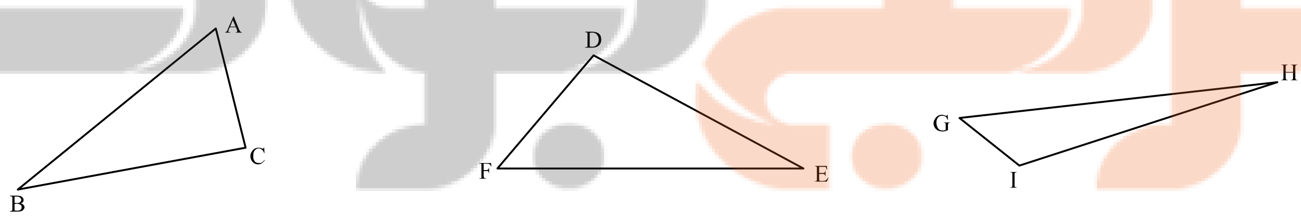
آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است» به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

استدلال پژمان استقرایی و استدلال پیمان استدلال استنتاجی است.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۲۱

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه ها	$\hat{C}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$

اضلاع	FE	DE	DF
زاویه ها	$\hat{D}$	$\hat{F}$	$\hat{E}$

اضلاع	GH	HI	GI
زاویه ها	$\hat{I}$	$\hat{G}$	$\hat{H}$

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه‌ی زیر آن وجود دارد؟ ضلع و زاویه‌هایی که زیر هم نوشته شده‌اند، روبه‌روی یکدیگر هستند.

با توجه به این رابطه درباره‌ی یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از بقیه‌ی زاویه‌ها بزرگ‌تر است و بر عکس.

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استدلال استقرایی.

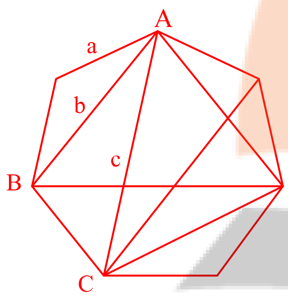
آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟ خیر.

کار در کلاس ✍ صفحه ۲۷

۱) در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله‌ی هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟

«با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی الساقین، به دست می‌آید.»

خیر، نقاط A و B و Cرا که در شکل مشخص شده است، به هم وصل می‌کنیم. مشاهده می‌شود که ضلع‌ها دارای اندازه‌های a و b و c هستند که تشکیل مثلث مختلف الاضلاع می‌دهند.



۲) آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه‌ی A و B یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$.

A و B می‌تواند دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند:

$$A = \{1,2\}, B = \{3,4\} \Rightarrow \begin{matrix} A \not\subseteq B \\ B \not\subseteq A \end{matrix}$$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت اند.

فرض کنیم مثلث ABC دارای ارتفاع ۲ و قاعده‌ی ۱۲ باشد، در این صورت $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}(2\times 12) = 12$ و مثلث $A'B'C'$ دارای ارتفاع ۳ و قاعده‌ی ۸ باشد. در نتیجه $S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = \frac{1}{2}(3\times 8) = 12$. می بینیم $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}$، اما قاعده‌ها برابر نیستند. ($12 \neq 8$) حداقل یک ضلع آنها با هم برابر نیست.

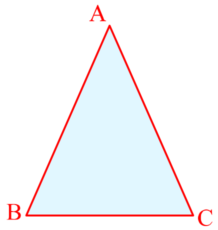
تمرین درس دوم: استدلال
صفحه ۲۷

۱) می‌دانیم که از یک نقطه‌ی خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

استدلال: فرض می‌کنیم که حکم غلط است. یعنی فرض می‌کنیم خطی که یکی از دو خط موازی را قطع می‌کند، دیگری را قطع نمی‌کند و موازی آن است.
فرض کنیم دو خط d_1 و d_2 با هم موازی هستند و خط، خط d_1 را قطع می‌کند، بنابراین در نقطه‌ی M با هم مشترک هستند. از طرفی خط d خط d_2را قطع نمی‌کند، پس با d_2 موازی است. یعنی داریم $d_1 \parallel d_2$ و $d \parallel d_2$، که از این نتیجه می‌شود $d \parallel d_1$. این در حالی است که نقطه‌ی Mمحل برخورد دو خط d_1 و d است. پس فرض خلف ما باطل و حکم برقرار است.

