فصل ۱

مجموعه ها

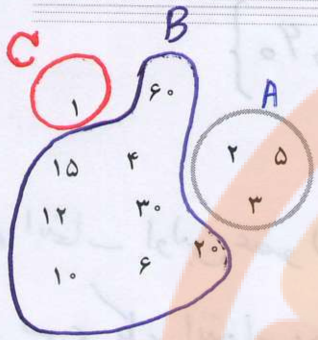
وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)

منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید. ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

درس اوّل: معرفی مجموعه

فعالیت

مجموعه: set



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اوّل را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اوّل نیست در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اوّلِ عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{۲,۳,۵\}$ در این‌صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعهٔ A می‌گوییم؛ در این‌صورت مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است. $n(A) = ۳$

❋ شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید. $n(B) = ۸$

❋ مجموعهٔ شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اوّل باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید. $n(C) = ۱$

❋ مجموعهٔ D شامل همهٔ شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

D $\boxed{۶۰ \quad ۳۰ \quad ۲۰ \quad ۱۰ \quad ۱۵ \quad ۱۲}$ $\Rightarrow n(D) = ۶$

۱ از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعهٔ شامل ۳ شمارندهٔ زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. **احمد** نوشت : $\{۴,۶,۱۰\}$ و **رضا** نوشت : $\{۶,۱۰,۱۲\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ درصفحه ۲/۱

مهم

نتیجه عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کنندهٔ یک مجموعهٔ معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند. چون نظر رضا و احمد متفاوت است

مهم در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به‌جای $\{۳,۳,۴\}$ می‌نویسیم $\{۳,۴\}$. ترتیب و تکرار

معرفی مجموعه

۱- اعضاء مشخص باشد
۲- متمایز باشند (غیرتکراری) ← صفحه ۲/۱

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، درحالی که ما از مجموعه در ریاضی **برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد)** و **متمایز (غیرتکراری)** استفاده می‌کنیم.

۱) چون عدد شصت، ۸ شمارنده‌ی زوج دارد و رضا و احمد به سلیقه‌ی خود و به دلخواه می‌توانند سه عضو از آن را انتخاب کنند

$$\text{شمارنده‌های زوج عدد ۶۰} = \{۲, ۴, ۶, ۱۰, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۶۰\}$$

برای انتخاب اولین عضو (۸ حالت) و برای عضو دوم (۷ حالت) و برای عضو سوم (۶ حالت) داریم پس کل انتخاب‌ها برابر است با $(۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۳۶)$

می‌دانیم ترتیب نوشتن اعضاء در یک مجموعه تأثیری ندارد یعنی داریم

$$\{۲, ۴, ۶\} = \{۲, ۶, ۴\} = \{۴, ۲, ۶\} = \{۴, ۶, ۲\} = \{۶, ۲, ۴\} = \{۶, ۴, ۲\}$$

لذا هر مجموعه ۶ بار تکرار می‌شود بنابراین داریم

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از ۸ عضو} = \frac{۸ \times ۷ \times \cancel{۶}^{۱}}{\cancel{۶}_{۱}} = ۵۶$$

نکته‌ی مهم: چون عضوهای یک مجموعه متمایز هستند، لذا $\{a, a, b\}$ نماد مناسبی برای مجموعه‌ی $\{a, b\}$ نیست

Note: A set does not change if one or more elements of the set are repeated. For example, the sets $A=\{1,2,3\}$ and $B=\{2,2,1,3,3\}$ are equal, since each element of A is in B and vice-versa. That is why we generally do not repeat any element in describing a set.

فعالیت

قسمت های «ب» و «ج» مجموعه نیست چون اعضای آن مشخص نمی باشد

۱ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعهٔ موردنظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی ✓ ب) چهار شاعر ایرانی ✗ ج) دو عدد اوّل کوچک‌تر از ۱۲ ✗

مجموعه است　　　مجموعه نیست　　　مجموعه نیست

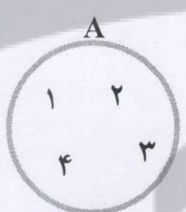
۲ــ با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پرکنید :

الف) به‌جای $A = \{۱,۲,۱,۴,۵\}$ باید بنویسیم $A = \{ ۱, ۲, ۴, ۵ \}$ عضو تکراری حذف می شود

ب) به دلیل تکراری بودنِ عدد ۵ در $B = \{۵,۶,۵,۷\}$ آن را به‌صورت $B = \{ ۵, ۶, ۷ \}$ می‌نویسیم.

نماد عضویت

اگر مجموعهٔ A را به‌صورت $A = \{a,b,۵,۷\}$ درنظر بگیریم برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعهٔ A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم «a عضوِ A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم $۴ \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست».



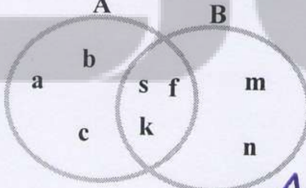
نمودار وِن

نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن : مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکستهٔ بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ را به‌صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از نمودار وِن است.

Venn diagram　نمودار وِن

توسط جان وِن منطق‌دان انگلیسی ابداع شد

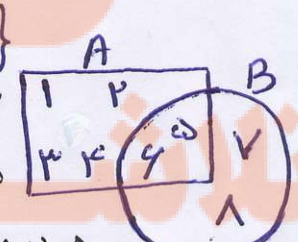
فعالیت



۱ــ با توجه به نمودار وِن، که برای دو مجموعهٔ A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

$A = \{a, b, c, s, f, k\}$ ، $B = \{s, f, k, m, n\}$

۲ــ دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{۵,۶,۷,۸\}$ را درنظر بگیرید :



دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بستهٔ مربوط به A و هم در منحنی بستهٔ B وجود دارد؟

۳ــ مجموعهٔ عددهای دو رقمی و زوجِ اوّل را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟ صفر عضو دارد (عضو ندارد)

$E = \{ \}$

نکته‌ی مهم: مجموعه‌های $\{0\}$ و $\{\varnothing\}$ تهی نیستند و هر کدام یک عضو دارند

null set یا empty set

مجموعه تهی

«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعهٔ تُهی می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یا $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند؟

الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ✓

ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱ = $\{۰\}$ یک عضوی

ج) عددهای اوّل و زوج = $\{۲\}$ یک عضوی

د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اوّل باشد. $\{۳\} \Rightarrow$ یک عضوی

کار در کلاس

۱ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام نشان دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. صفحه ۴,۱

۲ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام مشخص‌کنندهٔ مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک‌عضوی می‌نامند.) صفحه ۴,۱

۳ــ عبارت هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل). صفحه ۴,۱

الف) چهار عدد فرد متوالی ✗

ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ ✓

ج) عددهای اوّلِ کوچک‌تر از ۲۰ ✓

د) سه شهر ایران ✗

هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴ ✓

و) ۵ عدد بزرگ ✗

ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳ ✓

۴ــ مانند نمونه کامل کنید :

۱) مجموعهٔ حروف الفبای فارسی	۱ A = {الف، ب، پ، ...، ی}
۲) $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$	۴ B = {۴,۸,۱۲,...}
۳) مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۲- و ۳-	۷ C : مجموعهٔ حروف a و b و عدد ۳
۴) مجموعهٔ عددهای طبیعی و مضرب ۴	۶ D = {۵}
۵) مجموعهٔ عددهای اوّل و یک رقمی	۳ E = { }
۶) مجموعهٔ عددهای اوّل و مضرب ۵	۸ F= {۲,۴,۶,۸}
۷) {۳,a,b}	۲ G: مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰
۸) {۶,۴,۲,۸}	۵ H={۲,۳,۵,۷}

