

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

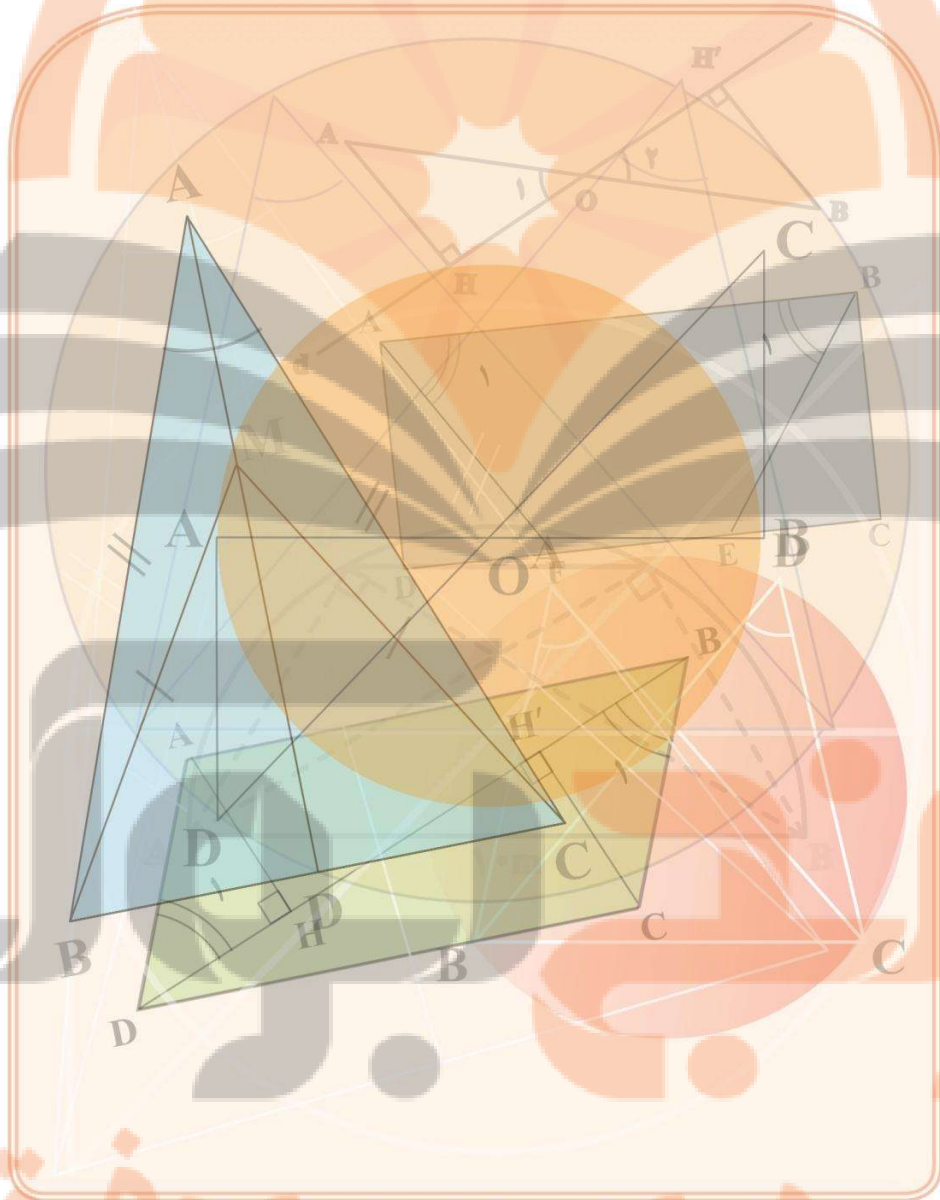
 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

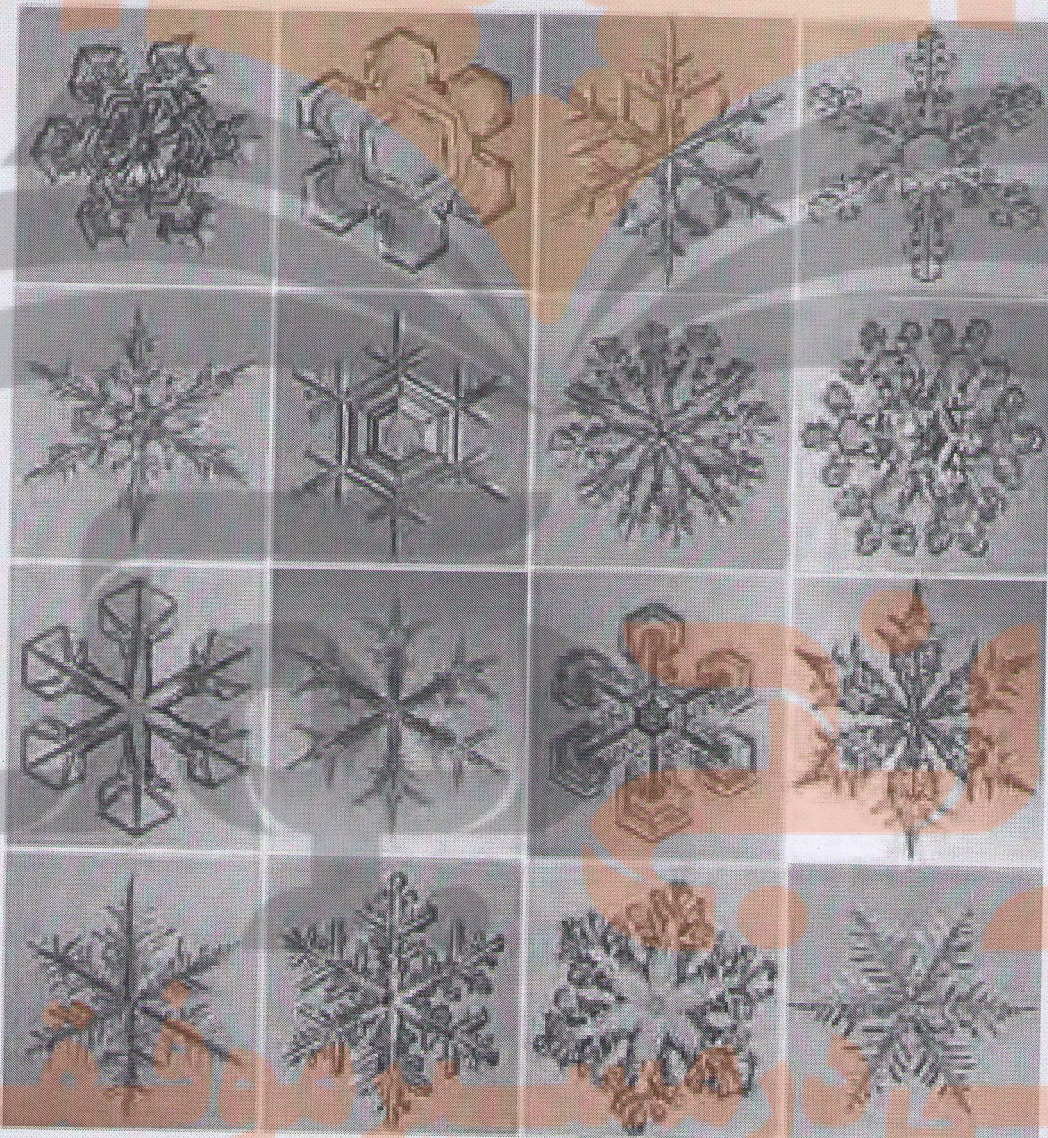
استدلال و اثبات در هندسه

فصل ۲



تلاشی در مسیر موفقیت

أدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَ جَادِلْهُمْ بِالتِّي هِيَ أَحْسَنُ ...
 با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و
 مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی رغم آنکه میلیاردها دانه اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

<http://www.math-home.ir>

سرای ریاضی

فعالیت

متن های زیر را بخوانید و به سؤال ها پاسخ دهید :

۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ **خیر، زیرا رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باشد**
 ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است. **دلیل ما قابل اطمینان تر است**

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی، برای معلوم کردن

موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

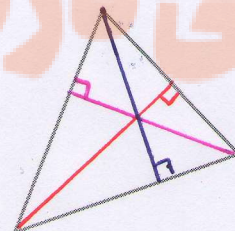
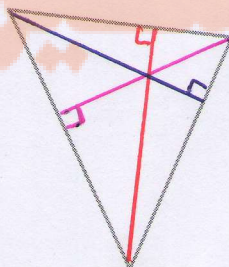
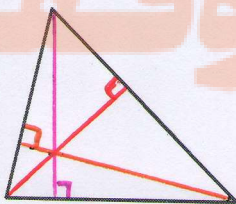
همان گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می کنیم. راه های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گوئیم.

کار در کلاس

۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه ای

می گیرد که درست نیست. **هر وقت تکالیف را نمی نویسم، معلم تکالیف را می بیند**

۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث های زیر، رسم کنید :



فعالیت
۱- رفتن محسن به ورزشگاه یعنی توانده است بافت نیم مورد علاقه‌ی او باشد و بردیم تیم به عوامل تعدادی بستگی دارد که مهم ترین آن‌ها روحیه و آمادگی بازیکنان تیم و ضعف تیم مقابل می‌تواند باشد

۲- با توجه به ضخامت دیسک بیکریته‌ها، مقدار بیکریته فردی بیش تر است که مساحت بیش تری داشته باشد
 $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ باقر
 $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$ عباس
 $16 > 9$
بنابراین مقدار بیکریته باقر بیش تر است

۳ در فعالیت اول محسن بر اساس نتایج قبل، نتیجه تیری کرد و می‌تواند فعالیت دوم بر اساس یافته‌هایی که درستی آن‌ها از قبل اثبات شده است نتیجه تیری کردیم

کاردرکلاس ۱- (الف) هر وقت در رسم راجحی خوانم معلم از من استعان می‌گیرد

(ب) هر وقت دیر به مدرسه می‌روم مدیر من را می‌بیند

(ج) وقتی چند ندارم، باران می‌بارد

(د) اگر ما زمین را تمیز کنیم حتما فردا باران می‌بارد

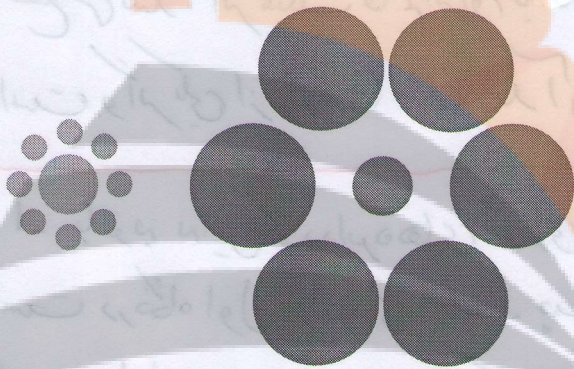
(و) ماکه سانس نداریم تا سردمان را بلند می‌کنیم اما سوسه می‌شود (یعنی تو نیم قلب کنیم)

۲- نتیجه تیری نادرست: چون ارتفاع‌ها در این سه مثلث هم‌دیر را درون مثلث قطع کردند لذا نتیجه ما گیریم در هر مثلث سه ارتفاع هم‌دیر را درون مثلث قطع می‌کنند

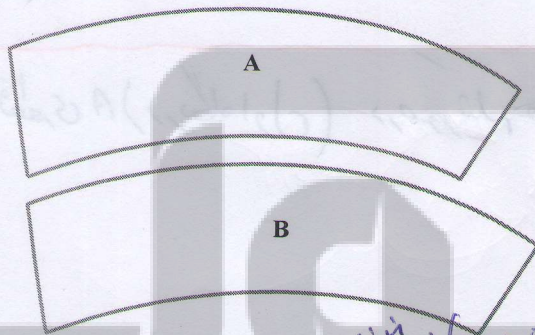
تلاشی در مسیر موفقیت

آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ **خیر**
 یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند. **بسیار ۳۴۱**
 اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ **قسمت اول (فعالیت ۱)**

فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ **ظاهرًا مساوی می‌باشند**
 الف) با مشاهده تشخیص دهید. **سمت چپ**
 ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید.
 دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. **با هم برابرند**

