

تلاشی در مسیر موفقیت



دانلود گام به گام تمام دروس ✓

دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓

دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓


دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓

مشاوره کنکور ✓

فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

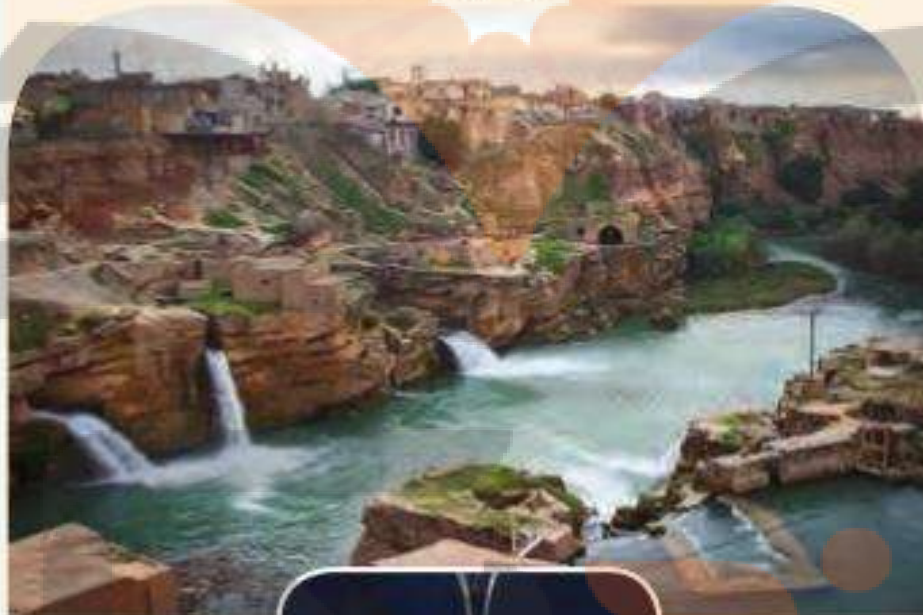
 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)



توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیاء، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت 3.3×10^{22}
نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

تلاشی در مسیر موفقیت

درس اول: توان صحیح

در سال های گذشته با توان های طبیعی یک عدد آشنا شده اید؛ به طور مثال می دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| ۱۶ | ۸ | ۴ | ۲ | ۱ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$ |
| 2^4 | 2^3 | 2^2 | 2^1 | 2^0 | 2^{-1} | 2^{-2} | 2^{-3} | 2^{-4} | 2^{-5} |

$$14 \div 2 = 7$$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارد؟ هر عدد نصف عدد قبلی است

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه ای با عدد بالای آن دارد؟ با آن برابر است

ج) توان های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه ای دارد؟ در هر مرحله یک واحد از توان کم می شود

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید. هشتم

ه) به کمک جدول، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

صفر ۰/۱

توضیح صفر ۰/۱

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$ د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

اگر n یک عدد صحیح منفی باشد آن گاه $-n$ یک عدد طبیعی است

مثال

$$5^{-(-2)} = 5^2 \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{-(-7)} = \left(\frac{3}{5}\right)^7$$

نکته: چرا n نمی تواند یک عدد گویای مثبت باشد

مثال:

$$(-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-5}} \notin \mathbb{R}$$

$\sqrt{-5}$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad \frac{a}{b} \neq 0, \quad b \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

مثال

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{2^{-7} \times 3^2}{2^3 \times 3^{-1}} = \frac{\frac{1}{2^7} \times 3^2}{2^3 \times \frac{1}{3^1}} = \frac{\frac{3^2}{2^7}}{\frac{2^3}{3^1}} = \frac{3^2 \times 3^1}{2^7 \times 2^3} = \frac{3^3}{2^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

کار در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار با توان

طبیعی بنویسید:

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

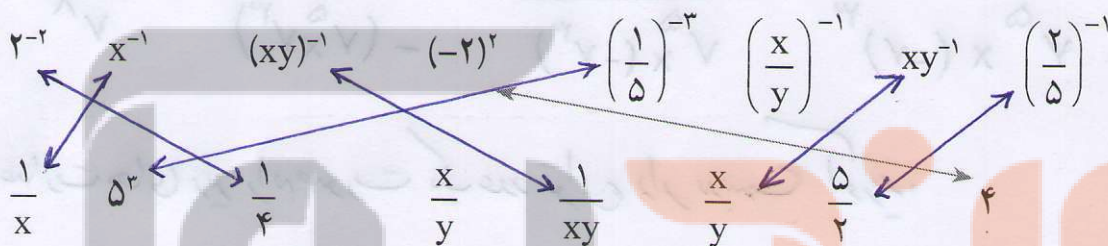
ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$

د) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن گاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: ($x \neq 0, y \neq 0$)



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2$

و) $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$

ز) $\frac{(-3)^0}{3} = \frac{1}{3}$

ج) $(-5)^2 = -5^2 = -25$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2^2}} = -2^2 = -4$

د) $(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4}$

ه) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ی) $2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نکته: اگر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است و اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است

$$(-a)^{2k} = a^{2k} \quad , \quad (-a)^{2k+1} = -a^{2k+1} \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$$