کار در کلاس

۱- مجموعه اعداد اول کوچک از ۲ - مجموعه‌ی شمارنده‌های زوج عدد ۹

مجموعه‌ی مضارب طبیعی عدد ۷ کوچک‌تر از ۵

۲- مجموعه‌ی شمارنده‌های اول عدد ۲۷. جواب: {۳}

مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۲- جواب: {۱-}

مجموعه‌ی اعداد کوچک‌تر از صد که ۷ شمارنده‌ی طبیعی دارند جواب {۶۴}

نکته مهم: اعدادی که ۷ شمارنده‌ی طبیعی دارند، فقط یک عامل اول دارند (زیرا هفت را نمی‌توان به صورت ضرب چند عدد نوشت) و توان عوامل اول آن‌ها برابر ۶ می‌باشد

$\{2^6, 3^6, 5^6, 7^6, 11^6, 13^6, \ldots\}$

★ شمارنده‌های طبیعی 2^6 را بنویسید. $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$

۳- الف) مجموعه نیست چون جواب‌های متعددی دارد یکی از جواب‌ها {۵, ۷, ۹, ۱۱}

ب) مجموعه است جواب {۲, ۴, ۶}

ج) مجموعه است جواب {۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹}

د) مجموعه نمی‌باشد چون جواب‌های متعددی دارد

هـ) {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴} = شمارنده‌های عدد ۲۴

و) مجموعه نیست چون نظر افراد درباره‌ی ۵ عدد بزرگ متفاوت است

ز) این مجموعه تهی است

۵ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ با نمودار وِن نشان دهید :

الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰ $A = \{1,2,3,\dots,10\}$

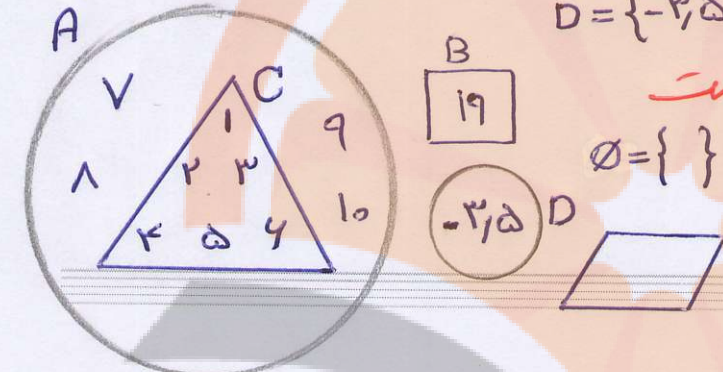
ب) شمارنده‌های اوّلِ عدد ۱۹ $B = \{19\}$

ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند. $C = \{1,2,3,4,5,6\}$

د) جواب‌های معادلهٔ ۱=۲x+۸ $D = \{-3/5\}$

هـ) چهار میوه خوشمزه مجموعه نیست

و) عددهای منفی و بزرگ‌تر از یک $\varnothing = \{\ \}$



* مجموعهٔ تهی نمایش وِن ندارد $\varnothing$

تمرین

۱ــ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) $A = \{1,8,27,64,125\}$ مکعب اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ و $n(A) = 5$

ب) $C = \{10\}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ و $n(C) = 1$

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ $B = \{3,6,9,\dots,999\} \Rightarrow n(B) = 333$

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ $\{\ \}$ = مجموعه‌ی تهی

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. $\{\ \}$ = مجموعه‌ی تهی

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشد. $\{\ \}$ = مجموعه‌ی تهی

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

ب) مجموعهٔ {۲،۳،۴،...،۹} دارای هشت عضو است.

ج) مجموعهٔ $A = \{0, \varnothing\}$ دارای دو عضو است.

د) با توجه به مجموعهٔ $A = \{3,5,7,9,11\}$ ؛ داریم : ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی، $5 \in A$

و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، $12 \notin A$.

۳ــ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

۱- مجموعه‌ی اعداد اول ۲- مجموعه‌ی اعداد زوج ۳- مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۳۰

۴- مجموعه‌ی توان‌های طبیعی عدد ۲ $\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$

توضیح صفحه ۶/۱

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعهٔ برابر

فعالیت

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

۱ــ جدول عددهای صحیحِ روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$A = \{6, 4, 2\} \Rightarrow n(A) = 3$

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(B) = 3$ هرکدام سه عضو دارند

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ آری آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ آری

دو مجموعه‌ی برابر

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعهٔ A و B یکسان است و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$.

۲ــ مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است :

$A = \{8, 9, 10\}$

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ ✗ $B = \{7, 8, 9\}$

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ ✓ $C = \{8, 9, 10\}$

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. ✓ $D = \{8, 9, 10\}$

همان‌طور که دیدید مجموعهٔ {۸،۹،۱۰} با مجموعه {۷،۸،۹} برابر نیست؛ زیرا همهٔ عضوهایشان یکسان نیست.

مهم

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پرکنید که مجموعه‌ها برابر باشد :

الف) $\left\{\sqrt{25}, 4, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, 3, \frac{2}{5}\right\} = \left\{\frac{9}{3}, 4, \frac{2}{5}, -3, 5\right\}$

$\sqrt{25} = 5 \quad \frac{9}{3} = 3 \quad \frac{-\sqrt{144}}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

فعالیت ۱

$$\left(-10 \xrightarrow{+6} -4 \xrightarrow{+6} 2\right)$$
$$\left(-2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10\right)$$
$$\left(6 \xrightarrow{+6} 12 \xrightarrow{+6} 18\right)$$

$+8$, $+8$

$$\left(-10 \xrightarrow{6} -4 \xrightarrow{6} +2\right), \left(-2 \xrightarrow{6} 4 \xrightarrow{6} 10\right), \left(6 \xrightarrow{6} 12 \xrightarrow{6} 18\right)$$

$$\underset{+}{\cancel{(-10)}} + \underset{-}{\cancel{(-4)}} + \underbrace{\cancel{(+2) + (-2)}}_{0} + \underset{-}{\cancel{4}} + \underset{+}{\cancel{10}} + 6 + 12 + 18 = 36$$

$$36 \div 3 = 12$$ مجموع هر سطر

		۱۸		
	۱۰		۱۲	
۲		۴		۶
	−۴		−۲	
		−۱۰		

$\Longrightarrow$

۱۰	−۱۰	۱۲	$=12$
۶	۴	۲	$=12$
−۴	۱۸	−۲	$=12$
$\parallel$ ۱۲	$\parallel$ ۱۲	$\parallel$ ۱۲	۱۲

قطرها $=12$

$$\left(15 \xrightarrow{-4} 11 \xrightarrow{-4} 7\right),$$
$$\left(10 \xrightarrow{-4} 6 \xrightarrow{-4} 2\right)$$
$$\left(5 \xrightarrow{-4} 1 \xrightarrow{-4} -3\right)$$

-5 , -5

$\Longrightarrow$

		۱۵		
	۱۰		۱۱	
۵		۶		۷
	۱		۲	
		−۳		

$\Longrightarrow$

مثال $18=$

۱۰	−۳	۱۱	$=18$
۷	۶	۵	$=18$
۱	۱۵	۲	$=18$
$\parallel$ ۱۸	$\parallel$ ۱۸	$\parallel$ ۱۸	۱۸