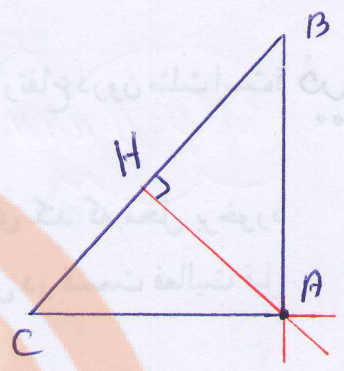
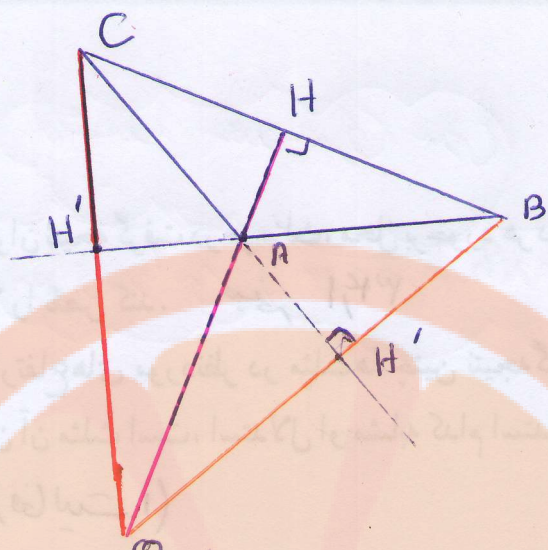


۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) **A**
 با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه

کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ **خیر، هم اندازه می‌باشند**
 ۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع

کافی است؟ چرا؟ **خیر، چون مشاهده به تنهایی هیچ‌چیز به نتایج درست نمی‌شود**

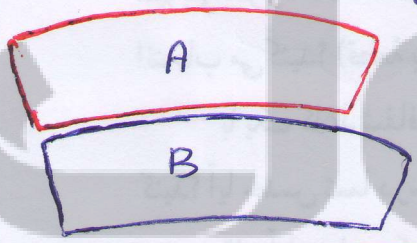
هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.



نتیجه: اگر هر سه زاویه‌ی یک مثلث تند (حاد) باشد آنگاه ارتفاع‌ها داخل مثلث بیرون کشیده را قطع می‌کنند. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد محل برخورد ارتفاع‌ها رأس زاویه‌ی قائم‌الزاویه مثلث است و اگر یکی از زاویه‌ها باز باشد آن‌گاه محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث است

فعالیت ۱- با توجه به این‌که دایره‌های کناری در سمت چپ کوچک‌تر از دایره‌های کناری در سمت راست است در نگاه اول دایره‌ی سمت چپ بزرگ به نظر می‌آید در صورتی‌که هر دو دایره باهم برابر می‌باشند (منظور دایره‌ی مرکزی است)

۲ قطعی A (در نگاه اول) در صورتی‌که هر دو قطع باهم برابر می‌باشند



۱- سراب یک پدیده فیزیکی است که در اثر خطای چشم و انعکاس نور از یک هوای گرم در حال حرکت به سمت بالا در مجاورت شن یا زمین سنگی ایجاد می شود

۲- وقتی از بیرون به آب نگاه کنیم عمق آن را کم تر از عمق واقعی

کار در کلاس

آن را بنویس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می کند. در مورد نتایج که از این مثال ها می گیرید با یکدیگر بحث کنید.

صفحه ۳۵۱

تمرین

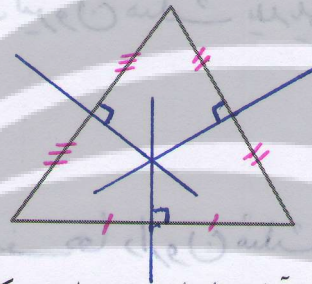
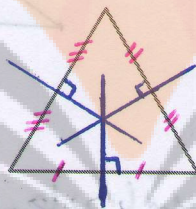
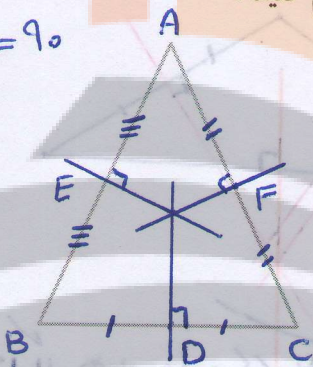
۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید :

$$\hat{E} = \hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$$

$$AE = BE$$

$$AF = CF$$

$$BD = CD$$



آیا فقط با توجه به این شکل ها، می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث

همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ **خبر صفحه ۳۵۱**

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه ای ۱۰۰ کیلوگی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلوگی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال ها بحث کنید. **استدلال نیما صفحه ۳۵۱**

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال های زیر است؟ **استدلال « ج »**

(الف) چون برخی مثلث ها قائم الزاویه هستند پس مثلث های متساوی الاضلاع هم قائم الزاویه اند.

(ب) همه فیلم های جنگی که تاکنون دیده ام، جذاب بوده اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

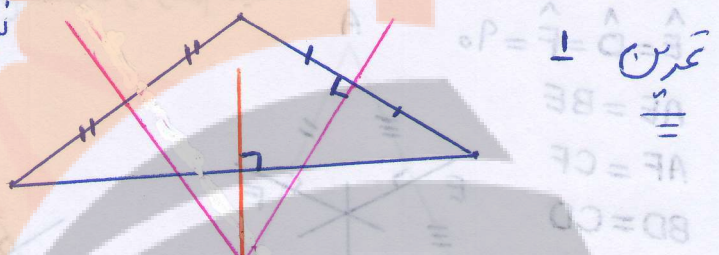
کاردرکلاس ۱- وقتی به ریل قطار نگاه می‌کنیم، احساس می‌کنیم ریل‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر هم‌داد خود را داخل آب یک لیوان فرو ببرید، آن را کوتاه‌تر می‌بینید

۳- سه ظرف محتوی آب سرد، آب گرم و آب ولرم داریم. اگر هم‌زمان دست راست خود را در آب سرد و دست چپ خود را در آب گرم فرو برده پس از مدتی هم‌زمان هر دو دست را درون آب ولرم فرو ببریم، دست راست آب ولرم را گرم و دست چپ آب ولرم را سرد احساس می‌کند

۴- چای داغ چندان تلخ احساس نمی‌شود ولی اگر همان چای سرد شود تلخ‌تر احساس می‌شود

نتیجه: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم عمود منصف‌ها ممکن است بیرون مثلث یا دیگر اقطع کنند



نکته مهم: اگر هر سه زاویه یک مثلث خارجی باشد عمود منصف‌ها درون مثلث هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر یکی از زاویه‌های مثلث ۹۰ درجه باشد (مثلث قائم‌الزاویه) آن‌گاه عمود منصف‌ها روی وتر مثلث یک‌دیگر را قطع می‌کنند

۳- اگر یکی از زاویه‌های مثلث بیش‌تر از ۹۰ درجه باشد آن‌گاه عمود منصف‌ها بیرون مثلث یک‌دیگر را قطع می‌کنند

۲ استدلال هیچ‌کدام کاملاً دقیق نیست، ولی استدلال نینا منطقی‌تر است زیرا وقتی یک نفر با

تقریباً ۹۰ کیلوگرم وزن است و ۹۰ کیلوگرم را بلند کند، پس با احتمال زیادی وزنی ۵۰ کیلوگرمی را هم نمی‌تواند بالا ببرد، استدلال پیرمان، دلیل منطقی ندارد

۳- مسأله استدلالی «ج» است. زیرا هر دو بر اساس یافته‌های قبلی، آئینده را پیش‌بینی می‌کنند تصادف نکردن یک فرد نمی‌تواند دلیلی محکم برای اتفاقات در سفر آئینده باشد. همچنین دکتر

پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه‌ی خاله‌ی کوچکم هم دختر خواهد بود.
د) چون همه‌ی قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دو نفر درباره‌ی چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.
اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۴ استدلال نفر اول غیر منطقی است. اگر در چند خانواده حسین حالتی باشد دلیل

بر تعمیم آن نیست زیرا ممکن است خانواده‌هایی باشند که پسر بزرگ‌تر را حسن و کوچک‌تر را علی نام‌گذاری کرده باشند

اما استدلال نفر دوم کاملاً درست است



چون حسن علی از حسین بزرگ‌تر و حسن حسین هم از حسن حسین بزرگ‌تر است
لذا نتیجه می‌گیریم حسن علی بزرگ‌تر از حسن حسین است

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت

۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است.

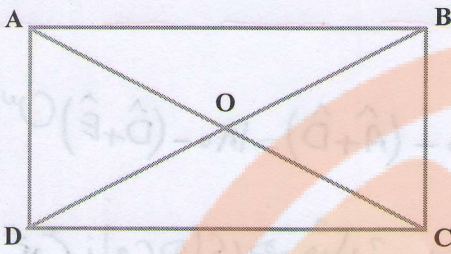
استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. }
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است. }
در لوزی زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است. ⇒

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط

با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا

دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :



فرض : مستطیل ABCD است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.

فرض :

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC, & AD = BC \\ AB \parallel DC, & AD \parallel BC \end{cases}$$

حکم : $AC = BD$

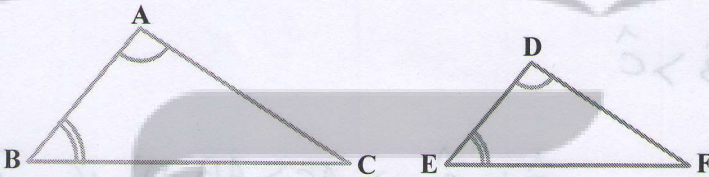
۳۸۱۱

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم

از دو مثلث نیز با هم برابر است.

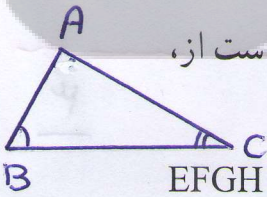


فرض :

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$$

حکم : $\hat{C} = \hat{F}$

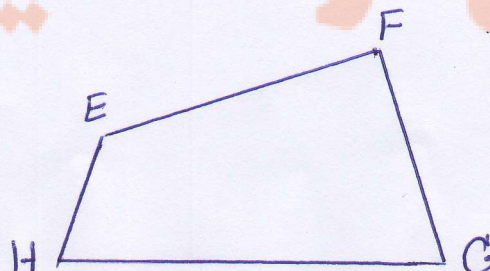
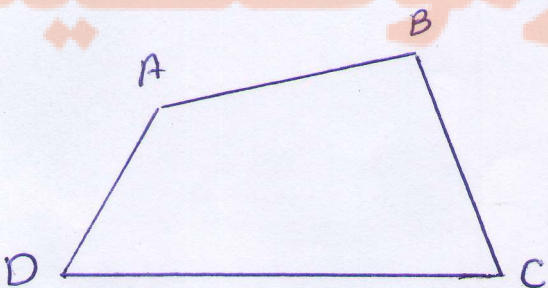
۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از،



ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. حکم : $c > AB$ فرض $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow$

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH

برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است.