۲) با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم غلط است، یعنی فرض می‌کنیم: $\hat{B} = \hat{C}$. می‌دانیم مثلثی که دو زاویه در آن با هم برابر باشند، یک مثلث متساوی‌الساقین است که الزاماً باید ضلع‌های روبه‌رو به دو زاویه‌ی برابر با هم برابر باشند، یعنی $AB = AC$ که به خلاف فرض است. در نتیجه $\hat{B} \neq \hat{C}$.



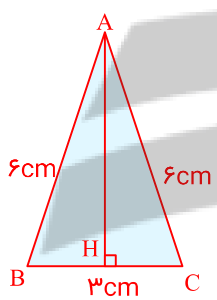
۳) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

مثلثی داریم که اندازه‌ی زاویه‌های آن به ترتیب برابر $\begin{cases} \hat{A} = 10^\circ \\ \hat{B} = 30^\circ \\ \hat{C} = 140^\circ \end{cases}$ است که $4 \times 10^\circ < 140^\circ$ (مثال نقض).

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک تر است.

مثال نقض: مثلث متساوی‌الساقینی رسم می‌کنیم که طول ضلع‌های آن ۶ و ۶ و ۳ باشد. واضح است که ارتفاع وارد بر ضلع ۳ از آن ضلع بزرگ‌تر است.



$AH > BC$

۴) با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $180 \times (n-2)$.

می‌دانیم که حاصل جمع هر زاویه‌ی داخلی با زاویه‌ی خارجی‌اش برابر با 180° است. از طرفی مجموع زاویه‌های خارجی برابر 360° است. فرض کنیم یک n ضلعی داریم که بر روابط زیر برقرار است:

$$A_1 + A_1' = 180^\circ$$
$$A_2 + A_2' = 180^\circ$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$A_n + A_n' = 180^\circ$$

n کسر را با هم جمع می‌کنیم.

$$A_1 + A_1' + A_2 + A_2' + \ldots + A_n + A_n' = 180n$$

$$\Rightarrow (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + \overbrace{(A_1' + A_2' + \ldots + A_n')}^{360^\circ} = 180n$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 180n - 360$$

مجموعه زاویه‌های داخلی را S می‌گیریم. $\Rightarrow S = 180(n-2)$

۵) نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

چنین نیست که هر لوزی یک مربع است. ← مربعی وجود دارد که لوزی نباشد.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

چنین نیست که مستطیلی وجود دارد که مربع نیست ← هر مستطیلی مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

چنین نیست که هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه نداشته باشد. ←مثلثی وجود دارد که حداقل ۲ زاویه‌ی قائمه دارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰ درجه باشد. ←چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زاویه‌های آن ۳۶۰ درجه نیست. (از آن کمتر یا بیشتر است.)

۶) عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

عکس: در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، ضلع‌های مقابل به آن دو زاویه با هم برابرند.

دو شرطی: در هر مثلث دو زاویه برابر است اگر و تنها اگر ضلع‌های مقابل به آن دو زاویه با هم برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

عکس: اگر در یک چهارضلعی قطرها عمود منصف یکدیگر باشند، آن چهارضلعی لوزی است

دو شرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و فقط اگر قطرها عمودمنصف یکدیگر باشند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

عکس: اگر در مثلثی سه زوایه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابرند.

دو شرطی: در مثلث سه زاویه برابرند اگر و فقط اگر سه ضلع آن برابر باشند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

اگر دو دایره هم مساحت باشند، شعاع‌هایشان با هم برابر است.

دو دایره دارای شعاع یکسان هستند اگر و تنها اگر هم مساحت باشند.