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

http://www.math-home.ir


مجموعه ها

فصل ۱

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُمُ النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)

منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیاره‌هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید، ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}=-0/5$, $0/625=\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}$

ب) $\left\{-2, \cancel{7}, \frac{5}{8}, -0/5, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right\}=\left\{0/625, \cancel{-2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \frac{4}{10}, 7\right\}$

۲ــ دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$A=\left\{\sqrt{25}, \frac{21}{15}, 2^3, -\frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}}\right\}$

$B=\left\{\sqrt[3]{125}, 8, -\frac{4}{2}, \frac{7}{5}\right\}$

$2^3=8$

$\sqrt{25}=\sqrt[3]{125}$

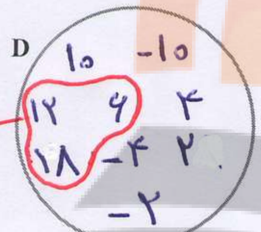
$\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$, $-\frac{-\sqrt{36}}{-\sqrt{9}}=-\frac{4}{2}$

زیرمجموعه

فعالیت

زیرمجموعه

مجموعهٔ عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید :



در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید. مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ آری

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا D = C؟ بله $C=\{6, 12, 18\}$

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعهٔ B همگی در D هست؛ یعنی **هر** عضو B، عضوی از D است؛ در این صورت مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ D است؟ بله، چون هر عضو C، عضوی از D می‌باشد

نکته مهم

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم : $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟ $\varnothing=\{\ \}$ تهی

آیا عبارت $\{10, 4, -6, 2\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ بله، چون هر عضو مجموعه، عضوی از مجموعهٔ D می‌باشد

نکته مهم

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B \nsubseteq A$.

آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟ خیر

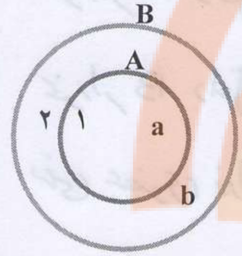
نکته مهم

مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی؛ $\varnothing \subseteq A$.

مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$؛ زیرا در مجموعهٔ سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

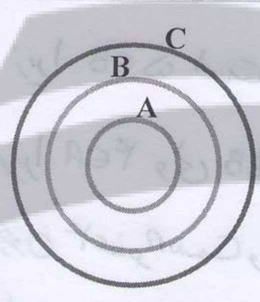
ب) $\{۱,۲,-۱,۰,۱,۳\} \subseteq \{۴,۳,۰,۱,۲,-۱\}$؛ زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ، عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.



$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همهٔ عضوهای A در B قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱ـ با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید : صفحه ۸,۱

$C \not\subseteq A$ ✓ ، $B \subseteq A$ ✗ ، $A \not\subseteq C$ ✗

$A \subseteq B$ ✓ ، $B \subseteq C$ ✓ ، $\varnothing \subseteq A$ ✓

۲ـ مجموعه‌های B ،A و C را درنظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل) : صفحه ۸,۱

$A = \{۱,۳,۶,۴\}$ ، $B = \{۵,۱,۳\}$ ، $C = \{۲,۵,۱,۳,۶\}$

$B \not\subseteq A$ ✓، $۳ \subseteq B$ ✗، $A \subseteq B$ ✗، $B \subseteq C$ ✓، $A \not\subseteq C$ ✓، $۲ \in A$ ✗

$\{۱,۴\} \in A$ ✗ ، $۶ \notin A$ ✗، $\{۵,۶\} \subseteq C$ ✓ ، $۵ \in C$ ✓ ، $۰ \subseteq A$ ✗

مثال : همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

۳- مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

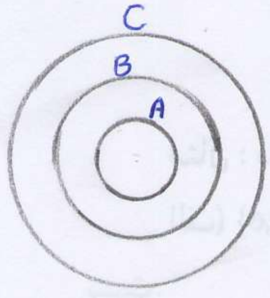
الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. $A = \{۱۰, ۱۱\}$ ب) $B = \{a,b,c,d\}$

صفحه ۸,۱

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

کار در کلاس (۱)



$C \not\subseteq A$ ✓ مجموعه‌ی A داخل مجموعه‌ی C است پس مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ای A نیست

$B \subseteq A$ ✗ مجموعه‌ای B مجموعه‌ی A را درخودش دارد لذا B زیرمجموعه‌ی A نادرست است

$A \not\subseteq C$ ✗ نمودار A داخل نمودار C است پس $A \subseteq C$ می‌باشد

$A \subseteq B$ ✓ نمودار A داخل نمودار B است پس $A \subseteq B$ می‌باشد

$B \subseteq C$ ✓ نمودار B داخل نمودار C است پس $B \subseteq C$ می‌باشد

$\emptyset \subseteq A$ تهی عضوی ندارد و زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها می‌باشد.

---

(۲)

$A = \{۱, ۳, ۶, ۴\}$ $B = \{۵, ۱, ۳\}$, $C = \{۲, ۵, ۱, ۳, ۶\}$

$B \not\subseteq A$ ✓ زیرا $۵ \in B$ ولی $۵ \notin A$

$۳ \subseteq B$ ✗ سمت چپ مجموعه نمی‌باشد

$A \subseteq B$ ✗ زیرا $۴ \in A$ ولی $۴ \notin B$

$B \subseteq C$ ✓ تمام اعضای B در مجموعه C موجود می‌باشد

$A \not\subseteq C$ ✓ چون ۴ عضو A هست ولی عضو C نیست

$۲ \in A$ ✗ عدد ۲ در مجموعه‌ی A نیست

$\{۱, ۴\} \in A$ ✗ اعضای مجموعه‌ی سمت چپ در مجموعه‌ی A وجود دارد ولی مجموعه‌ی $\{۱, ۴\}$ عضو مجموعه‌ی A نیست

$۶ \notin A$ ✗ عدد ۶ عضو A می‌باشد

$\{۵, ۶\} \subseteq C$ ✓ اعضای مجموعه سمت چپ در مجموعه‌ی C وجود دارد

$۵ \in C$ ✓ عدد ۵ عضو C می‌باشد

$۰ \subseteq A$ ✗ سمت چپ مجموعه نیست

$A = \{10, 11\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \emptyset, \{1\}, \{۲\}, \{10, 11\}$

$B = \{a, b, c, d\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

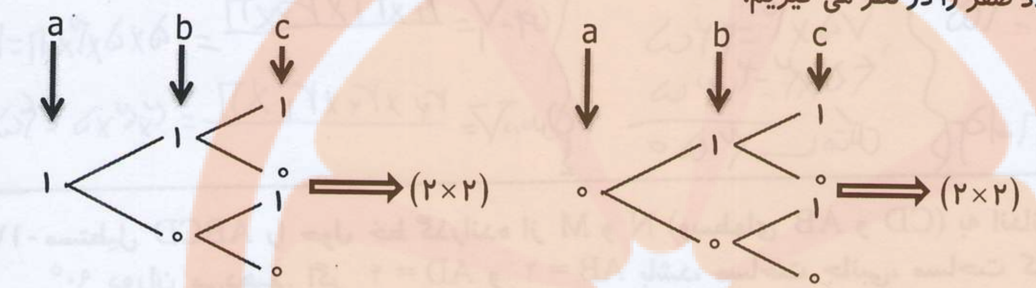
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

$\{a, b, c, d\}$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی:

مثال: تمام زیر مجموعه های، مجموعه ی $A=\{a\ ,\ b,c\}$ را بنویسید.