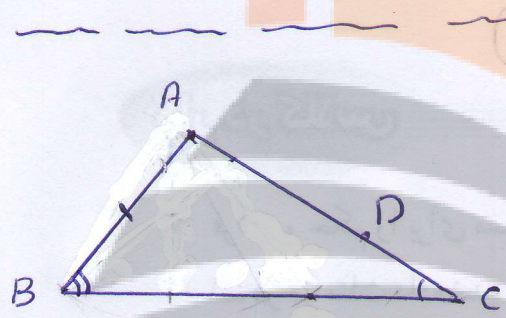


فرض $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 فرض $AD = BC$
 $DC = DC$ } $\xrightarrow{\text{(صن و فرض)}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \implies AC = BD$ فعالیت

کار در کلاس
 فرض $\hat{A} = \hat{D}$
 فرض $\hat{B} = \hat{E}$ $\implies \hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E} \implies 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{D} + \hat{E})$

مردانیم مجموع زاویه های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است

$\implies 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{D} + \hat{E}) \implies \hat{C} = \hat{F}$



$AC > AB \implies \hat{B} > \hat{C}$ ۲

روی ضلع بزرگ تر یعنی AC به اندازه ی AB جدا می کنیم
 $\implies AB = AD \implies \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
 در مثلث B_1DC داریم: $\hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}$

$\implies \hat{B}_1 > \hat{C}$
 $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ } $\implies \hat{B} > \hat{C}$

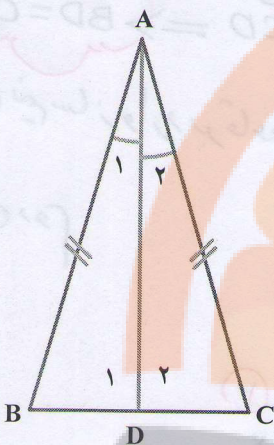
عکس قضیه ی بالا $\hat{B} > \hat{C} \implies AC > AB$

برهان خلف اگر $AB = AC$ باشد آن گاه داریم $\hat{B} = \hat{C}$

اگر $AB > AC$ آن گاه طبق قضیه ی بالا داریم $\hat{C} > \hat{B}$ بنابراین داریم $AC > AB$

فرض $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H}$
 مردانیم $\hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{C} = 360^\circ$
 $\hat{F} + \hat{H} + \hat{E} + \hat{A} = 360^\circ$ } $\implies \hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{A}$ ۳

فعالیت



۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:

مثلث ABC متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است. ثابت کنید AD میانه نیز هست:

فرض: $AB = AC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم: $BD = CD$

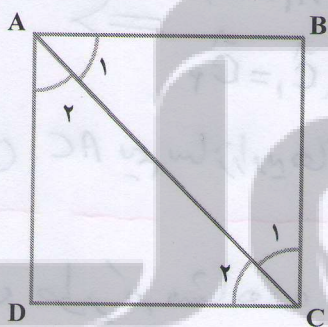
استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است، پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث های ADB و ADC به حالت دو زاویه

و ضلع بین (زضز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه: $BD = DC$ صحیح ۳۹/۱

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن

است؟ به عبارتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. **خیر، خیر**



۲- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که

قطر AC از مربع $ABCD$ نیمساز زاویه های A و C است. چون

دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای

متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC

نیمساز است. صحیح ۳۹/۱

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر

نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ **بله**

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در

فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام

ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد،

می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

① فعالیت: پاره خط AD نیم سازه است پس می توانیم نتیجه بگیریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ولی نمی توانیم تساوی بین دوزاوی \hat{D}_1 و \hat{D}_2 را نتیجه بگیریم پس

(این نتیجه گیری نادرست است) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow$ AD نیم سازه است

پس نیم سازه وار در هر قاعده میانه نیز می باشد

روش دوم

AD نیم سازه $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 \hat{ABC} متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{AB} = \hat{AC}$
 ضلع مشترک $AD = AD$

(ف. م. م) $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

\hat{ABC} متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 AD نیم سازه است $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ① $\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{C} + \hat{A}_2$

$\Rightarrow 180 - (\hat{B}_1 + \hat{A}_1) = 180 - (\hat{C} + \hat{A}_2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ②

① $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 ② $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 AD = AD

(م. م. م) $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

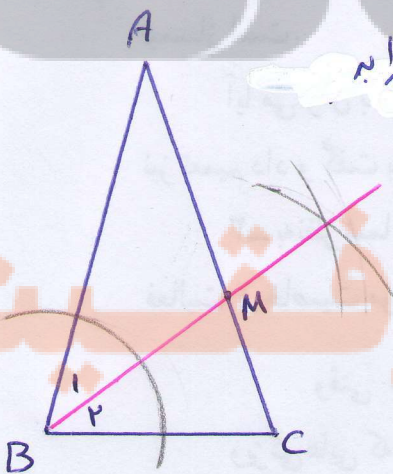
این خاصیت قابل تعمیم به تقسیم زاویه ها می باشد

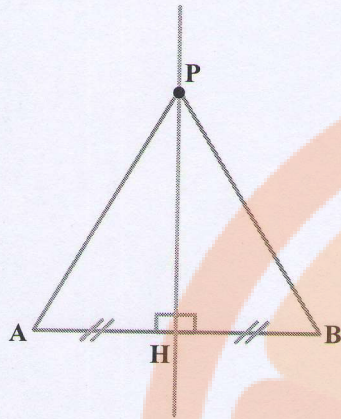
AB = AD خاصیت مربع $\hat{ABC} \cong \hat{ADC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases} \Rightarrow$ ②

CB = CD
 AC = AC ضلع مشترک

پس AC نیم سازه زاویه های \hat{A} و \hat{C} می باشد

همان طور که مشاهده می کنیم نیم سازه زاویه ای \hat{B} ضلع AC را به دو قسمت مساوی تقسیم نمی کند پس میانه نمی باشد





۴- نقطه‌ای مانند P، روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت است، نتیجه می‌شود پاره خط‌های PA و PB با هم برابر است. بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر»

نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟ چون نقطه P دلخواه می‌باشد با تغییر مکان نقطه P

روی عمود منصف باز هم شرایط برقرار است، بنابراین برای هر نقطه‌ی روی عمود منصف

قابل تعمیم می‌باشد (نقطه‌ی P نمایندگی تمام نقاط روی عمود منصف است)

کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده‌اند:

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

استدلال حامد: حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه

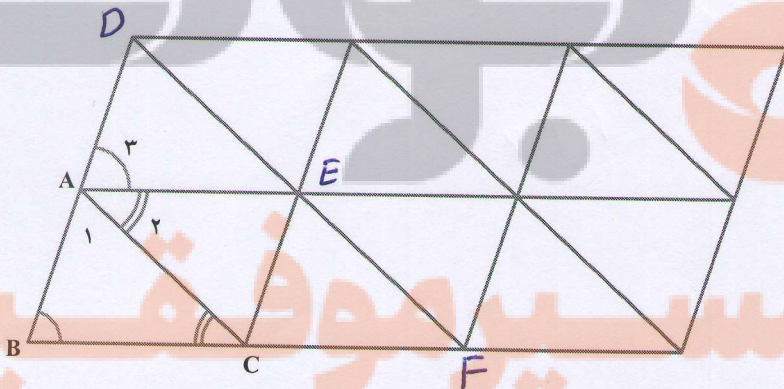
درد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. نادرست است، زیرا یک مثلث خاص در نظر گرفته شده است

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را شده است

اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع

زوایای داخلی هر مثلث 180° است. با بررسی مجموع زاویه‌ها در چند مثلث می‌توان آن تعمیم داد. نادرست است

استدلال مهدی: مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است را کشید و



با مشخص کردن زاویه‌های مثلث

ABC به صورت مقابل، استدلالی

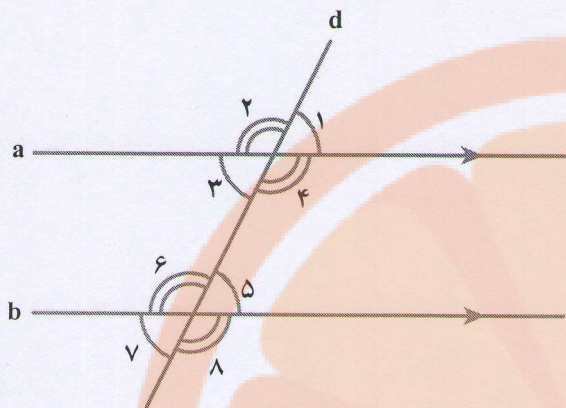
با استفاده از شکل به صورت زیر

آورد:

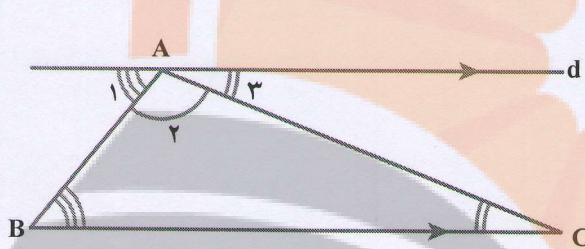
این استدلال نیز نادرست است؛

زیرا در مورد این هم نقاط A, B, D در یک امتداد

(در دید راست) قرار دارند و همچنین نقاط (B, C, F)



استدلال رضا: رضا گفت می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره های ۱، ۲ و ۳ نشان داده ایم که زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت

نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

در باره معتبر بودن استدلال های این دانش آموزان بحث کنید. استدلال رضا کاملاً درست است

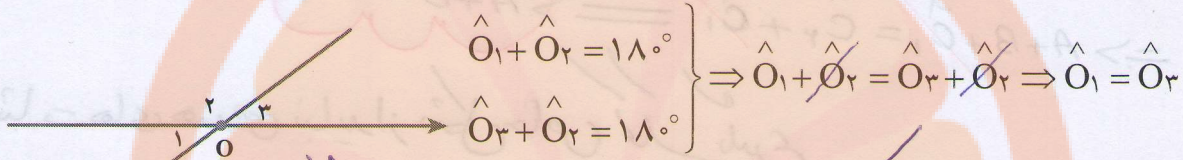
و می توانیم آن را برای بقیه مثلث ها نیز تعمیم دهیم

فعالیت

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = 5000 \\ \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = \text{پول بهرام} + \text{پول حمید}$$

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟ هر دو از **استدلال مسئله** : نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابر است. استفاده می کنند فرض کنیم \hat{O}_1 و \hat{O}_3 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \hat{O}_3 + \cancel{\hat{O}_2} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

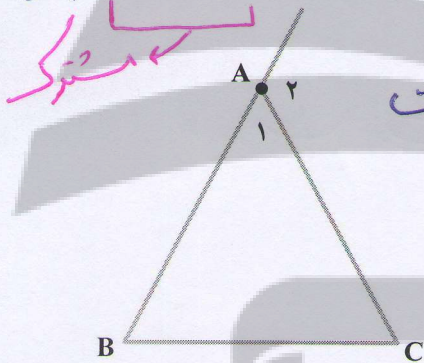
① دو مقدار مساوی باید مقدار خودشان نیز با هم مساوی می باشند

$$a = b \quad c = b \quad \Rightarrow \quad a = c$$

② وقتی در دو عبارت مساوی دو مقدار برابر داریم آن گاه دو مقدار دیگر نیز با هم **تساوی**

$$a + b = c + b \Rightarrow a = c$$

مساوی می باشند



۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل

بیاورید. **خیر معتبر نیست چون از حالت خاص استفاده شده است**

مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع

اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن برابر است.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.