* در صورتی که $a=0$ باشد توان نباید صفر باشد

$$(-1)^{100} = 1 \quad , \quad (-1)^{101} = -1$$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-5)^8 \times 5^{21} = 5^8 \times 5^{21} = 5^{29}$$

$$\frac{(-3)^{11} \times (-3)^7}{2^4 \times (-2)^{12}} = \frac{(-3)^{18}}{2^4 \times 2^{12}} = \frac{3^{18}}{2^{16}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{18}$$

$$\frac{(-7)^{13} \times 7^k}{7^5 \times (-7)^3} = \frac{-7^{13} \times 7^k}{7^5 \times (-7^3)} = \frac{-7^{17}}{-(7^5 \times 7^3)} = + \frac{7^{17}}{7^8} = 7^9$$

حاصل عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بدست آورید.

$$\text{الف) } 10^{-5} \div 2^{-5} = 10^{-5} \div \frac{1}{2^5} = 10^{-5} \times 2^5 = 2^5$$

$$a^m \div b^{-m} = a^m \times b^m = (ab)^m$$

نتیجه:

$$\text{ب) } \frac{5^1 \div 2^3}{2^{-3} \div 5^{-3}} = \frac{5^1 \times 2^{-3}}{2^{-3} \times 5^{-3}} = \frac{5^1}{5^3} = 5^{-2}$$

$$\text{ج) } \frac{7^{-2} \div 3^{-k}}{3^{-k} \times 7^4} = \frac{7^{-2} \times 3^k}{3^{-k} \times 7^4} = \frac{3^k \times 3^k}{7^2 \times 7^4} = \frac{3^{2k}}{7^6} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2k}$$

اگر m و n دو عدد طبیعی، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟ با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشد و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه

زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید: ($b, x, y \neq 0$)

$$5^{-7} \times 5^1 = 5^{-6}$$

$$(-4)^{-1} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-2} = 4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{-7} = \left(-\frac{8}{3}\right)^7$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$b^{-2} \times b^{-3} = b^{-5} = \left(\frac{1}{b}\right)^5$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

مثال ۱: $(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = (-5)^1 = -5$

در واقع $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$
 $(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5} \times \sqrt{-5}$

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5 \times (-5))^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

اگر m و n متعلق به اعداد صحیح نباشند نمی‌توانیم از این دستور استفاده کنیم

نتیجه مهم

مثال ۲: $(-3)^{\frac{1}{2}} \times (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{4}{2}} = (-3)^2 = 9$

در صورتی که $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-7)^{12} \times (-7)^4 \times (-7)^5 = (-7)^{12+4+5} = (-7)^{21}$$

$$(-\frac{3}{10})^6 \times (-\frac{3}{10})^4 = (-\frac{3}{10})^{10} = (\frac{3}{10})^{10} = \frac{3^{10}}{10^{10}}$$

$$(-1\frac{4}{5})^7 \times (-\frac{9}{5})^7 \times (-1\frac{1}{8})^{12} = (-1\frac{1}{8})^{7+7+12} = (-1\frac{1}{8})^{24} = 1\frac{1}{8}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

(با استفاده از دستور بالا) $((-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4 \times$

$((-4)^2)^{\frac{1}{2}} = (34)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34} = 4$ ✓

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; a^0 = 1$$

کار در کلاس

الف) $\frac{v^3}{v^5} = v^{3-5} = v^{-2} = \left(\frac{1}{v}\right)^2$ ب) $2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(-\frac{2}{3} \times 12\right)^{-3} = (-8)^{-3}$ د) $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-2) \times (-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
 $= \left(-\frac{1}{8}\right)^3$

ه) $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^4 \times 5^4 = 10^4$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 \cdot y^{-5} \cdot z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$
 $= \frac{x^7}{y^5 z^2}$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

الف) $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \quad \checkmark \\ -6 \end{cases}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

ب) $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \quad \checkmark \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12^1} = 12^{-1}$$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

د) $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه) $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \quad \checkmark \end{cases}$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$

ز) $(-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \quad \checkmark \end{cases}$

$$3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

حاصل عبارات های زیر را بدست آورید

$$[12^9 \div (\frac{4}{3})^9] \div 2^9 = (12 \times \frac{3}{4})^9 \div 2^9 = 18^9 \div 2^9 = 9^9$$

$$\frac{(1^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 725^3) \times 3^3} = \frac{24^7 \div 24^2}{1^3 \times 3^3} = \frac{24^5}{24^3} = 24^2$$

$$4^7 \times 20^4 \times 15^7 \times 3^4 = (4^7 \times 15^7) \times (20^4 \times 3^4) = 40^7 \times 40^4 = 40^{11}$$

$$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^8} = \frac{17^{15} \times 15^{13}}{17^8 \times 15^{20}} = \frac{17^{15}}{17^8} \times \frac{15^{13}}{15^{20}} = 17^7 \times 15^{-7} = \frac{17^7}{15^7}$$

$$= \frac{17^7}{15^7} = (\frac{17}{15})^7$$

$$\frac{17^7 \times 15^{13}}{15^7 \times 17^8} = \frac{17^7}{15^7} = (\frac{17}{15})^7$$