هر کدام از اعضای مجموعه A می توانند در زیر مجموعه باشند یا نباشند. یعنی برای هر عضو دو حالت داریم برای بودن عدد یک و برای نبودن عدد صفر را در نظر می گیریم.



کل زیر مجموعه های این مجموعه برابر است با : $۸=(۲\times۲)\times۲$

نتیجه: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی k عضوی برابر است با:

$$\text{عضوها} \rightarrow a_۱\ ,\ a_۲\ ,\ a_۳\ ,\ \dots\ ,\ a_k$$

$$\text{حالت ها} \rightarrow ۲\times۲\times۲\times\dots\times۲=۲^k$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی K عضوی برابر ۲^K می باشد.

مثال: مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه ی دو عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B=\{\square\ ,\ \square\}$ یک زیر مجموعه ی دو عضوی دل خواه از مجموعه ی A باشد که دو خانه خالی دارد که حتما باید پر شود

خانه ی دوم	خانه ی اول
a	a
b	b
c	c
d	d
e	e

*** برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.**

**** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه ۴ حالت ممکن می باشد.**

***** در کل می توانیم این دو خانه را به $۵\times۴=۲۰$ حالت ممکن پر کنیم ولی با توجه به این که جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a,b\}=\{b,a\}$ پس نصف حالت ها حذف می شوند لذا تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه ی ۵ عضوی برابر است با : $۱۰=\frac{۵\times۴}{۲}=\frac{۵\times(۵-۱)}{۲}$**

نکته: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $\frac{n\times(n-1)}{۲}$

مثال : مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه ی سه عضوی دارد؟

فرض کنیم مجموعه ی $B=\{\square\ ,\ \square\ ,\ \square\}$ یک زیر مجموعه ی سه عضوی دل خواه از مجموعه ی A باشد که سه خانه خالی دارد که حتما باید پر شود

خ اول	خ دوم	خ سوم
a	a	a
b	b	b
c	c	c
d	d	d
e	e	e

* برای پر کردن خانه اول ما هیچ محدودیتی نداریم و به ۵ حالت ممکن می توانیم خانه اول را پر کنیم.

** ولی برای پر کردن خانه دوم ما نمی توانیم عضوی را که در خانه اول قرار دادیم در خانه دوم نیز قرار دهیم پس برای پر کردن این خانه ۴ حالت ممکن می باشد.

*** برای پر کردن خانه ی سوم، دو تا محدودیت داریم و دو عضو قبلی را نمی توانیم انتخاب کنیم پس برای پر کردن خانه سوم فقط سه انتخاب ممکن می باشد.

**** در مجموع می توانیم این سه خانه را به $۶۰ = ۳\times۴\times۵$ حالت ممکن پر کنیم ولی با توجه به این که جابجایی اعضاء در مجموعه ها تاثیری ندارد یعنی $\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$ پس $\frac{۱}{۶}$ حالت ها باقی می ماند و بقیه حذف می شوند، لذا تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی ۵ عضوی برابر است با :

$$\frac{۵\times(۵-۱)\times(۵-۲)}{۶}=\frac{۵\times۴\times۳}{۶}=۱۰$$

نکته: وقتی با سه عضو a، b و c می خواهیم سه خانه ممکن را پر کنیم این کار به $(۳!=۶=۱\times۲\times۳)$ ممکن هست.

نکته: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)}{۱\times۲\times۳}\quad \begin{array}{l}\rightarrow \text{تعداد کل حالت ها}\\ \rightarrow \text{تعداد تکرار هر حالت}\end{array}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی یک مجموعه ای n عضوی برابر است با :

$$\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\quad \begin{array}{l}\rightarrow \text{تعداد کل حالت ها}\\ \rightarrow \text{تعداد تکرار هر حالت}\end{array}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه ای n عضوی از فرمول $\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ بدست می آید. که مقدار $n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$ و اثبات فرمول بالا را در سال های بعد خواهید آموخت.

توجه مهم : قرار داد $۰!=۱$

مثال: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی و ۸ عضوی یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی را بدست آورید.

جواب:

$$\frac{۱۰!}{۸!\times(۱۰-۸)!}=\frac{۱۰!}{۸!\times۲!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times\cancel{۱۰}^{۵}}{\cancel{۸!}\times\cancel{۲}}=۴۵ \quad , \quad \frac{۱۰!}{۲!\times(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times\cancel{۱۰}^{۵}}{\cancel{۲}\times\cancel{۸!}}=۴۵$$

مثال: مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد ولی e در آن ها نباشد؟

عضوها $\rightarrow$ a , b , c , d , e

جواب: عضو a باید در تمام زیر مجموعه ها باشد پس فقط یک حالت دارد

و عضو e هم تو هیچ کدام از مجموعه ها نیست، پس فقط یک حالت دارد.

حالت ها $\rightarrow ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = ۲^{۳} = ۸$

ولی برای بقیه اعضا، دو حالت وجود دارد (بودن و نبودن)

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی که p تا از اعضای آن در زیر مجموعه هستند و q از اعضای آن در زیر مجموعه نیستند برابر است با: $۲^{n-(p+q)}$

مثال: مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد. که شامل ۱ و ۲ باشند ولی اعداد ۷ و ۸ و ۹ را شامل نشود.

حل: تعداد زیر مجموعه ها برابر است با: $۲^{۱۰-(۲+۳)} = ۲^{۵} = ۳۲$

زیر مجموعه های محض: همه ی زیر مجموعه های یک مجموعه به جزء خود مجموعه را زیر مجموعه های محض آن مجموعه می نامند.

نکته: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $۲^{n} - ۱$

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

http://www.math-home.ir

مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...\}$$

نمایش توصیفی

تاکنون مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار وِن مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج $E = \{۲, ۴, ۶, ۸, ...\}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲، است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به‌صورت $۲k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$، پس می‌نویسیم : $E = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ← مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعهٔ عددهایی به شکل $۲k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در مجموعهٔ E علامت «|» خوانده می‌شود «به‌طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم :

مهم

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد : $O = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ ، $A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۷ \le x \le ۱۰\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۶ < x < ۱۱\}$

ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر است : $\{۳k \mid k \in \mathbb{N}\}$

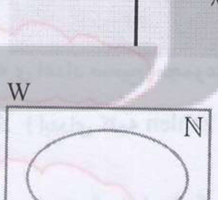
مثال : مجموعهٔ $A = \{۵n + ۳ \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به‌جای n یک عدد طبیعی در ۵n+۳ قرار دهید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
۵n + ۳	$\underbrace{۵(۱)+۳}_{۸}$	$\underbrace{۵(۲)+۳}_{۱۳}$	$\underbrace{۵(۳)+۳}_{۱۸}$	$\underbrace{۵(۴)+۳}_{۲۳}$	۲۸	۳۳	۳۸	...