می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای

\hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° است، بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

صفحه ۴۲۱

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را

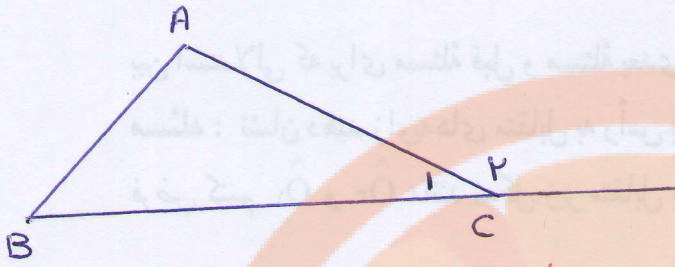
می توان بدین صورت هم آورد: «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون

آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که

محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های

زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

تعمیر برای اثبات یک مسئله باید آن را در یک شکل دلخواه انجام دهیم و اثبات در یک شکل خاص مورد قبول نمی باشد



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180$$

$$\hat{C}_2 + \hat{C}_1 = 180$$

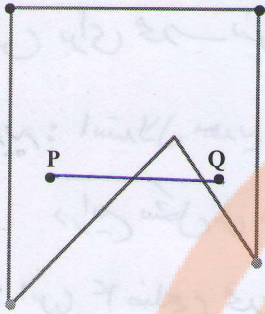


$$\Rightarrow A + B + \hat{C}_1 = \hat{C}_2 + \hat{C}_1$$

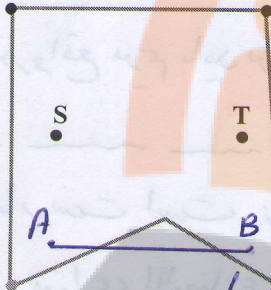
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$$

در اثبات های هندسی نباید از شکل خاص کلی بگیریم

تلاشی در مسیر موفقیت

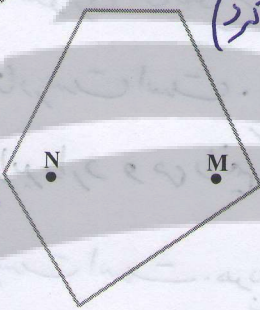


نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. **کاملاً درست است و یک مثال ناقص برای محدب نبودن این چهار ضلعی است، چون تمام نقاط این پاره خط درون ۴ ضلعی نیست**



مهديه : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. **نادرست است، زیرا این خاصیت را باید برای**

هر دو نقطه ای دلخواه بررسی کرد برای مثال تمام نقاط پاره خط AB درون ۴ ضلعی نمی باشند (باید مثال یا چند مثال نمی توان شمیر شمیر کرد)



مریم : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. **نادرست است، ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال**

۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{مستطیل ABCD است.}$

۴۳/۱ صحیح

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{همه ضلع های ABCD، با هم برابر نیستند.}$

۴۳/۱ صحیح

ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع ها برابر نیستند.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD مربع نیست.}$

۴۳/۱ صحیح

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط

۴۳/۱ صحیح

عمود می شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز

مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این

نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

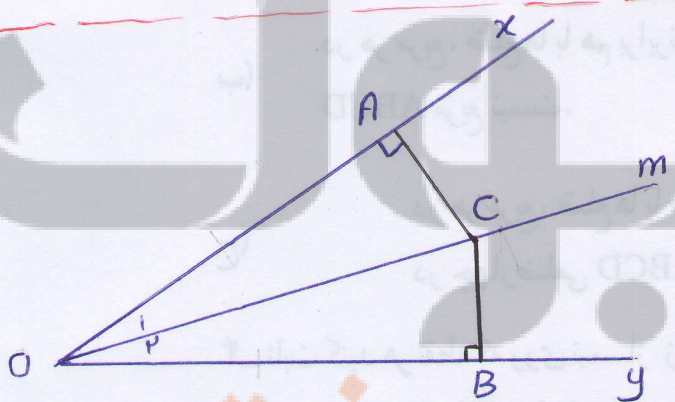
حکیم نرگس: برای اثبات محذب بودن باید وضعیت هر دو نقطه دلخواه را بررسی کنیم ولی یک مثال نقض برای محذب نبودن کافی است و در واقع نرگس پاره خط p, q را به عنوان مثال نقض برای محذب نبودن آورده است

مهدیه: استدلال مهدیه نادرست است. زیرا این خاصیت باید برای هر دو نقطه دلخواه بررسی شود در این شکل می توان پاره خطی رسم کرد که نادرستی استدلال را نشان دهد (مثال: AB)
 مریم: این ۴ ضلعی محذب است ولی استدلال مریم ناقص است (درست نیست) در واقع مریم باید برای هر دو نقطه دلخواه این خاصیت را بررسی کند

۳ الف) نادرست است. زیرا هر متوازی الاضلاع لزوماً یک متطیل نیست در صورتیکه هر متطیل یک متوازی الاضلاع است

ب) نادرست است. زیرا این ۴ ضلعی می تواند لوزی باشد. لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد و می دانیم یک لوزی لزوماً یک مربع نیست در صورتیکه تمام مربعها لوزی می باشند

ج) درست است. مربع یک چهار ضلعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه ی مساوی دارد چون چهار ضلع این چهار ضلعی برابر نیست لذا می توان نتیجه گرفت $ABCD$ مربع نمی باشد



۴ زاویه ی دلخواه α و $\hat{O}y$ را در نظر می گیریم و نیم ساز آن را رسم می کنیم. نقطه ی C را به دلخواه روی آن در نظر می گیریم و از نقطه ی C دو عمود بر اضلاع Ox و Oy رسم می کنیم

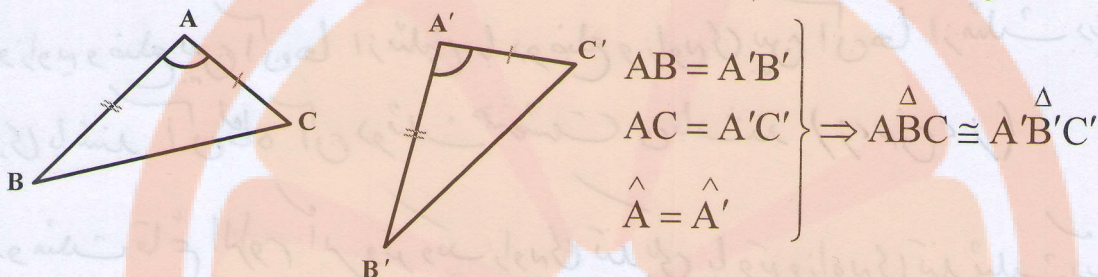
$$\left. \begin{array}{l} \text{تعریف} \\ OA = OB \text{ نیم ساز است} \\ OC = OC \text{ وتر مشترک} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(90)} \triangle OAC \cong \triangle OBC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BC$$

چون نقطه ی C دلخواه است. بنا بر این نتیجه می گیریم برای هر نقطه دلخواه روی نیم ساز این خاصیت برقرار است پس هر نقطه روی نیم ساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

درس سوم: همنهشتی مثلث ها

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می خواهیم این حالت ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را این گونه نمایش می دهیم:



برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث های

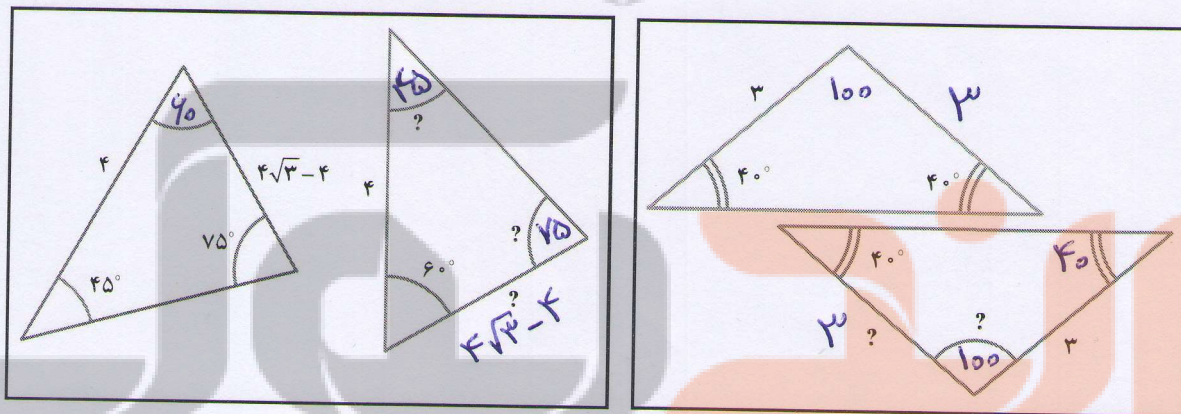
قائم الزاویه را به همین صورت بیان کنید. صفحه ۴۴۱

(ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز) و تریک زائوی تند (وز)
 و تریک ضلع زائوی قائمه (و ض)

فعالیت

۱- در شکل های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت اند. اندازه پاره خط ها و

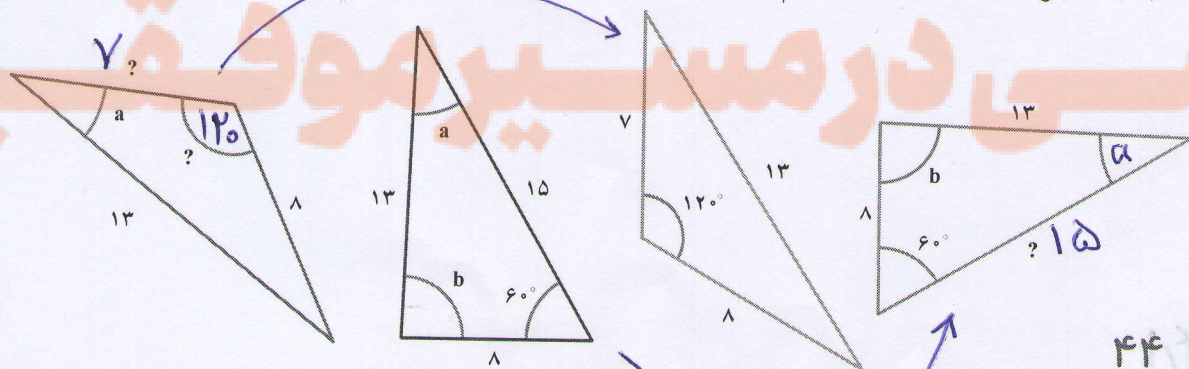
زاویه های مجهول را روی شکل مشخص کنید:



۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت اند. ابتدا مثلث های

همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه هایی

که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



یادآوری ۱- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث باهم همبصفت می باشند (ض ض ض)

۲- اگر دو ضلع و زاویه ی بین آن ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه ی بین آن دو ضلع از مثلث دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث باهم همبصفت می باشند (ض ز ض)

۳- اگر دو زاویه و ضلع بین آن ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه ی بین آن ها از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث همبصفت می باشند (ز ض ز)

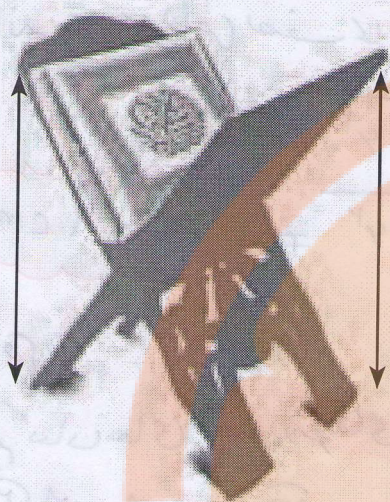
۴- در دو مثلث قائم الزامی اگر وتر و یک زاویه ی تند یکی با وتر و زاویه ی تند دیگری برابر باشند آن دو مثلث همبصفت می باشند (وز)

۵- در دو مثلث قائم الزامی اگر وتر و یک ضلع زاویه ی قائم یکی با وتر و یک ضلع زاویه ی قائم دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث همبصفت می باشند (و ض)

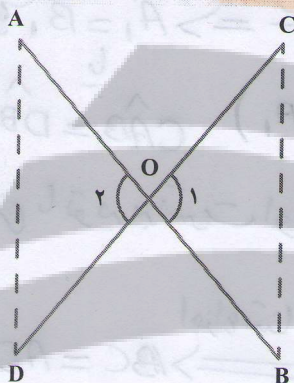
تکلیف ریاضی

تلاشی در مسیر موفقیت

فرض مسئله اطلاعاتی است که طراح سؤال به ما می‌دهد و ما بدون چون و چرا تساوی آن را
را می‌پذیریم؛ در واقع ما مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که فرض درست باشد



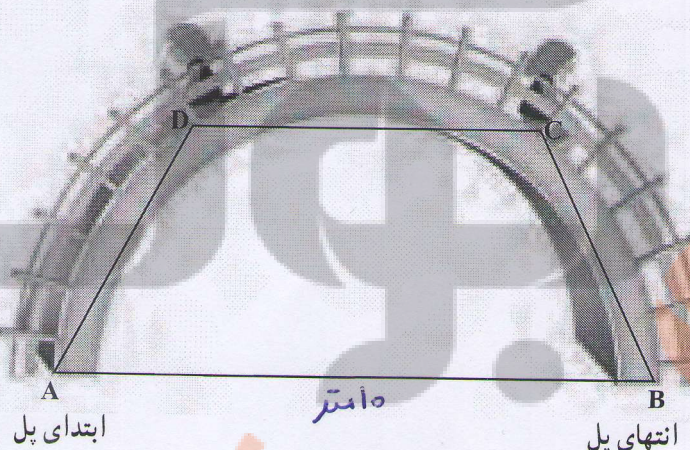
مثال: با راحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه چوبی آن از وسط هم گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که: $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است که: $AD=BC$. زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OBC و OAD همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می‌آید، یعنی:



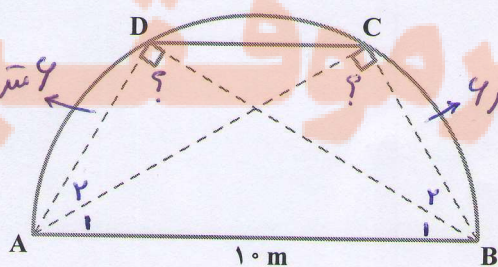
$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } OA = OB \\ \text{فرض } OC = OD \\ \text{مقابل به راس } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

(فرض)

فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای



پل ۶ متر فاصله دارد ($BC=6$) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

صفحه ۴۵

فجائیت

$\hat{C} = \hat{D} = \frac{180}{2} = 90^\circ$ ①

من دانیم زاویہی محاصر نصف کمان مقابل به آن می باشد بنا بر این داریم

$\hat{C} = 90 \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow AC = 8$

$\hat{D} = 90 \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow BD = 8 \text{ cm}$

روس دوم:

من دانیم کمان های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی اند بنا بر این داریم

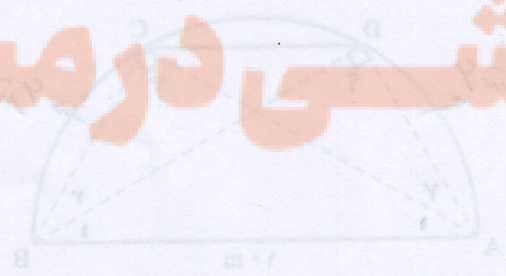
$(BC = AD = 4 \text{ cm}) \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ②

$\hat{CAB} = \hat{DBA}$ (زاویہ محاصر دو کمان های BC و AD است)

از طرفی با توجه به قسمت اول (سوال 1) داریم $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ بنا بر این داریم

$\left. \begin{matrix} \textcircled{1} \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ \textcircled{2} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \\ AB = AB = 10 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC = AD$

نرخجه بولک
تلاشی در مسیر موفقیت



$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } CD = BC \Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow DM = BN \\ \text{فرض (خواص لوزی): } \hat{D} = \hat{B} \\ \text{فرض: } AD = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(من زین)}} \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

سؤال ۲

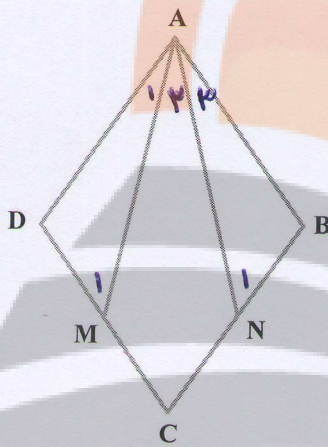
۱- نشان دهید زاویه های \hat{D} و \hat{C} در شکل، قائمه است. طول های AC و BD را به کمک

صفحه ۴۵/۱

قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC = BD$

۲- به کمک همنهشتی مثلث های ACB و ADB، نشان دهید $AC = BD$. صفحه ۴۵/۱

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های

اضلاع CD و CB هستند. می خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض} \begin{cases} AD = AB = CD = BC, & BN = \frac{BC}{2} \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D} & , DM = \frac{CD}{2} \end{cases}$$

حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN

همنهشت اند.

۳- حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\triangle ADM \cong \triangle ABN \Rightarrow \begin{cases} AM = AN \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ یا } \hat{DAM} = \hat{BAN} \\ \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \text{ یا } \hat{AMD} = \hat{ANB} \end{cases}$$

کار در کلاس



می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند

شکل روبه رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابر است.

مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را

بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه،

نظر چند دانش آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤال ها پاسخ دهید.

$$\text{فرض} \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

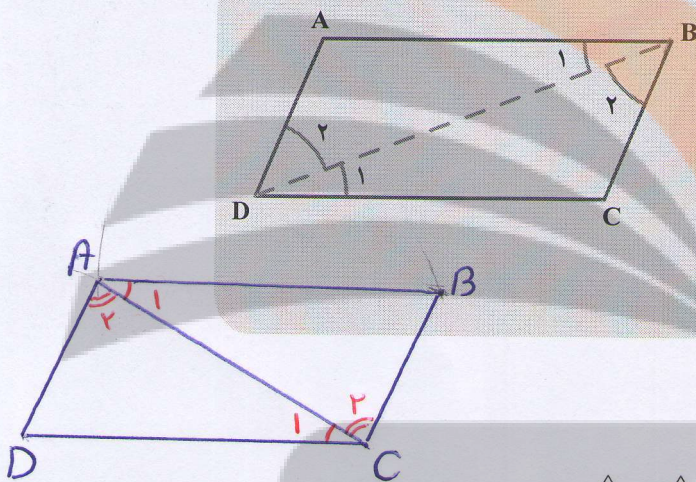
$$\text{حکم} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

شبنم: در تعریف متوازی الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ **خیر، زیرا خطا داریم**
- به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ **خیر، زیرا اندازه‌گیری همواره با خطا دارد (خطای انسانی، خطای ابزار)**

ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم، اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ و مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (ز ض ز)} \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \begin{cases} AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{cases}$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \end{cases}$$

خرف سؤرد دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ بنابراین داریم:

و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ بنابراین داریم:

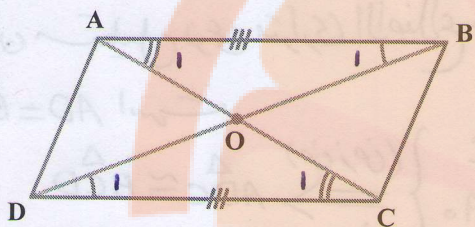
- چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ **چون ما فقط یک ضلع برابر داریم**
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم **نیاز به ضلع برابر داریم** **نیاز به دو ضلع برابر داریم**

قطر AC به دست آوریم؟ بله

$$\left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ADC \cong \triangle CBA \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \begin{cases} AD = BC \end{cases}$$

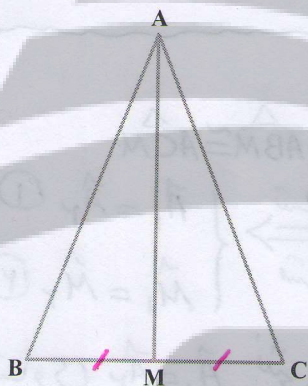
- از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های ... روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین



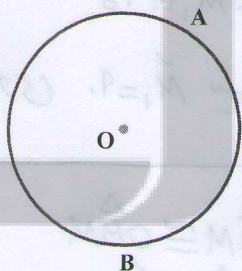
۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$. صفحه ۴۸۱

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!) صفحه ۴۸۱



۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ A است؟ چرا AM بر BC عمود است؟ صفحه ۴۸۱

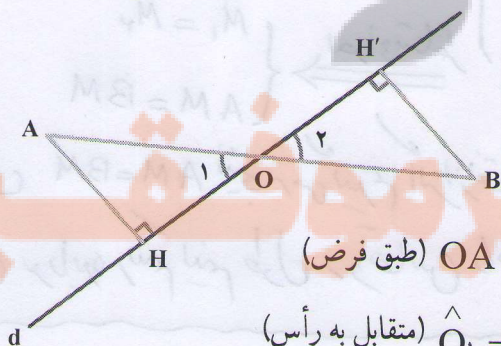
۴- از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ آری برابر است



صفحه ۴۸۱

درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های M، A و B وصل کنید.)

۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB گذشته و از B و A از d به یک فاصله‌اند. ثابت کنید $OH = OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH = OH'$ بحث کنید:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ AH = BH' \text{ (فرض)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض زض)} \\ \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH' \Rightarrow OH = OH' \end{array}$$

۴۸ اثبات نادرست است؛ زیرا زاویه \hat{O}_1 بین OA و AH نیست و زاویه‌ی \hat{O}_2 هم بین

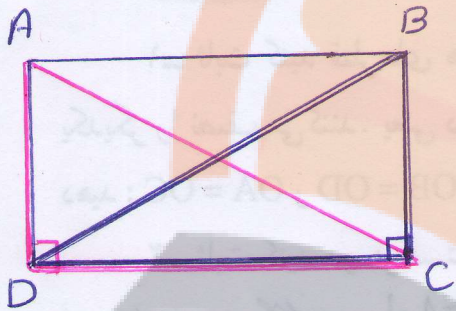
$(AB \parallel CD, \text{مور } AC) \implies \hat{A}_1 = \hat{D}_1$
 $(AB \parallel CD, \text{مور } BD) \implies \hat{B}_1 = \hat{C}_1$
 $(\text{خواص قبلی متوازی الاضلاع}) AB = DC$

(رض ز) $\implies \triangle ADB \cong \triangle DOC \implies$
 تساوی اجزای $\left\{ \begin{array}{l} OA = OC \implies \text{O وسط است AC} \\ OB = OD \implies \text{O وسط است BD} \end{array} \right.$
 متناظر

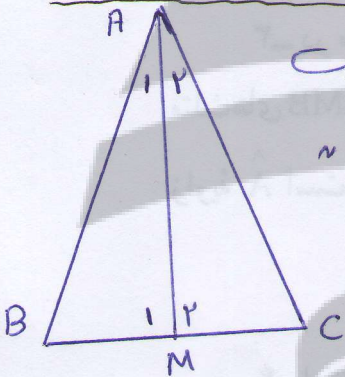
نتیجه \perp

نتیجه: بنابراین قطرهای یکدیگر را نصف می کنند

۲. چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع می باشد پس داریم



$AD = BC$ است
 فرض $\left\{ \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ DC = DC \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right. \implies \triangle ADC \cong \triangle BCD$
 (رض ز)
 اجزاء متناظر $\implies AC = BD$



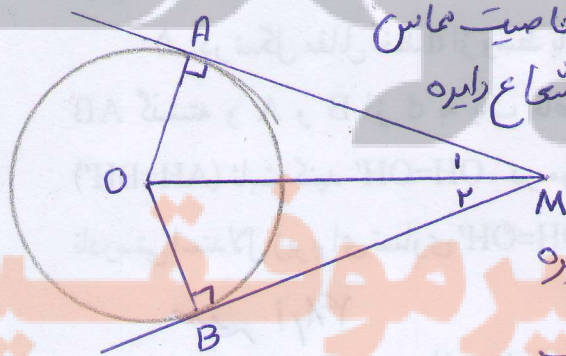
$ABC: AB = AC$ متساوی الساقین است
 $\hat{B} = \hat{C}$
 $AM: BM = CM$ میانه است
 (رض ز) $\implies \triangle ABM \cong \triangle ACM$
 تساوی اجزای $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (1)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (2)} \end{array} \right.$
 متناظر

۳

از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نتیجه می گیریم که AM نیم ساز زاویه A است

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$
 $\xrightarrow[\hat{M}_1 = \hat{M}_2]{\text{طبق رابطه 2}} \hat{M}_1 + \hat{M}_1 = 180^\circ \implies 2\hat{M}_1 = 180^\circ \implies \hat{M}_1 = 90^\circ$

از تساوی $\hat{M}_1 = 90^\circ$ نتیجه می گیریم $AM \perp BC$



$A = B = 90^\circ$ خاصیت مماس
 $OA = OB$ شعاع دایره
 $OM = OM$
 (رض ز) $\implies \triangle OAM \cong \triangle OBM$
 اجزاء متناظر $\left\{ \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM = BM \end{array} \right.$

۴

از تساوی $AM = BM$ نتیجه می گیریم که M بر وتر عمود است
 دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است

d از وسط AB گذشته است $\implies OA = OB$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل در رأس
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 (رض ز) $\implies \triangle AHO \cong \triangle BHO$
 اجزاء متناظر