حاصل هر عبارت را بدست آورید

$$(0.05)^{-k} = \frac{1}{(0.05)^k} = \frac{1}{(\frac{5}{100})^k} = (\frac{1}{\frac{5}{100}})^k = 20^k = 140,000$$

$$10^{-k} = \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

توان منفی از اعداد کوچک مثبت اعداد بزرگ می سازد و از اعداد بزرگ مثبت اعدادی کوچک بین ۱ و صفر تولید می کند

نتیجه مهم:

اگر $2^a = 10$ باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید

$$\text{الف) } 2^{a+3} = 2^a \times 2^3 = 10 \times 8 = 80 \quad \text{ب) } 2^{a-1} = \frac{2^a}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$$

$2^a = 10$

$$100 \text{ kg} = 100 \times 1000 \text{ g} = 10^2 \times 10^3 = 10^5 \text{ گرم}$$

$$10^5 \div 10^0 = 10^5 = 10^5 \quad 10^5 - (-24) = 10^5 + 24 = 10^5$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 10^0 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عددهای 16^2 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید. صفحه ۴۴/۱

۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $3^{-1} > 3^{-2}$
 $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$

ب) $2^0 > 2^{-5}$
 $1 > \frac{1}{32}$

ج) $(0/5)^{-2} > (0/6)^{-2}$
 $(\frac{5}{10})^{-2} = (\frac{1}{2})^{-2} = 2^2 = 4 > (\frac{6}{10})^{-2} = (\frac{5}{3})^{-2} = \frac{25}{9}$

د) $5^{-1} > 0$
 $\frac{1}{5} > 0$

ه) $(\frac{-8}{15})^0 = 1$

و) $(-5)^{-2} < (-5)^{-1}$
 عدد مثبت < عدد منفی

۵- در هر یک از تساوی های زیر x چه عددی است؟

الف) $5^x \times 5^{-2} = 5^2 \Rightarrow x = 7$

ب) $5^x \div 5^{-2} = 5^2 \quad x - (-2) = 2 \Rightarrow x = 1$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^2 \times a^0 = a^2$ درست

ه) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$ درست $1 + 3 = 4$

ب) $a^2 \times a^0 = a^1$ درست

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$ نادرست

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$ درست (صفحه ۴۴/۱)

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$ نادرست

د) $3^{-2} = -9$ نادرست

ح) $3^{-1} < 3^{-1}$ درست

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید. صفحه ۴۴/۱

الف) $(\frac{1}{3})^{-1} \times 27^{-3} = 3^{10}$

ب) $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج) $(\frac{15}{14})^{-4} \times (\frac{45}{28})^4$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-3} و 5^{-3} و 2^2 و $(-\frac{1}{2})^{-2}$ و $(-7)^2$ و $(-1)^{11}$ و 1^{-9} و -2^{-4}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 10^0$ درست $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$ نادرست $(\frac{5}{4})^2 < (0/7)^2$ نادرست $(\frac{3}{4})^2 > (0/75)^3$ درست

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{8}{3})^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right]^{-1} = \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \right]^{-1} = \left[-\frac{9}{4} \right]^{-1} = -\frac{4}{9}$

$= \frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{3}{8})^3}{-(2^5 \times 2^{-8})} = \frac{(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8})^3}{-2^{-3}} = \frac{(\frac{1}{4})^3}{-2^{-3}} = -2^3 \times (\frac{1}{4})^3 = -(2 \times \frac{1}{4})^3 = -\frac{1}{8}$ ۶۴

$$8^k = (2^3)^k = 2^{12}, \quad 14^k = (2^k)^3 = 2^{12} \Rightarrow 2^{11} < 8^k = 14^k$$

۶- به صورت کلی نمی توانیم اعداد کنیم است $(a^m)^n = (a^n)^m$

$$\left((-3)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \neq \left((-3)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

زیرا طرف اول (سمت چپ) در مجموعه ی اعداد حقیقی تعریف نشده است

$$(-3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R}$$

زیرا عدد ۳- در مجموعه اعداد حقیقی ریشه ی دوم ندارد

$$\left((-3)^2\right)^{\frac{1}{4}} = (+9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9} = 3$$

و سمت راست برابر ۳ می شود

$$\left((-3)^{\frac{1}{4}}\right)^2 = -3$$

حاصل سمت چپ برابر ۳- می شود

در سال های آینده علت این که حاصل برابر ۳- می شود را می خوانید

الف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1 = 3$

ب) $(\frac{5}{2})^{-k} \times 25^{-2} = (\frac{2}{10})^{-k} \times (\frac{1}{25})^2 = (\frac{5}{2})^k \times (\frac{1}{5})^k = (5 \times \frac{1}{5})^k = 1^k = 1$

ج) $\left(\frac{15}{12}\right)^{-k} \times \left(\frac{45}{24}\right)^k = \left(\frac{12}{15}\right)^k \times \left(\frac{45}{24}\right)^k = \left(\frac{12}{15} \times \frac{45}{24}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right)^k$