معرفی مجموعه‌های مهم

بنابراین داریم : $A = \{۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, ۲۸, ۳۳, ۳۸, ...\}$

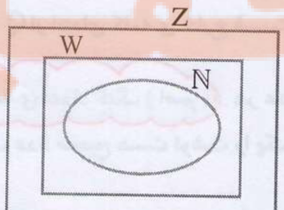


$\mathbb{N} \subseteq W$

مجموعهٔ عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند : $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$

مجموعهٔ عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به‌صورت $W = \{k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$ نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$



مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم :

$$\mathbb{Z} = \{..., -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$$

همهٔ عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هست؛ پس : $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

مجموعه های بی پایان معروف عبارت اند از :

مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}$	مجموعه ی اعداد حسابی : $\mathcal{I}$ یا $\mathcal{W}$	مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}$
مجموعه ی اعداد طبیعی زوج : $\mathcal{E}$	مجموعهی اعداد طبیعی فرد : O	مجموعه ی اعداد گویا: $\mathbb{Q}$
مجموعهی اعداد اول : p	مجموعه ی اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$	مجموع ی اعداد گنگ (اصم) : $\mathbb{Q}'$

مجموعه ی اعداد طبیعی: اعداد طبیعی اعدادی هستند که برای شمارش (Counting Numbers) به کار می‌روند.

در ریاضیات، مجموعه اعداد طبیعی را با نماد N یا $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهند. این حرف از آغاز واژه انگلیسی Natural Numbers، به معنای اعداد طبیعی، گرفته شده است. $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴,...\}$ ، به اعداد طبیعی اعداد صحیح مثبت (positive integers) نیز می گویند.

مجموعه ی اعداد حسابی : اعداد حسابی همان اعداد طبیعی هستند که صفر هم به آنها اضافه شده است. به این اعداد، اعداد کامل (Whole Numbers) نیز گفته می شود. مجموعه اعداد حسابی عبارت اند از $\mathcal{W} = \{۰,۱,۲,۳,...\}$ اعداد حسابی اعداد صحیح نا منفی (non-negative integers) می باشند.

مجموعه ی اعداد طبیعی زوج: مجموعه ی اعداد طبیعی زوج را با نماد **E** نمایش می دهیم.

$$\mathcal{E} = \{۲,۴,۶,...\} = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد طبیعی فرد: مجموعه ی اعداد طبیعی فرد را با نماد O نمایش می دهیم.

$$\mathrm{O} = \{۱,۳,۵,۷,...\} = \{۲k-۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه ی اعداد صحیح: مجموعه ی اعداد صحیح ، مجموعه ای شامل اعداد طبیعی، صفر و قرینه ی اعداد طبیعی می باشد و این مجموعه را در ریاضی معمولا با Z یا $\mathbb{Z}$ (ابتدای کلمه zahlen که در زبان آلمانی به معنی اعداد است) نشان می‌دهند.

$$\mathbb{Z} = \{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

مجموعه ی اعداد گویا: اعداد گویا ، اعداد کسری هستند که از حاصل تقسیم دو عدد صحیح بدست می آیند، به شرطی که عدد دوم صفر(مخرج) نباشد. یا هر عدد کسری که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح باشد و مخرج آن مخالف صفر باشد یک عدد گویا می باشد. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\right\}$

حرف Q از ابتدای کلمه ی خارج قسمت "quotient" گرفته شده در واقع هر عدد گویا خارج قسمت تقسیم دو عدد صحیح می باشد.

مجموعه ی اعداد گنگ (اصم) : هر عدد حقیقی که گویا نباشد را یک عدد گنگ می نامیم. هر عددی که نتوان آن را به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن یک عدد صحیح هست نوشت را یک عدد گنگ می نامیم.

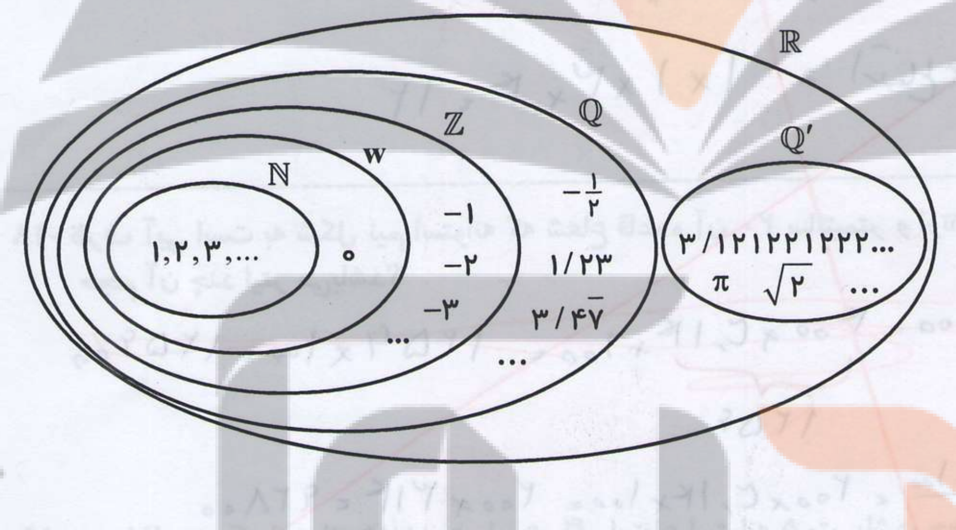
$$\mathbb{Q}' = \{ x \mid x \in \mathbb{R} , x \notin \mathbb{Q} \}$$

مجموعه ی اعداد حقیقی: مجموعه ای که شامل تمام اعداد گویا و گنگ می باشد را مجموعه ی اعداد حقیقی می نامیم. مجموعه ی اعداد حقیقی (Real numbers) را با حرف $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم.

زیر مجموعه (Subset): مجموعه ی A را زیر مجموعه ی، مجموعه ی B گوییم هر گاه هر عضو مجموعه ی A، عضوی از مجموعه ی B باشد. و آن را با نماد $A \subset B$ نمایش می دهیم.

مجموعه ی اعداد طبیعی زیر مجموعه ی مجموعه ی اعداد حسابی می باشد و مجموعه ی اعداد حسابی زیر مجموعه ی اعداد صحیح می باشد و مجموعه ی اعداد صحیح زیر مجموعه ی، مجموعه ی اعداد گویا می باشد.

و مجموعه ای اعداد گویا زیر مجموعه ی، مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد. $\mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \ , \ \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$



۹۰۲

$C = \{\dots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \dots\}$

$A = \{-۵, -۴, -۳, \dots, ۴\}$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید :

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۵ \le x < ۵\}$ ب) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد C

ج) $B = \{۳k + ۲ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \{\dots, -۷, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اوّلین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعهٔ عددهای گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم : $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \ne ۰\right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم : $a = \frac{a}{۱}$، درنتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$.