۵

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

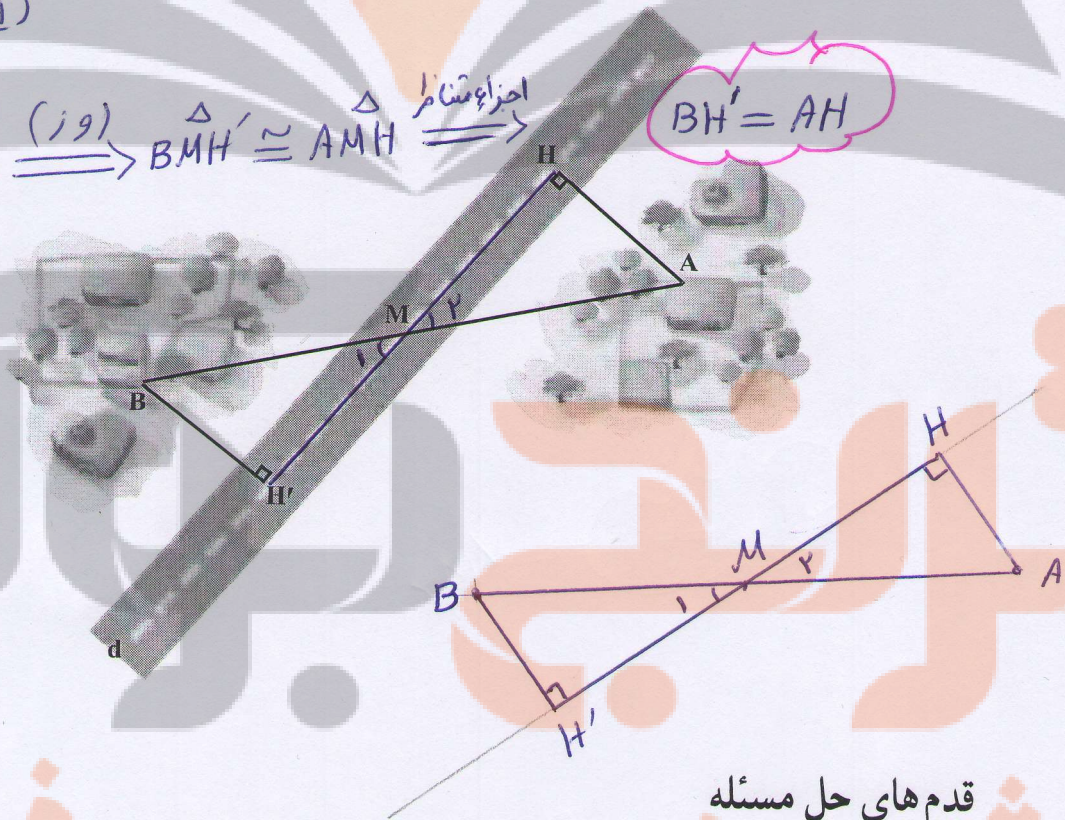
برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جاده آسفالتی درست از وسط جاده خاکی عبور می کرد. اداره راه سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جاده آسفالتی با کوتاه ترین فاصله ممکن تا جاده اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جاده مستقیم، عمود بر این جاده اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه های ساخت جاده دیگر از روستای B، مهندسان پیش بینی کرده اند که فاصله روستای B از جاده نیز همین مقدار

است؛ یعنی $AH=BH'$. چون جاده های آسفالتی از وسط جاده های خاکی عبور می کنند داریم

$$BM = AM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad BM = AM \\ M_1 = M_2 \text{ متقابل به واسطه } \\ \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از اوتشما}} \triangle BMH' \cong \triangle AMH \xrightarrow{\text{وز}} \triangle$$



قدم های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصله نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟ آری
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید:

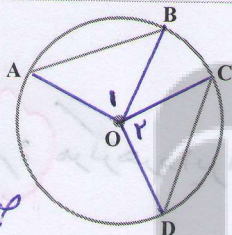
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} (MA=MB \text{ طبق فرض}) \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (مقابل برابر)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \Rightarrow \triangle AMH \cong \triangle BMH' \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت



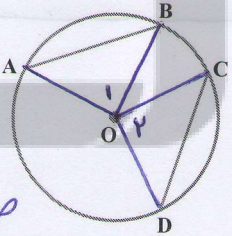
صفحه ۱۵۰

در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است.

فرض: $AB = CD$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



صفحه ۱۵۰

۲- در شکل مقابل کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است. نشان

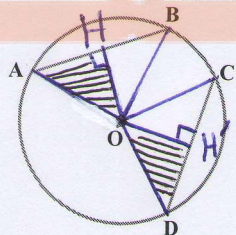
دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

حکم: $AB = CD$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر

برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



صفحه ۱۵۰

۳- از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود

شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره

از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

کاردرکلاس

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (مقطع فرض)} \\ OA = OD \text{ (شعاع دایره)} \\ OB = OC \text{ (شعاع دایره)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(مض فرض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AB} \\ \hat{O}_2 = \widehat{CD} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

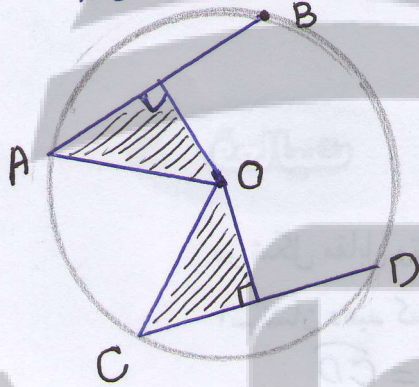
نکته: همه زاویه‌های مرکزی و کمان مقابل آن با هم برابر می‌باشند (از نظر دایره)

نتیجه: کمان‌های نظیر وترهای مساوی از یک دایره با هم مساوی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ فرض} \\ OA = OD \text{ (شعاع دایره)} \\ OB = OC \text{ (شعاع دایره)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(مض فرض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

نتیجه: وترهای نظیر کمان‌های مساوی از یک دایره با هم برابرند.

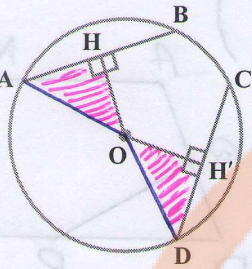
$$AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{r} = \frac{CD}{r} \Rightarrow AH = DH' \left\{ \begin{array}{l} \text{(وض)} \\ OA = OD \text{ شعاع دایره} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH'$$



$$\xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} OH = OH'$$

نتیجه: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن، یک فاصله است.

تلاشی در مسیر موفقیت



۴- در شکل مقابل می دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH=OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

$$OA = OD = \text{شعاع}$$

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$$

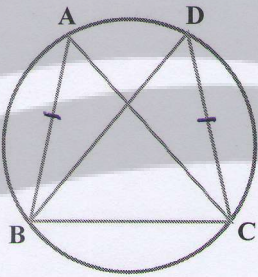
$$OH = OH' \text{ (فرض)}$$

(وض)

$$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow$$

$$2AH = 2DH' \Rightarrow AB = CD$$

کار در کلاس: اگر دو وتر در یک دایره از مرکز به یک فاصله باشند آن دو وتر با هم مساوی اند.



در شکل مقابل می دانیم $AB=CD$

۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟ زیرا وترهای نظیر همان های مساوی با هم
۲- جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: برابرند

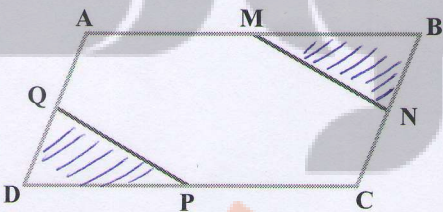
$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{BC} = \widehat{BC}$$

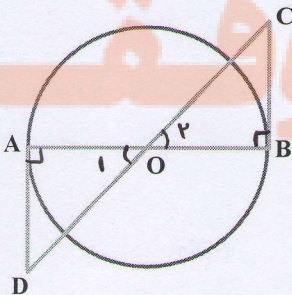
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$$

۳- چرا $AC=BD$ ؟ می دانیم وترهای نظیر همان های مساوی با هم برابرند

تمرین



۱- در شکل مقابل متوازی الاضلاع ABCD متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع است، ثابت کنید: $MN=PQ$



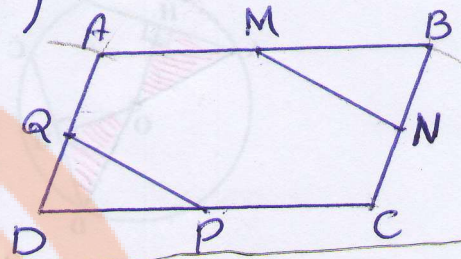
۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.

فرض $AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{r} = \frac{BC}{r} \Rightarrow DQ = BN$

فرض $CD = AB \Rightarrow \frac{CD}{r} = \frac{AB}{r} \Rightarrow DP = BM$

خواص متواری الاضلاع: $\hat{D} = \hat{B}$

$\Rightarrow \Delta DQP \cong \Delta BNM$ تساوی اجزای متناظر (فرض) \Rightarrow $PQ = MN$



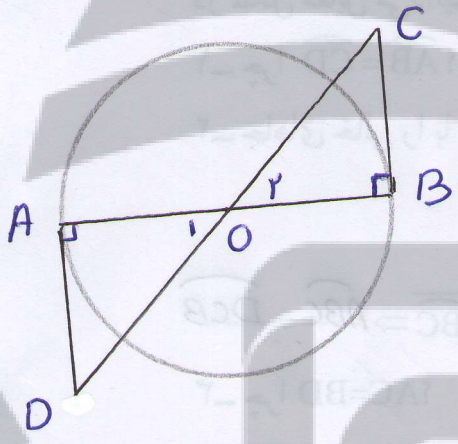
مخرجین
 \cong

$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
(شعاع دایره) $OA = OB$
(مقابل برابر) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

(فرض ز) $\Rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OBC$ تساوی اجزای متناظر

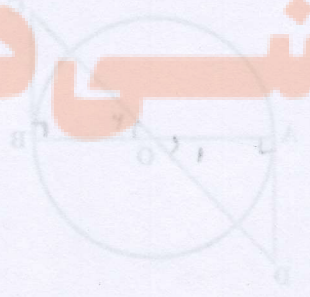
$\Rightarrow AD = BC$

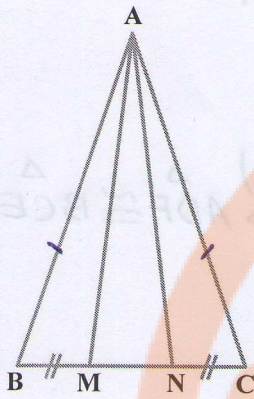
نکته: هر دایره خط مماس بر دایره در نقطه‌ای تماس بر آن، بر شعاع دایره عمود است



تلاشی در مسیر موفقیت

تلاشی در مسیر موفقیت



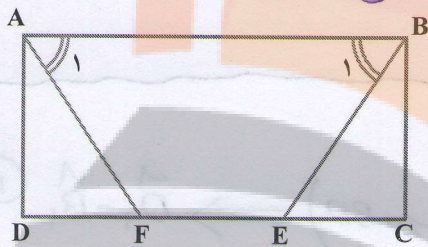


۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = CN$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow AB = AC \\ \textcircled{1} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \text{فرض } BM = CN \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{(فرض فرض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACN \\ \xrightarrow{\text{تساوی اجزاء}} AM = AN \\ \text{مستطرد} \end{array}$$

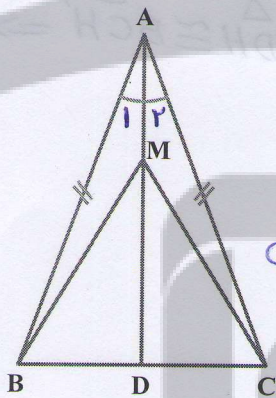
از تساوی AM, AN نتیجه می‌گیریم مثلث AMN متساوی الساقین است



۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط‌های AF و BE

طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید

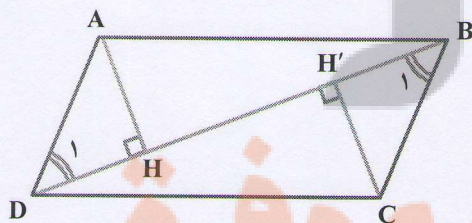
AF و BE مساوی‌اند. صفحه ۱۲۵



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر

نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ (طبق فرض)} AB = AC \\ AD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{(فرض فرض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM \\ \text{تساوی اجزاء} \\ \text{مستطرد} \end{array} \Rightarrow BM = CM$$



۶- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع

است و AH و CH فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD

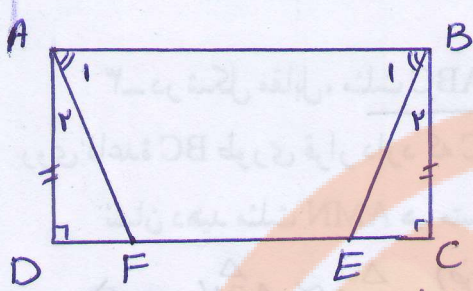
است. دلیل برابری دو زاویه B_1 و D_1 را توضیح دهید.

نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' همنهشتند

و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید، سپس

جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر بین آنها به یک فاصله‌اند.



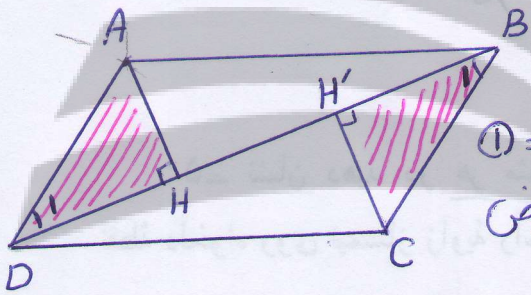
فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow 90 - \hat{A}_1 = 90 - \hat{B}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$ ①

① $\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$ } (از فرض) $\triangle ADF \cong \triangle BCE$
 تعریف مستطیل $\hat{D} = \hat{C} = 90$
 طبق فرض $AD = BC$

تساوی بین اجزای مستطیر

$AF = BE$



$(AD \parallel BC, BD \text{ متوازی}) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ ①

① $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$
 فرض $AD = BC$
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90$

(وز) $\triangle ADH \cong \triangle BCH' \Rightarrow$

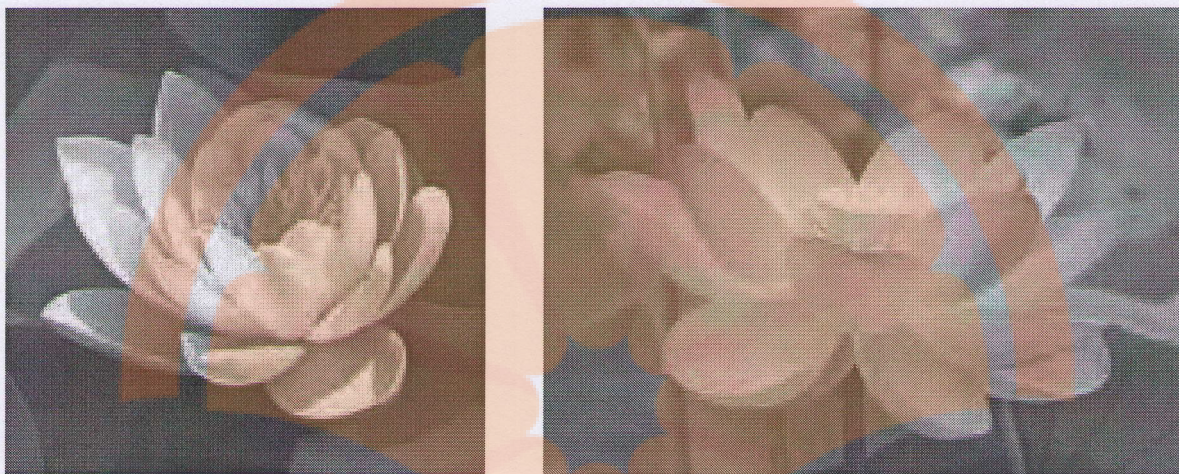
تساوی اجزای مستطیر

$AH = CH'$

تلاشی در مسیر موفقیت

درس پنجم: شکل های متشابه

– در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می بینید. آیا هر دو گل به طور کامل مثل هم است؟ **تصویر**

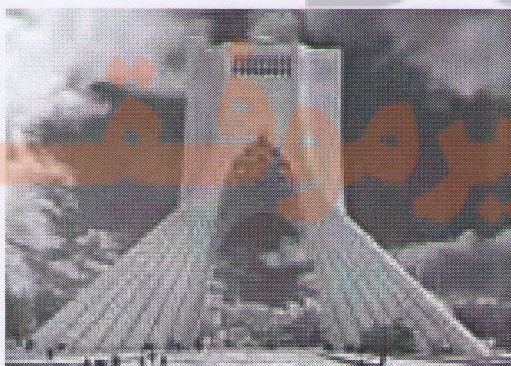


– در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ **در اندازه های تصویر**
عکس شماره ۱ (۲) تصویر کوچک شده ی شماره ۱ (۱) در باشد



– تصویرهای زیر، عکس هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه تر است؟

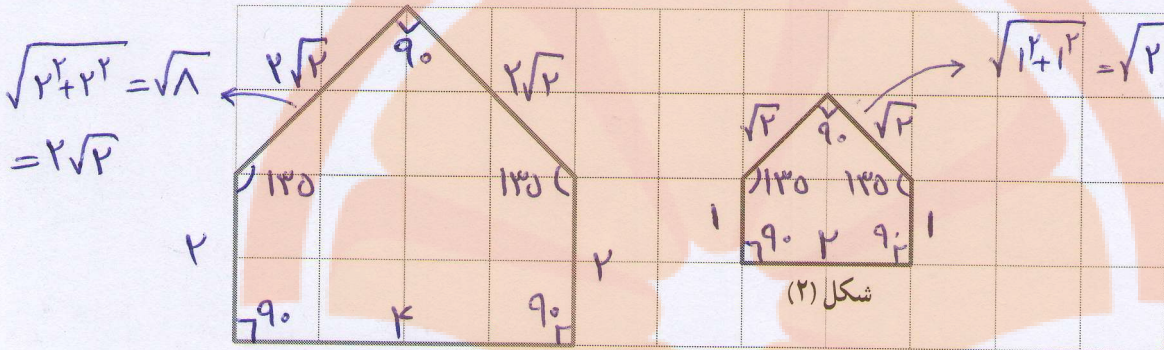
تصویر سمت چپ شبیه تر است



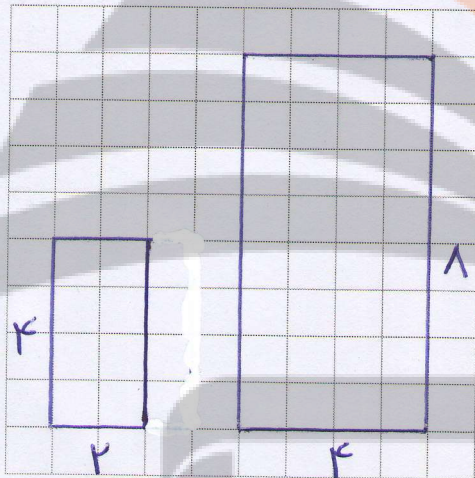
اصلاح شکل سمت راست (۲) نصف ضلع‌های متناظرشان سمت چپ (۱) می‌باشند

فعالیت

۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است:



شکل (۱)

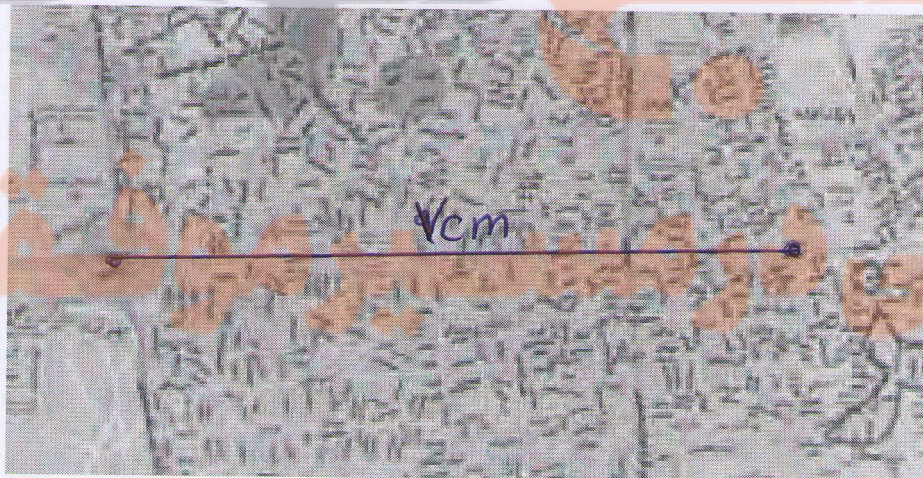


اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید: بالا
 چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟
 چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ برابر باشند
 اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های

شکل (۲) است؟ دو برابر

در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید
 و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه
 ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛
 یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب
 و آزادی را پیدا کنید. *فاصله در کتاب پنجم حدود ۷ سانتی متر است*



$$\sqrt{x} \times 100,000 = 700,000 \text{ سانتی متر}$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم

مشابهند. فرض کنیم دو مربع دلخواه به اضلاع a و b داریم چون همه زاویه‌ها برابر 90° است و نسبت اندازه‌های اضلاع آن‌ها برابر $\frac{a}{b}$ می‌باشد پس این دو مربع دلخواه متشابه می‌باشند.

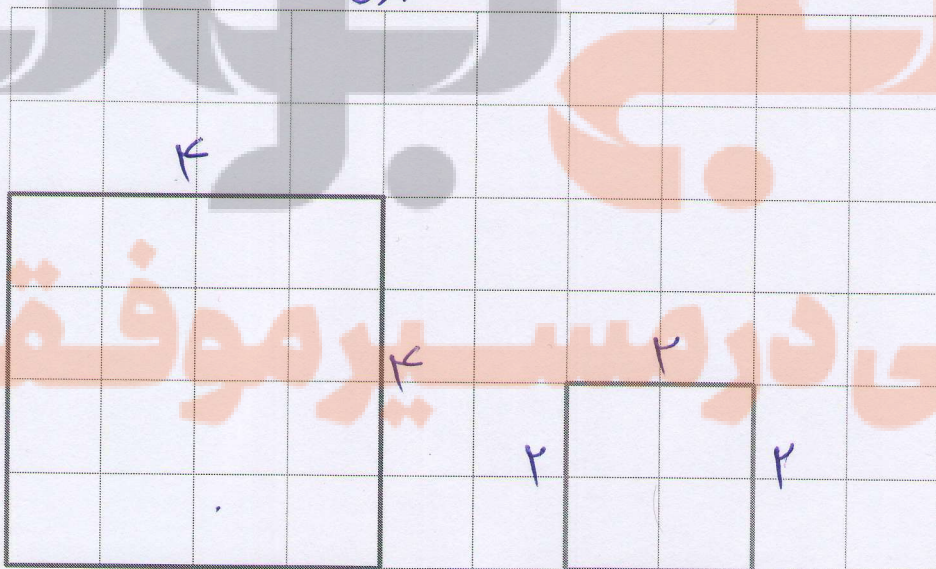
کار در کلاس

آری

۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای

بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های مربع بزرگ تر از برابر ضلع‌های مربع کوچک تر است آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