د) $(-5^{-2})^{-1} = \left(-\frac{1}{5^2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{25}\right)^{-1} = (-25)^1 = -25$

$$(-1)^{21} = -1 < -2^{-4} = -\frac{1}{16} < 5^{-3} = \frac{1}{125} < 2^{-3} = \frac{1}{8} < 1^{-90} = 1 < (-\frac{1}{2})^{-2} = 4 < 2^3 = 8 < (-1)^2 = 49$$

$$(0.987)^{10} < 1^0 \Rightarrow (0.987)^{10} < 1$$

$$1/2 > 1/52 \Rightarrow (1/2)^7 > (1/52)^7$$

$$\frac{5}{4} > 0.7 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^2 > (0.7)^2$$

$$\frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0.75)^3$$

۱ آیا تساوی $(-7^2)^3 = (-7^3)^2$ درست است؟

$$(-7^2)^3 = (-49)^3 = -117649$$

$$(-7^3)^2 = (-343)^2 = 117649$$

جواب: خیر زیرا

در واقع عدد $(-7^3)^2$ عددی مثبت و عدد $(-7^2)^3$ عددی منفی است

۲ اگر a عددی مثبت و m, n اعدادی صحیح باشند و $m > n$

الف) $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$

ب) $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$

ج) $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$

$$\dots < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0 < \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \dots$$

نتیجه: هرچه قدر توان عدد $\frac{1}{2}$ بزرگ تر می شود حاصل کوچک تر و هرچه قدر توان آن کوچک تر می شود حاصل عددی بزرگ تر است.

۳ حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$[(14^3)^2]^3 = 14^{3 \times 2 \times 3} = 14^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$$

۴ حاصل عبارات $(5^2)^3$ و 5^{2^3} را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

(زیر عدد $2^3 = 8$ است) $5^{2^3} = 5^8$ و $5^{2^3} = 5^{2 \times 2} = 5^4$

$$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^6 = 5^{2 \times 3}$$

$$5^{2^3} = 5^{2 \times 2 \times 2} = 5^8$$

$$a^m \neq (a^m)^n$$

نتیجه مهم

۵- اعداد 2^{4^3} و 3^{4^2} را با هم مقایسه کنید

$$2^{4^3} = (2^4)^3 = 16^3 = 4096$$

$$3^{4^2} = (3^4)^2 = 81^2 = 6561$$

۲- حاصل عبارتهای زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$1) \frac{1^{-11} \times (2/3)^{-3}}{2^{-9} \times 4^5} = \frac{(2^3)^{-11} \times (\frac{1}{4})^{-3}}{2^{-9} \times (2^2)^5} = \frac{2^{-33} \times 2^3}{2^{-9} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times (2^2)^3}{2^{33} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times 2^6}{2^{43}} = \frac{2^{15}}{2^{43}} = 2^{-28} = (\frac{1}{2})^{28}$$

$$2) 2^7 + 2^7 + 2^7 = 3 \times 2^7 = 3 \times (2^3)^2 = 3 \times 8 = 24$$

$$3) 10 \times 2^{14} + 12 \times 2^{14} + 3 \times 2^{21} = (10+12) \times 2^{14} + 3 \times 2^{21} = 22 \times 2^{14} + 3 \times 2^{21} = 22 \times 2^{14} + 3 \times 2^7 \times 2^{14} = 2^{14} (22 + 3 \times 2^7) = 2^{14} (22 + 192) = 2^{14} \times 214 = 2^{14} \times 2^8 = 2^{22}$$

$$4) \frac{120^{11} \times 10^{-4} \times (\frac{5}{2})^{14}}{20^7 \times 4^{-5} \times (2/3)^{-2}} = \frac{(2^3 \times 3 \times 5)^{11} \times (2 \times 5)^{-4} \times 2^{14} \times 5^{-14}}{(2^2 \times 5)^7 \times (2 \times 3)^{-5} \times 2^2 \times 3^2} = \frac{2^{33+(-14)+14} \times 3^{11+(-14)} \times 5^{11+(-4)} \times 2^{14}}{2^{14+(-5)} \times 5^7 \times 3^{-5} \times (2^2)^2 \times 3^2} = \frac{2^{33} \times 3^{-3} \times 5^7 \times 2^{14}}{2^{19} \times 5^7 \times 3^{-5} \times 2^4 \times 3^2} = \frac{2^{33} \times 3^1 \times 5^7}{2^{23} \times 3^{-3} \times 5^7} = \frac{2^{33} \times 3^4}{2^{23}} = 2^{10} \times 3^4 = 20 \times 81 = 1620$$

$$5) 2^{22} \times 3^{33} = 2^{2 \times 11} \times 3^{3 \times 11} = (2^2)^{11} \times (3^3)^{11} = 4^{11} \times 27^{11} = 10 \times 11$$

$$6) 5 \times 2^{11} = 5 \times 2^4 \times 2^7 = (5 \times 2^4) \times (2^7) = 20 \times 128 = 2560$$

$$7) \frac{14^7 \times 125^2}{25^3 \times 32^4} = \frac{(2^7)^7 \times (5^3)^2}{(5^2)^3 \times (2^5)^4} = \frac{2^{49} \times 5^6}{5^6 \times 2^{20}} = \frac{2^{49}}{2^{20}} = 2^{29}$$