تمرین

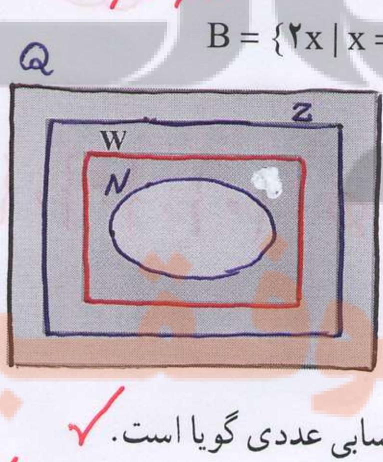
۱ــ مجموعهٔ $A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ صفحه ۱۰/۱

$B = \{x \mid x \in A, x^۲ \le ۲\}$ ، $C = \{x \mid x \in A, -۱ \le x \le ۱\}$ ، $D = \{x \mid x \in A, x^۴ = ۱\}$

۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به‌طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$؟ بله صفحه ۱۰/۱

۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید : صفحه ۱۰/۱

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, ۲x + ۱ = ۳\}$ ب) $B = \{۲x \mid x = ۰, ۲, ۳\}$



۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q، W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ✗   ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. ✓

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. ✓   د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. ✓

تمرین

۱

$A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

$B = \{x \mid x \in A , x^۲ \leq ۲\} = \{-۱, ۰, ۱\}$

$(-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow -۲ \notin B \quad , \quad (-۱)^۲ = ۱ \leq ۲ \Rightarrow -۱ \in B , \dots$

$C = \{x \mid x \in A , -۱ \leq x \leq ۱\} = \{-۱, ۰, ۱\}$

$-۲ < -۱ \Rightarrow -۲ \notin C \quad , \quad ۲ > ۱ \Rightarrow ۲ \notin C$

$D = \{x \mid x \in A , x^۴ = ۱\} \Rightarrow D = \{-۱, ۱\}$

$x^۴ = ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt[۴]{۱} \Rightarrow x = \pm ۱$ یا $(-۲)^۴ = ۱۶ \Rightarrow -۲ \notin D , \dots$

۲

$A = \{۱\} \quad , \quad B = \{۱, ۲\} \quad , \quad C = \{۱, ۲, ۳\} \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C$

بنابراین داریم $A \subseteq C$ است زیرا تمام اعضای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B وجود دارد $(A \subseteq B)$ و تمام اعضای مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی C موجود است. $(B \subseteq C)$ بنابراین تمام اعضای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی C موجود است لذا داریم $A \subseteq C$

۳

$A = \{x \mid x \in N , ۲x + ۱ = ۳\} \Rightarrow ۲x + ۱ = ۳ \xrightarrow{-۱} ۲x = ۲ \xrightarrow{\div ۲} x = ۱$

$\Rightarrow A = \{۱\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \emptyset , \{۱\}$

$B = \{۲x \mid x = ۰, ۲, ۳\} = \{۰, ۴, ۶\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌ها}} \emptyset , \{۰\} , \{۴\} , \{۶\}$

$\{۰, ۴\} , \{۰, ۶\} , \{۴, ۶\} , \{۰, ۴, ۶\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضلِ مجموعه‌ها

فعالیت

۱ــ در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمّد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید. صفحه ۱۱/۱

ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲ــ دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le 6\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid -2\le x\le 3\}$ را درنظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ب) $B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$

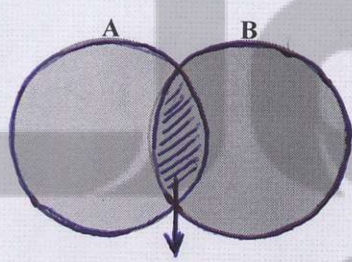
ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $=\{1,2,3\}$

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم).

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست $=\{-2,-1,0,\dots,6\}$

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم).

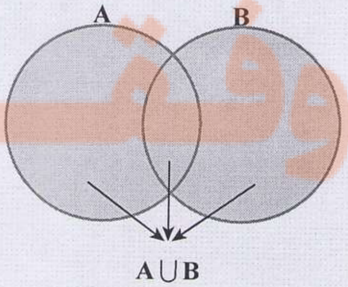
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شاملِ همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$A\cap B$

$$A\cap B=\{x \mid x\in A, x\in B\}$$

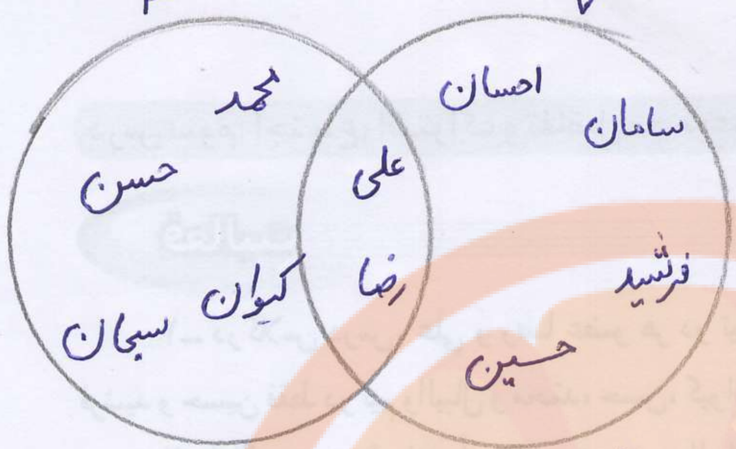
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد:



$A\cup B$

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

فعالیت ۱ الف)



$F=\{$رضا، علی، کیوان، سبحان، حسن، محمد$\}$

$V=\{$رضا، علی، حسین، فرشید، سامان، احسان$\}$

ب) $A=\{$رضا و علی$\}$ تیم والیبال تیم فوتبال

ج) $B=\{$رضا، علی، کیوان، سبحان، حسن، محمد، حسین، فرشید، سامان، احسان$\}$

$n(B)=10 \quad , \quad n(A)=2 \quad , \quad n(V)=6 \quad , \quad n(F)=6$

۲

$$A=\{x\in N \mid x\leq 6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$B=\{x\in Z \mid -2\leq x\leq 3\}=\{-2,-1,0,1,2,3\}$$

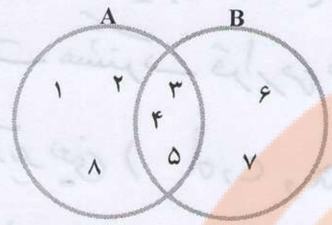
$$A\cap B=\{1,2,3\} \quad , \quad A\cup B=\{-2,-1,0,\dots,6\}$$

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

http://www.math-home.ir

مثال : با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم :



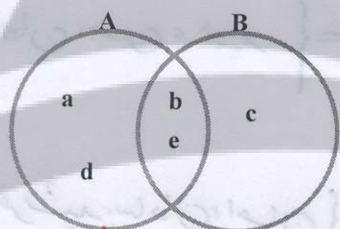
$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\} \text{ و } B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$$

$$A\cap B=\{۳,۴,۵\} \quad , \quad A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸,۶,۷\}$$

فعالیت

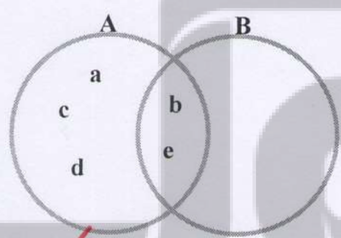
۱ــ دو مجموعهٔ $A\cap B=\{b,e\}$ و $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ را درنظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار وِن نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموزِ این کلاس را در زیر می‌بینید :

الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

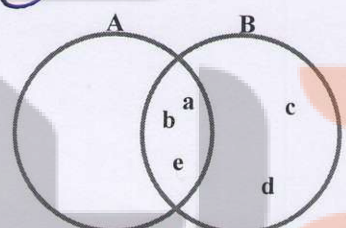


پاسخ حمیده

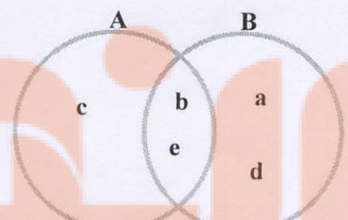
پاسخ زهرا نادرست است زیرا $A\cap B=\{a,b,e\}$ درصورتیکه $A\cap B=\{b,e\}$ می باشد و بقیه جواب ها صحیح می باشد