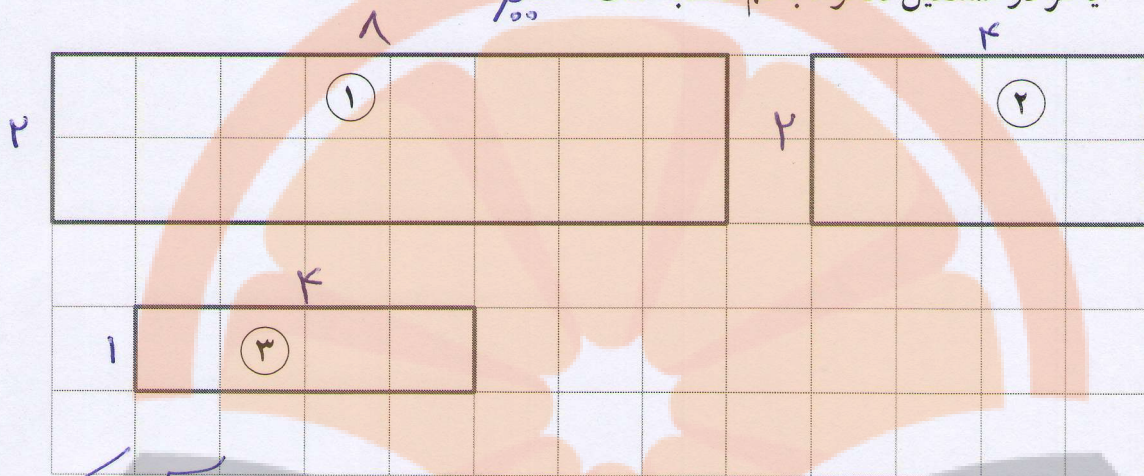
آری



۱۲. زیرا زاویه‌ها همگی برابر 90° است و نسبت اضلاع متناظر آنها برابر $\frac{1}{2}$ یا $\frac{2}{1}$ می‌باشد

۲. از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ شماره او ۳

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ **خیر**



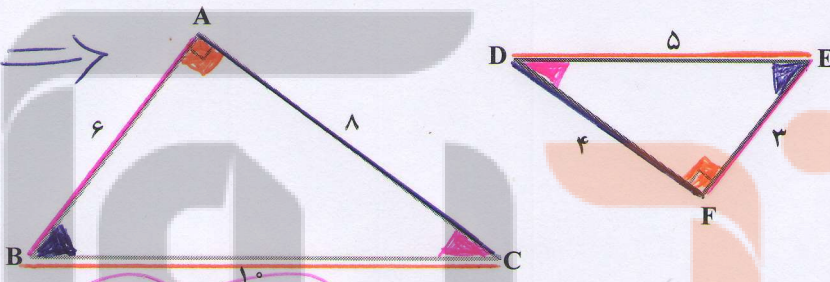
مستطیل شماره ۲، ۱ متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع متناظر آن‌ها یکی

فعالیت $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{2}$ یا $\frac{\text{طول ۲ بزرگ}}{\text{طول ۲ کوچک}} \neq \frac{\text{عرض ۲ بزرگ}}{\text{عرض ۲ کوچک}}$ نسبت

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت

ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{FE} &= \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{FD} &= \frac{8}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{BC}{ED} &= \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\frac{AB}{FE} = \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED} = \frac{1}{2}$$

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

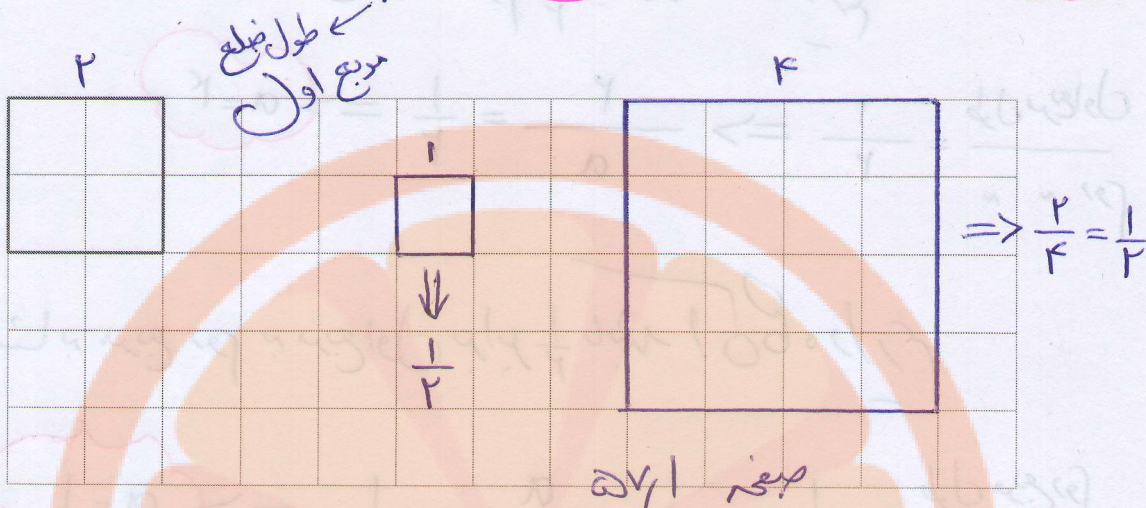
۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{4}$

باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ دارد می‌توانیم ضلع مربع روم را دو برابر

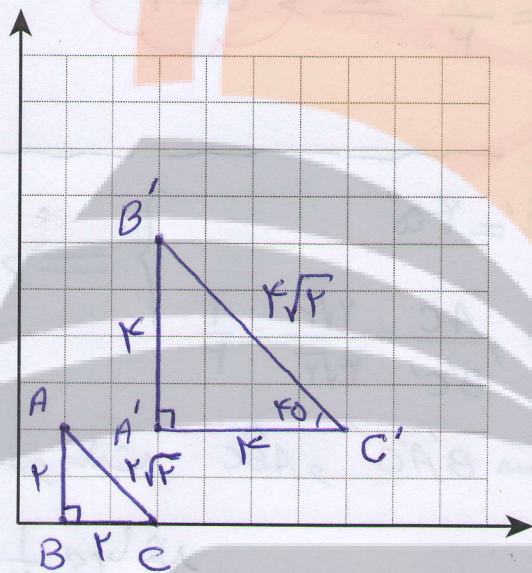
یا نصف کنیم در هر صورت نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{1}{4}$ است ۵۶

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a=1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{a} \Rightarrow a=4$$



صفحه ۵۷



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

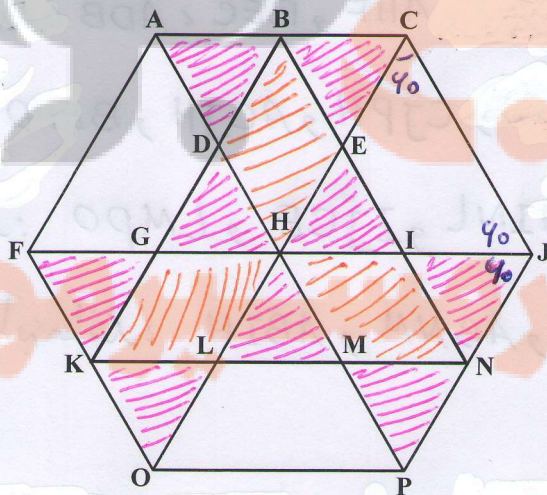
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

تمرین

۱- چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید. صفحه ۵۷



کاردر پلاس $\frac{1}{2}$ اگر نسبت تنسای مربع اول به دوم $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع اول}}{\text{طول مربع دوم}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

اگر نسبت تنسای مربع دوم به مربع اول برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع دوم}}{\text{طول مربع اول}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = 45^\circ, \hat{B} = \hat{B}' = 45^\circ, \hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ$$

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{AC'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

پس دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle B'A'C'$ متنسای می باشند و نسبت تنسای آن‌ها

برابر $\frac{1}{2}$ می باشد

تجدید در این تعداد زیاری مثلث و تعداد لوزی و ذوزنقه و متوازی الاضلاع متنسای وجود

دارد

۱- مثلث‌های متنسای مانند: $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ و $\triangle AHF$ و ...

۲- لوزی‌های متنسای مانند $BEHD$, $ACJH$ و $CJPH$ و ...

۳- ذوزنقه‌های متنسای مانند: $LMPQ$ و $IJCE$ و $HINL$ و ...

۴- متوازی الاضلاع‌های متنسای مانند: $ABIH$ و $ABNM$ و ...

۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بله
در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ نسبت تشابه برابر است

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ خیر

۴- در یک نقشه، مقیاس ۲۰۰:۱ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $\frac{3}{5}$ سانتیمتر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

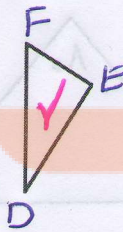
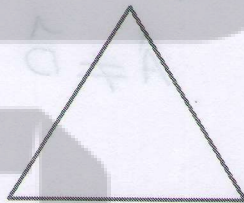
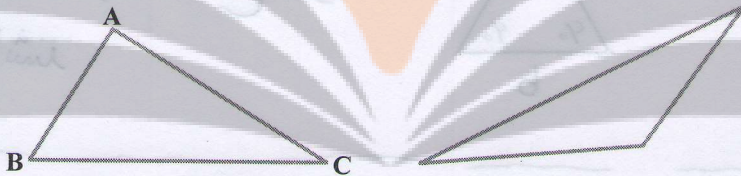
۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ آری

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ خیر

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه

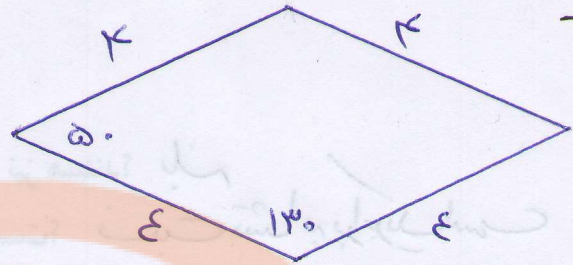
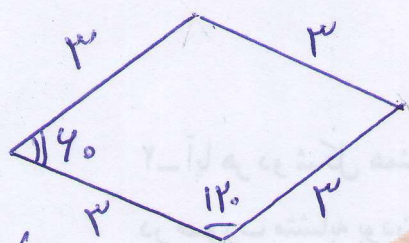
هستند (اندازه ضلع های مثلث ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

تلاشی در مسیر موفقیت



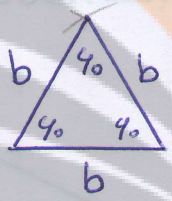
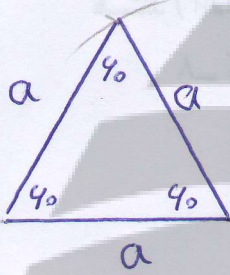
در د ولوزی دخواه نسبت اضلاع نظیر باهم برابر است و لیکن اندازهی زاویه های نظیر لزوماً یکی نیست

۴

$$\frac{\text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار روی نقشه}} = \frac{۱}{۲۰۰} = \frac{۳,۵}{x} \Rightarrow x = ۳,۵ \times ۲۰۰ = ۷۰۰ \text{ CM}$$

۵

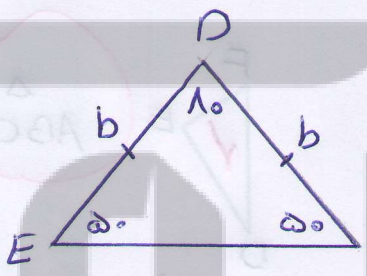
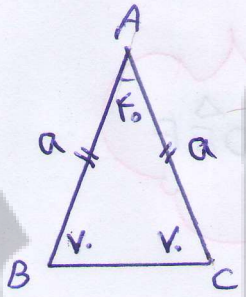
در دو مثلث متساوی الاضلاع دخواه به اضلاع a و b اندازهی تمام زاویه ها



برابر ۶۰° است و نسبت اضلاع نظیر $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ می باشد لذا دو مثلث متساوی الاضلاع دخواه همیشه متشابه می باشند

۶

خیر زیرا ممکن است زاویه های نظیر باهم



برابر نباشد $\hat{A} \neq \hat{D}$

۷

$$\text{دو مثلث متشابه اند} \Rightarrow \frac{x-1}{۴} = \frac{۱۰}{۵} = \frac{x+۷}{۸}$$

$$\frac{x-1}{۴} = \frac{۱۰}{۵} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow x-1 = ۸ \xrightarrow{+1} x = ۹$$

$$\frac{۱۰}{۵} = \frac{x+۷}{۸} \Rightarrow ۸۰ = ۵x + ۳۵ \xrightarrow{-۳۵} ۴۵ = ۵x \xrightarrow{:۵} ۹ = x$$

۵۸/۱

نویسنده: سعید جعفری صهری

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)