اگر عددی را در توانی از ۱۰ ضرب کنیم، اگر توان مثبت باشد به تعداد توان عدد ۱۰ همزنه سمت راست تغییر مکان می‌دهد و اگر آن را بر توانی از ۱۰ تقسیم کنیم (توان مثبت) به تعداد توان عدد ۱۰ همزنه سمت چپ تغییر مکان خواهد داد

درس دوم: نماد علمی

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

| تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در | تقسیم بر | ضرب در |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ۱۰ ^۵ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ | ۱۰ ^۴ |
| ۱۵ | ۱۵۰ | ۱/۵ | ۱۵۰۰ | ۰/۱۵ | ۱۵۰۰۰ | ۰/۰۱۵ | ۱۵۰،۰۰۰ | ۰/۰۰۱۵ | ۱،۵۰۰،۰۰۰ |
| ۰/۰۲ | ۰/۲ | ۰/۰۰۲ | ۲ | ۰/۰۰۰۲ | ۲۰ | ۰/۰۰۰۰۲ | ۲۰۰ | ۰/۰۰۰۰۰۲ | ۲۰۰۰ |
| ۰/۰۳ | ۰/۳ | ۰/۰۰۳ | ۳ | ۰/۰۰۰۳ | ۳۰ | ۰/۰۰۰۰۳ | ۳۰۰ | ۰/۰۰۰۰۰۳ | ۳۰۰۰ |

۲- سرعت نور ۳۰۰،۰۰۰،۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید = $300,000,000 \times 3600 = 108,000,000,000$ ثانیه $3600 = 1$ ساعت

ثانیه $360000 = 100$ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد ۱۰ نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300,000,000 = 3 \times 10^8$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3600 \times 10^5 = 108 \times 10^{13} = 108 \times 10^{14}$$

$$360000 = 36 \times 10^4$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$170000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^3$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز 7×10^{-6} میلیمتر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند 7×10^{-6} را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$7 \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود 16×10^{-6} سانتیمتر است که با نماد علمی، آن را به صورت 16×10^{-6} نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$$0.0001275 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

مثال:

$$0.0137 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$29000 = 2/9 \times 10^4$$

کار در کلاس

۱- هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 = 2,45 \times 10^5$$

$$150000000 = 1,5 \times 10^8$$

$$0.005 = 5 \times 10^{-3}$$

$$0.00061 = 6,1 \times 10^{-5}$$

$$1404 = 1,404 \times 10^3$$

$$0.1275 = 1,275 \times 10^{-1}$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-2} = 0.052$$

$$7/304 \times 10^{-5} = 0.00007304$$

$$2/28 \times 10^8 = 228000000$$

$$9/4612 \times 10^1 = 9461200000$$

$$6/02 \times 10^{-2} = 0.0402$$

$$1/1 \times 10^4 = 11000$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید :

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$

ب) $\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$ ❌

$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$ ✅

$4/3 \times 10^2 = 4300$ ✅

$7/0.004 \times 10^{-2} = 0.7004$ ❌

$6/18 \times 10^7 = 61800000$ ✅

$8/2570 \times 10^4 = 82570$ ✅

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 6.95×10^5

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 5×10^{-7}

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟ 47.1 صیف

۶- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$

$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$

47.1 صیف

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$2/7 \times 10^0 > 0.02$ $0.03 > 0.003 \times 10^0$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$1/5 \times 10^{-2}$, $1/2 \times 10^6$, $5/35 \times 10^{-3}$, $3/7 \times 10^{-2}$

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 5^2}{4^{-5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \times 5^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} \times 25 = \underline{\underline{1}}$$

$$= 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 100$$

$$\text{ب) } \frac{1^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{1}} = \frac{2^4 \times (2^2)^2}{1 \times 1^{-1}} = \frac{2^4 \times 2^4}{1^0} = \frac{2^8}{1} = 256$$

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{1,4 \times 10^9}{1,3 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^8}{13 \times 10^6} = \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 1,07 \times 10^2 = 107$$

قطر خورشید 107 برابر زمین است

$$2 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^9 = 8 \times (10^{-2} \times 10^9) = 8 \times 10^7$$

$$\frac{12,5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{125 \times 10^{-5}}{25 \times 10^{-19}} = 5 \times \frac{10^{19}}{10^5} = 5 \times 10^{14}$$

$$9,287 \times 10^1 = 92,87 \times 10^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 9,17 \times 10^0 \Rightarrow \text{میرخ به زمین نزدیک تر است}$$

$$0,02 < 2,7 \times 10^{-2} < 2,7 \times 10^{-1} < 2,7 \times 10^0 < 2,7 \times 10^1 < 2,7 \times 10^2 < \dots$$

$$0,0003 > 0,003 \times 10^0 > 0,003 \times 10^1 > 0,003 \times 10^2 > 0,003 \times 10^3 > \dots$$

$$1,5 \times 10^{-2} = 15 \times 10^{-3}, \quad 1,2 \times 10^4 = 1200,000, \quad 5,35 \times 10^{-3}$$

$$2,7 \times 10^{-2} = 27 \times 10^{-3}$$

$$5,35 \times 10^{-3} < 15 \times 10^{-3} < 27 \times 10^{-3} < 1200,000$$

$$\Rightarrow 5,35 \times 10^{-3} < 1,5 \times 10^{-2} < 2,7 \times 10^{-2} < 1,2 \times 10^4$$

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را مانند نمونه ها به دست آورید:

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad 4^2 = 16 \quad (-4)^2 = 16$$

مربع (توان دوم) عددها ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه های دوم عدد ۹ می نامند. همان گونه که در سال های گذشته دیده اید، ریشه های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

| | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|---|----|----|----|---------------|----------------|------------|-------------|----------------|----------------|------------|-------------|
| عدد | ۳ | -۳ | ۴ | -۴ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{1}{7}$ | $\sqrt{9}$ | $-\sqrt{9}$ |
| مربع عدد (توان دوم) | ۹ | | ۱۶ | | $\frac{4}{9}$ | | ۵ | | $\frac{1}{49}$ | | ۶ | |

ریشه های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه های دوم ۷، عددهای $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم b می نامند. همان طور که می دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

| | | | | | | | | | | |
|------------------------|---|----|----|-----|----|-----------------|----------------|-----|-----------------|---|
| عدد | ۲ | -۲ | ۳ | -۳ | ۴ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{2}$ | ۵ | $-\frac{2}{3}$ | ۰ |
| مکعب عدد (توان سوم) | ۸ | -۸ | ۲۷ | -۲۷ | ۶۴ | $\frac{1}{125}$ | $-\frac{1}{8}$ | ۱۲۵ | $-\frac{8}{27}$ | ۰ |

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3 = 8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می نویسیم $\sqrt[3]{8} = 2$. همچنین چون $(-2)^3 = -8$ ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می نویسیم $\sqrt[3]{-8} = -2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر $\sqrt[3]{64} = 4$... و ریشه سوم عدد $-\frac{8}{27}$ عدد $-\frac{2}{3}$ است.

۴- طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید:

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می دهیم.

هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته اید، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت ها

حل شده است.

(الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x > 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$

(ب) x مثبت و y منفی است ($x > 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$

(ج) x منفی و y مثبت است ($x < 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$

(د) x و y هر دو منفی هستند ($x < 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$

۱- حاصل را بدست آورید

$$\text{الف) } \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = 2-\sqrt{5}$$

$$\text{د) } \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

۲- حاصل را بدست آورید

$$۱) \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$$

$$۲) \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$۳) \sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$$

$$۴) \sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است:

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زنید؟

| a | $\sqrt[3]{a}$ | b | $\sqrt[3]{b}$ | ab | $\sqrt[3]{ab}$ | $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|--------------------------------------|
| ۸ | ۲ | ۱۲۵ | ۵ | ۱۰۰۰ | ۱۰ | $۲ \times ۵ = ۱۰$ |
| ۲۷ | ۳ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{۲۷}{۸}$ | $\frac{۳}{۲}$ | $۳ \times \frac{1}{۲} = \frac{۳}{۲}$ |
| -۸ | -۲ | ۲۷ | ۳ | -۲۱۶ | -۶ | $-۲ \times ۳ = -۶$ |

به طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{۸} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{۸+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

$$\sqrt[3]{۸} + \sqrt[3]{۲۷} = ۲ + ۳ = ۵$$

$$\sqrt[3]{۸+۲۷} = \sqrt[3]{۳۵} < \sqrt[3]{۶۴} = ۴ \Rightarrow \sqrt[3]{۳۵} < ۵$$

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = 15 \times (-2) = -30$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-54}{2}} = \sqrt{-27} = -3$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ صحیح یا غلط

| | | | |
|---|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| $\otimes \sqrt{(-1)^2} = -1$ | $\checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$ | $\checkmark \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$ | $\checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ |
| $\checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$ | $\checkmark \sqrt{1/44} = 1/2$ | $\otimes (\sqrt{-1})^2 = 1$ | $\checkmark \sqrt{-64} = -4$ |

تعریف نشده $\sqrt{-1}$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

| | | | |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{125} \times \sqrt{36}$ | $\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$ | $\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$ | $\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$ |
| 3 | 30 | 9 | -5 |

$$\sqrt{125} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30, \quad \sqrt{-1} \times \sqrt{81} = (-1) \times 9 = -9, \quad \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5} = \sqrt{-125} = -5$$

تمرین

$$\frac{49}{14} \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{11} \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}$$

1

$$15 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{15}, 12 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}, 144 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$144 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12, 18 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$214 \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} \sqrt[3]{214}, \sqrt[3]{-5} \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} -\sqrt[3]{5}, -\frac{1}{214} \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} -\sqrt[3]{\frac{1}{214}}$$

2

$$\sqrt{(-3)^2} = 3, (\sqrt{-3})^2 = \text{تعریف نکرده}$$

3

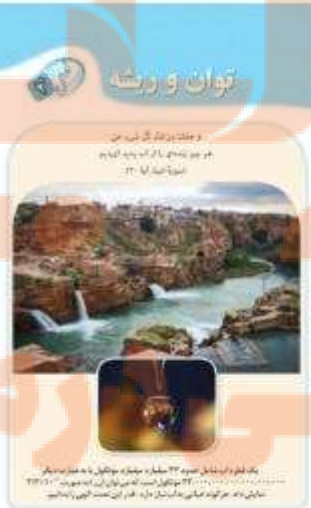
$$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$$

ریشه ی دوم

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

<http://www.math-home.ir>



۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow a < 8$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارتهای زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt{125}$$

۱۰- آیا تساویهای زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{60}}{\sqrt{5}}$$

$$2\sqrt[3]{14} \times 3\sqrt[3]{4} = 4 \times \sqrt[3]{14 \times 4} = 4\sqrt[3]{44} = 4 \times (+4) = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 40}{5}} = \sqrt[3]{214} = 4$$

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{(-x)^2} = x \quad \underline{\underline{4}}$$

در صورتی که $|x| = x$ است که $x \geq 0$ باشد $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ، $\sqrt{(-(-2))^2} = -2$ باشد $x = -2$

مساحت $S = 94a^2 \Rightarrow$ مساحت مربع $= 94a^2 \div 4 = 14a^2$ 5
 یعنی داریم که مقدار a مثبت است یا منفی
 اندازه ی ضلع $= \sqrt{14a^2} = 4|a|$

حجم مکعب $V = (\text{اندازه ی ضلع})^3 = (4|a|)^3 = 64a^2|a| \xrightarrow{a > 0} V = 64a^3$ 6

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$y < 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = -y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x + y$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{6} \times 5 = 5\sqrt{6} \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2 = 25$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2}) = \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \quad 10$$

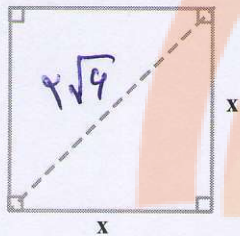
$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1) \times 4} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{4} = -1 \times \sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$$

در واقع $\sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{1} = 1$

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه پیتاگورس داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که انعازضلع مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$ محیط مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی

یکسان هستند و داریم: $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

| | | | | | |
|--------------------------|----------------------------------|--|------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| $3\sqrt{7}$ | $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $3\sqrt{a}$ | \sqrt{xy} | $\sqrt{2}$ |
| $-4\sqrt{5}$ | $\sqrt{2}$ | $2\sqrt{5}$ | $2\sqrt{b}$ | $2\sqrt{x}$ | $\sqrt{3}$ |
| $8\sqrt{7}$ | $8\sqrt{2}$ | $-\frac{2}{3}\sqrt{10}$ | $-\frac{1}{5}\sqrt{a}$ | $-7\sqrt{x}$ | $\sqrt{5}$ |
| $2\sqrt{5}$ | $-5\sqrt{2}$ | $-2\sqrt{10}$ | $-7\sqrt{b}$ | $4\sqrt{xy}$ | $6\sqrt{2}$ |
| $11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ | $\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$ | $\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$ | $\frac{14}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$ | $5\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$ | $7\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ |

ساده کردن عبارتهای رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

الف) $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین:

ب) $\sqrt{50} + \sqrt{24} + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^3 \times 3} + \sqrt{3^3 \times 3}$
 $= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

مثال ۱: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دوروش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2}$
 $= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$

ب) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$

مثال ۲: حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

$$(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3} = \sqrt{3} \div \sqrt{3} = 1$$

۱- حاصل را بدست آورید

$$۱) \sqrt{۳} \times \sqrt{۲۷} = \sqrt{۳ \times ۲۷} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

$$۲) \sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{(-۲) \times ۴} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

$$۳) \sqrt{۳-\sqrt{۸}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۸}} = \sqrt{(۳-\sqrt{۸})(۳+\sqrt{۸})} = \sqrt{۹ + \underbrace{۳\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۸} - \sqrt{۸} \times ۳}_{\text{صفر}}} \\ = \sqrt{۹ - ۸} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$۴) \sqrt{\sqrt{۲}} \times \sqrt{\sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۲} \times \sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۱۶}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$۵) \sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}} \times \sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}} = \sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۵})(۲+\sqrt{۵})} = \sqrt[۳]{۴ + ۲\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵} - \sqrt{۲۵}} \\ = \sqrt[۳]{۴-۵} = \sqrt[۳]{-۱} = -۱$$

$$۶) \frac{\sqrt{۱۲} \times \sqrt{۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \frac{\sqrt{۱۲ \times ۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \sqrt{\frac{۱۸۰}{۲۰}} = \sqrt{۹} = ۳$$

۲- عبارت های زیر را ساده کنید

$$۱) ۵\sqrt{۱۱} + ۴\sqrt{۱۱} - ۳\sqrt{۱۱} = (۵+۴-۳)\sqrt{۱۱} = ۶\sqrt{۱۱}$$

$$۲) ۲\sqrt{۱۸} - ۳\sqrt{۳۲} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۹ \times ۲} - ۳\sqrt{۱۶ \times ۲} + \sqrt{۴ \times ۳} - \sqrt{۳} - \sqrt{۴ \times ۲} \\ = ۲ \times ۳\sqrt{۲} - ۳ \times ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} - ۱۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} \\ = (۶-۱۲-۲)\sqrt{۲} + (۲-۱)\sqrt{۳} = -۸\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = \sqrt{۳} - ۸\sqrt{۲}$$

$$۳) (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^۲ - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}) - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) \\ = \sqrt{\frac{۹}{۳}} + \sqrt{۶} + \sqrt{۶} + \sqrt{\frac{۴}{۳}} - (\sqrt{\frac{۹}{۳}} - \sqrt{۶} - \sqrt{۶} + \sqrt{\frac{۴}{۳}})$$

$$= ۵ + ۲\sqrt{۶} - (۵ - ۲\sqrt{۶}) = ۵ + ۲\sqrt{۶} - ۵ + ۲\sqrt{۶} = ۴\sqrt{۶}$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. صفحه ۷۵/۱

۱) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$

۴) $\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$

۲) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

۳) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} - 4\sqrt{128}$

۵) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

گویا کردن مخرج کسرها، وقتی مخرج کسر را برای لایحه کار با آن‌ها آسان‌تر شود

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^3}} = \frac{2\sqrt{25}}{5}$

ج) $\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2}$

د) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$

هـ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$
($x > 0$)

و) $\frac{5}{\sqrt{z^2}} \times \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{5\sqrt{z}}{\sqrt{z^3}} = \frac{5\sqrt{z}}{z}$
($z \neq 0$)

$$1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128} = \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$2) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$$

$$3) 5\sqrt{2} + 3\sqrt{50} - 4\sqrt{128} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2 \times 5} - 4\sqrt{2^4 \times 2} = 5\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{5} - 4 \times 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - 16\sqrt{2} = -11\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$$

$$4) \sqrt{4 + \frac{1}{11} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{396 + 1 + 44}{11}} = \sqrt{\frac{441}{11}} = \frac{21}{\sqrt{11}}$$

$$5) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2^2} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3^2} = 3\sqrt{4} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3 = 4\sqrt{4} + 2\sqrt{6} - 3 = 4 + 2\sqrt{6} - 3 = 1 + 2\sqrt{6}$$

مخرج کسره‌های زیر را لویا کنید

$$1) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{25} - \sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{9}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt{2} + 1} = \frac{5}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 5\sqrt{2} - 5$$

$$3) \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{25}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} = 3 - \sqrt{5}$$

$$4) \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{\sqrt{121} + \sqrt{55} - \sqrt{55} - \sqrt{25}} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{11 - 5} = \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6} = \frac{2(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{3}$$

$$\frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6} = \frac{2(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{3}$$

کار در کلاس

مخرج کسرها را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}} &= \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4} & \text{ب)} \quad \frac{2}{\sqrt{32}} &= \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \text{ج)} \quad \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} &= \frac{12\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{12\sqrt{4}}{6} = 2\sqrt{4} & \text{د)} \quad \frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{9x^2}} &= \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{27x^3}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x} \end{aligned}$$

(x ≠ 0)

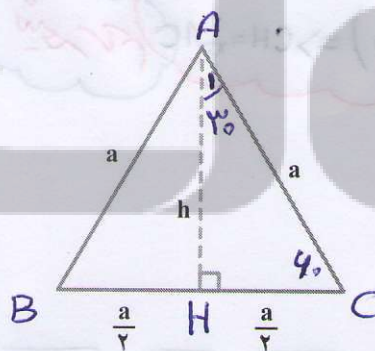
تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ ج) $\sqrt[3]{27^2}$ ه) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$ و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$



۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

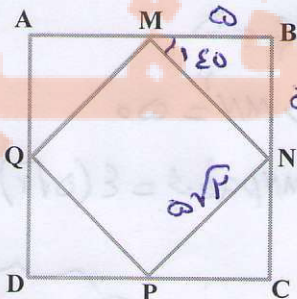
۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع 'a' نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع 'h' را بر حسب 'a' به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب 'a' بنویسید.



۵- نقاط M، N، P، و Q وسط‌های اضلاع مربع ABCD

هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع

MNPQ چقدر است؟

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72} = 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{36 \times 2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{2727} = \sqrt[3]{(3^3)^3} = \sqrt[3]{(3^3)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{48}} = \sqrt[3]{\frac{(-3)^3}{4^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-3}{4}\right)^3} = -\frac{3}{4}$

هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 5} + 2 - \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 2 \times 4\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x \stackrel{x < 0}{=} -2x - x = -3x$

بج = $2 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$, $CosA = 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5} = 9 \times 5 = 45$

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{r} = \frac{ra^2 - a^2}{r} = \frac{a^2(r-1)}{r}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{r} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{r}a}{r}$ ($\hat{H} = 90, A_1 = 30 \Rightarrow CH = \frac{1}{2}AC$)

($\hat{H} = 90, \hat{C} = 40$) $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{r}}{r} AC$

ABCD متساوي الساقين $\Rightarrow AB = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow BM = AM = \frac{10}{2} = 5$

$\triangle BMN : \hat{B} = 90 \Rightarrow MN^2 = BM^2 + BN^2 \Rightarrow MN^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow MN^2 = 50$

$\Rightarrow MN = \sqrt{50} \Rightarrow MN = \sqrt{25 \times 2} \Rightarrow MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow \text{مساحة } \triangle MNP = \frac{1}{2}(5\sqrt{2})^2 = 25$

($\hat{B} = 90, \hat{M}_1 = \hat{N}_1 = 45$) $\Rightarrow MN = \sqrt{2} BM$

تسوية


تلاشی در مسیر معرفت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)