پاسخ ریحانه



پاسخ زهرا



پاسخ حنانه

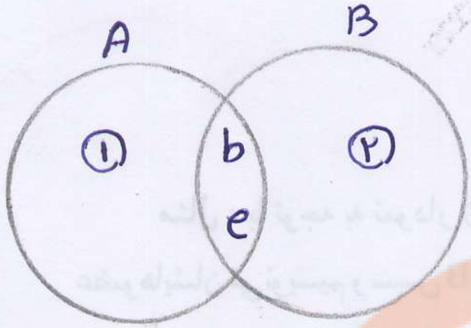
ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. صفحه ۱۲/۱

۲ــ با توجه به اوّلین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V-F$ نمایش می‌دهیم : صفحه ۱۲/۱

$V-F=\{ \qquad \qquad \}$ $\qquad$ $F-V=\{ \qquad \qquad \}$

$F-V=\{$ سبحان، کیوان، حسن، محمد $\}$

فعالیت ۱



با توجه به اینکه داریم $A\cap B=\{b, e\}$ است، این دو عضو را در قسمت مشترک قرار می‌دهیم

۳ عضو دیگر یعنی (a و c و d) داریم که هرکدام می‌توانند در ناحیه ۱ یا ۲ قرار بگیرند پس برای هرکدام (۲ حالت) داریم بنابراین در مجموع (۸ = ۲×۲×۲) حالت داریم

۲

برای نوشتن اعضای مجموعه‌ی $F-V$، ابتدا تمام اعضای مجموعه‌ی F را می‌نویسیم سپس اعضای مشترک یعنی ($V\cap F$) را حذف می‌کنیم

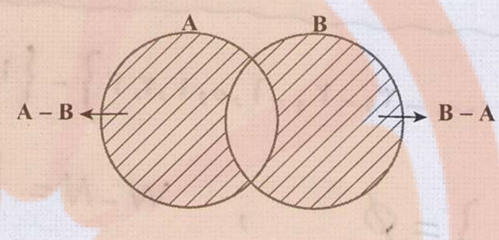
$F-V$ = { ~~رضا~~ و ~~علی~~ و کیوان و سبحان و حسن و محمد } = {کیوان، سبحان، حسن، محمد}

مشترک‌ها

$V-F$ = { ~~رضا~~ و ~~علی~~، حسین، فرشید، سامان، احسان } = {حسین، فرشید، سامان، احسان}

تفاضل دو مجموعه : مجموعهٔ $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشور خورده است :

$$A-B=\{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

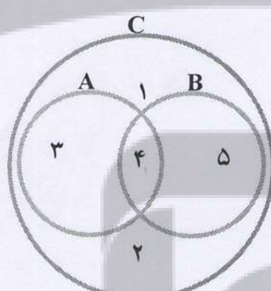


مثال : اگر $A=\{a,b,c,d,e,k\}$ و $B=\{c,d,k,f,s,t\}$ در این‌صورت :

$A-B=\{a,b,e\}$ و $B-A=\{f,s,t\}$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟



الف) $A \subseteq C$ ✓ ب) $B \subseteq C$ ✓ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ ×

د) $(A \cup B) \subseteq C$ ✓ هـ) $۲ \in (A \cup B)$ × و) $۴ \notin (A \cap B)$ ×

ز) $A \cup B = A$ × ح) $۵ \in (A \cup B)$ ✓ ط) $۴ \in (A \cup B)$ ✓

۲ــ مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید : صفحه ۱۳٫۱

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشد.

۳ــ مجموعه‌های $(\mathbb{N}-\mathbb{Z})$، $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$ و $(\mathbb{W}-\mathbb{N})$ را تشکیل دهید. صفحه ۱۳٫۱

قرارداد : تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A)=k$.

مثلاً اگر $A=\{۲,۴,۶,۷\}$ در این صورت $n(A)=۴$.

کار در کلاس

س ۲

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

الف) $B - A = \{9, 18\}$

ب) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$

س ۳

$Z - N = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

$N - Z = \{\ \} = \varnothing$, $W - N = \{0\}$

تمرین

۱ــ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

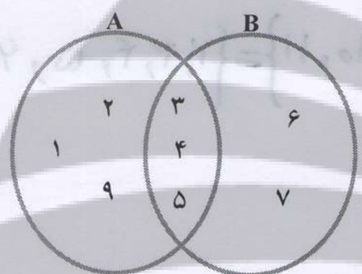
الف) $A \cup B$　　ب) $B \cup C$　　ج) $A \cup C$　　د) $A \cap B$

هـ) $A - B$　　و) $C - B$　　ز) $(A - C) \cup (B - C)$　　ح) $(A \cup B) - C$

ط) $A \cap A$　　ی) $A \cap \varnothing$　　ک) $B \cup B$　　ل) $C \cup \varnothing$

صفحه ۱۴،۱

۲ــ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید :



✓ الف) $B-A=\{۶,۷\}$　　✓ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

✗ ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{۱,۲,۶\}$

✓ د) $n(A \cup B) = ۸$

صفحه ۱۴،۱　۳　۲

✗ هـ) $A - B = B - A$　　✗ و) $n(A - B) = n(B - A)$

۳ــ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B　　۲) A　　۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ　　۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

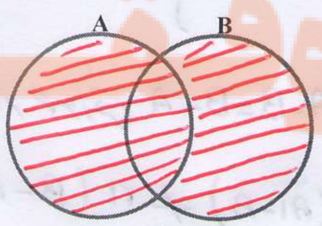
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A \cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعه‌ی هر یک از دو مجموعهٔ A و B است.

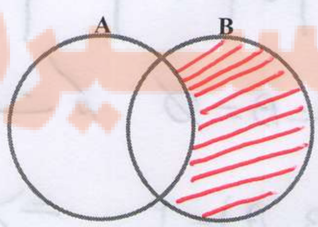
د) مجموعهٔ $A - B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(A - B)$ و $(A \cap B)$ با مجموعهٔ B مساوی است.

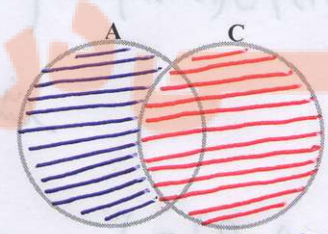
۴ــ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



$A \cup B$



$B - A$



$(A - C) \cup C = A \cup C$

$A - C =$ آبی

حل تمرین

سؤال ۱

الف) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} \Rightarrow n(A\cup B)=۹$

ب) $B\cup C=\{۱,۳,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\} \Rightarrow n(B\cup C)=۸$

ج) $A\cup C=\{۱,۲,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\} \Rightarrow n(A\cup C)=۹$

د) $A\cap B=\{۹\} \Rightarrow n(A\cap B)=۱$

هـ) $A-B=\{۲,۴,۶,۸\} \Rightarrow n(A-B)=۴$

و) $C-B=\{۸,۱۰,۱۱\} \Rightarrow n(C-B)=۳$

ز) $(A-C)\cup(B-C)=\underbrace{\{۲,۴,۶,۹\}}_{A-C}\cup\underbrace{\{۳,۵,۹\}}_{B-C}=\{۲,۳,۴,۵,۶,۹\}$

ح) $(A\cup B)-C=\{\cancel{۱},۲,۳,۴,۵,۶,\cancel{۷},\cancel{۸},۹\}-\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}=\{۲,۳,۴,۵,۶,۹\}$

ط) $A\cap A=\{۲,۴,۶,۸,۹\} \Rightarrow A\cap A=A$

ی) $A\cap\varnothing=\{\ \} \Rightarrow A\cap\varnothing=\varnothing$

ک) $B\cup B=\{۱,۵,۷,۳,۹\} \Rightarrow B\cup B=B$

ل) $C\cup\varnothing=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\} \Rightarrow C\cup\varnothing=C$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=\{۱,۲,۹\}\cup\{۳,۴,۵\}=\{۱,۲,۹,۳,۴,۵\}=A$

$(A-B)\cup(A\cap B)=A$ نکته مهم

ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۹\}\cup\{۶,۷\}=\{۱,۲,۹,۶,۷\}$

هـ) در صورتی $A-B=B-A$ است که $A=B=\varnothing$ باشد

و) $n(A-B)=۳$, $n(B-A)=۲$ $\Rightarrow n(A-B)\neq n(B-A)$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به‌کار برد.

اگر مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن را S، مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمالِ رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال : اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اوّل باشد.

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل : الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم :

$A = \{۳,۶\}$, $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$; $n(A) = ۲$, $n(S) = ۶$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اوّل ; $B = \{۲,۳,۵\}$; $n(B) = ۳$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

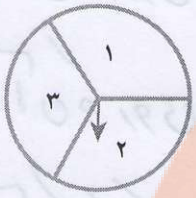
ج) C : پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ ; $C = \varnothing \rightarrow n(\varnothing) = ۰$

$P(C) = P(\varnothing) = \frac{۰}{۶} = ۰$ $\Rightarrow$ احتمال رخ دادن آن صفر است

د) D : پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ ; $D = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = S$

$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{۶}{۶} = ۱$ $\Rightarrow$ احتمال رخ دادن آن حتمی است

فعالیت



۱ــ با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید : $S=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow n(S)=۳$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید :

$A=\{۳,۱\}$ (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B=\{۱,۲\}$ عقربه روی اعداد کوچک‌تر از ۳ بایستد

$C=\{۲,۳\}$ عقربه روی اعداد اول بایستد $D=\{۲\}$ عقربه روی عدد زوج بایستد

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید. صفحه ۱۶/۱

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادنِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اوّل و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس است؟ چرا؟ خیر

$B=\{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(B)=۴ \Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$

فعالیت   قسمت ب)

۱- پیشامد آن که روی ۱ بایستد. $E=\{1\} \Rightarrow n(E)=1 \Rightarrow p(E)=\frac{1}{۳}$

۲- پیشامد آن که روی ۲ بایستد. $D=\{۲\} \Rightarrow n(D)=1 \Rightarrow p(D)=\frac{1}{۳}$

۳- پیشامد آن که روی ۳ بایستد $F=\{۳\} \Rightarrow n(F)=1 \Rightarrow p(F)=\frac{1}{۳}$

۴- پیشامد آن که کوچکتر از ۳ بایستد $B=\{1,۲\} \Rightarrow n(B)=۲ \Rightarrow p(B)=\frac{۲}{۳}$

۵- پیشامد آن که عقربه روی عدد فرد بایستد $A=\{1,۳\} \Rightarrow n(A)=۲ \Rightarrow p(A)=\frac{۲}{۳}$

۶- عقربه روی اعداد اول بایستد $C=\{۲,۳\} \Rightarrow n(C)=۲ \Rightarrow p(C)=\frac{۲}{۳}$

۷- پیشامد آن که روی ۱ یا ۲ یا ۳ بایستد $G=\{1,۲,۳\} \Rightarrow n(G)=۳ \Rightarrow p(G)=\frac{۳}{۳}=1$

۸- پیشامد آن که روی هیچ کدام نایستد $H=\{\ \}=\varnothing \Rightarrow n(\varnothing)=0$

$\Rightarrow p(H)=\frac{0}{۳}=0$

$p(E)=p(D)=p(F)=\frac{1}{۳}$ $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{۲}{۳}$

ج) $\varnothing,\ \{1\},\ \{۲\},\ \{۳\},\ \{1,۲\},\ \{1,۳\},\ \{۲,۳\},\ \{1,۲,۳\}$

کار در کلاس   الف) $n(S)=10$

$A=\{1,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(A)=٤$

$\Rightarrow p(A)=\frac{۴}{10}=\frac{۲}{۵}$

ب) عدد روی کارت اول باشد $B=\{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(B)=۴$

$\Rightarrow p(B)=\frac{۴}{10}=\frac{۲}{۵}$

عدد خارج شده کوچکتر از ۷ و بزرگتر از ۲ باشد $E=\{۳,٤,۵,۶\} \Rightarrow p(E)=\frac{۴}{10}=\frac{۲}{۵}$

سؤال ۱

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \quad A=\{2,4,6\} \Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$B=\{4,6\} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad , \quad C=\{2\} \Rightarrow P(C)=\frac{1}{6}$

$D=\{1,2\} \Rightarrow P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. A ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. B

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. C د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. D

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟ صفحه ۱۷/۱

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد : صفحه ۱۷/۱

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{4}{3+4+5}=\frac{4}{12} \Leftarrow \frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{3+4}{3+4+5}=\frac{7}{12}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8}{12}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :

(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s)=36$) صفحه ۱۷/۱

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. A $\longrightarrow \frac{1}{4}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. B $\leftarrow \frac{1}{6}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. C $\longrightarrow \frac{1}{9}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. D $\leftarrow \frac{1}{6}$

خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم : در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزءِ نخستین تعریف نشده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

تمرین

سؤال ۲

$S=\{(د،د،د),(پ،د،د),(د،پ،د),(د،د،پ),(پ،پ،د),(پ،د،پ),(د،پ،پ),(پ،پ،پ)\}$

برای هر کدام از فرزندان ۲ حالت وجود دارد (دختر یا پسر)

$n(S)=\underbrace{۲}_{\text{دختر یا پسر}}\times\underbrace{۲}_{\text{دختر یا پسر}}\times\underbrace{۲}_{\text{دختر یا پسر}}=۸$

$A=\{(پ،د،د),(د،پ،د),(د،د،پ)\} \Rightarrow n(A)=۳ \Rightarrow p(A)=\frac{۳}{۸}$

سؤال ۳

الف) B آبی $\Rightarrow n(B)=۴ \Rightarrow p(B)=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

کل S $\Rightarrow n(S)=۴+۳+۵=۱۲$

ب) $p(G)=\frac{۵}{۱۲} \Rightarrow$ سبز نباشد $p(G')=۱-p(G)=۱-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$

ج) $p(R)+p(G)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$

احتمال قرمز آمدن — احتمال سبز آمدن

سؤال ۴

$n(S)=\underbrace{۶}_{\substack{\text{تاس اول}\\ \text{حالت}}}\times\underbrace{۶}_{\substack{\text{تاس دوم}\\ \text{حالت}}}=۳۶$

الف)

$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(A)=۹$

تعداد حالت ها $=\underbrace{۳}_{(۲,۳,۵)}\times\underbrace{۳}_{(۲,۳,۵)}=۹ \Rightarrow p(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

ب)

$B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(B)=۶ \Rightarrow p(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

ج)

$C=\{(۳,۳),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\} \Rightarrow n(C)=۴ \Rightarrow p(C)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$

د) $D=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \Rightarrow n(D)=۶$

فصل ۱

مجموعه‌ها

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)

منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید. ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی