فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

پل میربهاءالدین بر روی رودخانه زنجان‌رود

منحنی مسیر حرکت بسیاری از اشیا را به کمک یک معادله درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

درس اول — هندسهٔ تحلیلی

درس دوم — معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲

درس سوم — معادلات گویا و معادلات رادیکالی

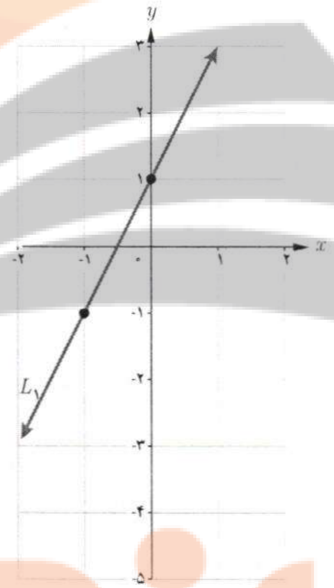
درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس



۱ می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

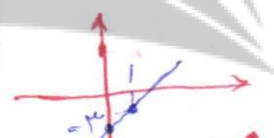
۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید :

الف) $L_1: y=2x+1$

x	-1	0
y	-1	1

ب) $L_2: y=2x-3$

x	0	1
y	-3	-1

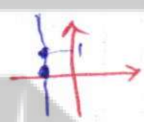


پ) $L_3: y=1$

x	0	1
y	1	1

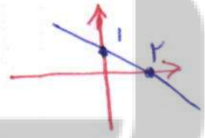
ت) $L_4: x=-2$

x	-2	-2
y	0	1

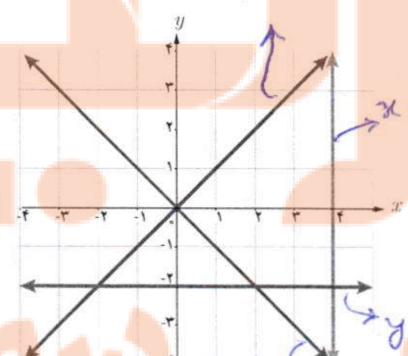


ث) $L_5: x+2y=2$

x	0	2
y	1	0



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌ها برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، عرض از مبدأ خط L نامیده می‌شود.

خطوط الف و ب موازیند.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

الف) $\begin{cases} m=۲ \\ h=۱ \end{cases}$ شیب، عرض از مبدأ   ب) $\begin{cases} m=۲ \\ h=-۳ \end{cases}$ پ) $\begin{cases} m=۰ \\ h=۱ \end{cases}$ ت) $\begin{cases} m=\text{نامعین} \\ h=\text{ندارد} \end{cases}$ ث) $\begin{cases} m=-\frac{۱}{۲} \\ h=۱ \end{cases}$

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=mx+h$ دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم :

شیب خط: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط : $y=-۲x+h$

روی خط L واقع است $B\,(۳,۱)$: $۱=-۲(۳)+h \Rightarrow h=۷$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس :

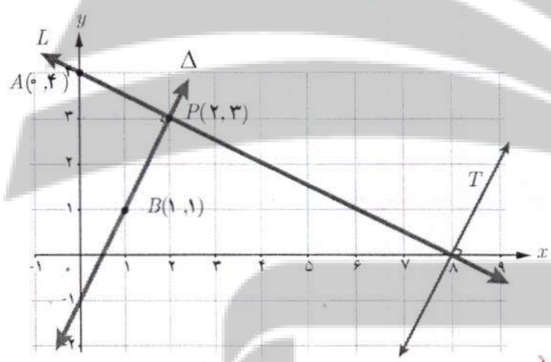
معادلهٔ خط L : $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P\,(۲,-۱)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

$m=۳$

$y=mx+h$
$y=۳x+h \xrightarrow{P(۲,-۱)} h=-۷ \Rightarrow y=۳x-۷$ معادله خط مطلوب

فعالیت



۱ دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط توجه می‌کنیم :

شیب خط L گذرا از نقاط A و P : $m=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{۳-۴}{۲-۰}=\dfrac{-۱}{۲}$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P : $m'=\dfrac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\dfrac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

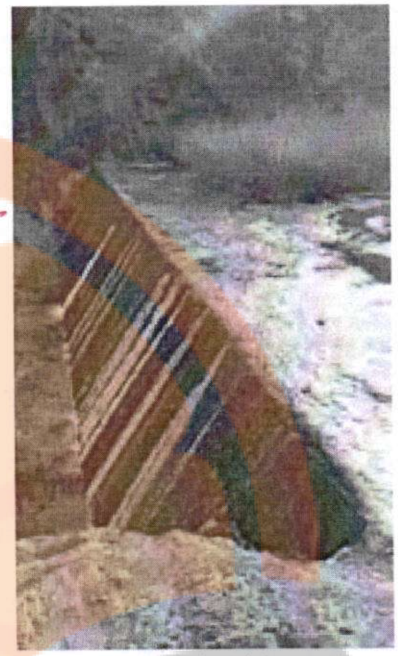
۲ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم : $mm'=(\dfrac{-۱}{۲})(۲)=-۱$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد ۲ خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خط عمود بر L برابر قرینهٔ معکوس شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[۱]؛ یعنی

> دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (۱−) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

۱ـ راه‌های اثبات مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیهٔ فیثاغورس است.


بالا دست سد امامزاده اسماعیل (ع) قم

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L: y=۵x-۲$ $m=۵$ $T: y=\frac{-۱}{۵}x+۳$ $m'=-\frac{۱}{۵} \rightarrow L \perp T$

ب) $L: y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $m=\frac{۱}{۲}$ $T: x-۲y=۱$ $m'=\frac{۱}{۲} \rightarrow L \parallel T$

پ) $L: ۲x-۳y+۳=۰$ $m=\frac{۲}{۳}$ $T: ۳x+۲y=۰$ $m'=-\frac{۳}{۲} \rightarrow L \perp T$

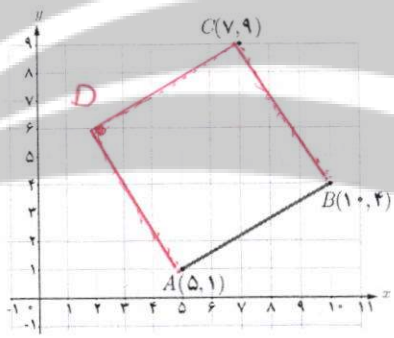
ت) $L: x=۱$ $m=$ تعریف نشده، موازی محور عرض‌ها $T: y=-۳$ $m'=۰$ موازی محور طول‌ها $\rightarrow L \perp T$

ث) $L: y=۳x+۱$ $m=۳$ $T: x=۳y-۱$ $m'=\frac{۱}{۳}$ دو خط آن‌ها متقاطع‌اند.

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد. $m=\frac{۳}{۲}$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟ $m=-\frac{۲}{۳}$



۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را بنویسید. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

$AD \perp AB \rightarrow m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$ $y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}$

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به‌طور کامل رسم کنید.

$D(۲,۶)$

معادله‌ی AD: $y=-\frac{۵}{۳}(x-۵)+۱$

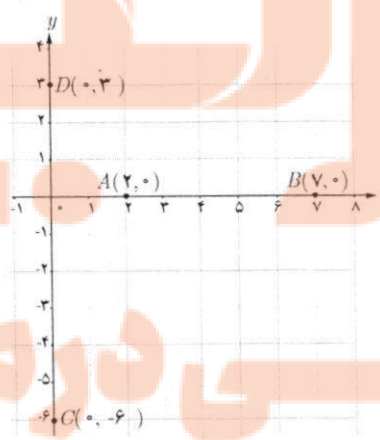
معادله‌ی CD: $y=\frac{۳}{۵}(x-۷)+۹$

$\rightarrow -\frac{۵}{۳}(x-۵)+۱=\frac{۳}{۵}(x-۷)+۹ \rightarrow -۳۴x=-۶۸ \rightarrow x=۲$

$\xrightarrow{y=\frac{۳}{۵}(x-۷)+۹} y=۶$

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

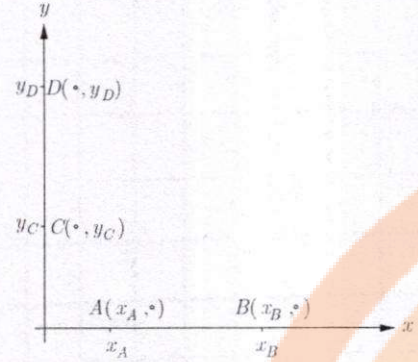
الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

$AB=|x_B-x_A|=۵$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$CD=|y_D-y_C|=|-۶-۳|=۹$

پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.

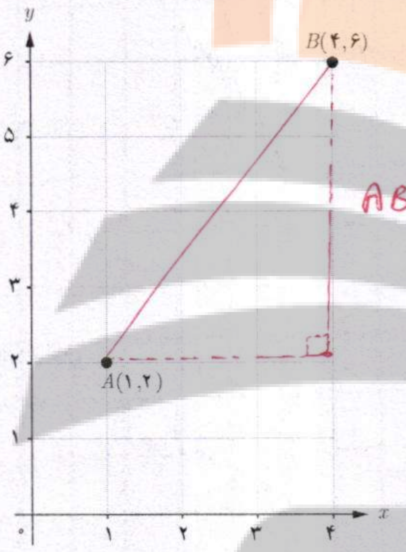


$AB = |x_B - x_A|$

$CD = |y_D - y_C|$

در حالت کلی می‌توان گفت:

> ۱ـ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$
>
> ۲ـ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$



فعالیت

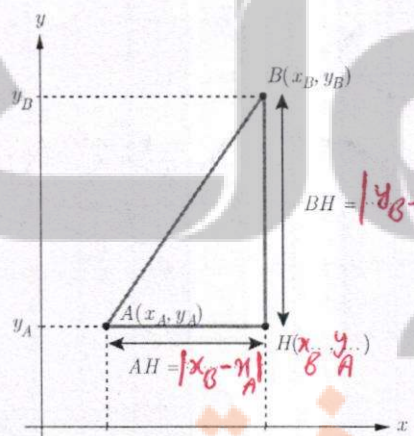
۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.

$AB = 5cm$

۲ بدون استفاده از خط‌کش، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. برای این کار از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟

به کمک رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث مقابل

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$



۳ در شکل مقابل:

الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

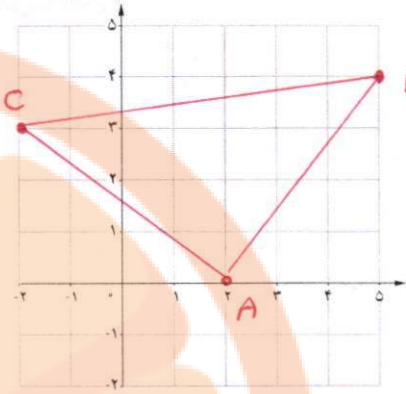
پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

> فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

کار در کلاس



۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.

الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$AC=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(-۲-۵)^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

محیط: $P=۵+۵+۵\sqrt{۲}=۱۰+۵\sqrt{۲}$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

$۵^۲+۵^۲=(۵\sqrt{۲})^۲ \rightarrow ۵۰=۵۰$

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

$S=\frac{۱}{۲}(۵)(۵)=\frac{۲۵}{۲}$ $\quad m_{AC}\cdot m_{AB}=-۱$ ، عکس قضیه ی فیثاغورس

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$PA=\sqrt{(۵۰-۱۰)^۲+(۳۰+۲۰)^۲}=۱۰\sqrt{۴۱}$ $\quad PB=\sqrt{(۵۰-۸۰)^۲+(۳۰-۹۰)^۲}=۱۰\sqrt{۴۵}$

$PB>PA$
A را پیشنهاد می‌کنیم چون فاصله کمتری دارد.

۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

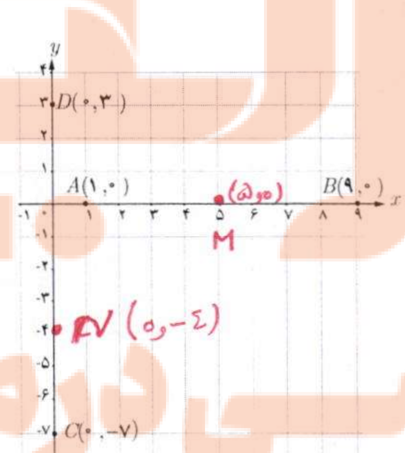
$NO=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E\,,y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$EO=\sqrt{(x_E-۰)^۲+(y_E-۰)^۲}=\sqrt{x_E^۲+y_E^۲}$

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

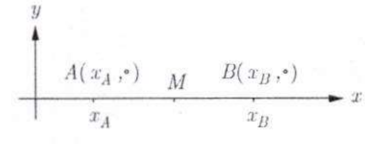
فعالیت



این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

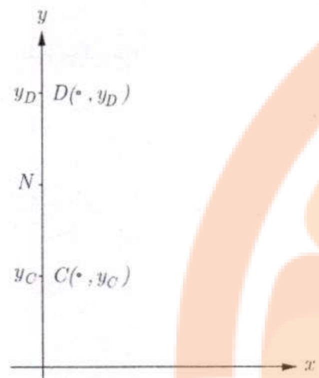


پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

$$M \text{ وسط } AB \Rightarrow AM = MB$$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

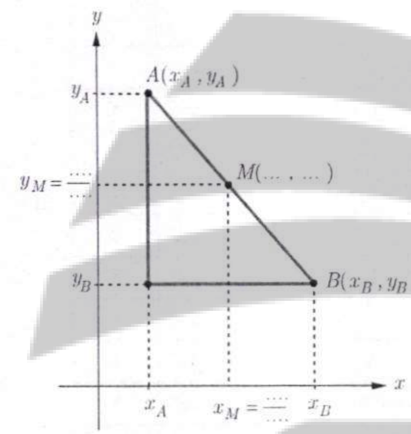


ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

$$N \text{ وسط } CD \Rightarrow CN = ND \qquad \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$

$$\rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

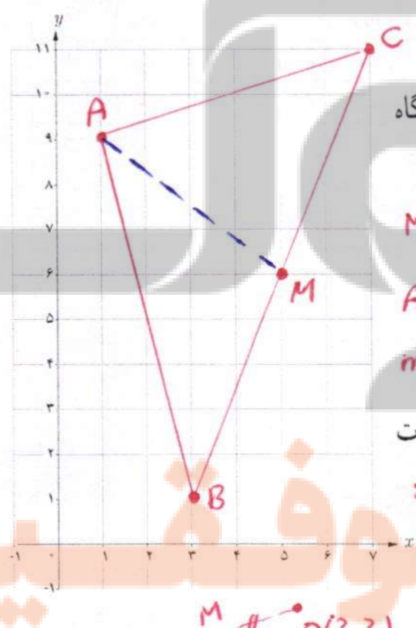
$$\rightarrow ۲y_N = y_C + y_D$$



ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد :

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$.

کار در کلاس



۱ مثلث با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

$M(\frac{۳+۷}{۲}, \frac{۱+۱۱}{۲}) \rightarrow M(۵, ۶)$

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

$AM = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۶-۹)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

$m_{AM} = \frac{۹-۶}{۱-۵} = \frac{-۳}{۴}$ $\quad y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳۹}{۴}$ معادلهٔ AM

۲ الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

$x_N = \frac{x_A + x_B}{۲} \rightarrow ۵ = \frac{x_A + ۷}{۲} \rightarrow x_A = ۳$ $\quad A(۳, -۶)$

$y_N = \frac{y_A + y_B}{۲} \rightarrow y_A = -۶$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

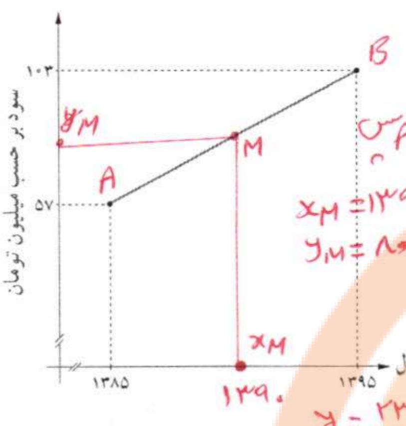
$P'(-\alpha, -\beta)$

$x_M = \frac{x_C + x_D}{۲} \rightarrow -۱ = \frac{۱ + x_D}{۲} \rightarrow x_D = -۳$

$y_M = \frac{y_C + y_D}{۲} \rightarrow ۴ = \frac{۲ + y_D}{۲} \rightarrow y_D = ۶$

$\therefore D(-۳, ۶)$

نقطه D را قرینه‌ی نقطه C نسبت به نقطه‌ی M می‌نامند هرگاه



۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟ M وسط AB است

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

$x_M = ۱۳۹۰$

$y_M = ۸۰$

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانهٔ شرکت چقدر باشد؟ به کمک معادله‌ی خط AB

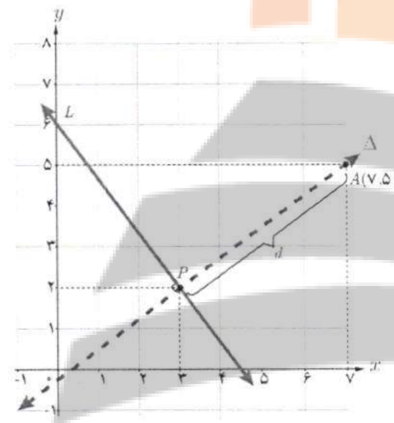
$m_{AB} = \frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵} = \frac{۲۳}{۵} \qquad y = \frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷$

حال ۱۴۰۵=x را قرار می‌دهیم لذا: $y = \frac{۲۳}{۵}(۱۴۰۵-۱۳۸۵)+۵۷ = ۱۴۹$

فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطهٔ A و معادلهٔ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



حل: چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.

$$\Delta: y = \frac{۳}{۴}x + h$$

$$\text{روی } \Delta \text{ است } A(۷,۵): ۵ = \frac{۳}{۴}(۷) + h \Rightarrow h = \frac{-۱}{۴}$$

$$\text{معادله } \Delta: y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta: ۳x - ۴y = ۱$$

اگر معادلهٔ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L: ۴x+۳y=۱۸ \\ \Delta: ۳x-۴y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۳ \;,\; y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^۲ + (y_A - y_P)^۲} = \sqrt{(۷-۳)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

با به‌کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[۱]:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=0$ به دست می‌آوریم:

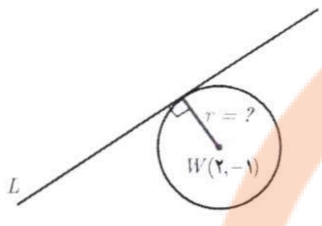
$$d = \frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{|۲۵|}{۵} = ۵$$

۱ـ ارائه اثبات این فرمول در کلاس، مورد نظر نمی‌باشد.

کار در کلاس

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷\,,-۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x+y=۵$ ب) $T: x=۵$ پ) $\Delta: y=۰$



۲ خط $L: ۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

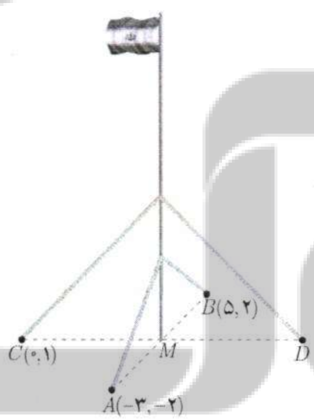
$L: ۲x-y=۱$ $T: y=۲x-۳$ $\Delta: x+۲y=۰$

۲ دو نقطهٔ $A(۳\,,۱۴)$ و $B(۱۰\,,-۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱\,,۲)$، $B(۲\,,۵)$ و $C(۴\,,۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

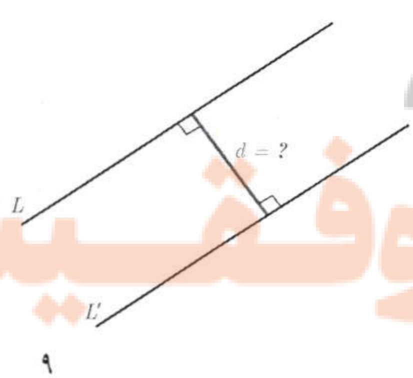
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲\,,-۲)$ و $B(۶\,,۴)$ هستند.
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.
ب) آیا نقطهٔ $C(۷\,,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۵ نقاط $A(۲\,,۳)$، $B(-۱\,,۰)$ و $C(۱\,,-۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

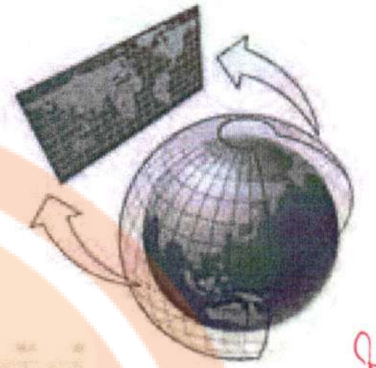


۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده‌است؛ به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.

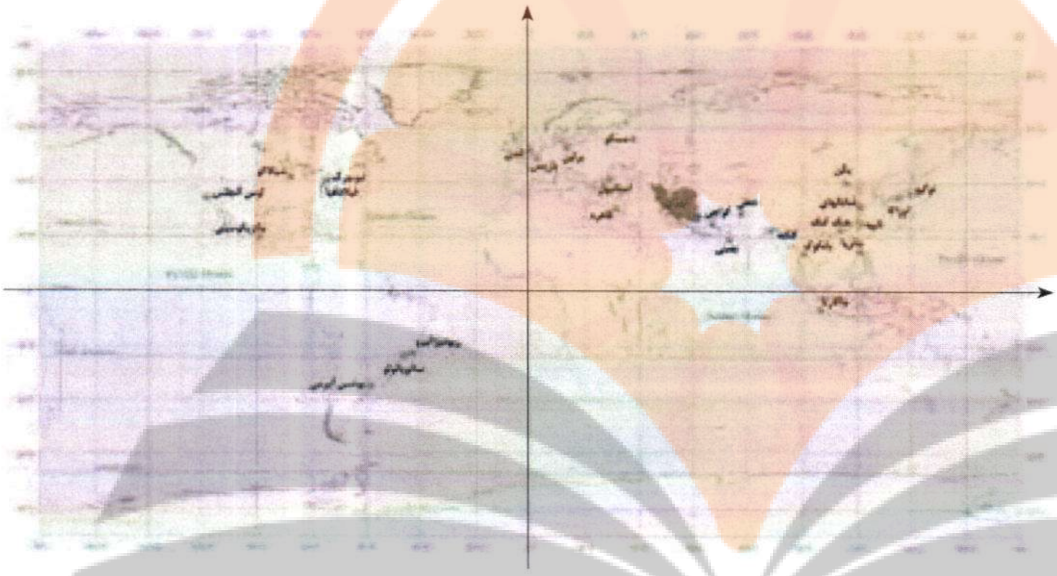
۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳\,,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.
ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).



۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



آیا تاکنون به رابطهٔ طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟

موزهٔ قاجار تبریز

حل کاردرکلاس صفحه ی ۹ (ریاضی۲)

۱ : $P(۷,-۴)$

الف)

$$L: ۲x + y = ۵ \rightarrow ۲x + y - ۵ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|(۲)(۷) + (۱)(-۴) + (-۵)|}{\sqrt{(۲)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{|۱۴ - ۴ - ۵|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

ب)

$$T: x = ۵ \rightarrow x + ۰y - ۵ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|(۱)(۷) + (۰)(-۴) + (-۵)|}{\sqrt{(۱)^۲ + (۰)^۲}} = \frac{|۷ - ۵|}{\sqrt{۱}} = ۲$$

پ)

$$\Delta: y = ۰ \rightarrow ۰x + y - ۰ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|(۰)(۷) + (۱)(-۴) + (۰)|}{\sqrt{(۰)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۱}} = ۴$$

۲ : خط مماس بر دایره، در نقطه ی تماس بر شعاع دایره عمود است. لذا برای تعیین اندازه ی شعاع دایره کافی است، فاصله ی مرکز دایره را تا خط مماس به دست آوریم.

$$L: ۳x - ۴y = ۰ \rightarrow ۳x - ۴y + ۰ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|(۳)(۲) + (-۴)(-۱) + (۰)|}{\sqrt{(۳)^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{|۶ + ۴|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۵}} = ۲$$

***

تلاشی درمسیرموفقیت

حل تمرین های صفحه ی ۹ و ۱۰ (ریاضی۲)

۱ :

$$\begin{cases} L: ۲x - y = ۱ \rightarrow m_L = ۲ \\ T: y = ۲x - ۳ \rightarrow m_T = ۲ \\ \Delta: x + ۲y = ۰ \rightarrow m_\Delta = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا با توجه به شیب ها واضح است که دو خط $L \| T$ و $L \perp \Delta$ و $T \perp \Delta$

۲ :

$M(\frac{۱۴+۱۰}{۲}, \frac{۳+(-۱۳)}{۲}) \rightarrow M(۱۲,-۵)$ مختصات نقطه‌ی وسط AB

$MO = \sqrt{(۱۲-۰)^۲ + (-۵-۰)^۲} = \sqrt{۱۴۴+۲۵} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$

۳ : ابتدا اندازه های سه ضلع مثلث را تعیین می کنیم.

$AB = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$

$AC = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$

$BC = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

چون $AB = AC$ مثلث متساوی الساقین است و چون $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ مثلث قائم الزاویه است.

لذا این مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

۴ : اندازه‌ی شعاع هر دایره نصف اندازه‌ی قطر آن است.

$d = AB = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (۴+۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۲} = \sqrt{۴\times۱۳} = ۲\sqrt{۱۳}$ اندازه‌ی قطر

$r = \frac{d}{۲} = \sqrt{۱۳}$ اندازه‌ی شعاع

مرکز هر دایره ، وسط قطرهای آن است. لذا می توان مختصات مرکز را نیز به صورت زیر به دست آورد.

$O(\frac{۲+۶}{۲}, \frac{۴+(-۲)}{۲}) \rightarrow O(۴,۱)$

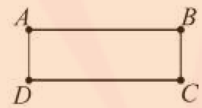
نقطه‌ی C وقتی می تواند روی دایره باشد که $CO = r$ باشد.

$$CO=\sqrt{(۷-۴)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

لذا این نقطه روی دایره واقع است.

۵ :

روش اوّل :

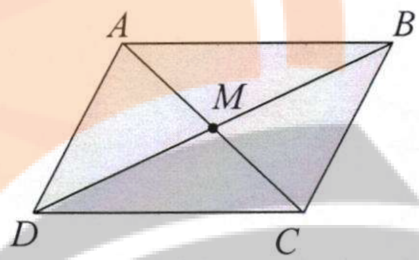


$m_{AB}=\frac{۰-۳}{-۱-۲}=۱$

معادله‌ی AD $\quad y=-(x-۲)+۳=-x+۵$

معادله‌ی CD $\quad y=۱(x-۱)+(-۲)=x-۳$

$\rightarrow -x+۵=x-۳\rightarrow x=۴\rightarrow \xrightarrow{y=(x-۱)-۲} y=۱$



روش دوّم : ابتدا مختصات نقطه‌ی وسط قطر AC را تعیین می کنیم.

$O(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۳+(-۲)}{۲})\rightarrow O(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

این نقطه وسط قطر BD نیز می باشد.

$$\begin{cases}\frac{x_B+x_D}{۲}=\frac{۳}{۲}\rightarrow\frac{-۱+x_D}{۲}=\frac{۳}{۲}\rightarrow x_D=۴\\ \frac{y_B+y_D}{۲}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۰+y_D}{۲}=\frac{۱}{۲}\rightarrow y_D=۱\end{cases}$$

روش سوّم : در هر مستطیل ، و به طور کل در متوازی الاضلاع چون قطرها همدیگر را نصف می کنند. لذا می توان نوشت:

$$x_A+x_C=x_B+x_D\rightarrow ۲+۱=-۱+x_D\rightarrow x_D=۴$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D\rightarrow ۳+(-۲)=۰+y_D\rightarrow y_D=۱$$

$$\rightarrow D(۴,۱)$$

۶ : چون فاصله‌ی هر نقطه تا میله برابر با فاصله ی نقطه‌ی مقابل تا میله ، لذا چهارضلعی $ACBD$ متوازی الاضلاع است . لذا با توجه به شکل می توان نوشت:

$$x_A+x_B=x_C+x_D\rightarrow -۳+۵=۰+x_D\rightarrow x_D=۲$$

$$y_A+y_B=y_C+y_D\rightarrow (-۲)+۲=۱+y_D\rightarrow y_D=-۱$$

$$\rightarrow D(۲,-۱)$$

۷ : چون مختصات نقطه‌ی $A(۳,۰)$ در معادله‌ی $y=۲x-۱$ صدق نمی کند. لذا این نقطه روی خط واقع نیست. در نتیجه فاصله ی این نقطه تا خط برابر ضلع مربع می باشد.

$$L: y=۲x-۱\rightarrow ۲x-y-۱=۰$$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(2)(3)+(-1)(0)+(-1)|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{|6-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

پس مساحت این مربع به صورت زیر است.

$$S=d^2=(\sqrt{5})^2=5$$

۸:

$$5x-12y+8=0\to m_1=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$$

$$-10x+24y+10=0\to m_2=\frac{-(-10)}{24}=\frac{5}{12}$$

چون دو خط داده شده، شیب های مساوی دارند، لذا موازیند. برای تعیین فاصله‌ی این دوخط، کافی است، یک نقطه‌ی دلخواه منطبق بر یکی از این دو خط را در نظر گرفته و سپس فاصله‌ی آن را تا خط دیگر به دست آوریم.

$$5x-12y+8=0\xrightarrow{y=-1}5x+12+8=0\to x=-4\to P(-4,-1)$$

$$-10x+24y+10=0\to m_2=\frac{-(-10)}{24}=\frac{5}{12}$$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(-10)(-4)+(24)(-1)+(10)|}{\sqrt{(-10)^2+(24)^2}}$$

$$=\frac{|40-24+10|}{\sqrt{100+576}}=\frac{26}{\sqrt{676}}=\frac{26}{26}=1$$

۹:

$$AB=\sqrt{(61-46)^2+(25-38)^2}=\sqrt{225+169}=\sqrt{394}=19/85$$

مسافت واقعی $110\times 19/85=2183/5$

***

۱۰,۴

درس دوم

معادلهٔ درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیّت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصّی از معادله‌ها[1] آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^4-10x^2+9=0$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت x^2، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار **تغییر متغیر** می‌گوییم.

$$x^2=u \Rightarrow u^2-10u+9=0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-10)^2-4(1)(9)=64$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2(1)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل

۱ــ در این کتاب روش تغییر متغیر فقط برای معادلات دو مجذوری به کار می‌رود.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۱ (ریاضی۲)

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2 - 7t - 4 = 0 \to (2t+1)(t-4) = 0$

$$\to \begin{cases} 2t+1=0 \to t=-\frac{1}{2} \to x^2=-\frac{1}{2} & \text{غ م} \\ t-4=0 \to t=4 \to x^2=4 \to x=\pm 2 \end{cases}$$

معادله فقط دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 3t + 2 = 0 \to (t+1)(t+2) = 0$

$$\to \begin{cases} t+1=0 \to t=-1 \to x^2=-1 & \text{غ م} \\ t+2=0 \to t=-2 \to x^2=-2 & \text{غ م} \end{cases}$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[1]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند: $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است: $(1)\ ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟ $\Delta = b^2\underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}} > 0$

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم: $3x^2+5x-1=0$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. $\Delta = 5^2-4(3)(-1) = 25+12=37 > 0$

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac = 25+12=37$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}\\[2mm] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{6}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}+\frac{-5-\sqrt{37}}{6}=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$$

ملاحظه می‌شود که: $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجهٔ فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم:

$$3x^2-7x=0 \Rightarrow x(3x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\frac{7}{3}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=0+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}=-\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\[2mm] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{array}\right\}\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید: $P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a}$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

[1] ـ S حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل‌ضرب است.

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a\neq 0) \quad ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه :

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$$

کار در کلاس

$a=-2 \quad b=1 \quad c=5$

در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

مجموع ریشه‌ها $S=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=\frac{5}{-2}$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این‌کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-Sx+P=0$$

بنابراین نشان دادیم که :

معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

کار در کلاس

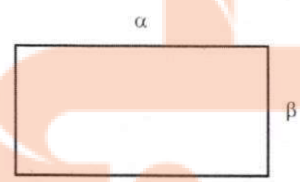
۱) دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-1/5$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

۲) آیا مستطیلی با محیط $11\,cm$ و مساحت $6\,cm^2$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

محیط $=11 \Rightarrow 2(\alpha+\beta)=11 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{11}{2} \Rightarrow \beta=\frac{11}{2}-\alpha$

مساحت $=6 \Rightarrow \alpha.\beta=6 \Rightarrow \alpha(\frac{11}{2}-\alpha)=6$



الف) معادلهٔ بالا را ساده کنید و از حل آن α و β را به دست آورید.

ب) با استفاده از S و P و تشکیل یک معادلهٔ درجه دوم، این مسئله را حل کنید.

۳) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ باشند.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۳ (ریاضی۲)

۱ : کافی است که ابتدا یک معادله‌ی درجه‌ی دوّم تشکیل دهیم و سپس ریشه های آن را تعیین کنیم.

$$S=-\frac{۳}{۲} \quad \text{و} \quad P=-۷$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \to x^{۲}+\frac{۳}{۲}x-۷=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^{۲}+۳x-۱۴=۰$$

$$\to (x-۲)(۲x+۷)=۰ \to \begin{cases} x=۲ \\ x=-\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

۲ :

الف)

$$\alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶ \to ۲\alpha^{۲}-۱۱\alpha+۱۲=۰ \to (\alpha-۴)(۲\alpha-۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} \alpha=۴ \xrightarrow{\beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha} \beta=\frac{۳}{۲} \\ \alpha=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha} \beta=۴ \end{cases}$$

لذا طول این مستطیل ۴ و عرض آن $\frac{۳}{۲}$ می باشد.

ب)

$$۲(\alpha+\beta)=۱۱ \to \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲} \quad \text{و} \quad \alpha\beta=۶$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \to x^{۲}-\frac{۱۱}{۲}x-۶=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^{۲}-۱۱x-۱۲=۰$$

$$\to (x-۴)(۲x-۳)=۰ \to \begin{cases} x=۴ \to \alpha=۴ \xrightarrow{\beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha} \beta=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۳}{۲} \to \alpha=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha} \beta=۴ \end{cases}$$

۳ :

$$S=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=۳ \quad \text{و} \quad P=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۹-۵}{۴}=۱$$

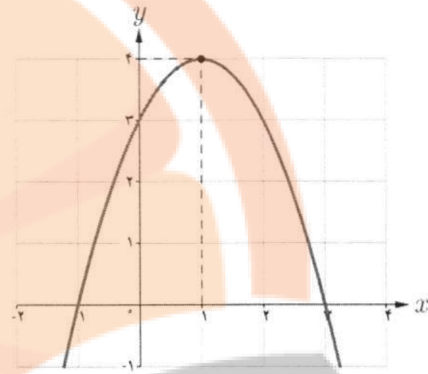
$$x^{۲}-Sx+P=۰ \to x^{۲}-۳x+۱=۰$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

الف) اگر $a>۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به‌دست می‌آید.

ب) اگر $a<۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.

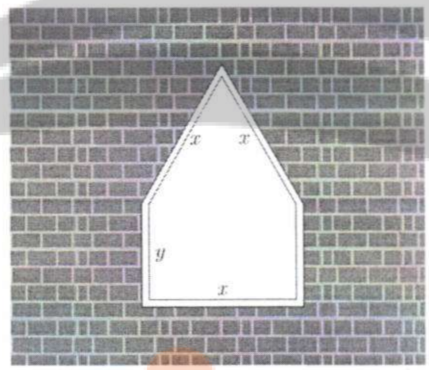


مثال : ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x)=-x^۲+۲x+۳$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل : چون $a=-۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱)=۴$.

تذکر : همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(۱,۴)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



حل : با توجه به شکل داریم : $۴=$ محیط پنجره $\Rightarrow ۳x+۲y=۴ \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟)، می‌توان نوشت :

(تمرین ریاضی ۱ فصل ۴) ←

مساحت پنجره : $S=x.y+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(۲-\frac{۳}{۲}x)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۲x-\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲+۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ حاصل می‌شود.

$a<۰$

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲}{\frac{۶-\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}\simeq ۰/۹۴(m)$$

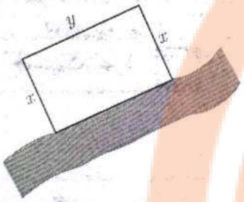
$$y=۲-\frac{۳}{۲}x\simeq ۲-\frac{۳}{۲}(۰/۹۴)=۰/۵۹(m)$$


رودخانهٔ قزل‌اوزن

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

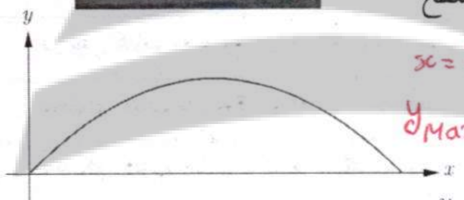
الف) $g(x)=-(x+1)^2+3$ ب) $h(x)=x^2-4x+9$



۲ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $20\ m/s$ شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-1}{40}x^2+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(-\frac{1}{40})}=20$

الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

$y_{Max}=-\frac{1}{40}(20)^2+20=10\ m$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

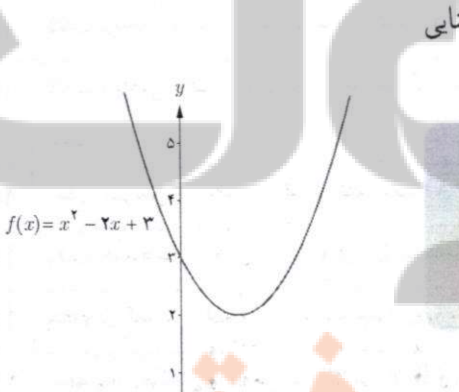
$y=0 \longrightarrow x=40$

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=0$.

$$y=0 \Rightarrow x\left(\frac{-1}{40}x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=40 \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟ در ابتدا و انتها ارتفاع توپ صفر می شود.

> نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.



همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(0)$ است. به عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۵ (ریاضی۲)

۱ :

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ سهمی رو به پایین و نقطه‌ی ماکزیمم دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \rightarrow y_{\max} = g(-1) = -(-1+1)^2 + 3 = 3$$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ سهمی رو به بالا و نقطه‌ی مینیمم دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 4 \rightarrow y_{\min} = h(1) = (1)^2 - 4(1) + 9 = 6$$

۲ :

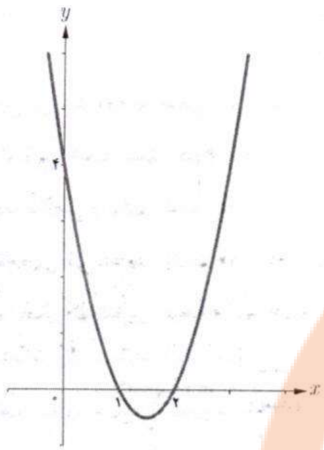
$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$

مساحت $S = x \times y = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

$a = -2 < 0 \rightarrow$ سهمی رو به پایین و نقطه‌ی ماکزیمم دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(100)}{2(-2)} = 25 \rightarrow y = 100 - 2(25) = 50$$

$$\rightarrow S_{\max} = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250\ m^2$$



مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :

$y = a\,(x-۱)(x-۲)$

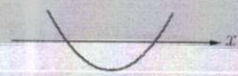
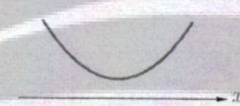
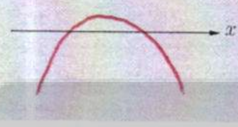
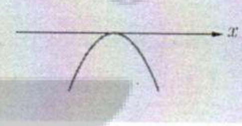
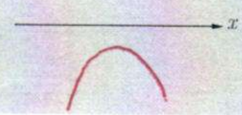
با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a=۲$

$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید[۱].

a \ Δ	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta=۱۶>۰$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰$

هر دو ریشه منفی‌اند $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = -۶ < ۰$

ب) $y = x^۲+۴x-۵$

$\Delta = ۱۶-۴(۱)(-۵) = ۳۶$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$P = \frac{c}{a} = \frac{-۵}{۱} = -۵$ ریشه ها مختلف العلامه هستند.

$S = -\frac{b}{a} = -۴$ ریشه ی منفی قدر مطلق بیشتر دارد.

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

$\Delta = (-۷)^۲-۴(۳)(۱) = ۴۹-۱۲ = ۳۷>۰$

معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$ ریشه ها هم علامت هستند.

$S = \frac{-b}{a} = \frac{۷}{۳}$ هر دو ریشه مثبت هستند.

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

$\Delta = (۲)^۲-۴(-۱)(-۱) = ۴-۴ = ۰$ معادله ریشه ی مضاعف دارد.

$x = ۱$ ریشه مثبت

$P = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{-۱} = +۱$

$S = \frac{-۲}{-۱} = ۲$

۱ــ در این جدول محور yها رسم نشده است.

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.

به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

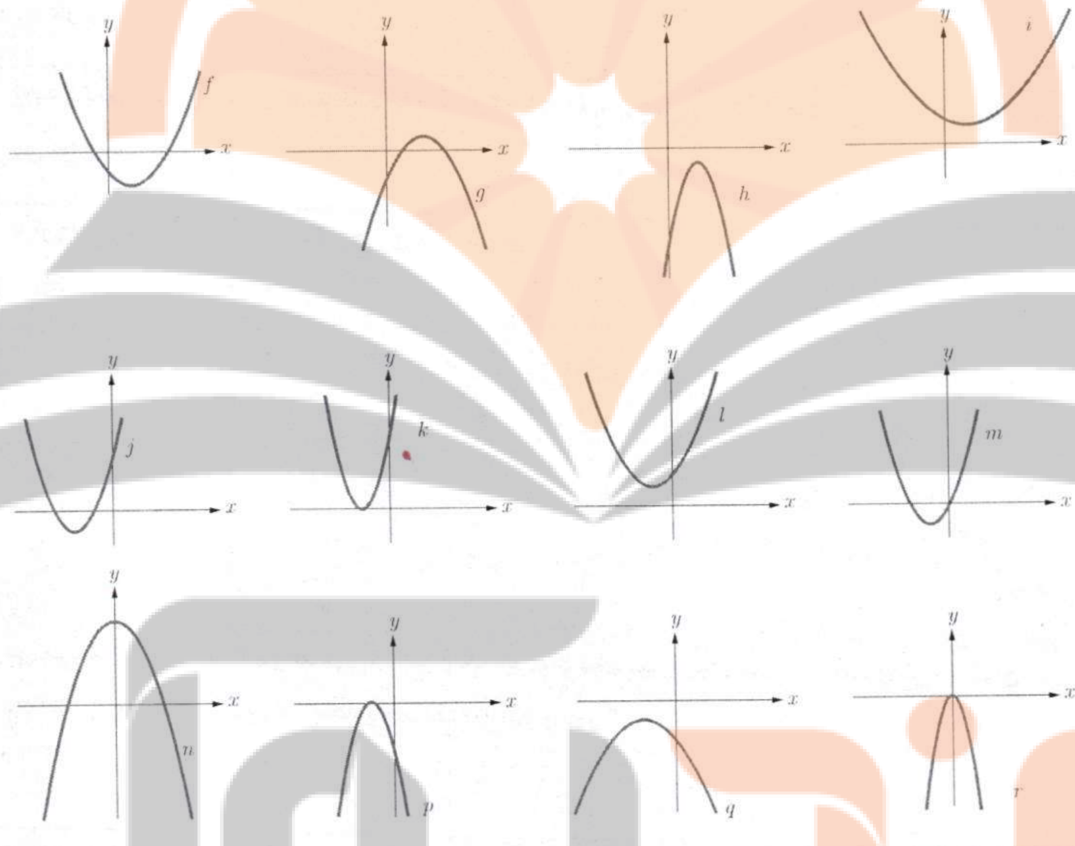
ـ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.

ـ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

ـ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow b<0$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	دو	۲	فاقد ریشه	فاقد ریشه	۲	۱	فاقد ریشه	دو	۲	۱	فاقد ریشه	۱
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	+ +	ریشه ندارد	ریشه ندارد	− −	−	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	+ −	−	ریشه ندارد	۰

تمرین

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

۳) مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴) راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

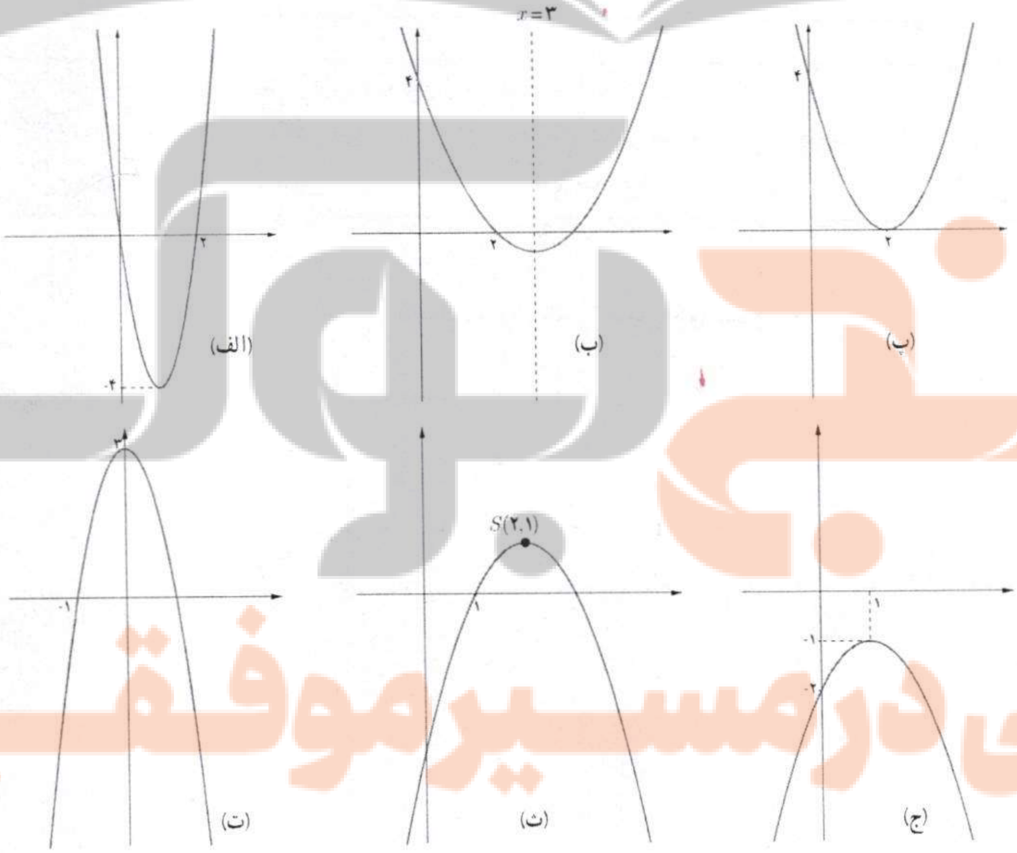
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی گردد؟

۵) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۶) معادلهٔ سهمی های زیر را بنویسید.



حل تمرین صفحه ی ۱۸ (ریاضی۲)

: ۱

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 8t + 8 = 0$

$$\xrightarrow{\Delta = 64 - 32 = 32} \begin{cases} t = \dfrac{8 + 4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2} \\ t = \dfrac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ \rightarrow x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

معادله چهار ریشه‌ی حقیقی دارد.

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3 \rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0$

$$\xrightarrow{x^3 = t} 4t^2 - 5t + 1 = 0 \rightarrow (t - 1)(4t - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \\ t = \dfrac{1}{4} \rightarrow x^3 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

: ۲

$S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$ و $P = (1 + \sqrt{2}) \times (1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$

$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

: ۳

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

$a = -2 < 0 \rightarrow$ سهمی رو به پایین و نقطه‌ی ماکزیمم دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(8)}{2(-2)} = 2 \rightarrow y_{\max} = f(2) = -(2)^2 + 8(2) - 5 = 7$$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$a = 3 > 0 \rightarrow$ سهمی رو به بالا و نقطه‌ی مینیمم دارد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(6)} = -1 \rightarrow y_{\min} = g(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 2$$

۴ :

$h(t) = ۱۰۰t - ۵t^۲ \qquad , \qquad t \geq ۰$

الف: معادله‌ی حرکت راکت سهمی است. در این سهمی $a = -۵ < ۰$ لذا سهمی روبه پایین و دارای نقطه‌ی ماکزیمم است. زمانی راکت به بالاترین ارتفاع خود می رسد که $t = \frac{-b}{۲a}$ (طول نقطه ماکزیمم) باشد.

$$t = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰}{۲(-۵)} = ۱۰ \ s$$

ب : ارتفاع نقطه‌ی اوج راکت، همان عرض نقطه‌ی ماکزیمم است.

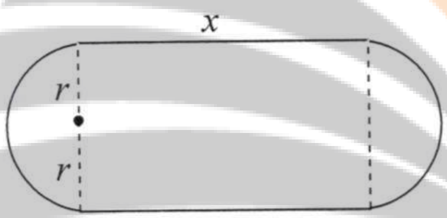
$$y_{\max} = h(۱۰) = ۱۰۰(۱۰) - ۵(۱۰)^۲ = ۱۰۰۰ - ۵۰۰ = ۵۰۰$$

پ : کافی است معادله‌ی $h(t) = ۰$ را حل کنیم.

$$۱۰۰t - ۵t^۲ = ۰ \rightarrow t(۱۰۰ - ۵t) = ۰ \rightarrow t = ۰ \qquad , \qquad t = ۲۰$$

پس از ۲۰ ثانیه راکت به زمین باز می گردد.

۵ :



محیط استادیوم $x + x + ۲\pi r = ۱۵۰۰ \rightarrow x + \pi r = ۷۵۰ \rightarrow x = ۷۵۰ - \pi r$

الف :

مساحت مستطیل $S = x(۲r) \rightarrow S = (۷۵۰ - \pi r)(۲r) = ۱۵۰۰r - ۲\pi r^۲$

چون $a = -۲\pi < ۰$ لذا سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه ی max است.

$$r = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۵۰۰}{۲(-۲\pi)} = \frac{۳۷۵}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx ۳} r = ۱۲۵ \ m$$

$$\rightarrow S_{\max} = ۱۵۰۰(۱۲۵) - ۲(۳)(۱۲۵)^۲ = ۱۸۷۵۰۰ - ۹۳۷۵۰ = ۹۳۷۵۰ \ m^۲$$

ب :

مساحت استادیوم $S = x(۲r) + \pi r^۲ \rightarrow S = (۷۵۰ - \pi r)(۲r) + \pi r^۲ = ۱۵۰۰r - \pi r^۲$

چون $a = -\pi < ۰$ لذا سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه‌ی max است.

$$r = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۵۰۰}{۲(-\pi)} = \frac{۷۵۰}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx ۳} r = ۲۵۰ \ m$$

$$\rightarrow S_{\max} = ۱۵۰۰(۲۵۰) - (۳)(۲۵۰)^۲ = ۳۷۵۰۰۰ - ۱۸۷۵۰۰ = ۱۸۷۵۰۰ \ m^۲$$

:۶

معادله‌ی سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$

الف :

$(۰,۰) \rightarrow ۰ = ۰ + ۰ + c \rightarrow c = ۰$

$(۲,۰) \rightarrow ۰ = ۴a + ۲b + ۰ \rightarrow ۲a + b = ۰$

سهمی متقارن است. لذا طول رأس سهمی برابر $x_{۰} = \frac{۰ + ۲}{۲} = ۱$. پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $(۱,-۴)$ رأس سهمی است. در نتیجه

$(۱,-۴) \rightarrow -۴ = a + b + ۰ \rightarrow a + b = -۴$

$\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b = -۴ \end{cases} \rightarrow a = ۴ \quad , \quad b = -۸$

معادله‌ی سهمی $y = ax^{۲} + bx + c \rightarrow y = ۴x^{۲} - ۸x$

ب :

$(۰,۴) \rightarrow ۴ = ۰ + ۰ + c \rightarrow c = ۴$

$(۲,۰) \rightarrow ۰ = ۴a + ۲b + ۴ \rightarrow ۲a + b = -۲$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = ۳$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$x = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۳ = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۶a + b = ۰$

$\begin{cases} ۲a + b = -۲ \\ ۶a + b = ۰ \end{cases} \rightarrow a = \frac{۱}{۲} \quad , \quad b = -۳$

معادله‌ی سهمی $y = ax^{۲} + bx + c \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x^{۲} - ۳x + ۴$

پ :

$(۰,۴) \rightarrow ۴ = ۰ + ۰ + c \rightarrow c = ۴$

$(۲,۰) \rightarrow ۰ = ۴a + ۲b + ۴ \rightarrow ۲a + b = -۲$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = ۲$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$x = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۲ = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۴a + b = ۰$

$\begin{cases} ۲a + b = -۲ \\ ۴a + b = ۰ \end{cases} \rightarrow a = ۱ \quad , \quad b = -۴$

معادله‌ی سهمی $y = ax^{۲} + bx + c \rightarrow y = x^{۲} - ۴x + ۴$

۱۸/۳

ت :

$(0,3) \to 3 = 0 + 0 + c \to c = 3$

$(-1,0) \to 0 = a - b + 3 \to a - b = -3$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 0$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \to 0 = \frac{-b}{2a} \to b = 0$$

$$a - b = -3 \xrightarrow{b=0} a = -3$$

معادله‌ی سهمی $y = ax^2 + bx + c \to y = -3x^2 + 3$

ث :

$(1,0) \to 0 = a + b + c$

$S(2,1) \to 1 = 4a + 2b + c$

$$\times(-1)\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -a - b - c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \to 3a + b = 1$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 2$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \to 2 = \frac{-b}{2a} \to 4a + b = 0$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \to a = -1 \quad , \quad b = 4$$

$$a + b + c = 0 \xrightarrow{a=-1 \ , \ b=4} -1 + 4 + c = 0 \to c = -3$$

معادله‌ی سهمی $y = ax^2 + bx + c \to y = -x^2 + 4x - 3$

ج :

$(0,-2) \to -2 = 0 + 0 + c \to c = -2$

$(1,-1) \to -1 = a + b - 2 \to a + b = 1$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 1$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \to 1 = \frac{-b}{2a} \to 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \to a = -1 \quad , \quad b = 2$$

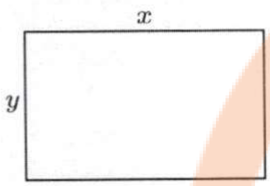
معادله‌ی سهمی $y = ax^2 + bx + c \to y = -x^2 + 2x - 2$

***

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا



مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند.

مثال : عرض مستطیل را $y=۱$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^۲=x+۱ \Longrightarrow x^۲-x-۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۵ \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_۱=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}} \\ x_۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.

ارگ تاریخی بم

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل ۵=۲+□ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

صفحه‌ای از کتاب ریاضی دوم دبستان

فعالیت

۱ معادلهٔ مقابل را حل کنید. (۱) $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2-x}{x^2-x}$

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

(۲) $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)}=\dfrac{2-x}{x(x-1)}$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد x، $(x+1)$ و $(x-1)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر 1 است؛ پس ک‌م‌م مخرج‌ها عبارت است از $x(x-1)(x+1)$.

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1)\left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}\right]=x(x-1)(x+1)\left[\frac{2-x}{x(x-1)}\right]\Rightarrow 2x^2+2x(x-1)=(x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $5x^2-3x-2=0$ حاصل می‌شود.

خیر

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

$(x-1)(5x+2)=0$ $\quad x=1$ غ ق ق ← مخرج را صفر می‌کند.

$\to x=\dfrac{-2}{5}$

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار $10\,km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

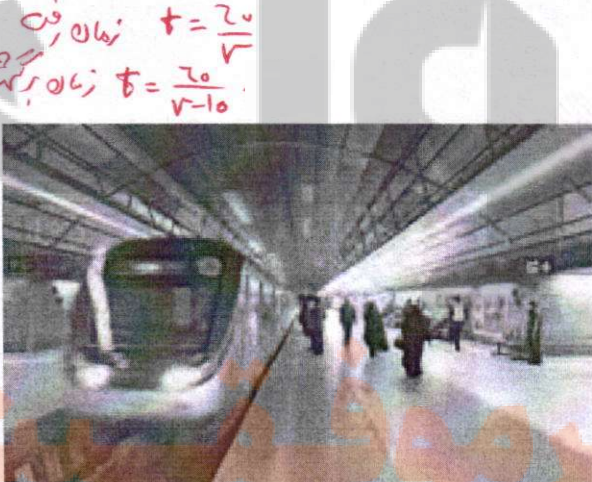
$x=vt\Rightarrow t=\dfrac{x}{v}$

زمان رفت $t=\dfrac{60}{v}$

زمان برگشت $t=\dfrac{60}{v-10}$

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\dfrac{60}{v}$ به‌دست می‌آید؟

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.



پ) توضیح دهید که چرا معادلهٔ $\dfrac{60}{v-10}=\dfrac{60}{v}+\dfrac{1}{2}$ برقرار است.

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

$2v(\cancel{v-10})\times\dfrac{60}{\cancel{v-10}}=2v(v-10)\times\left(\dfrac{60}{v}+\dfrac{1}{2}\right)$

$\to \cancel{120v}=\cancel{120v}-1200+v^2-10v$

$\to v^2-10v-1200=0 \to (v-40)(v+30)=0$ $\quad v=40\ \dfrac{km}{h}$

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$ ب) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$ پ) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود :

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{۹n+\cdots\cdots}{۵+\cdots\cdots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

ح.ع.۹

مثال : اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل : ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{۱}{t}$
B	$۲t$	....
A و B با هم	....	$\frac{۱}{۴}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}\overset{\times ۲}{\Rightarrow}\frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۶ \quad \text{زمان ماشین } A$$

$$\Rightarrow ۲t=۱۲ \quad \text{زمان ماشین } B$$

حل تمرین صفحه ی ۲۱ (ریاضی۲)

۱ :

الف) $\frac{۳}{x^۲} - ۱۲ = ۰ \rightarrow \frac{۳}{x^۲} = ۱۲ \rightarrow ۱۲x^۲ = ۳ \rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$

ب) $\frac{۲}{k} - \frac{۳k}{k+۲} = \frac{k}{k^۲ + ۲k}$

مخرج ها $\begin{cases} A = k \\ B = k + ۲ \xrightarrow{\text{ک م م}} k(k+۲) \\ C = k(k+۲) \end{cases}$

$$k(k+۲) \times (\frac{۲}{k} - \frac{۳k}{k+۲}) = k(k+۲) \times (\frac{k}{k(k+۲)})$$

$$\rightarrow ۲k + ۴ - ۳k^۲ = k \rightarrow ۳k^۲ - k - ۴ = ۰ \rightarrow (k+۱)(۳k-۴) = ۰ \rightarrow \begin{cases} k = -۱ \\ k = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

پ) $\frac{۳}{x} - \frac{۲}{x-۳} = \frac{۱۲}{۹ - x^۲} \rightarrow \frac{۳}{x} - \frac{۲}{x-۳} = \frac{-۱۲}{x^۲ - ۹}$

مخرج ها $\begin{cases} A = x \\ B = x - ۳ \xrightarrow{\text{ک م م}} x(x-۳)(x+۳) \\ C = (x-۳)(x+۳) \end{cases}$

$$(x(x-۳)(x+۳)) \times (\frac{۳}{x} - \frac{۲}{x-۳}) = (x(x-۳)(x+۳)) \times (\frac{-۱۲}{x^۲ - ۹})$$

$$\rightarrow ۳(x-۳)(x+۳) - ۲x(x+۳) = -۱۲x \rightarrow x^۲ + ۶x - ۲۷ = ۰$$

$$\rightarrow (x+۹)(x-۳) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۹ \\ x = ۳ \text{ غ غ} \end{cases}$$

۲ : ابتدا الگوی زیر را تشکیل می دهیم.

شماره‌ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	....	؟
امتیاز کسب شده			۳۶			۹	....	۹
میانگین			۷/۲				۹	

گیریم که آرمان در بعد از هفته ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون هـای آرمـان برابر $n + ۵$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $۹n + ۳۶$ خواهد شد. لذا میانگین کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n} = ۸ \rightarrow ۹n + ۳۶ = ۴۰ + ۸n \rightarrow n = ۴$$

یعنی آرمان بعد از هفته ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

آزمون جواب :

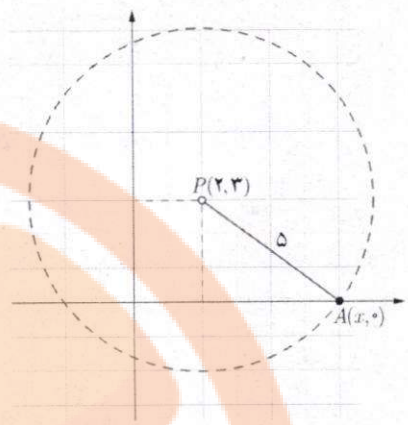
تعداد کل امتیاز ها $= ۹(۴) + ۳۶ = ۷۲$

تعداد کل آزمون ها $= ۵ + n = ۵ + ۴ = ۹$

میانگین کل امتیاز ها $۷۲ \div ۹ = ۸$

که با داده های مسئله ، همخوانی دارد، لذا راه حل درست است.

***



معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲,۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟ دوجواب

برای این کار فرض می‌کنیم مختصات نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x,۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \quad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت :

$$(x-۲)^۲+۹=۲۵$$

$$(x-۲)^۲=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}(x-۲)=۴ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow A(۶,۰)\\(x-۲)=-۴ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow B(-۲,۰)\end{cases}$$

تذکر : عبارت رادیکالی معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصل زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty,+\infty)$.

مثال : در معادلهٔ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}$ ، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[۱,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم :

$$۴x=۳x-۳ \Rightarrow x=-۳ \quad \text{(غیر قابل قبول)}$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

۱ــ در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجهٔ ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند.

کار در کلاس

۱) معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

الف) $2\sqrt{2t-1}-t=1$

$$2\sqrt{2t-1}=t+1$$
$$\Rightarrow 4(2t-1)=(t+1)^2$$
$$\Rightarrow t^2-6t+5=0$$
$$\Rightarrow (t-1)(t-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

ب) $2x=1-\sqrt{2-x}$

$$\sqrt{2-x}=1-2x$$
$$\Rightarrow 2-x=1+4x^2-4x$$
$$\Rightarrow 4x^2-3x-1=0$$
$$\Delta=25\,,\; x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$

ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

۲) بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند؟

الف) $\sqrt{t}+2=0$

ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

تمرین

۱) هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$

ب) $\frac{10}{r}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3r}-5$

پ) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$

ت) $\sqrt{t+4}=3$

ث) $k=\sqrt{6k-8}$

ج) $x+\sqrt{x}=6$

چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

۲) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟


قلعه بهستان ــ ماه‌نشان زنجان

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.
این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

تهیه کننده :

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

حل کار در کلاس ۲۳ (ریاضی۲)

۱ :

پ) $\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱ \rightarrow (\sqrt{x+۷})^۲=(\sqrt{x}+۱)^۲ \rightarrow x+۷=x+۲\sqrt{x}+۱$

$\rightarrow x+۷=x+۲\sqrt{x}+۱ \rightarrow ۲\sqrt{x}=۶ \rightarrow \sqrt{x}=۳ \rightarrow x^۲=۹ \rightarrow x=۳ \quad , \quad x=-۳$ غ ق

ت) $\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰ \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{u-۳}}=\frac{۲}{\sqrt{u}} \rightarrow ۲\sqrt{u-۳}=\sqrt{u} \rightarrow ۴(u-۳)=u$

$\rightarrow ۴u-۱۲=u \rightarrow ۳u=۱۲ \rightarrow u=۴$

ث) $۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x \rightarrow \sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x-۲$

$\rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=x^۲-۴x+۴ \rightarrow x^۲-x-۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰$

$\rightarrow x=۲ \quad , \quad x=-۱$ غ ق

۲ :

الف) عبارت $\sqrt{t}$ نامنفی است. لذا $\sqrt{t}+۲$ نمی تواند برابر صفر شود. پس معادله‌ی $\sqrt{t}+۲=۰$ ریشه ی حقیقی ندارد.

ب) عبارت های $\sqrt{x-۲}$ و $\sqrt{۲x+۳}$ نامنفی هستند. پس $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱$ نمی توان صفر شود. پس معادله‌ی $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$ فاقد ریشه ی حقیقی است.

پ)

$$\begin{cases} ۱-x\geq ۰ \rightarrow x\leq ۱ \\ x-۲\geq ۰ \rightarrow x\geq ۲ \end{cases}$$

چون اشتراک دامنه ها ، تهی است. لذا هیچ عدد حقیقی نمی تواند ریشه ی این معادله باشد.

***

حل تمرین صفحه ی ۲۱ (ریاضی۲)

۱ :

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵ \xrightarrow{\text{ک م م}=x(x-۲)} x(x-۲)\times(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲})=x(x-۲)\times ۵$

$\to x-۲+x=۵x^۲-۱۰x \to ۵x^۲-۱۲x+۲=۰$

$\xrightarrow{\Delta=۱۴۴-۴۰=۱۰۴} \begin{cases} x=\frac{۱۲+۲\sqrt{۲۶}}{۱۰}=\frac{۶+\sqrt{۲۶}}{۵} \\ x=\frac{۱۲-۲\sqrt{۲۶}}{۱۰}=\frac{۶-\sqrt{۲۶}}{۵} \end{cases}$

ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵ \xrightarrow{\times ۶r} ۳۰-۴۵r=۴۰-۳۰r \to ۵r=-۱۰ \to r=-۲$

پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

$\xrightarrow{\text{ک م م}=(x-۳)(x+۴)} (x-۳)(x+۴)\times(\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴})=(x-۳)(x+۴)\times\frac{x-۱}{x-۳}$

$\to ۲x(x+۴)+(x+۱)(x+۴)=(x+۴)(x-۱)$

$\to ۲x^۲+۸x+x^۲+۴x+x+۴=x^۲-x+۴x-۴$

$\to ۲x^۲+۱۰x+۸=۰ \to x^۲+۵x+۴=۰ \to (x+۱)(x+۴)=۰$

$\to x=-۱ \quad , \quad x=-۴$ غ ق

ت) $\sqrt{t+۴}=۳ \to t+۴=۹ \to t=۵$

ث) $k=\sqrt{۶k-۸} \to k^۲=۶k-۸ \to k^۲-۶k+۸=۰ \to (k-۲)(k-۴)=۰$

$\to k=۲ \quad , \quad k=۴$

ج) $x+\sqrt{x}=۶ \to \sqrt{x}=۶-x \to x=۳۶-۱۲x+x^۲ \to x^۲-۱۳x+۳۶=۰$

$\to (x-۴)(x-۹)=۰ \to x=۴ \quad , \quad x=۹$ غ ق

چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱ \to (\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵})^۲=(۱)^۲$

$\to x+۱-۲\sqrt{x+۱}\times\sqrt{۲x-۵}+۲x-۵=۱$

$$\rightarrow -2\sqrt{x+1}\times\sqrt{2x-5} = -3x+5 \rightarrow \left(-2\sqrt{x+1}\times\sqrt{2x-5}\right)^2 = (-3x+5)^2$$

$$\rightarrow 4(x+1)(2x-5) = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\rightarrow 4(x+1)(2x-5) = 9x^2 - 30x + 25 \rightarrow 8x^2 - 12x - 20 = 9x^2 - 30x + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \rightarrow (x-15)(x-3) = 0 \rightarrow x = 3 \ , \quad x = 15$$ غ ق

ح) $$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \rightarrow \left(\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 = (2)^2 \rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4$$

$$\rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4 \rightarrow m + \frac{1}{m} = 2 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

۲ :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{120} = \frac{1}{80} \xrightarrow{\times 240r} 240 + 2r = 3r \rightarrow r = 240 \ \text{min}$$

۳ :

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \rightarrow 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5} \rightarrow h = 30 \ \ m$$

۴ :

الف :

$$\sqrt{x} - x = \frac{1}{2}x \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}x \rightarrow x = \frac{9}{4}x^2 \rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x\left(\frac{9}{4}x - 1\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \ , \quad x = \frac{4}{9}$$ غ ق

ب :

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \rightarrow x = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \ , \quad x = 4$$

۵ : معادله های رادیکالی متعددی می توان نوشت که ریشه های آنها $x = 1$ باشد. برای مثال :

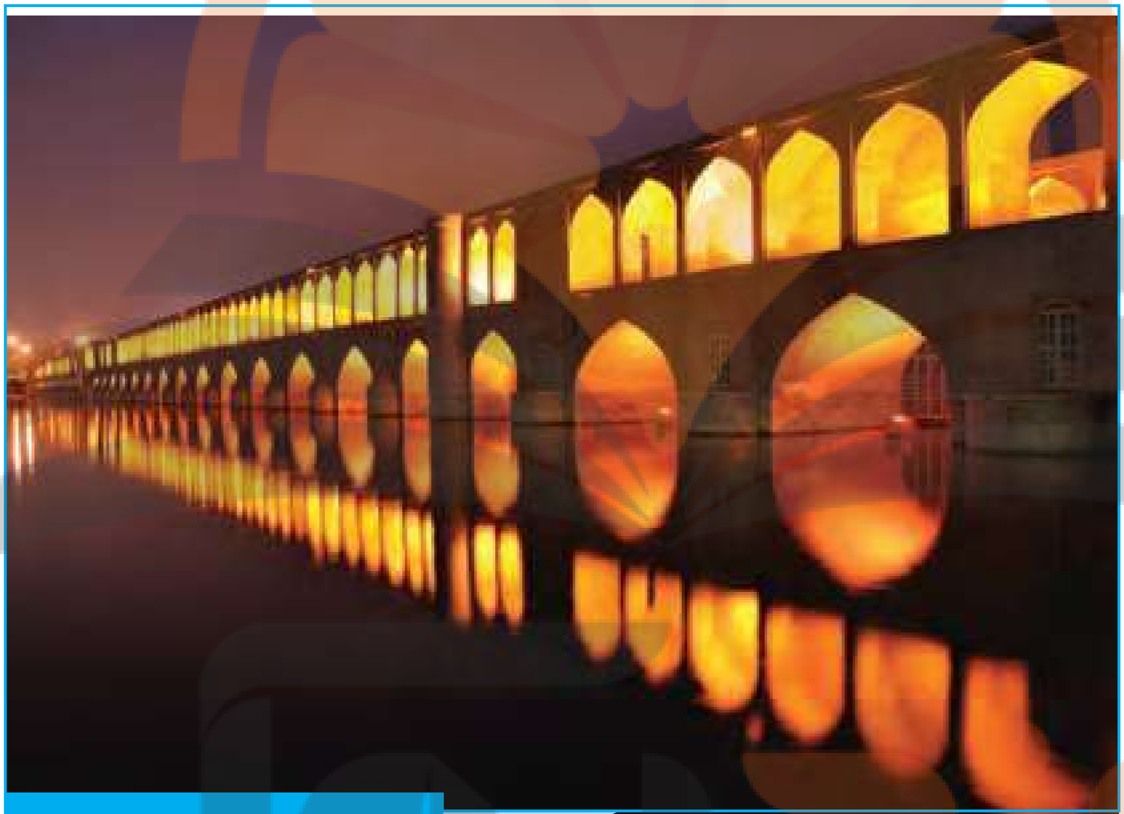
$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3$$

حل فصل ۲ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

فصل

۲ هندسه



سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده‌است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان است.

درس اوّل — ترسیم‌های هندسی

درس دوم — استدلال و قضیهٔ تالس

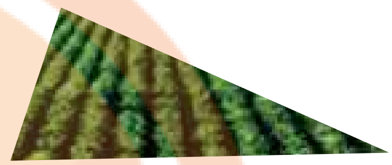
درس سوم — تشابه مثلث‌ها

سوال ۳) در دایره $C(o,r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطهٔ o کمتراز r باشد درون دایره قرار دارد. و هر نقطه که درون دایره قرار داشته باشد فاصله آن نقطه از نقطه o کمتر از r است

در دایره $C(o,r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطهٔ o بیشتراز r باشد بیرون دایره قرار دارد و هر نقطه که بیرون دایره قرار داشته باشد فاصله آن نقطه از نقطه o بیشتر از r است

درس اوّل

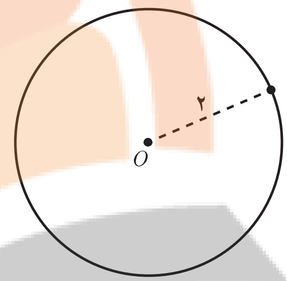
ترسیم‌های هندسی



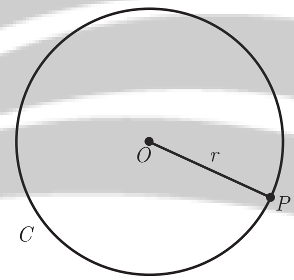
انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

یک میانه زمین مثلث شکل را رسم کنیدزمین به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم می شود

فعالیت



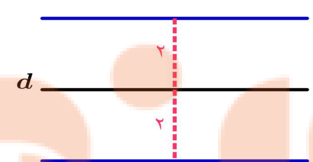
۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟ دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر



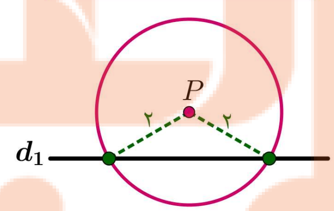
۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی آن درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟ دو سانتی متر است

نتیجه : دایرهٔ $C(O,r)$ (بخوانید دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد ..روی.... دایره قرار دارد و هر نقطه که ...روی...... دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.



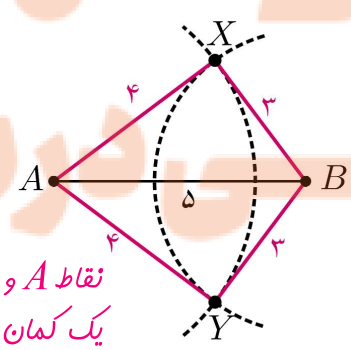
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟ دو خط موازی خط d به فاصله ۲ سانتی متر از خط d



۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.



۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

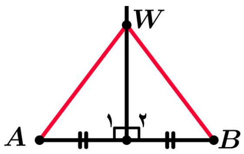
$\triangle AXB: \overline{AB}=۵, \overline{AX}=۴, \overline{BX}=۳$

$\triangle AYB: \overline{AB}=۵, \overline{AY}=۴, \overline{BY}=۳$

ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های دادهٔ شدهٔ ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

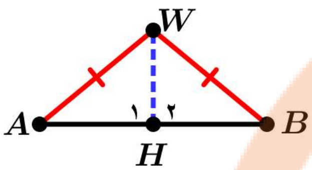
نقاط A و B را به فاصله ۷سانتی متر از هم درنظر می گیریم. به مرکز Aو به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم می کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۵ سانتی متر کمانی دیگر رسم می کنیم دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند C و D قطع می کنند. دومثلثACB وADB پدید می آید

$$\begin{cases} AH = BH \\ WH = WH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow AW = BW$$



برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.



نتیجهٔ۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است

$$\begin{cases} AW = BW \\ AH = BH \\ WH = WH \end{cases} \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 \quad , \quad \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

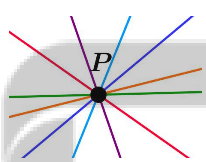
راهنمایی :(از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.) نقطه وسط AB را H می نامیم

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دوسر آن پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

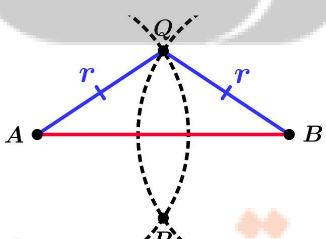


۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟ بیشمار خط می توان رسم کرد

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟ فقط یک خط عبور می کند

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ حداقل دو نقطه از خط باید مشخص شود

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



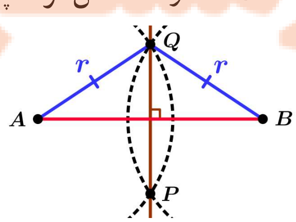
می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟ بله – چون از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند

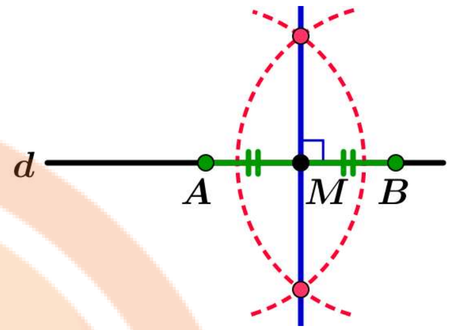
۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟ بله – چون برای رسم هر خط دو نقطه لازم است

۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم کنید.



۱- به مرکز M و شعاع دلخواه r دایره ای رسم می کنیم محل برخورد خط d و دایره را A و B می نامیم . در نتیجه داریم $AM=MB=r$

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن



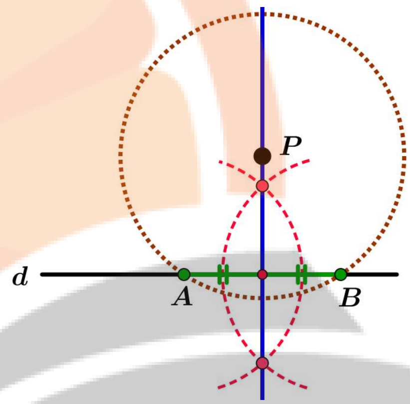
خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. توضیح رسم عمود منصف در صفحه قبل داده شده است

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ...عمود... و از نقطهٔ ...M می گذرد... .

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

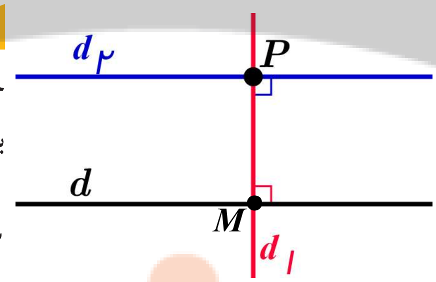
۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند. یک دایره به مرکز P و شعاع بیشتر از فاصله نقطه P از خط d می زنیم نقاط برخورد این دایره و خط d همان A و B هستند

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. سوال۳) بله - چون فاصله این نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d ...عمود... و از نقطهٔ ...P می گذرد... .

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

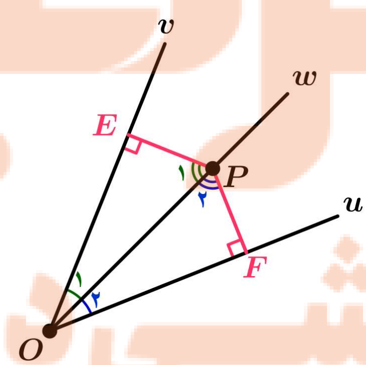
۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

این دو خط موازی هستند.($d \parallel d_2$) - فرض می کنیم خط d_1 مورب است و دو خط d و d_2 را در نقاط M و P قطع می کند. تمام زوایه های ایجاد شده توسط این خط مورب برابر ۹۰ درجه است چون $d \perp d_1$ و $d_2 \perp d_1$ پس طبق عکس قضیه خطوط موازی و خط مورب این دو خط با هم موازیند.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

چون نیمساز OP زاویه O است پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و داریم $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$

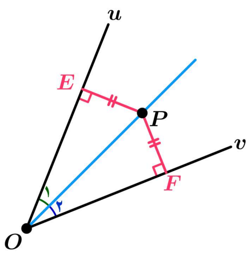
نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه ...فاصله یکسان دارد...

$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{P}_1 + \hat{E} = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{P}_2 + \hat{F} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \cancel{\hat{O}_1} + \hat{P}_1 + \cancel{\hat{E}} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{P}_2 + \cancel{\hat{F}} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{P}_2$$

$$\begin{cases} OP = OP \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle OPE \cong \triangle OPF \Rightarrow EP = FP$$

بنا به حالت وتر و یک ضلع
زاویه قائمه

$$\begin{cases} OP = OP \\ EP = FP \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OEP \cong \triangle OFP \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$$



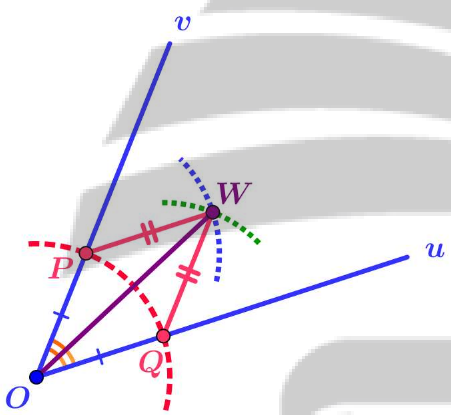
۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

راهنمایی : پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از (هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه است

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



۳ــ رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ $OP=OQ=r_1$

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ $QW=PW=r_2$

پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ $OP=OQ\ ,\ PW=QW\ ,\ OW=OW$ پس بنا به حالت برابری سه ضلع دو مثلث OPWو OQW هم نهشت هستند

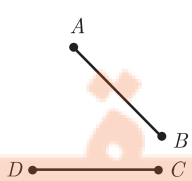
ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند.زیرا دو مثلث همنهشت هستند

ــ پاره‌خط OW نیمساز زاویهٔ uOv است.

تمرین

جواب تمام تمرینات در صفحات بعد

۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.



ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

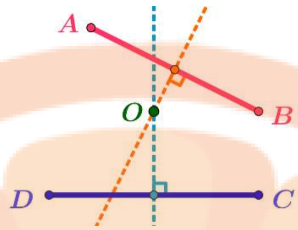
ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸cm^۲$ باشد.

تمرین فصل ۳ – صفحه ۲۹

تمرین ۱:

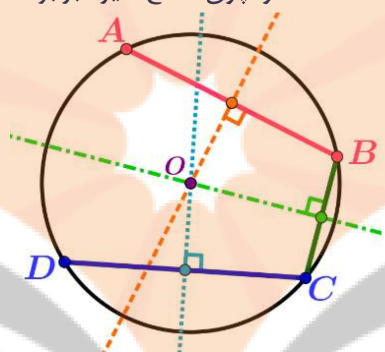
الف) نقطه ی مورد نظر محل برخورد عمود منصف های دو پاره خط AB و CDاست.



ب) چهار نقطه A,B,C,D روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا : چون Oروی عمود منصف AB است پس: $OA=OB$ (۱)

چون Oروی عمود منصف CD است پس: $OC=OD$ (۲) چون Oروی عمود منصف BC است پس: $OC=OB$ (۳)

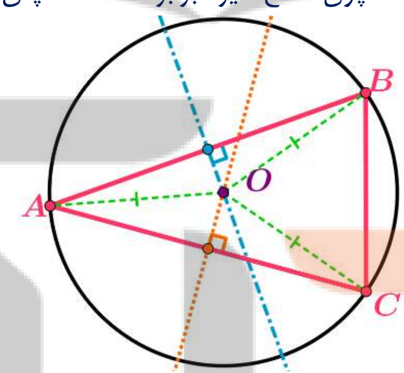
پس طبق روابط(۱)،(۲)،(۳) خواهیم داشت: $OA=OB=OC=OD$و چون شعاع دایره برابر OAاست پس حتما ۴ نقطه روی دایره Gقرار خواهند داشت.



تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۲: چون Oروی عمود منصف AB است پس: $OA=OB$ (۱) چون Oروی عمود منصف AC است پس: $OC=OA$ (۲)

پس طبق روابط (۱)،(۲)خواهیم داشت: $OA=OB=OC$ چون شعاع دایره برابر OA است پس حتما سه نقطه روی دایره قرار خواهند داشت.

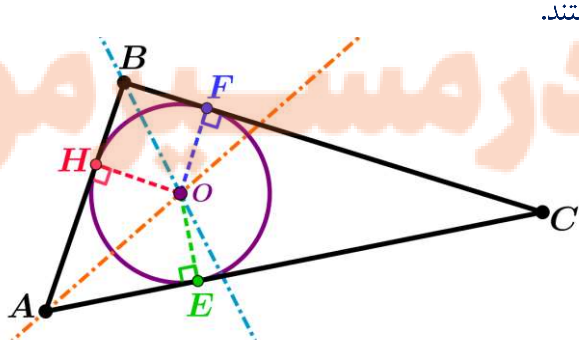


تمرین ۳:

چون Oروی نیمساز زاویه A است پس: $OH=OE$ (۱) چون Oروی نیمساز زاویه B است پس: $OH=OF$ (۲)

پس طبق روابط (۱)،(۲)خواهیم داشت: $OH=OE=OF$ چون شعاع دایره برابر OH است پس حتما نقاط E,F روی دایره قرار خواهند داشت.

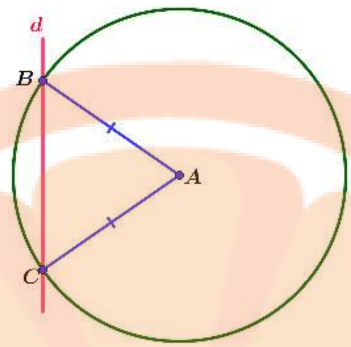
در نتیجه اضلاع مثلث ABC مماس بر دایره هستند.



تمرین ۴:

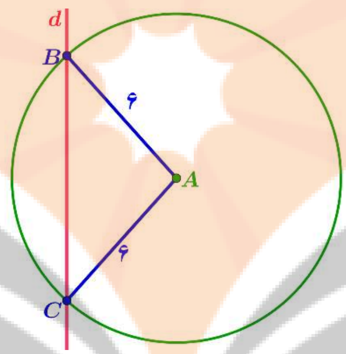
الف) دایره ای به مرکز A و شعاع r(بیشتر از ۴ باشد) می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا:

$AC = AB = r$



تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

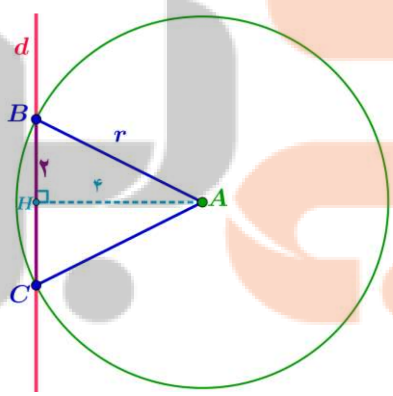
ب) دایره ای به مرکز A و شعاع $r = ۶$ می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = ۶$



پ) چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است ، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و Cروی خط dبرابر ۴ باشد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم :

$$(AB)^{۲} = (AH)^{۲} + (BH)^{۲} \implies r^{۲} = (۴)^{۲} + (۲)^{۲} = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \implies r = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین اگر دایره ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ بزنیم و محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{۲۰}$ این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می شود. $S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۴)(۴) = ۸$



درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\overset{\times bd}{\Rightarrow}\frac{a}{\cancel{b}}\times \cancel{b}d=\frac{c}{\cancel{d}}\times b\cancel{d}\Rightarrow ad=bc$$

ب) $ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب)

$$ad=bc\overset{\div bd}{\Rightarrow}\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}}=\frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\overset{\times\frac{bd}{ac}}{\Rightarrow}\frac{a}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}d}{ac}=\frac{c}{\cancel{d}}\times\frac{b\cancel{d}}{ac}\Rightarrow\frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c}=\frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}}\Rightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\overset{\times\frac{d}{a}}{\Rightarrow}\frac{\cancel{a}}{b}\times\frac{d}{\cancel{a}}=\frac{c}{\cancel{d}}\times\frac{\cancel{d}}{a}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\overset{\times\frac{b}{c}}{\Rightarrow}\frac{a}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}}{c}=\frac{\cancel{c}}{d}\times\frac{b}{\cancel{c}}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$ ترکیب(نسبت در صورت یا مخرج

$$\overset{+1}{\Rightarrow}\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\Rightarrow ad=bc\overset{+ac}{\Rightarrow}ad+ac=bc+ac\overset{+ac}{\Rightarrow}a(d+c)=c(b+a)\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{d+c}$$

راهنمایی : در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$ تفضیل(نسبت در صورت یا مخرج

$$\overset{+1}{\Rightarrow}\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\Rightarrow\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\Rightarrow ad=bc\overset{-ac}{\Rightarrow}ad-ac=bc-ac\overset{-ac}{\Rightarrow}a(d-c)=c(b-a)\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

راه دوم قسمت دوم ج $\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{d}{c}-\frac{c}{c}\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

راه دوم قسمت دوم ث $\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1\Rightarrow\frac{b}{a}+\frac{a}{a}=\frac{d}{c}+\frac{c}{c}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را **معکوس** کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{14}=\frac{15}{42}\Rightarrow 5\times 42=15\times 14$

ب) $3\times 40=12\times 10\Rightarrow \frac{3}{10}=\frac{12}{40}$

پ) $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}\Rightarrow \frac{10}{7}=\frac{30}{21}$

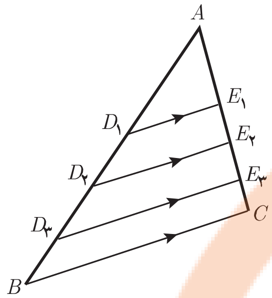
ت) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}\Rightarrow \frac{6}{18}=\frac{11}{33}\quad , \quad \frac{33}{11}=\frac{18}{6}$

ث) $\frac{4}{14}=\frac{10}{35}\Rightarrow \frac{18}{14}=\frac{10+35}{35}\quad , \quad \frac{4}{18}=\frac{35}{10+35}$

ج) $\frac{5}{12}=\frac{10}{24}\Rightarrow \frac{-7}{12}=\frac{-14}{24}\quad , \quad \frac{5}{-7}=\frac{10}{14}$

سد باغکل ــ شهرستان خوانسار ــ استان اصفهان

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن



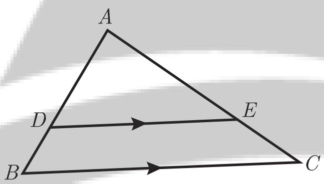
در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \| BC$ و $D_2E_2 \| BC$ و $D_3E_3 \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $1 \le i \le 3$

ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید. انداز‌ه ها به میلیمتر است

$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{12}{24}$ ⟷ $\frac{AE_1}{E_1C} = \frac{10}{20}$

$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{25}{15}$ $\frac{AE_3}{E_3C} = \frac{21}{5}$

$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{34}{8}$ $\frac{AE_2}{E_2C} = \frac{15}{9}$



ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟ بله

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

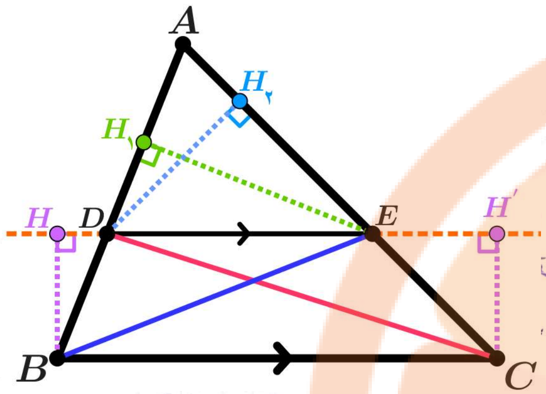
این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

$$* \left.\begin{matrix} BH \perp DE \\ CH' \perp DE \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \parallel CH' \quad , \quad \left.\begin{matrix} BH \parallel CH' \\ BC \parallel HH' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BHH'C$$ چهارضلعی متوازی الاضلاع $\Rightarrow BH = CH'$ (1)

قضیهٔ تالس



فعالیت

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

از نقاط B و C بر امتداد پاره خط DE عمود ما کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' مینامیم و چون HH' روی DE است پس $* HH' \parallel BC$

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

$S_{DEC}=\frac{1}{۲}DE\times CH'$

$S_{DEB}=\frac{1}{۲}DE\times BH \xRightarrow{(1) \text{طبق}} S_{DEB}=\frac{1}{۲}DE\times CH'$ پس مساحت دو مثلث برابر است

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$ ،

۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟ زیرا $S_{DEB}=S_{DEC}$

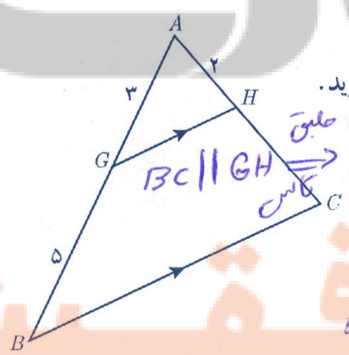
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.

نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[1] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

کار در کلاس

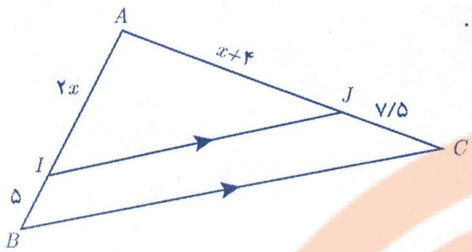
۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



$BC \parallel GH \xRightarrow{\text{طبق تالس}} \frac{AG}{GB}=\frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{۲}{HC} \qquad HC=\frac{۲\times ۵}{۳} \Rightarrow HC=\frac{۱۰}{۳}$

$AC=AH+HC \qquad AC=۲+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۶+۱۰}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$

۱ــ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow \frac{۲x}{۵} = \frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow$

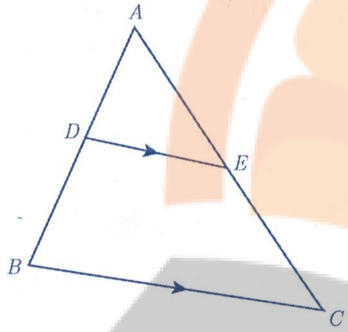
$۱۵x = ۵x + ۲۰ \Rightarrow ۱۵x - ۵x = ۲۰ \Rightarrow ۱۰x = ۲۰$

$\Rightarrow x = \frac{۲۰}{۱۰} \Rightarrow x = ۲$

$AJ = (۲) + ۴ = ۶ \quad , \quad AI = ۲(۲) = ۴$

تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت



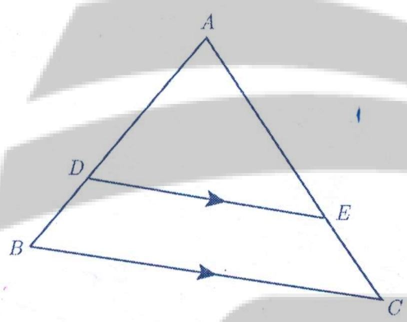
۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

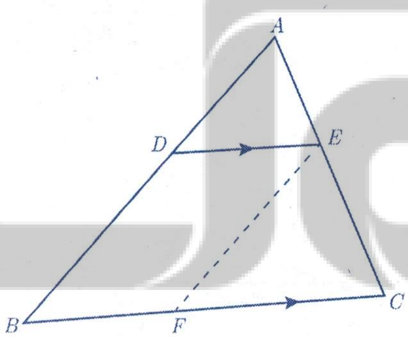
پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) پ صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند. اشتباه تایپی



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA} = \frac{EC}{AE}, \frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}, \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \end{cases}$$



۳

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ متوازی الاضلاع چون $BD \parallel EF$, $DE \parallel BF$

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF = DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (ج) پ و (د) ت داریم: $\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}}$ اشتباه تایپی

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

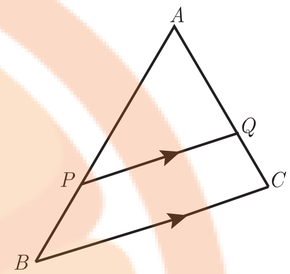
$DE \parallel BC \Rightarrow$

۱) ب) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xRightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

۲) پ) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD-AB}{AB} = \frac{AE-AC}{AC} \Rightarrow \frac{-BD}{AB} = \frac{-EC}{AC} \Rightarrow$

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ درست

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$ نادرست

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ درست

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$ درست

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

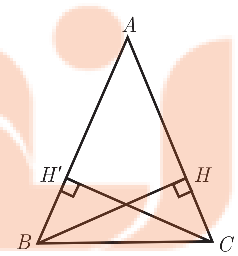
مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲ :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



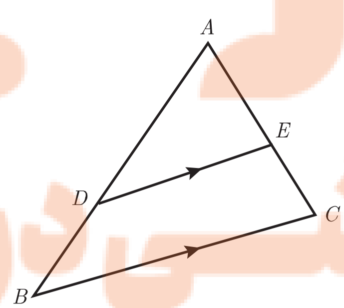
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض : $DE \parallel BC$

حکم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیر مستقیم** ~~یا **برهان خلف**~~ است. ~~در برهان خلف~~ به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow$ B (حکم)

غیر مستقیم

اثبات به روش برهان ~~خلف~~:

A درست و B نادرست $\underbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$

عکس نقیض ① A درست نیست

برهان خلف ② تناقض منطقی

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

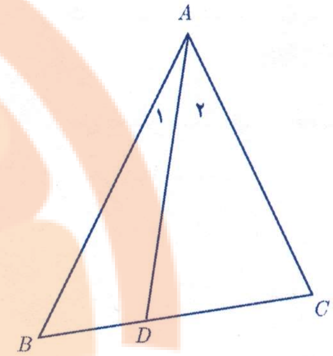
حل:

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان

نوشت $n=2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.



حل :

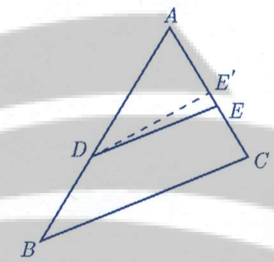
$AB = AC$
$AD = AD$
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
$\Downarrow$

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

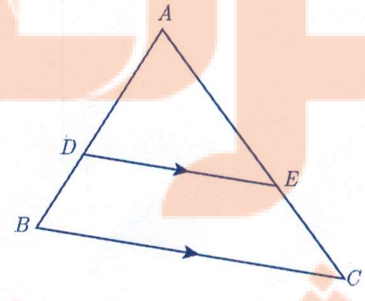
حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$، آن‌گاه $DE \| BC$.



اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$.
حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \| BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \| BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی



همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :

اگر $DE \| BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[1]

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

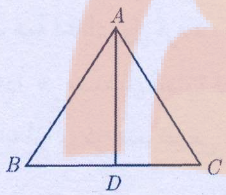
(که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \| BC \ .$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

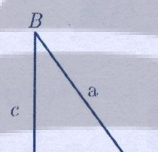
مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

کار در کلاس

الف) اگر در مثلث ABC، $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$ و $a^2=b^2+c^2$ باشد، آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

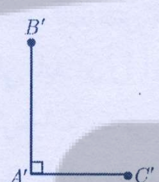


با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ــ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ــ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}'=90^\circ$ و $A'B'=AB$ و $A'C'=AC$ است.

۳ــ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C'=BC$

$(A'B')^2+(A'C')^2=(B'C')^2 \xrightarrow[AC=A'C']{AB=A'B'} (AB)^2+(AC)^2=(B'C')^2$

و داریم $(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2$ $\Rightarrow (BC)^2=(B'C')^2 \Rightarrow B'C'=BC$

۴ــ توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A}=90^\circ$.

$\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ BC=B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{ضضض}} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}'=90^\circ$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

ج) در مثلث ABC، $AB=c$، $AC=b$، $BC=a$، $a^2=b^2+c^2$ است اگر و تنها اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائهٔ عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[1] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

نادرست است

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟ مثال نقض: عدد ۲ اول زوج است

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم**».

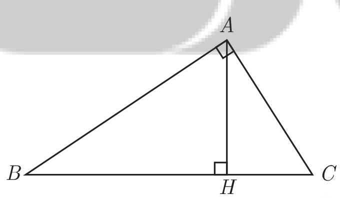
برای مثال نقض اگر جای n عدد ۴۱ یا هر مضرب ۴۱ را قرار دهیم. خواهیم داشت $۴۱^۲+۴۱+۴۱=۴۱(۴۱+۲)=۴۱\times۴۳$ پس دیگر عبارت عدد اول نیست

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست آورید.



۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

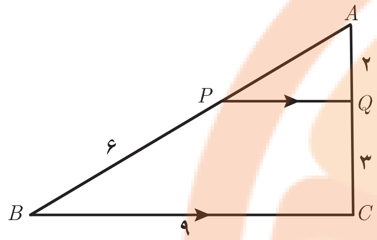
حل تمرینات در صفحات بعدی

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

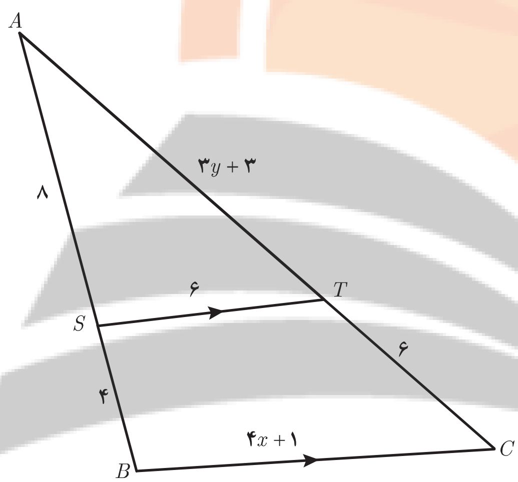
الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴ در شکل مقابل $PQ||BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.

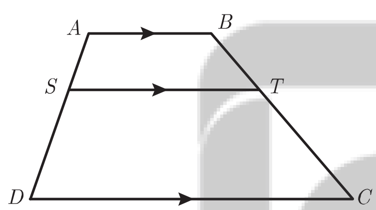


۵ در شکل مقابل $ST||BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



۶ در ذوزنقه مقابل $AB||ST||DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(راهنمایی : یکی از قطرها را رسم کنید.)



۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این‌صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این‌صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(راهنمایی : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

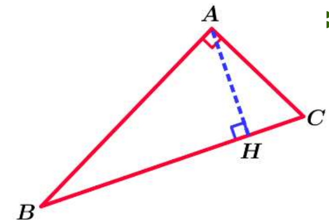
۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد. ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است. ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

تمرین فصل ۳ – صفحه ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:



$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{۱}{۲}AB\times AC \\ S_{ABC} &= \frac{۱}{۲}AH\times BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$$

تمرین ۲:

الف) $\dfrac{a}{۱۰+a}=\dfrac{b}{۸+b} \Rightarrow ۸a+\cancel{ab}=۱۰b+\cancel{ab} \Rightarrow ۸a=۱۰b \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{۱۰}{۸} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{۵}{۴}$

ب) $\dfrac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\dfrac{۳b+۷}{۷+۲b} \Rightarrow ۲۱a+\cancel{۶ab}+\cancel{۷۰}+۲۰b=۳۰b+\cancel{۷۰}+\cancel{۶ab}+۱۴a \Rightarrow ۲۱a-۱۴a=۳۰b-۲۰b \Rightarrow ۷a=۱۰b \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{۱۰}{۷}$

تمرین ۳: مثلث ABC را چنان در نظر می گیریم که M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC باشد. در نتیجه داریم:

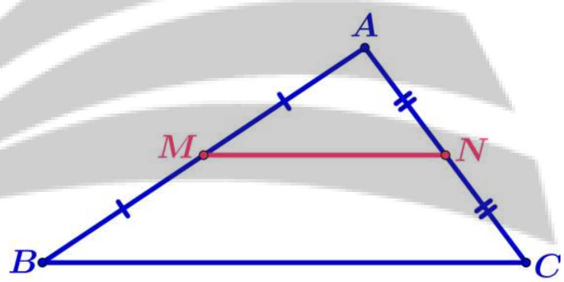
$AN=NC=\dfrac{AC}{۲}$, $AM=MB=\dfrac{AB}{۲}$

$\dfrac{AM}{MB}=۱$, $\dfrac{AN}{NC}=۱ \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC} \Rightarrow$ طبق عکس قضیه تالس $MN\|BC$

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{\frac{AB}{۲}}{AB}=\dfrac{۱}{۲}$, $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{\frac{AC}{۲}}{AB}=\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{۱}{۲}$ (۱)

$MN\|BC$ طبق نتیجه قضیه تالس $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$ (۲)

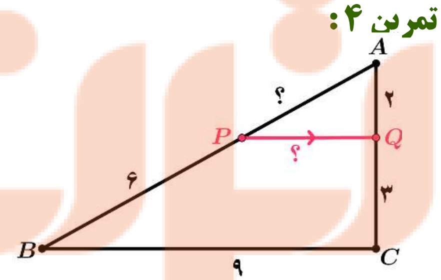
طبق روابط (۱) و (۲): $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow MN=\dfrac{۱}{۲}BC$



تمرین ۴:

$PQ\|BC$ طبق قضیه تالس $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{AQ}{QC} \Rightarrow \dfrac{AP}{۶}=\dfrac{۲}{۳} \Rightarrow AP=\dfrac{۶\times۲}{۳} \Rightarrow AP=۴$

$PQ\|BC$ طبق قضیه تالس $\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{PQ}{QC} \Rightarrow \dfrac{۲}{۲+۳}=\dfrac{PQ}{۹} \Rightarrow PQ=\dfrac{۹\times۲}{۵} \Rightarrow PQ=\dfrac{۱۸}{۵}$



تمرین ۵:

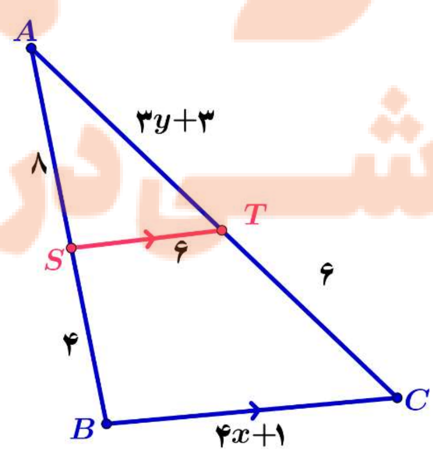
$ST\|BC$ طبق قضیه تالس $\dfrac{AS}{AB}=\dfrac{AT}{AC}=\dfrac{ST}{BC}$

$\dfrac{AS}{AB}=\dfrac{AT}{AC} \Rightarrow \dfrac{۸}{۱۲}=\dfrac{۳y+۳}{۳y+۹} \Rightarrow ۲۴y+۷۲=۳۶y=۳۶$

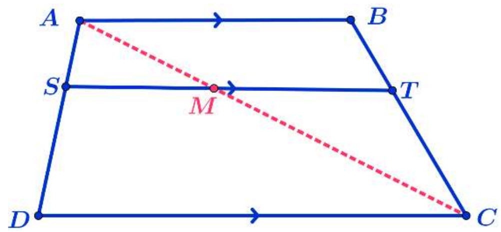
$\Rightarrow ۳۶y-۲۴y=۷۲-۳۶ \Rightarrow y=\dfrac{۳۶}{۱۲} \Rightarrow y=۳$

$\dfrac{AS}{AB}=\dfrac{ST}{BC} \Rightarrow \dfrac{۸}{۱۲}=\dfrac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow ۳۲x+۸=۷۲$

$\Rightarrow ۳۲x=۷۲-۸ \Rightarrow ۳۲x=۶۴ \Rightarrow x=\dfrac{۶۴}{۳۲} \Rightarrow x=۲$



تمرین ۶:



قطر AC را رسم می کنیم نقطه برخورد قطر AC با خط ST را M می نامیم.

$$\triangle ADC: \; SM \| DC \Rightarrow \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AM}{MC} \qquad (۱)$$

$$\triangle CAB: \; AB \| MT \Rightarrow \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{MC}{AM}=\frac{CT}{TB} \Rightarrow \text{عکس تناسب} \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{TB}{CT} \qquad (۲)$$

$$\text{طبق روابط (۱) و (۲):} \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{TB}{CT}$$

تمرین ۷:

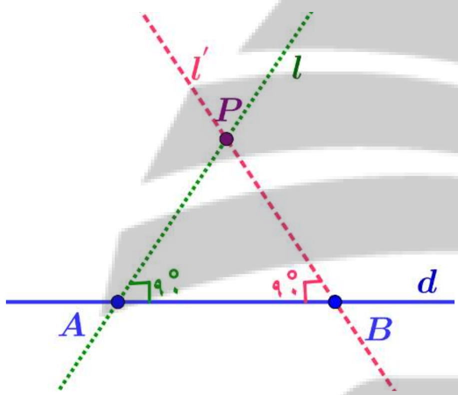
الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل برابر باشند آنگاه در این صورت اضلاع روبه رو موازی هستند.

پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند آنگاه در این صورت رأس های آن چهارضلعی روی یک دایره هستند.

ت) اگر در یک مثلث دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچکتر از ارتفاع متناظر به ضلع کوچکتر است.

تمرین ۸:



(فرض خلف) فرض می کنیم از نقطه P خارج خط d دو خط L و L' بر d عمود هستند.

پس هر دو خط L و L'، خط d را در دو نقطه A و B قطع می کنند. و چون عمود هستند لذا داریم:

$$\hat{A}=۹۰^\circ \quad , \quad \hat{B}=۹۰^\circ$$

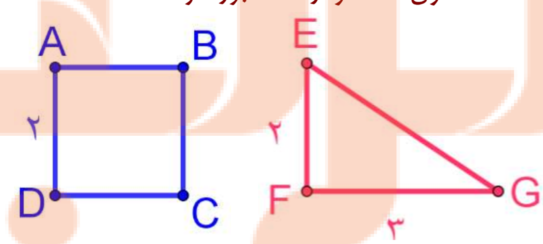
$$\triangle ABP: \; \hat{A}+\hat{B}+\hat{P}=۹۰^\circ+۹۰^\circ+\hat{P} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{P}=۱۸۰^\circ+\hat{P} \xRightarrow{\hat{P}>۰} \hat{A}+\hat{B}+\hat{P}>۱۸۰^\circ$$

این متناقض با این است که مجموع زاویه های داخلی ۱۸۰° است. پس فرض غلط است.

تمرین ۹:

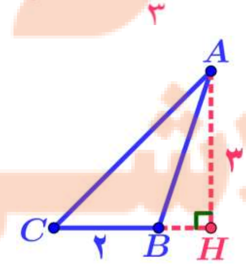
الف) ۲۱۱ عدد اول است و از ۱۲۷ بزرگتر است.

ب)

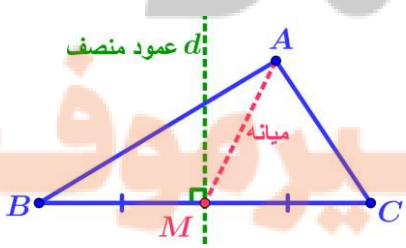


$$S_{\triangle EFG}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳=۳ \quad \text{و} \quad S_{\square ABCD}=۲\times ۲=۴ \Rightarrow S_{\triangle EFG}<S_{\square ABCD}$$

پ)



ت)

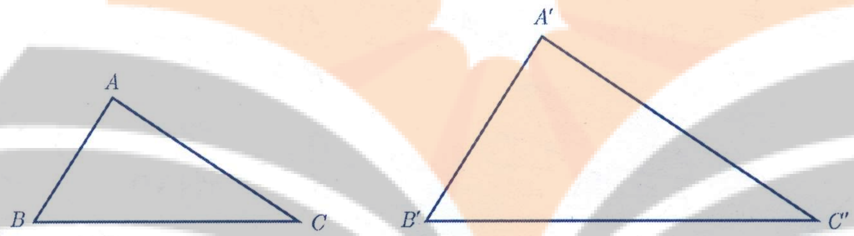


درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

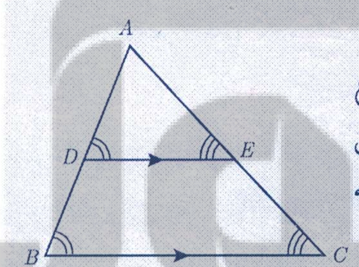
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{C}=\hat{C}' \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است. در این‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



$DE \parallel BC$ و AC مورب $\Rightarrow \hat{E}=\hat{C}$

$DE \parallel BC$, AB مورب $\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$

اثبات :

۱ــ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

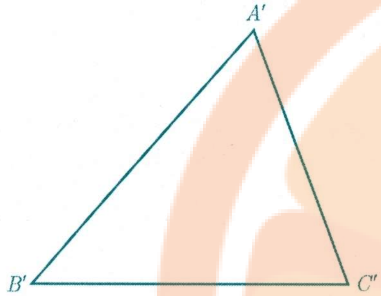
۲ــ با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

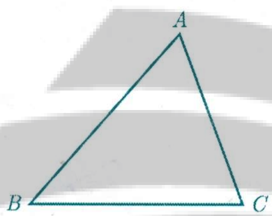


قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

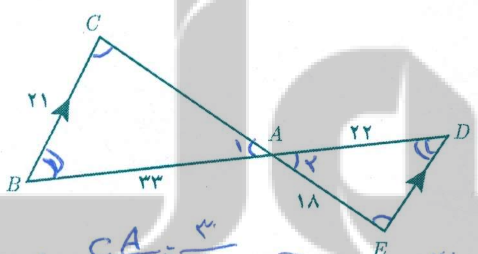
$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$



قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس



۱ درشکل مقابل $BC \| DE$.

اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.

$BC \| DE$ و CE مورب $\Rightarrow \hat{E}=\hat{C}$ ، متقابل به رأس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

$BC \| DE$ و BD مورب $\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$

$\Rightarrow$ دو مثلث ABC و ADE متشابه اند

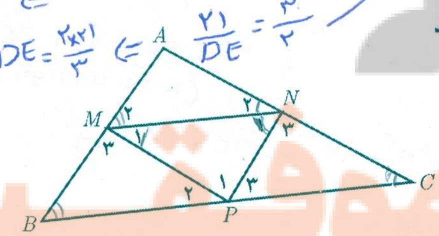
$\frac{۲۱}{DE}=\frac{CA}{۱۸}=\frac{۳۳}{۲۲}=\frac{۳}{۲} \Leftarrow \frac{BC}{DE}=\frac{CA}{AE}=\frac{AB}{AD} \Leftarrow$

$CA=\frac{۳\times۱۸}{۲} \Leftarrow \frac{CA}{۱۸}=\frac{۳}{۲}$

$CA=۲۷ \Leftarrow$

$DE=۱۴ \Leftarrow DE=\frac{۲\times۲۱}{۳} \Leftarrow \frac{۲۱}{DE}=\frac{۳}{۲}$

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.



حل :

الف) $MN \| BC$ و $NP \| AB$ و $MP \| AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_1=\hat{P}_2=\hat{C}$ و $\hat{N}_1=\hat{P}_3=\hat{B}$ (چرا؟)

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ پ) دو مثلث ABC و MNP متشابه اند.

الف) چون M وسط AB است پس داریم: $AM=MB \Leftarrow ۱=\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Leftarrow$ طبق عکس قضیه تالس $\Leftarrow MN \| BC$

چون P وسط BC است پس داریم: $BP=PC \Leftarrow ۱=\frac{CN}{AN}=\frac{CP}{BP}=۱ \Leftarrow$ طبق عکس قضیه تالس $\Leftarrow NP \| AB$

چون N وسط AC است پس داریم: $AN=NC \Leftarrow ۱=\frac{BM}{AM}=\frac{BP}{PC} \Leftarrow$ طبق عکس قضیه تالس $\Leftarrow MP \| AC$

$MN \| BP$

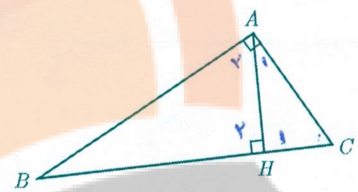
۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'} \sim \overset{\Delta}{A''B''C''}$، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

با هم متشابه اند. چون هر دو با یک مثلث متشابه اند.

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



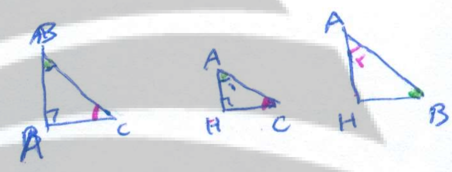
۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید:

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Leftarrow \hat{A} = \hat{H}_1 = 90^\circ$ ، $\hat{C} = \hat{C}$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

$\hat{A} = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Leftarrow \hat{B} = \hat{B}$



۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟ متشابه اند.

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \times BC$

۵ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \times BC$

۶ $\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$AB^2 + AC^2 = HB \times BC + HC \times BC$
$= BC(HB + HC) \Rightarrow$
$AB^2 + AC^2 = BC \times BC \Rightarrow$
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$AB \times AC = AH \times BC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$

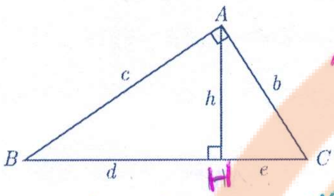
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow$

$AB \times AC = AH \times BC$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱) $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

$AH^۲ = BH \times HC$

$h^۲ = d \times e$ $\quad ۲۵ = ۷e \Rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$

۲) $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

$AH^۲ = BH \times HC \Rightarrow h^۲ = d \times e \Rightarrow h^۲ = ۵ \times ۳ \Rightarrow h^۲ = ۱۵$

$BC = d + e \quad BC = ۵ + ۳ = ۸$

$\underbrace{AB^۲}_{c} = BC \times \underbrace{BH}_{d} \Rightarrow c^۲ = ۸ \times ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۴۰}$

$\underbrace{AC^۲}_{b} = BC \times \underbrace{CH}_{e} \Rightarrow b^۲ = ۸ \times ۳ \Rightarrow b = \sqrt{۲۴}$

۳) $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

$BC^۲ = c^۲ + b^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۶۴ + ۳۶ \quad BC^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$

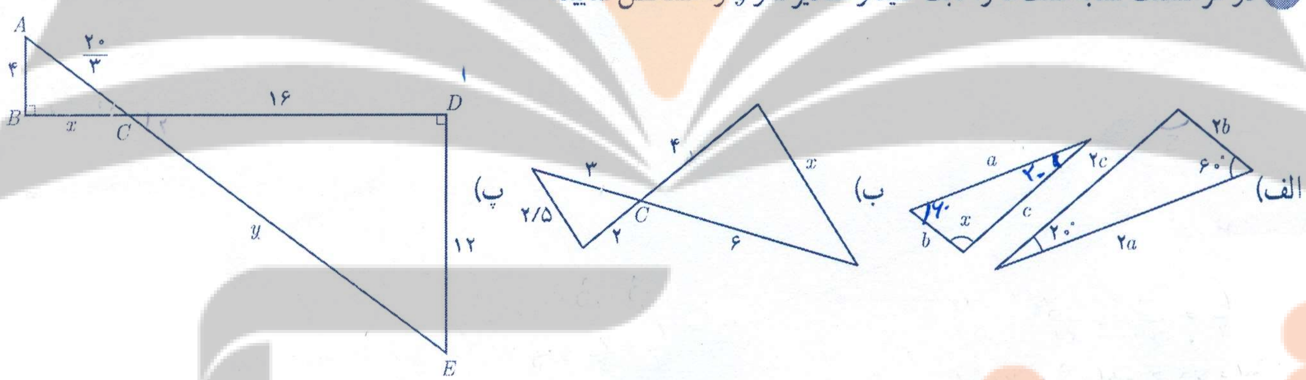
$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow ۸ \times ۶ = h \times ۱۰$

$h = \frac{۴۸}{۱۰} \Rightarrow h = ۴/۸$

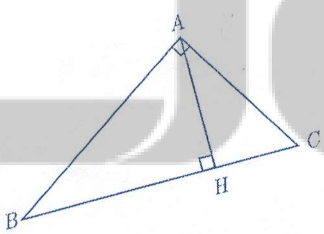
تمرین

پاسخ تمرینات در صفحات بعدی

۱) در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.



۲) در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.



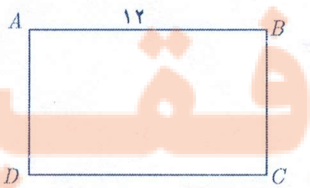
الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

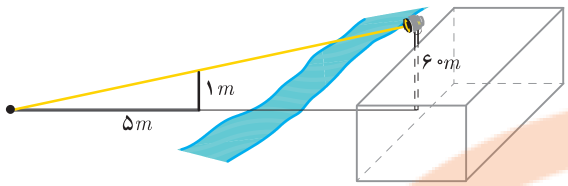
پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

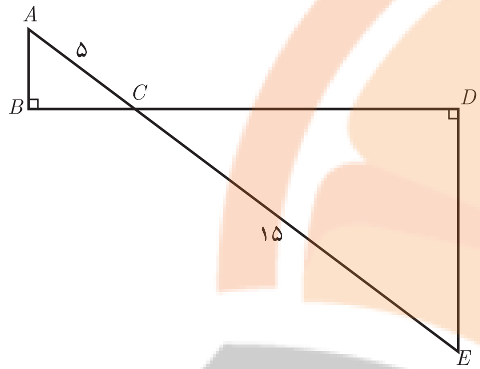
۳) شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.



حل تمرینات در صفحات بعدی



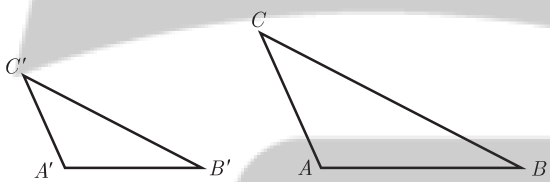
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.



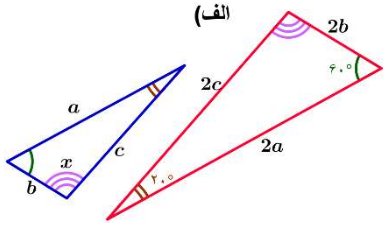
ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

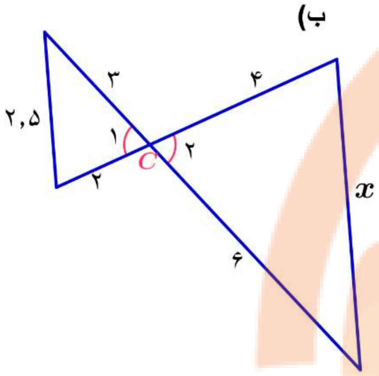
تمرین فصل ۳ – صفحه ۴۵

تمرین ۱:



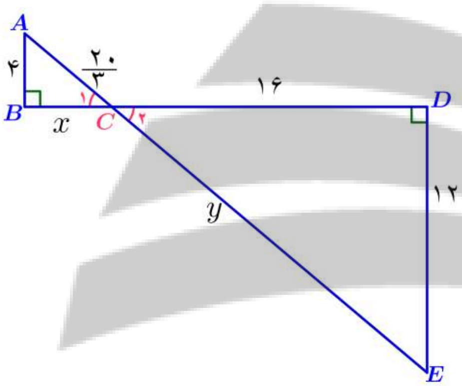
الف) چون $۲=\frac{۲c}{c}=\frac{۲b}{b}=\frac{۲a}{a}$ پس سه ضلع متناسب هستند در نتیجه دو مثلث متشابه اند بنابراین زاویه های متناظر آنها برابر است پس:

$$x+۶۰^\circ+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۲۰^\circ \Rightarrow x=۱۰۰^\circ$$



ب) چون $۲=\frac{۴}{۲}=\frac{۶}{۳}$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ پس بنا به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویه بین این دو ضلع این دو مثلث متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. پس داریم:

$$۲=\frac{۶}{۳}=\frac{۴}{۲}=\frac{x}{۲/۵} \Rightarrow \frac{x}{۲/۵}=۲ \Rightarrow x=۵$$

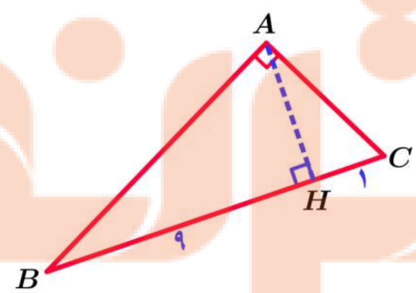


پ) چون $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{۱۶}{x}=\frac{۱۲}{۴}=\frac{y}{\frac{۲۰}{۳}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۶}{x}=\frac{۱۲}{۴} \Rightarrow x=\frac{۱۶\times ۴}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳} \\ \frac{۱۲}{۴}=\frac{y}{\frac{۲۰}{۳}} \Rightarrow y=\frac{۱۲\times\frac{۲۰}{۳}}{۴} \Rightarrow y=\frac{۱۲\times ۲۰}{۴\times ۳} \Rightarrow y=۲۰ \end{cases}$$

تمرین ۲:

الف)



$AC=?\ ,\ AB=?\ ,\ AH=?\ ,\ BH=۹\ ,\ BC=۱۰$

$BH+HC=BC \Rightarrow ۹+HC=۱۰ \Rightarrow HC=۱۰-۹ \Rightarrow HC=۱$

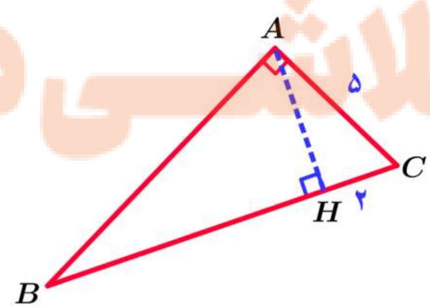
$(AH)^۲=BH\times HC \Rightarrow (AH)^۲=۹\times ۱ \Rightarrow (AH)^۲=۹ \Rightarrow AH=۳$

$(AB)^۲=BH\times BC \Rightarrow (AB)^۲=۹\times ۱۰ \Rightarrow (AB)^۲=۹۰ \Rightarrow AB=\sqrt{۹۰}$

$(AC)^۲=HC\times BC \Rightarrow (AC)^۲=۱\times ۱۰ \Rightarrow (AC)^۲=۱۰ \Rightarrow AC=\sqrt{۱۰}$

ب)

$AB=?\ ,\ AH=?\ ,\ BC=?\ ,\ CH=۲\ ,\ AC=۵$



$(AC)^۲=HC\times BC \Rightarrow (۵)^۲=۲\times BC \Rightarrow BC=\frac{۲۵}{۲}$

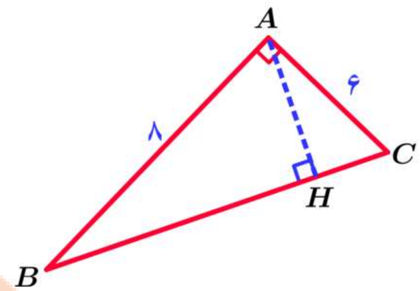
$BH+HC=BC \Rightarrow BH+۲=\frac{۲۵}{۲} \Rightarrow BH=\frac{۲۵}{۲}-۲ \Rightarrow BH=\frac{۲۱}{۲}$

$(AH)^۲=BH\times HC \Rightarrow (AH)^۲=\frac{۲۱}{۲}\times ۲ \Rightarrow (AH)^۲=۲۱ \Rightarrow AH=\sqrt{۲۱}$

$(AB)^۲=BH\times BC \Rightarrow (AB)^۲=\frac{۲۱}{۲}\times\frac{۲۵}{۲} \Rightarrow (AB)^۲=\frac{۲۱\times ۲۵}{۴} \Rightarrow AB=\frac{۵\sqrt{۲۱}}{۲}$

پ)

$AH=? \quad , \quad BC=? \quad , \quad AC=۶ \quad , \quad AB=۸$



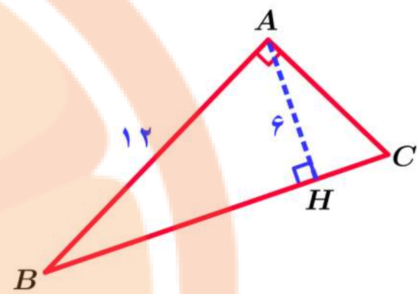
$(BC)^۲=(AC)^۲+(AB)^۲ \Rightarrow (BC)^۲=(۶)^۲+(۸)^۲=۳۶+۶۴=۱۰۰ \Rightarrow BC=۱۰$

$(AB)^۲=BH\times BC \Rightarrow (۸)^۲=BH\times ۱۰ \Rightarrow BH=\frac{۶۴}{۱۰}$

$AB\times AC=AH\times BC \Rightarrow ۸\times ۶=AH\times ۱۰ \Rightarrow AH=\frac{۴۸}{۱۰}$

ت)

$AC=? \quad , \quad BC=? \quad , \quad BH=? \quad , \quad AH=۶ \quad , \quad AB=۱۲$



$(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲ \Rightarrow (۱۲)^۲=(۶)^۲+(BH)^۲ \Rightarrow (BH)^۲=۱۴۴-۳۶=۱۰۸$

$\Rightarrow BH=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$

$(AB)^۲=BH\times BC \Rightarrow (۱۲)^۲=۶\sqrt{۳}\times BC \Rightarrow BC=\frac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} \Rightarrow$

$BC=\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow BC=۸\sqrt{۳}$

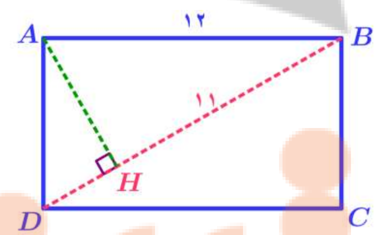
$BH+HC=BC \Rightarrow ۶\sqrt{۳}+HC=۸\sqrt{۳} \Rightarrow HC=۸\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳} \Rightarrow HC=۲\sqrt{۳}$

$(AC)^۲=HC\times BC \Rightarrow (AC)^۲=۲\sqrt{۳}\times ۸\sqrt{۳} \Rightarrow AC=۴۸ \Rightarrow AC=\sqrt{۴۸} \Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$

تمرین ۳:

$AD=? \quad , \quad BD=? \quad , \quad AH=? \quad , \quad BH=۱۱ \quad , \quad AB=۱۲$

$(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲ \Rightarrow (۱۲)^۲=(AH)^۲+(۱۱)^۲ \Rightarrow (AH)^۲=۱۴۴-۱۲۱=۲۳ \Rightarrow AH=\sqrt{۲۳}$

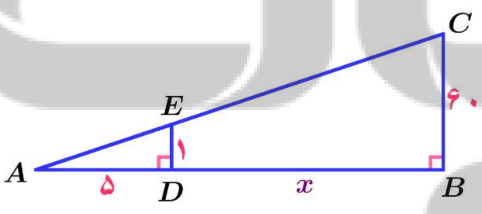


$(AH)^۲=BH\times HD \Rightarrow (\sqrt{۲۳})^۲=۱۱\times HD \Rightarrow HD=\frac{۲۳}{۱۱}$

$BD=BH+HD \Rightarrow BD=۱۱+\frac{۲۳}{۱۱}=\frac{۱۲۱+۲۳}{۱۱}=\frac{۱۴۴}{۱۱}$

$(AD)^۲=HD\times BD \Rightarrow (AD)^۲=\frac{۲۳}{۱۱}\times\frac{۱۴۴}{۱۱} \Rightarrow (AD)^۲=\frac{۲۳\times ۱۴۴}{۱۲۱} \Rightarrow AD=\frac{۱۲}{۱۱}\sqrt{۲۳}$

تمرین ۴:



$AD=۵ \quad , \quad BC=۶۰ \quad , \quad DE=۱ \quad , \quad \hat{B}=۹۰^\circ \quad , \quad \hat{D}=۹۰^\circ \quad , \quad BD=x \quad , \quad AB=?$

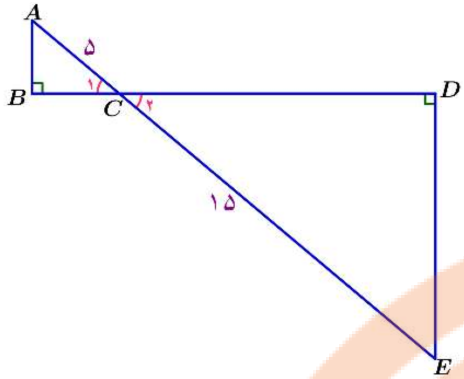
$AB=AD+BD \Rightarrow AB=۵+x$

چون $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و زاویه $\hat{A}$ مشترک پس بنا به حالت برابری دو زاویه

این دو مثلث ADE و ABC متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{۵}{x+۵}=\frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \frac{۱۶}{x}=\frac{۱۲}{۴} \Rightarrow x+۵=۳۰۰ \Rightarrow AB=۳۰۰$$

تمرین ۵:



$AC=۵\ ,\ CE=۱۵\ ,\ \frac{P_{ABC}}{P_{EDC}}=?\ ,\ \frac{S_{ABC}}{S_{EDC}}=?\ ,\ \hat{B}=۹۰^\circ\ ,\ \hat{D}=۹۰^\circ$

$AB=AD+BD \Rightarrow AB=۵+x$

چون $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه

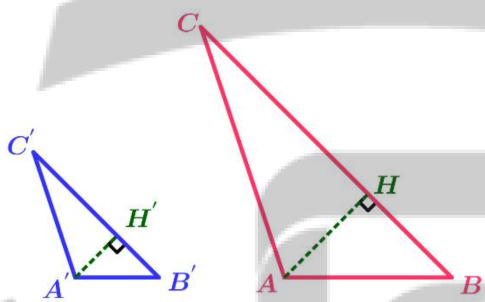
این دو مثلث EDC و ABC متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{ED}{AB}=\frac{۱۵}{۵} \Rightarrow \frac{ED}{AB}=۳\ ,\ \frac{ED}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{EC}{AC}=۳ \Rightarrow \begin{cases} \frac{ED}{AB}=۳ \Rightarrow ED=۳AB \\ \frac{DC}{BC}=۳ \Rightarrow DC=۳BC \\ \frac{EC}{AC}=۳ \Rightarrow EC=۳AC \end{cases}$$

$$\frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{ED+DC+EC}{AB+BC+AC} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{۳AB+۳BC+۳AC}{AB+BC+AC} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{۳\cancel{(AB+BC+AC)}}{\cancel{AB+BC+AC}} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=۳$$

$$\frac{S_{EDC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}ED\times DC}{\frac{۱}{۲}AB\times BC} \Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳AB)\times ۳(BC)}{\frac{۱}{۲}AB\times BC} \Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ABC}}=۹$$

تمرین ۶: چون دو مثلث $A'H'B'$ و AHB متشابه اند. پس داریم:



$$\hat{C}=\hat{C}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=K$$

الف) چون $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این

دو مثلث $A'H'B'$ و AHB متشابه اند.

ب) دو مثلث $A'H'B'$ و AHB متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}\ ,\ \frac{AB}{A'B'}=K \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=K$$

پ)

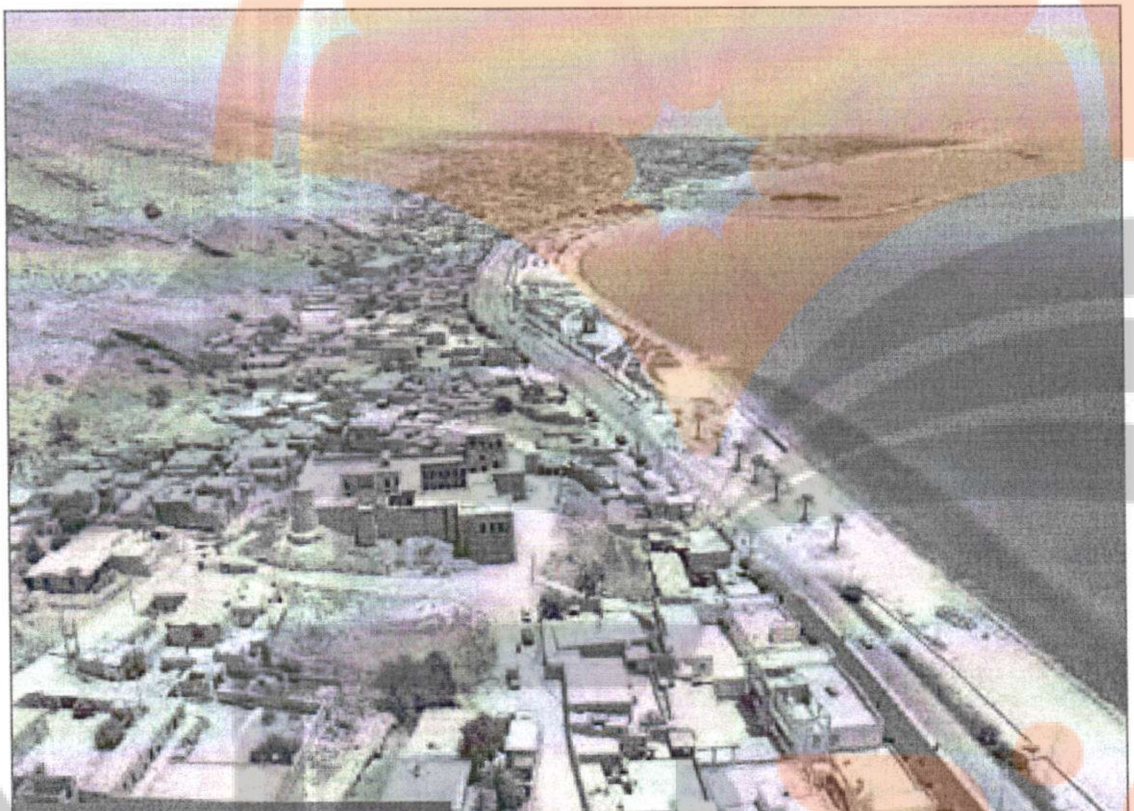
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC\times AH}{\frac{۱}{۲}B'C'\times A'H'} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\underbrace{\frac{BC}{B'C'}}_{K}\times\underbrace{\frac{AH}{A'H'}}_{K} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=K^۲$$

ت)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=K \Rightarrow AB=K\,A'B'\ ,\ BC=K\,B'C'\ ,\ AC=KA'C'$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=\frac{K\,A'B'+K\,B'C'+K\,A'C'}{A'B'+B'C'+A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=\frac{K(A'B'+B'C'+A'C')}{A'B'+B'C'+A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=K$$

فصل ۳ تابع



بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار(در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین لرزهٔ شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

درس اول — آشنایی با برخی از انواع توابع

درس دوم — وارون یک تابع و تابع یک به یک

درس سوم — اعمال جبری روی توابع

تهیه کننده :

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

درس اوّل

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، **ضابطهٔ** آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد، اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایهٔ یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جادهٔ اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربهٔ خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخهٔ اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.
پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{1}{1}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{1}{2}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

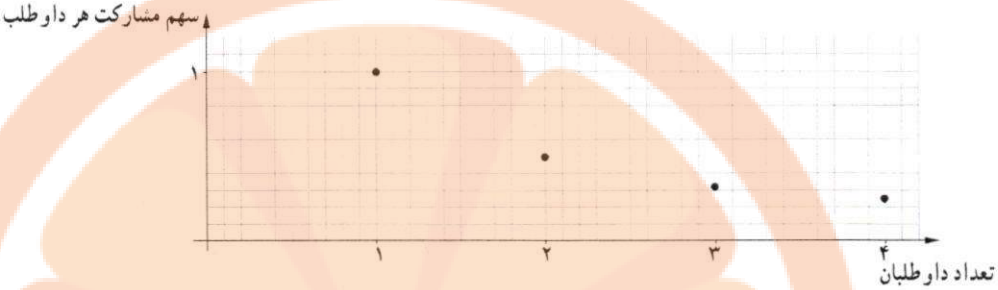
تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{1}{n}$

پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟ $x \in \mathbb{N}$ $f(x)=\frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☑ افزایش ☐ می‌یابد».

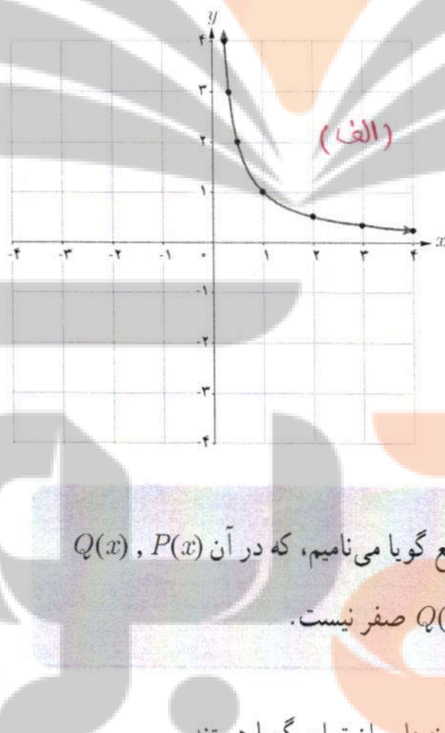


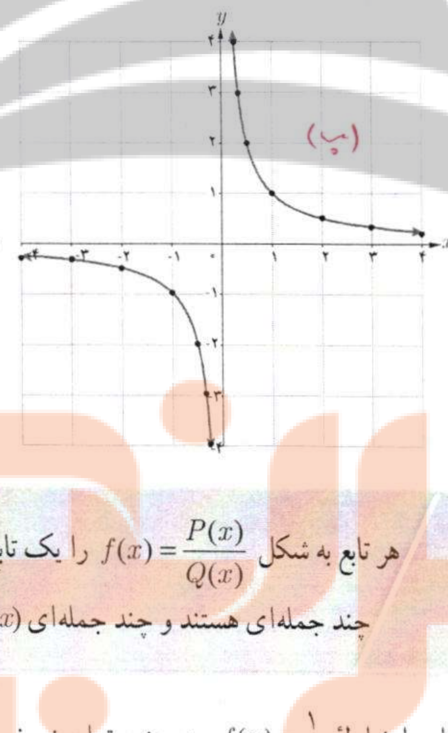
فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(0\,,+\infty)$

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$





هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$, $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$f(x)=\frac{x+3}{x-10}$

$f(x)=\frac{x}{x+5}$

$f(x)=2$

$f(x)=\sqrt{5}x$

خواندنی

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$f(x)=x+۰/۷$ $\qquad$ $f(x)=\frac{x}{۰/۷+x}$ $\qquad$ $f(x)=\frac{۷+x}{۱۰+x}$ ✓

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟ بله، یک تابع گویا است.

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$f(x)=\frac{۸۰}{۱۰۰} \rightarrow \frac{۷+x}{۱۰+x}=\frac{۸۰}{۱۰۰} \rightarrow \frac{۷+x}{۱۰+x}=\frac{۴}{۵} \rightarrow ۳۵+۵x=۴۰+۴x \rightarrow x=۵$

دامنهٔ توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{x}$ نیست. به‌طورکلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطهٔ یک تابع گویا را صفر کنند،عضو دامنهٔ آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۵}{x-۲}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

کار در کلاس

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$f(x)=\frac{x}{x+۵}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}$ $\qquad$ $g(x)=\frac{۳}{x-۴}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$

تساوی دو تابع

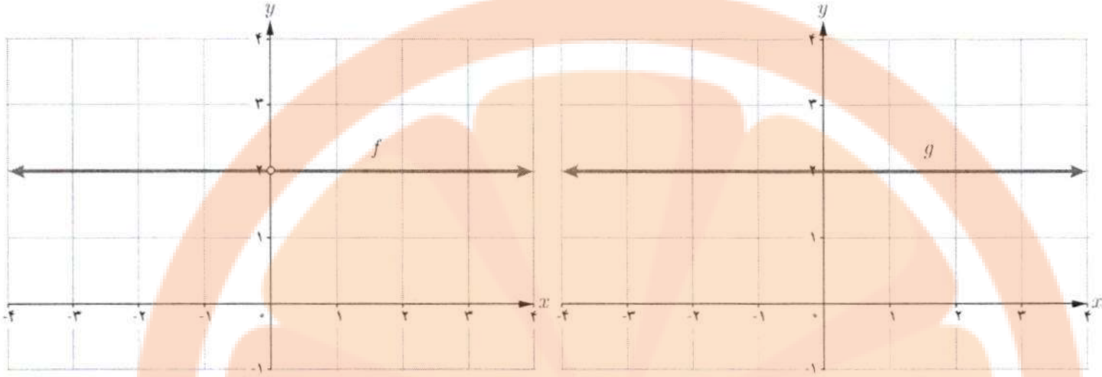
دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم : $f(x)=g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x}{x}$ و $g(x)=2$ دقت کنید.



می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم:

$$D_g=\mathbb{R} \qquad\qquad D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

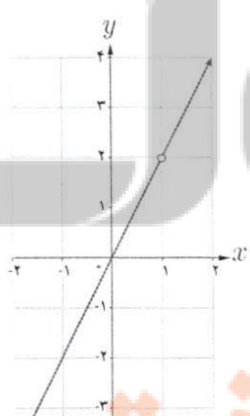
تذکر: همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن محاسبه می‌کنیم.

کار در کلاس

۱) آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$
$D_g=\mathbb{R}$ → دو تابع برابر نیستند.

۲) نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\quad g(x)=2x$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad g(x)=2x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad g(x)=2x$

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad g(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad g(x)=\frac{2x^2-4x}{x-2}$

$D_g=\mathbb{R}-\{1\}$
$f(0)=0$
$f(2)=4$
$f(-2)=-4$
→ توابع «پ» و «ت»

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S=۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۲}\simeq ۱/۴\ ,\ \sqrt{۳}\simeq ۱/۷)$

d	۱	۲	۳	۴
$S=۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	۶۰۵/۲	۷۱۲

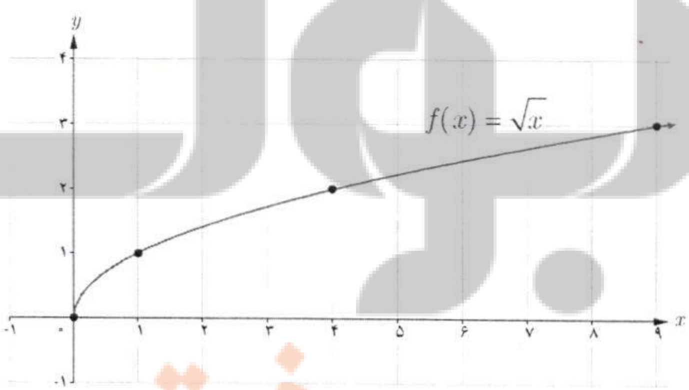
ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است.

پ) کدام‌یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟ ۵

مطالعهٔ **توابع رادیکالی** مانند $S=۳۵۶\sqrt{d}$ به‌دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به‌صورت زیر است.



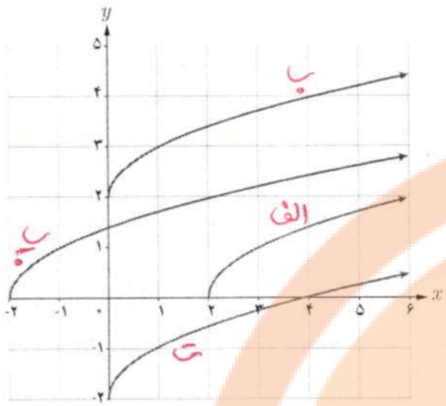
خواندنی

سونامی (آب‌لرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به‌شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.

در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

فعالیت



۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.

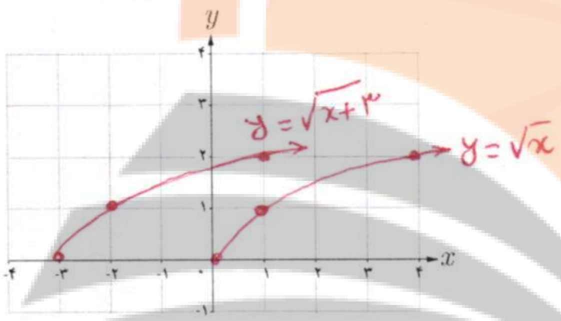
الف) $g(x)=\sqrt{x-2}$ $D_g=[2,+\infty)$ ب) $h(x)=\sqrt{x}+2$ $D_h=[0,+\infty)$

پ) $k(x)=\sqrt{x+2}$ $D_k=[-2,+\infty)$ ت) $l(x)=\sqrt{x}-2$ $D_l=[0,+\infty)$

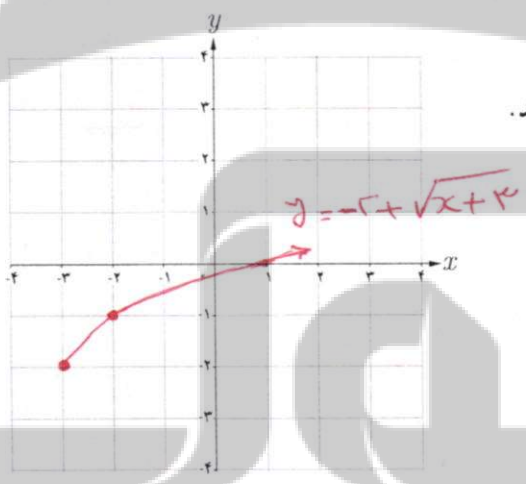
۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-2+\sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.

الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ در صفحهٔ قبل را در نظر بگیرید.

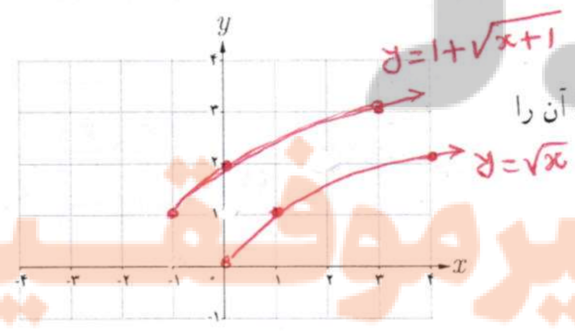
ب) (مرحلهٔ دوم) حال، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



پ) (مرحلهٔ سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-2+\sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



با توجه به شکل می‌بینید که دامنهٔ این تابع $[-3,+\infty)$ است.



۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=1+\sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنهٔ آن را بیابید.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

هزینهٔ پارکینگ خودرو

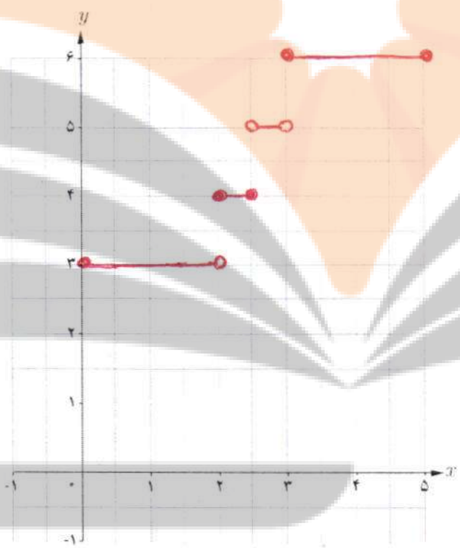
زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود :

الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq x<۲ \\ ۴ & ۲\leq x\leq ۲,۵ \\ ۵ & ۲,۵< x<۳ \\ ۶ & ۳\leq x\leq ۵ \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



به توابعی مانند تابع هزینهٔ پارکینگ، **توابع پله‌ای** می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، **تابع جزء صحیح** است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

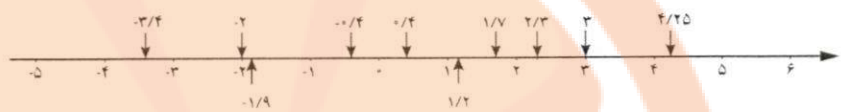
برای مثال داریم :

$[-۳]=-۳$ $\quad [-۴/۳]=-۵$ $\quad [۰]=۰$ $\quad [۶/۱]=۶$ $\quad [۴]=۴$

همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به‌دست آورید.



[-۰/۴] = -۱   [۰/۴] = ۰   [-۱/۹] = -۲   [-۲] = -۲   [-۳/۴] = -۴

[۱/۲] = ۱   [۱/۷] = ۱   [۲/۳] = ۲   [۳] = ۳   [۴/۲۵] = ۴

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

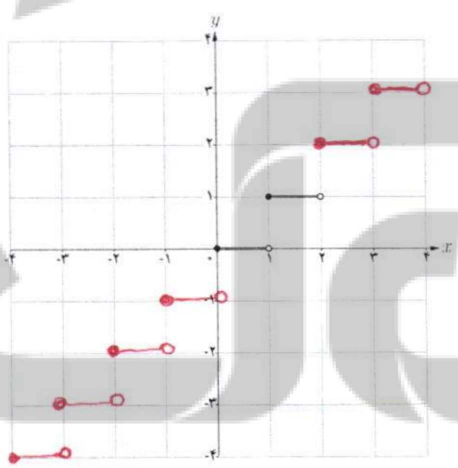
$\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = -۱$ $\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = ۱$

فعالیت

۱ اگر ۲=[x]، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به‌صورت بازه بنویسید.

$[x]=۲ \longleftrightarrow ۲\leq x<۳$ م.ج = [۲, ۳)

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $۰ \leq x < ۱$، آنگاه $[x] = ۰$؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همهٔ اعداد عضو بازهٔ [۰,۱) برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازهٔ [-۴,۴) تکمیل کنید.



۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محوراعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطهٔ $a + ۳$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + ۳]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a + ۳]$ برقرار است؟ $[a + ۳] = [a] + ۳$

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

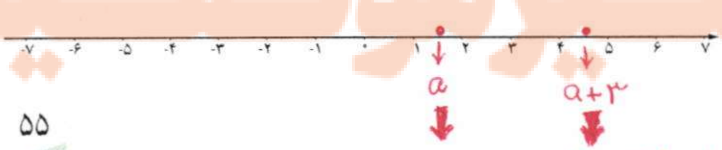
«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$»

خواندنی

برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

خواندنی

با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانهٔ محاسبهٔ نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (http://parcelprice.post.ir) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینهٔ ارسال یک بسته را برحسب وزن ــ قیمت مشاهده کنید.



$[a+۳] = [a]+۳$

تمرین

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ و با دامنهٔ $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۲ دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$ را به‌دست آورید.

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$, $g(x)=\frac{|x|}{x}$ ب) $f(x)=x-۲$, $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

۶ حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید. $[-۲۳۰۹/۵۴]$ $[-۱۰۳/۰۰۳]$ $[۳۰۰/۴۰۰۲]$

۷ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۳ & x\in[۰,۱)\\ ۰ & x\in[۱,۵]\\ ۲ & x\in(۶,۷]\end{cases}$$

۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+۲$ و دامنهٔ $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

خواندنی

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان[۱] را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x نشان‌دهندهٔ ماه‌های پس از تولد است.

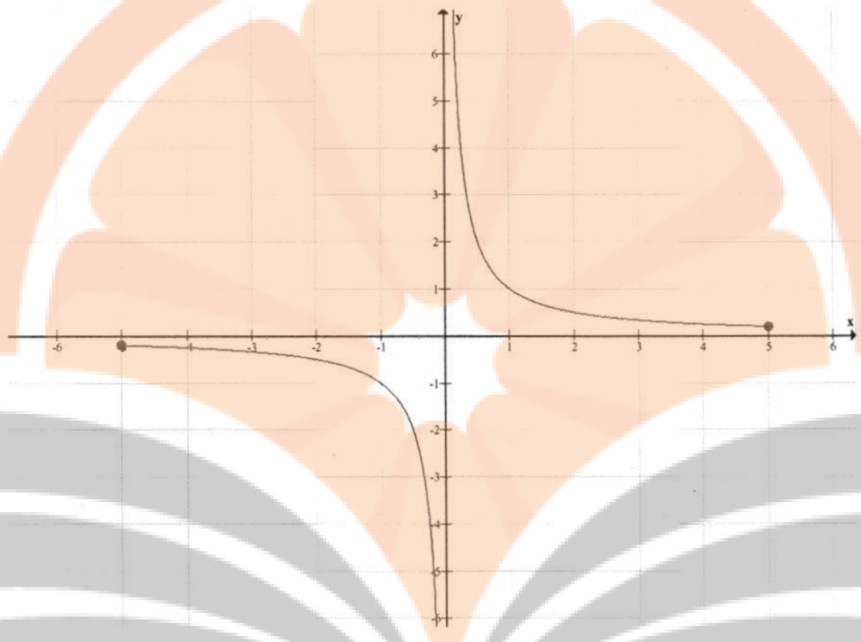
قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟

در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟

۱ــ کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

حل تمرین صفحه ی ۵۶ (ریاضی۲)

۱ : با انتخاب چند نقطه در دامنه‌ی تعیین شده، می توان نمودار را رسم نمود.



۲ :

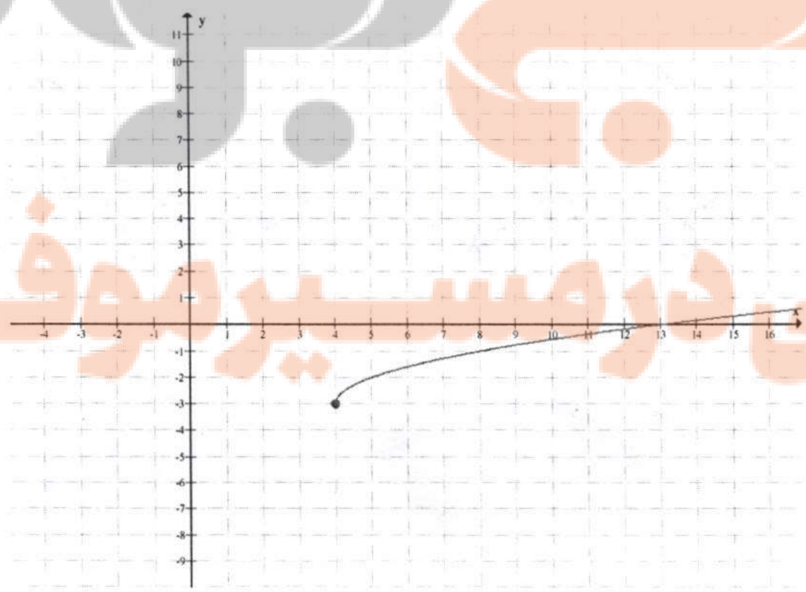
$$x - ۳ = ۰ \to D_f = R - \{۳\}$$

۳ : الف : دو تابع داده شده ، مساویند. (دو شرط تعریف توابع مساوی را دارند.)

ب : دو تابع داده شده، دامنه های مساوی ندارند، لذا مساوی نیستند.

۴ : سئوال، جواب های متعدد دارد. مثلاً $f(x) = \dfrac{۲}{x + ۱}$

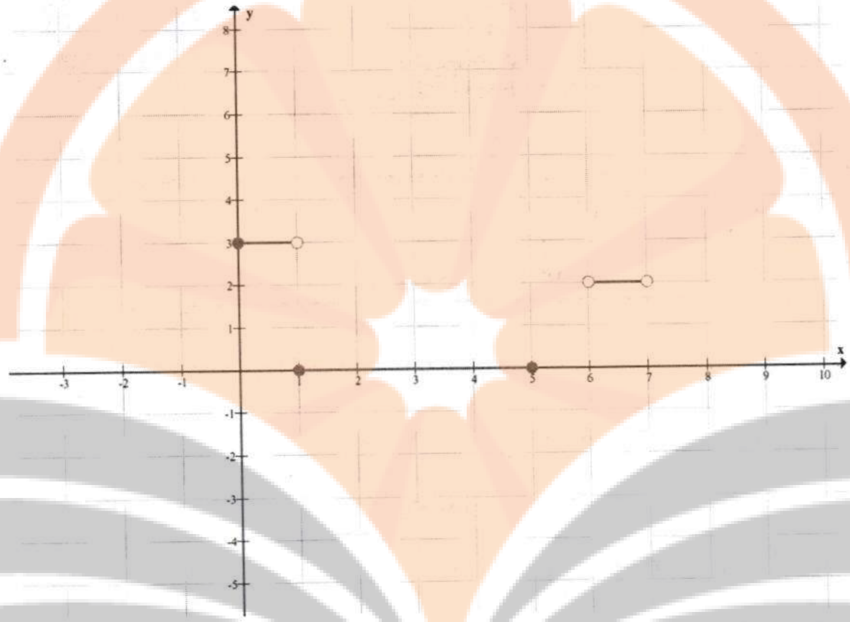
۵ : به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ می توان نمودار این تابع را رسم کرد.



۶:

$[-۲۳۰۹/۵۴]=-۲۳۱۰$ و $[-۱۰۳/۰۰۳]=-۱۰۴$ و $[۳۰۰/۴۰۰۲]=۳۰۰$

۷:



۸:

$$x\in[-۳,-۲)\xrightarrow{[x]=-۳}y=-۳+۲=-۱$$
$$x\in[-۲,-۱)\xrightarrow{[x]=-۲}y=-۲+۲=۰$$
$$x\in[-۱,۰)\xrightarrow{[x]=-۱}y=-۱+۲=۱$$
$$x\in[۰,۱)\xrightarrow{[x]=۰}y=۰+۲=۲$$
$$x\in[۱,۲)\xrightarrow{[x]=۱}y=۱+۲=۳$$
$$x\in[۲,۳)\xrightarrow{[x]=۲}y=۲+۲=۴$$

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.	$f(x)=\frac{۸}{۵}x$
این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.	$g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

$f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸$ Km/h

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

> با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

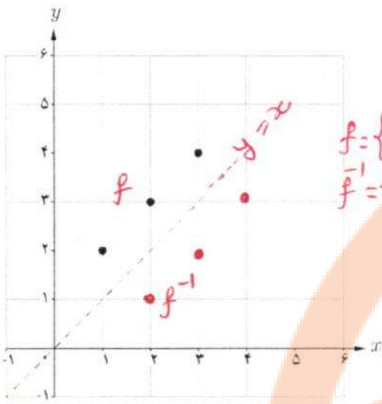
برای مثال وارون تابع $f=\{(۶,۴),(۵,۳),(۲,۱)\}$ برابر با $f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$ است.

کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s^{-1}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$	$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$
$t^{-1}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$	$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$
$u^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$	$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$

فعالیت



۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

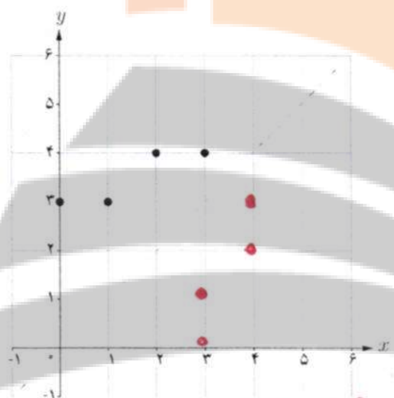
ب) تابع f^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. $f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

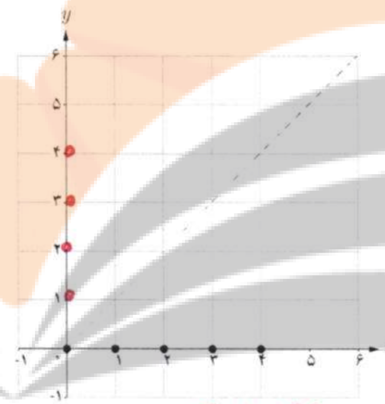
پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

«نمودار f و f^{-1} نسبت به ..خط..... $y=x$... قرینهٔ یکدیگرند».

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید. هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.





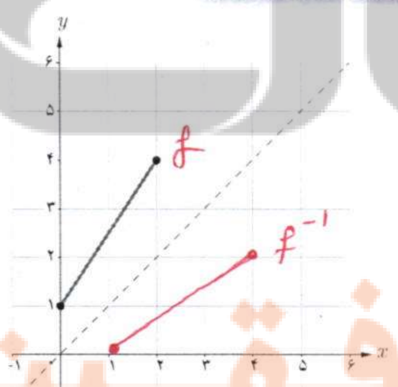
f تابع است. f^{-1} تابع نیست.

f تابع است. f^{-1} تابع نیست.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.



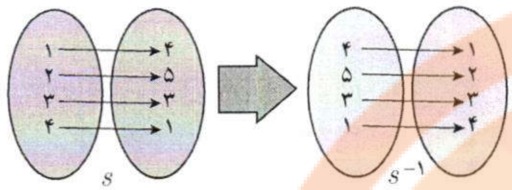
$(2,4) \to (4,2)$

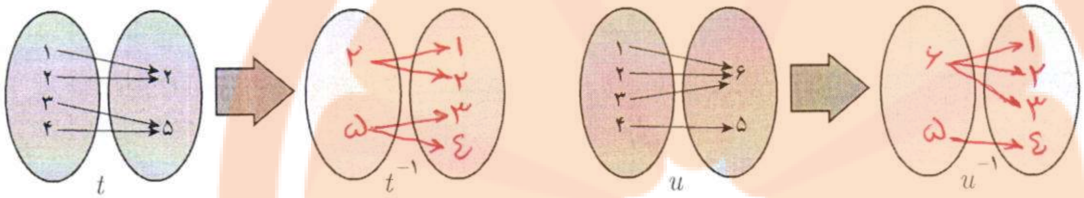
$(0,1) \to (1,0)$

تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به‌دست آورید.





ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

s^{-1} یک تابع است.	بله☑ خیر□
t^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر☑
u^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر☑

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

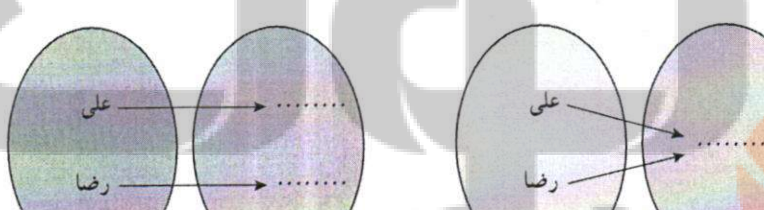
وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های دوم تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابع $f=\{(۱,۲),(-۲,۴),(۲,-۱),(-۱,۲)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.



f
اثر انگشت

g
گروه خونی

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟ بله

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟
f^{-1} تابع است. g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟ f

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

هر شخص گروه خونی مشابه دیگران می‌تواند داشته باشد ولی اثر انگشت وی مختص او است.

خواندنی

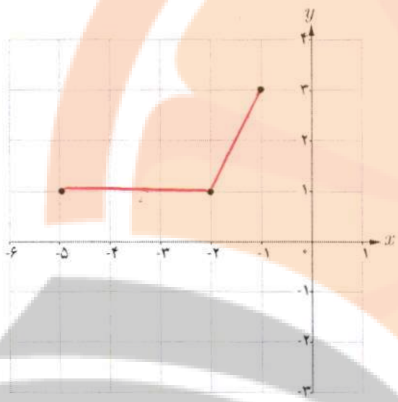
قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجستهٔ ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

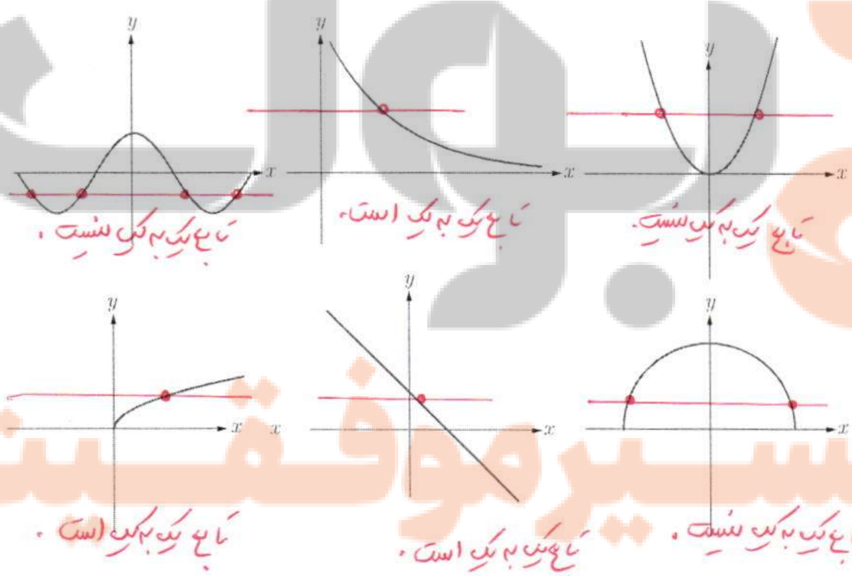
الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟ خیر

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟



اگر هر خط موازی محور طول ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

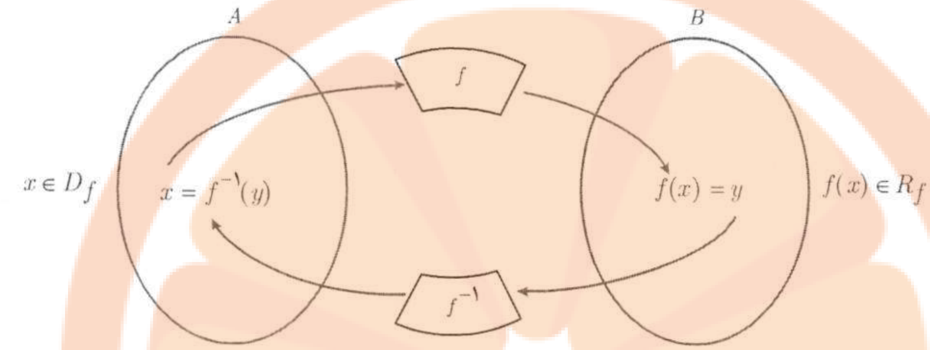
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



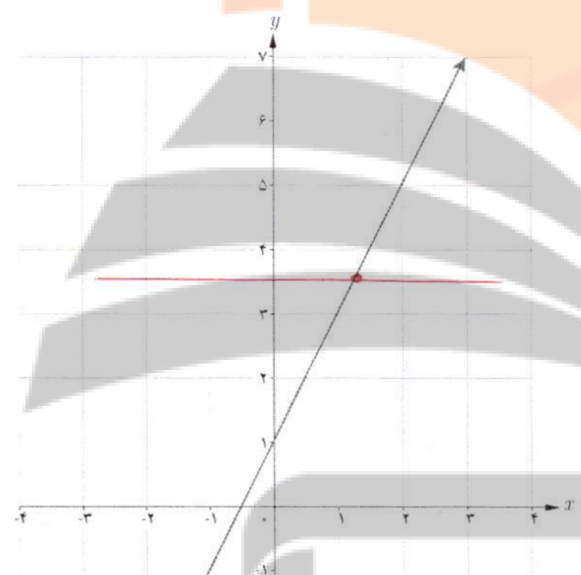
تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.(R_f نماد برد تابع f است).



فعالیت



تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x + ۱$ را در نظر می گیریم.

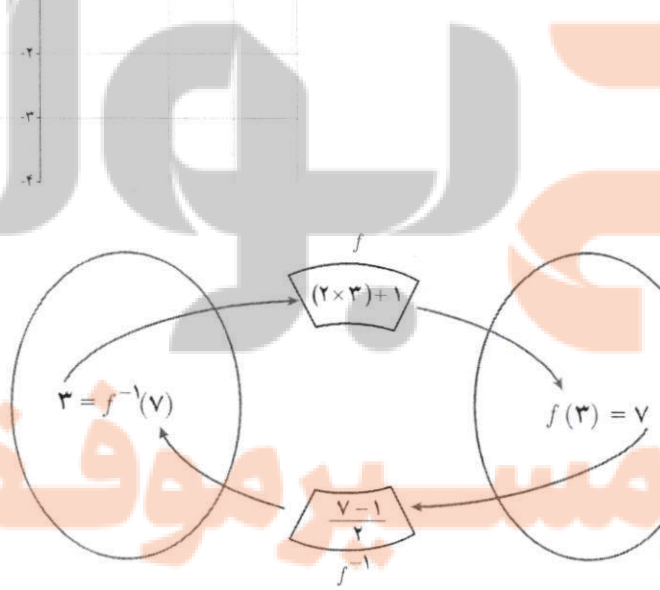
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند.

ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

$(۳,۷) \in f$ و $(۷,۳) \in f^{-1}$

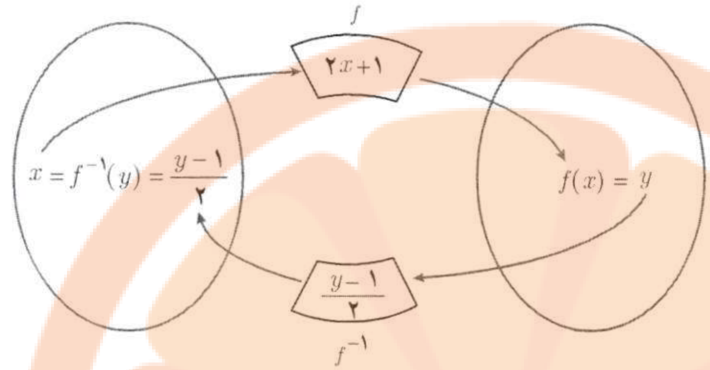
به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-1}(۷) = ۳$



$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{+۱} \overset{y}{۲x+۱}$ $\quad f(x) = ۲x+۱$

$\frac{x-۱}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x-۱ \xleftarrow{-۱} x$

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$f(x) = ۲x+۱ \qquad (x \in D_f)$

$f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} \qquad (y \in R_f)$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، چنین محاسبه می‌شود :

$$f(x) = ۲x+۱ \Rightarrow y = ۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۲x = y-۱$$
$$\Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x+۵$

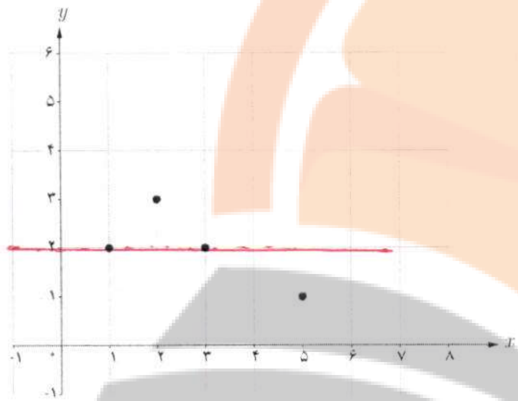
زیرا یک به یک است.

$f^{-۱}(x) = x - ۵$

ب) $g(x)=۴x$ $\qquad g^{-1}(x)=\frac{x}{۴}$

پ) $u(x)=۲x+۳$ $\qquad u^{-1}(x)=\frac{x-۳}{۲}$

ت) $v(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$ $\qquad v^{-1}(x)=\frac{۳}{۲}(x+۴)$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

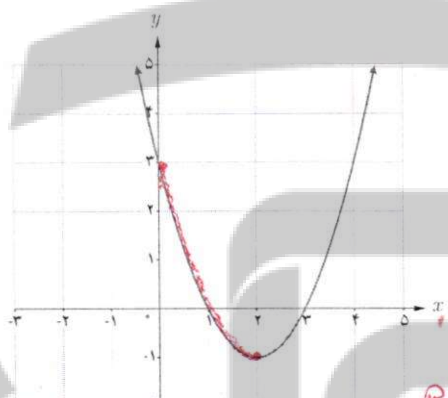
خط $y=۲$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.
مسئله چند جواب دارد؟ مسئله دو جواب دارد.

یا نقطه‌ی (۳,۲) را حذف کنیم یا (۱,۲)

در هر حالت تابع یک به یک به دست می‌آید.

کار در کلاس

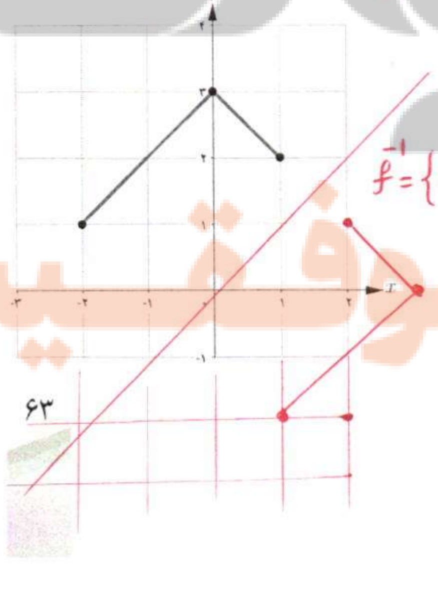


الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۴x+۳$ در شکل مقابل، دقت کنید.
با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[۱,۴)$
☑ $[۰,۲]$

ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟ خیر، تابع درجه‌ی ۲ با دامنه‌ی R یک سهمی است و هر خط موازی محور طول‌ها می‌تواند نمودار آن را در دو نقطه قطع کند. یعنی یک به یک نیست.

تمرین



۱ وارون تابع $f=\{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به‌دست آورید.

$f^{-1}=\{(۳,۲),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$

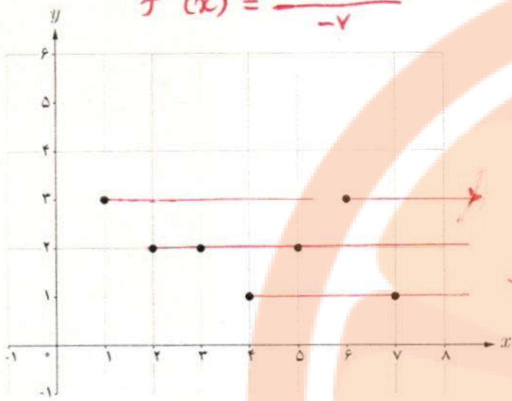
۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

f ← تابع یک به یک است.

۳ ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید. $f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x-4)$

الف) $f(x) = 5x - 2$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$ $\qquad$ ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$ $\qquad$ پ) $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{-7}$

۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟

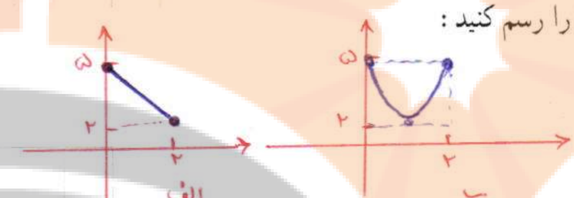


۱ نقطه حذف
۲ نقطه حذف
۱ نقطه حذف
۴ نقطه حذف

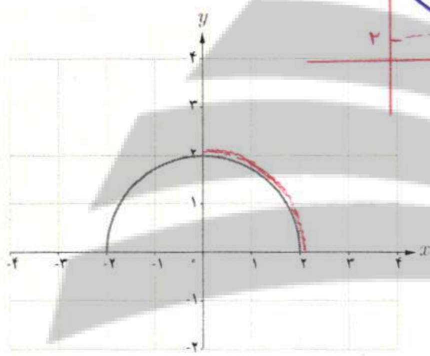
۵ نمودار تابعی با دامنهٔ [۰,۲] و برد [۲,۵] را رسم کنید :

الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

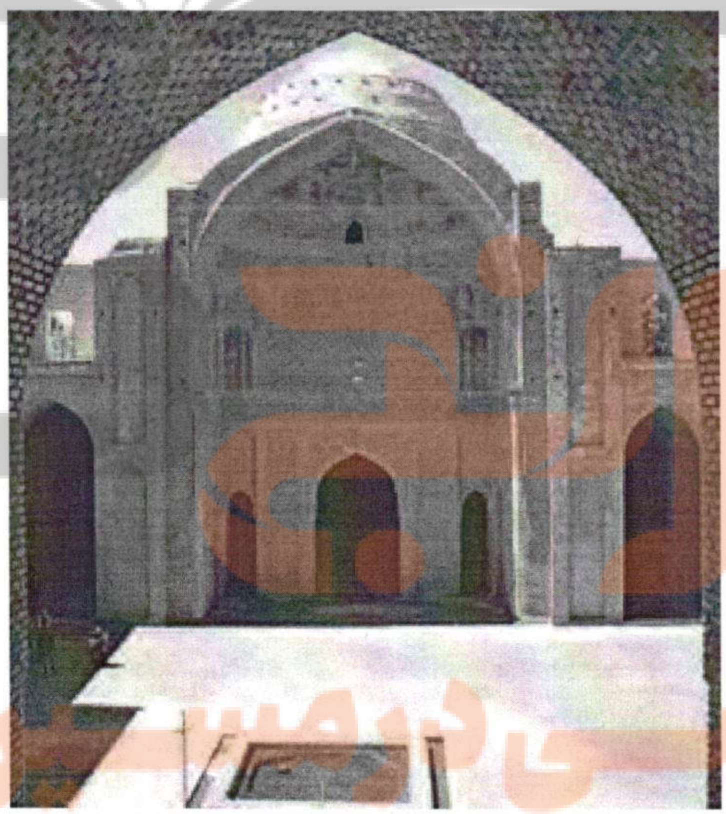
ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.



۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.



نمودار در بازه [۲و۰] تابع یک به یک می‌شود.



مسجد جامع ورامین (تهران)

درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g به‌ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این‌صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب*	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

فعالیت

اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x-2$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها $\left(\frac{f}{g}\right)$ را به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-1)+(x-2)=3x-3$$

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x-2)=x+1$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(2x-1).(x-2)=2x^2-5x+2$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$$

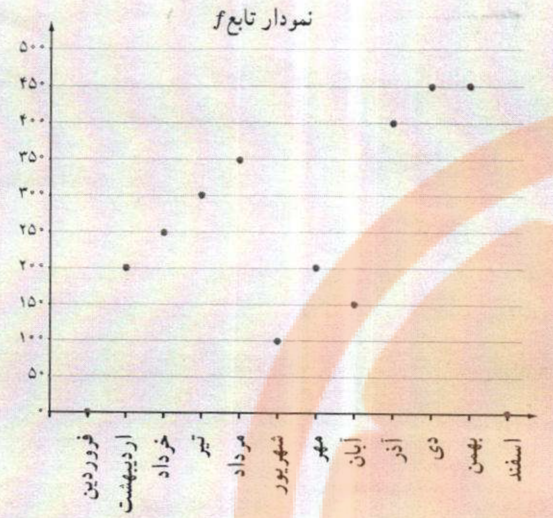
$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x\mid g(x)=0\}=\left(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\right)-\{x\mid x-2=0\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f\times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

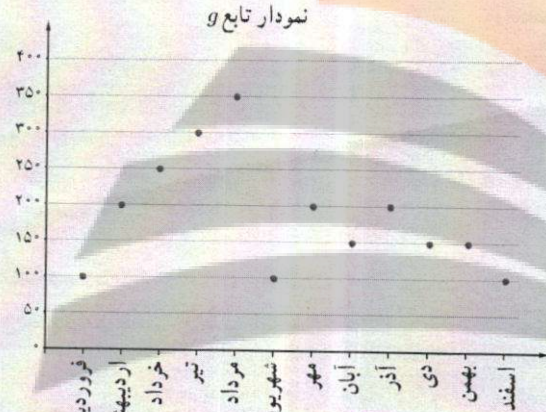
خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزارو یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولاتی هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد.

نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، f (تیر) = ۳۰۰. پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



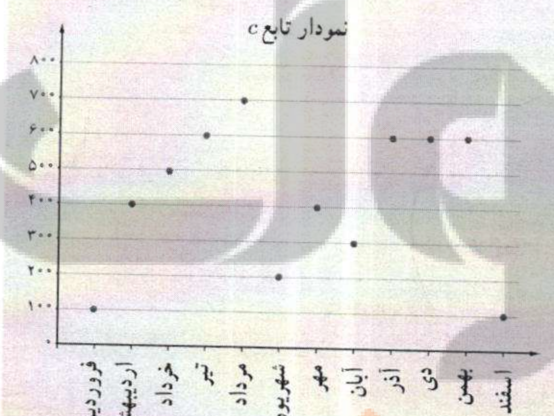
پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینهٔ چرم و هزینهٔ ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینهٔ» او شامل قیمت همهٔ مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینهٔ خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنهٔ تابع c، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.



کار در کلاس

۱ برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2+3x+1$ و $g(x) = x-3$ جدول داده شده را کامل کنید.

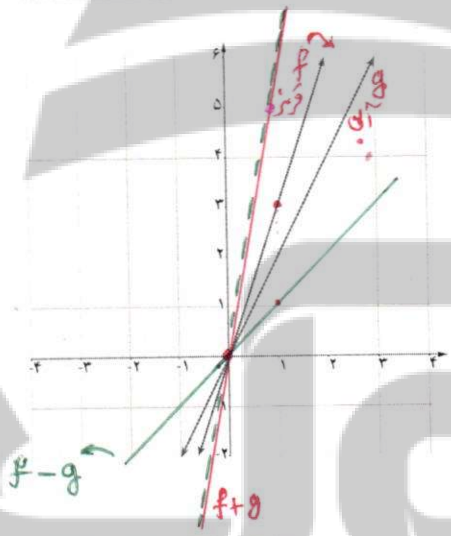
تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)= x^2+4x-2$	$\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)= x^2+2x+4$	$\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)= x^3-8x-3$	$\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)= \frac{x^2+3x+1}{x-3}$	$\mathbb{R}-\{3\}$

۲ برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x}+1$ و $v(x) = x-1$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)= \sqrt{x}+x$	$[0,+\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x)= \sqrt{x}-x+2$	$[0,+\infty)$
$u.v$	$(u.v)(x)= x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1$	$[0,+\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)= \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$	$[0,+\infty)-\{1\}$

فعالیت

مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.



الف) ضابطهٔ دو تابع f و g را به‌دست آورید.

$f(x) = 3x$ $\qquad$ $g(x) = 2x$

ب) ضابطهٔ دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به‌دست آورید.

$(f-g)(x) = 3x-2x=x$ $\qquad$ $(f+g)(x) = 3x+2x=5x$

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱

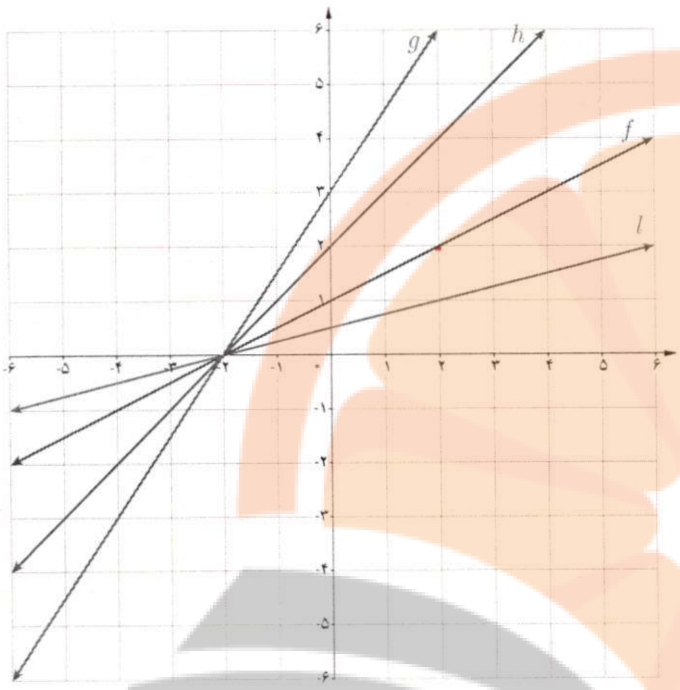
ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

$f(x) = ax+b$
$g(x) = cx+d$
توابع خطی

$(f+g)(x) = (a+c)x+(b+d)$ تابع خطی

$(f-g)(x) = (a-c)x+(b-d)$ تابع خطی

فعالیت



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{۱}{۲} f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$g(x) =$ ...۳... $f(x)$

$h(x) =$ ...۲... $f(x)$

ابتدا جدول تشکیل می‌دهم.

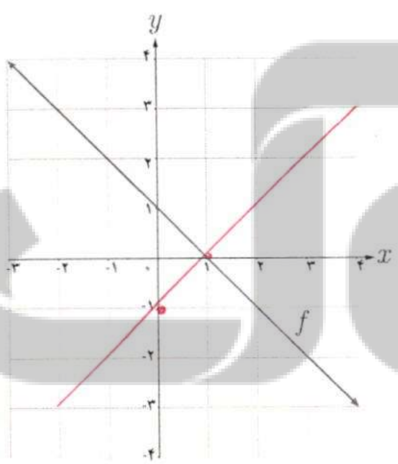
x	۰	۲	-۶	-۲
f(x)	۱	۲	-۲	۰
g(x)	۳	۶	-۶	۰
h(x)	۲	۴	-۴	۰
L(x)	$\frac{1}{2}$	۱	-۱	۰

$g(x) = ۳f(x)$,
$h(x) = ۲f(x)$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که :

> اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس

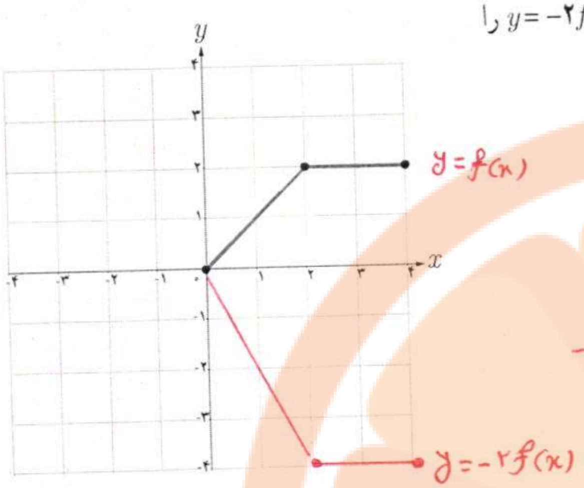


۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ را رسم کنید.

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

> برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع ضابطهٔ $y = f(x)$ را نسبت به محور ...طولها... رسم کنیم.

۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲f(x)$ را رسم کنید.



x	۰	۲	۴
$f(x)$	۰	۲	۲
$-۲f(x)$	۰	-۴	-۴

تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=-|x|$ ب) $h(x)=-|x-۳|$ پ) $l(x)=۲|x-۲|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

حل شده

الف) $g(x)=\frac{۱}{x}$ $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=x+۲$ $f(x)=x^۲-۴$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt{x}$ ت) $g(x)=x^۲+۳x-۱۰$ $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$

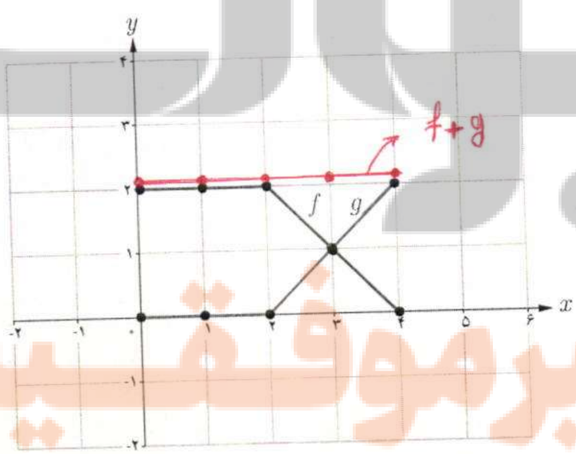
ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$ $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

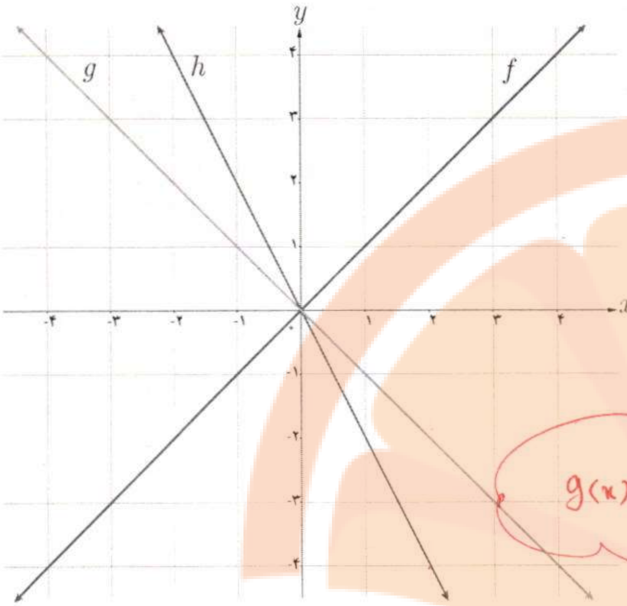
الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به‌دست آورید.



❺ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



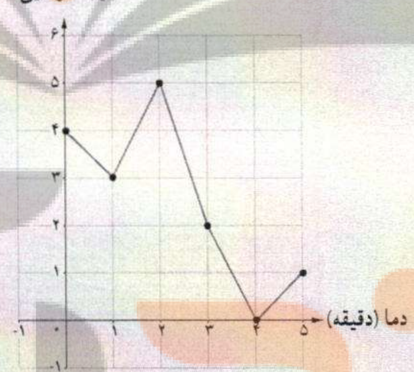
x	۰	۱	۲	-۱
$f(x)$	۰	۱	۲	-۱
$g(x)$	۰	-۱	-۲	۱
$h(x)$	۰	-۲	-۴	۲

با توجه به جدول

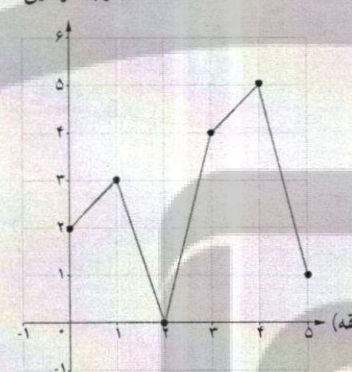
$$g(x) = f(x) + h(x)$$

خواندنی

یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟



نمودار منبع دوم



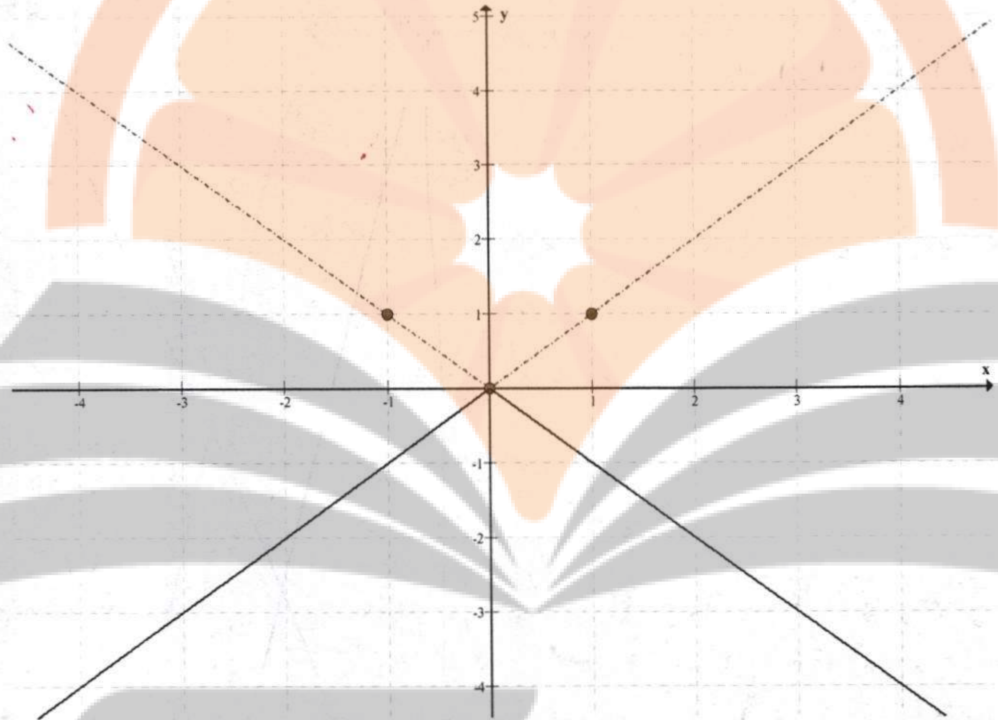
نمودار منبع اول

حل تمرین های صفحه ی ۶۹ (ریاضی۲)

۱ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم می کنیم. سپس به کمک آن نمودار هر تابع را رسم می نماییم.

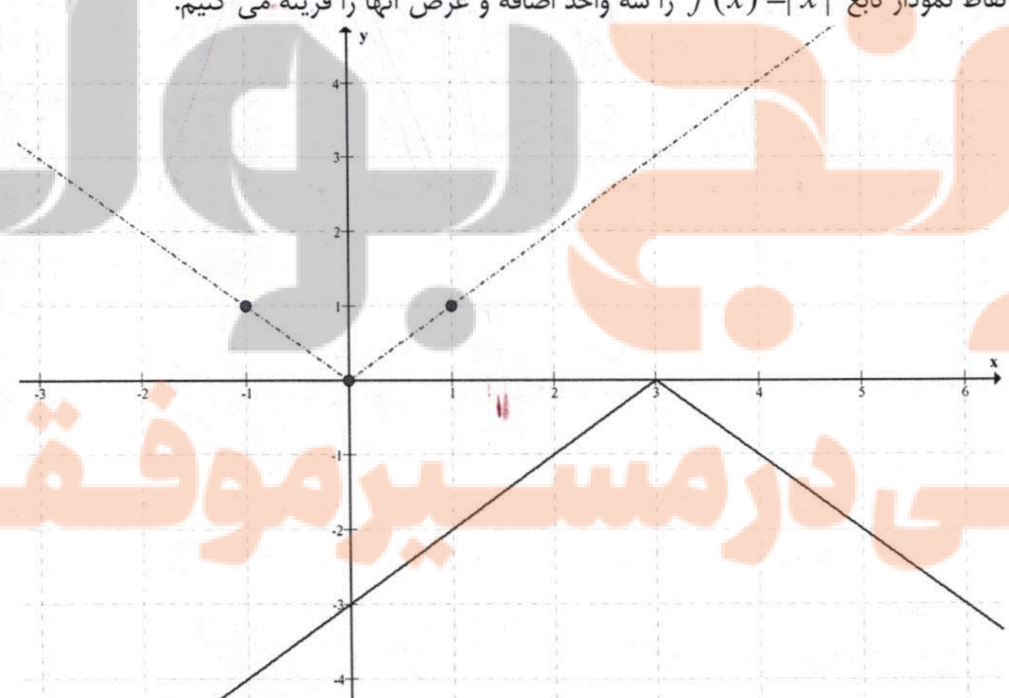
الف) $g(x)=-|x|$

عرض تمام نقاط تابع $f(x)=|x|$ را قرینه می کنیم.



ب) $g(x)=-|x-۳|$

طول نقاط نمودار تابع $f(x)=|x|$ را سه واحد اضافه و عرض آنها را قرینه می کنیم.



پ) $g(x)=2|x-2|$

طول نقاط نمودار تابع $f(x)=|x|$ را دو واحد اضافه و عرض آنها را دو برابر می کنیم.

۲ :

الف)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=\|x\|+\frac{1}{x}$	$R-\{0\}$
تفریق	$(f-g)(x)=\|x\|-\frac{1}{x}$	$R-\{0\}$
ضرب	$(f\times g)(x)=\|x\|\times\frac{1}{x}=\frac{\|x\|}{x}$	$R-\{0\}$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\|x\|}{\frac{1}{x}}=x\|x\|$	$R-\{0\}$

۷۵,۲

ب)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=(x^{۲}-۴)+(x+۲)=x^{۲}+x-۲$	R
تفریق	$(f-g)(x)=(x^{۲}-۴)-(x+۲)=x^{۲}-x-۶$	R
ضرب	$(f\times g)(x)=(x^{۲}-۴)\times(x+۲)=x^{۳}-۲x^{۲}-۴x-۸$	R
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲}=x-۲$	$R-\{-۲\}$

پ)

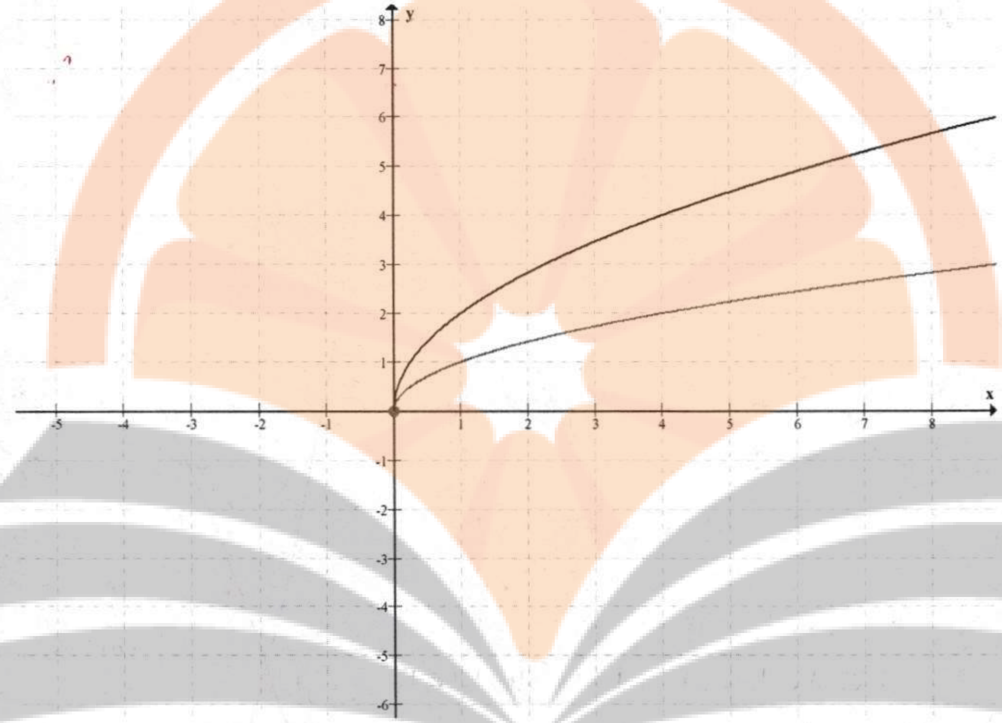
عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=۰$	$[۰,+\infty)$
تفریق	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-(-\sqrt{x})=-۲\sqrt{x}$	$[۰,+\infty)$
ضرب	$(f\times g)(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=-x$	$[۰,+\infty)$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-۱$	$(۰,+\infty)$

ت)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x)=(\frac{x-۲}{x+۵})+(x^{۲}+۳x-۱۰)$	$R-\{-۵\}$
تفریق	$(f-g)(x)=(\frac{x-۲}{x+۵})-(x^{۲}+۳x-۱۰)$	$R-\{-۵\}$
ضرب	$(f\times g)(x)=(\frac{x-۲}{x+۵})\times(x^{۲}+۳x-۱۰)$	$R-\{-۵\}$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{x-۲}{x+۵}}{x^{۲}+۳x-۱۰}=\frac{x-۴}{(x+۵)(x^{۲}+۳x-۱۰)}$	$R-\{۲,-۵\}$

۲:

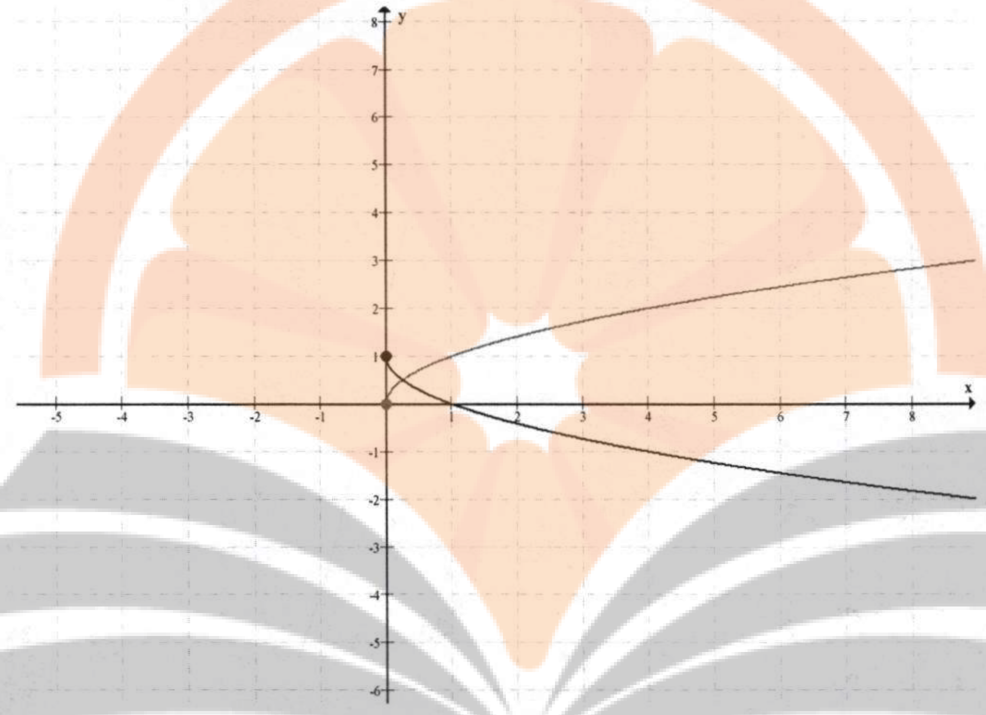
الف) $r(x) = ۲\sqrt{x}$



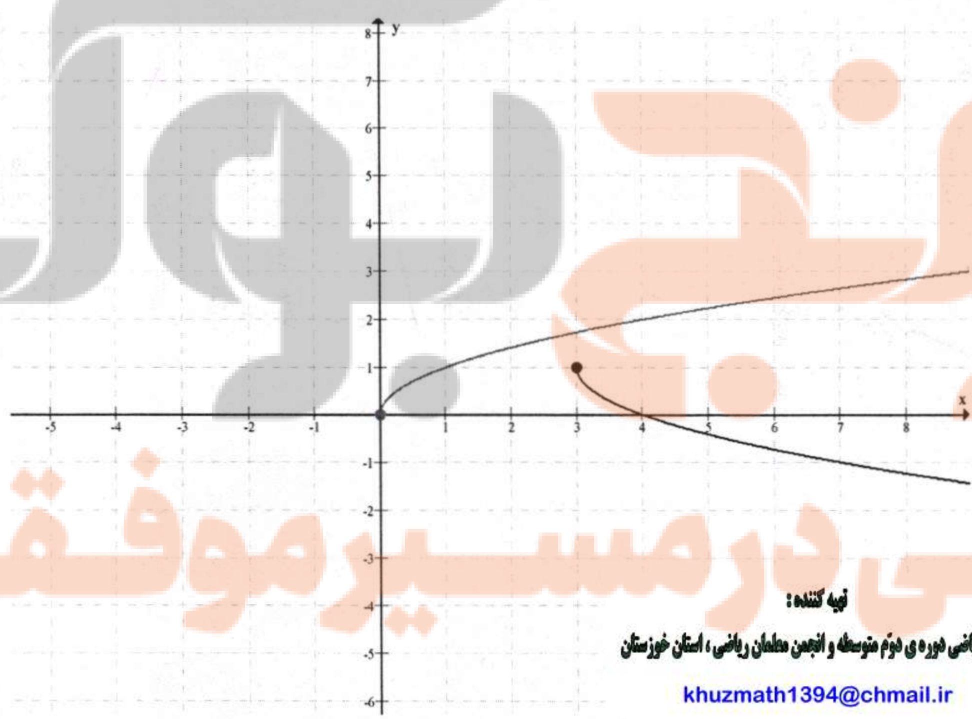
ب) $s(x) = -۲\sqrt{x - ۲}$

۷۵,۴

ت) $u(x) = ۱ - \sqrt{x}$



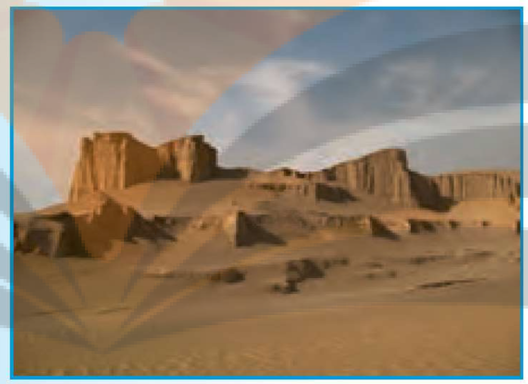
ت) $v(x) = ۱ - \sqrt{x - ۳}$



تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

***

فصل ۴ مثلثات



کرمان، کلوت شهداد

ماهوارهٔ امید اولین ماهوارهٔ ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویهٔ بین مرکز زمین (نقطهٔ O) تا ماهوارهٔ S و دوردست‌ترین نقطهٔ قابل دید روی کرهٔ زمین (نقطه p) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه

$\cos\alpha = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+h}$ و

$\widehat{PA} = ۶۴۰۰ \times \hat{\alpha}$ (بر حسب رادیان)

درس اول — واحدهای اندازه‌گیری زاویه

درس دوم — روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس سوم — توابع مثلثاتی

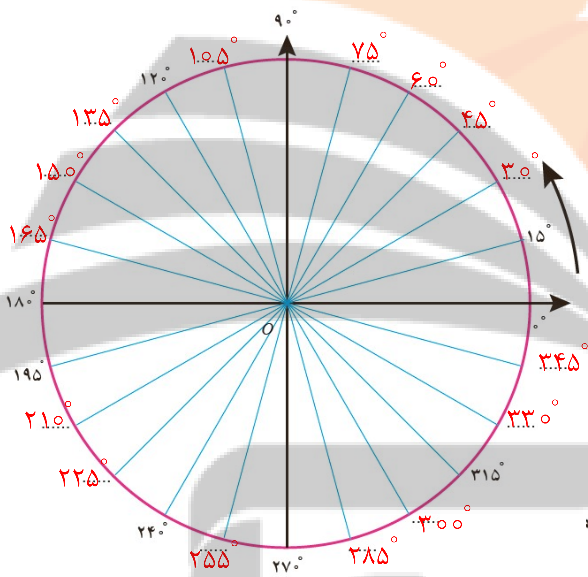
درس اوّل

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری

● اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هرکدام از این کمان‌ها **۱ درجه** است. اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

● **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.



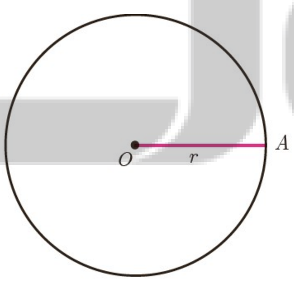
شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطهٔ بین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان و طول ک

فعالیت

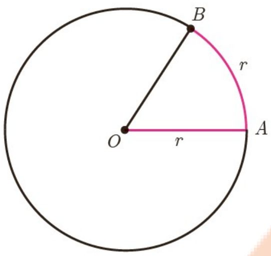
۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید.



طول نخ اندزهٔ محیط دایره را مشخص می کند.اگر فرض کنیم اندازهٔ محیط دایره عددی مانند p شده باشد ، بنا براین شعاع به صورت مقابل به دست می آید: $p = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{۲\pi}$

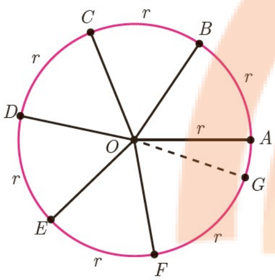
در این قسمت اگر فرض کنیم که $p = ۴۴ \text{ cm}$ برای محاسبه شعاع با فرض $\pi = ۳/۱۴$ داریم :

$$۴۴ = ۲ \times ۳/۱۴ \times r \Rightarrow r = \frac{۴۴}{۶/۲۸} \Rightarrow r \simeq ۷$$



۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

این زاویه تقریبا برابر با ۵۷° است .



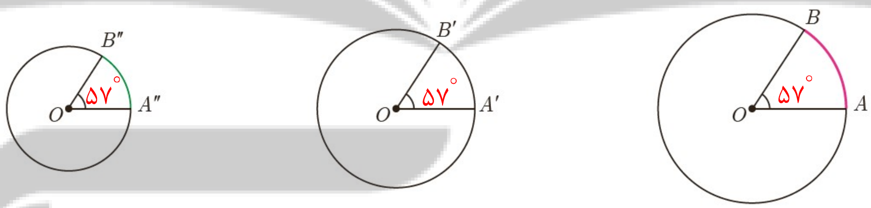
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$، $\widehat{COD}$، $\widehat{DOE}$، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه ..$\widehat{AOB}$.. برابر و هر یک تقریباً ....۵۷.... درجه است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟خیر این دو نقطه بر هم منطبق نمی شوند.

نکته : $\widehat{GOA} \simeq ۱۸^\circ$

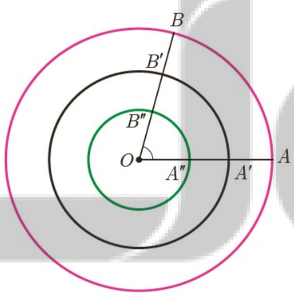
به این ترتیب ۶ زاویهٔ مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با ..شعاع.. دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها **یک رادیان** می‌گوییم.

> **۱ رادیان** برابر است با اندازهٔ زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :

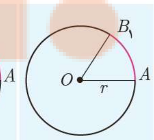
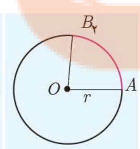
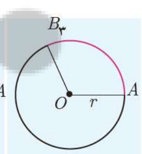
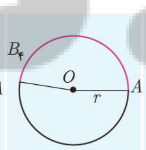
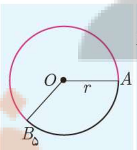
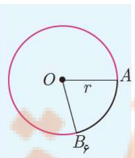
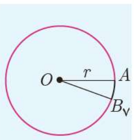


$$OA = \widehat{AB}$$

$$OA' = \widehat{A'B'}$$

$$OA'' = \widehat{A''B''}$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $۱ \leq i \leq ۷$	r	$\frac{۳}{۲}r$	۲r	۳r	۴r	۵r	۶r
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ $۱ \leq i \leq ۷$	۱ رادیان	$\frac{۳}{۲}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

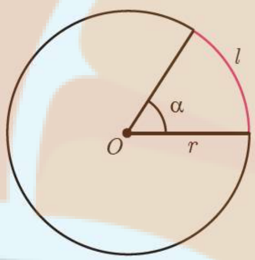
همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید.
با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت :

$$\text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



کار در کلاس

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۴۰۰ سانتی متر	۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی متر = ۲ متر ۲۰۰ سانتی‌متر	۰/۷۵ متر ۷۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر= ۵ متر ۵۰۰ سانتی‌متر	۵ سانتی متر
r	۲۰ سانتی‌متر	۱ متر	۱۰ متر	۳۰ سانتی متر	۱ متر	۰/۵ متر	۵ متر	۵ سانتی‌متر
α	۲۰ رادیان	۱۰ رادیان	۵ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱/۵ رادیان	۱ رادیان	۱ رادیان

$r = ۵\ \text{cm},\ \alpha = \text{۱رادیان}, l = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۱ = \frac{l}{۵} \Rightarrow l = ۵\ \ \text{cm}$

$r = ۵\ \text{m},\ l = ۵۰۰\ \text{cm} \Rightarrow l = ۵\ \text{m},\ \alpha = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{۵}{۵} \Rightarrow \alpha = \text{۱رادیان}$

$r = ۰/۵\ \text{m},\ \alpha = \text{۱/۵رادیان}, l = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۱ = \frac{l}{۰/۵} \Rightarrow l = ۰/۷۵\ \text{m}$

$r = ۱\ \text{m},\ l = ۲۰۰\ \text{cm} \Rightarrow l = ۲\ \text{m},\ \alpha = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۱} \Rightarrow \alpha = \text{۲رادیان}$

$l = ۹۰\ \text{cm},\ \alpha = \text{۳رادیان}, r = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۳ = \frac{۹۰}{r} \Rightarrow r = ۳۰\ \text{cm}$

$r = ۱۰\ \text{m},\ l = ۵۰\ \text{m},\ \alpha = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{۵۰}{۱۰} \Rightarrow \alpha = \text{۵رادیان}$

$l = ۱۰\ \text{m},\ \alpha = \text{۱۰رادیان}, r = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱۰}{r} \Rightarrow r = ۱\ \text{m}$

$r = ۲۰\ \text{cm},\ \alpha = \text{۲۰رادیان}, l = ?\ ,\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۲۰ = \frac{l}{۲۰} \Rightarrow l = ۴۰۰\ \ \text{cm}$

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید :

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقاً °۱۸۰	تقریباً °۱۷۹	تقریباً °۱۷۱	تقریباً °۱۱۴	تقریباً °۵۷	تقریباً °۲۸/۵	زاویه برحسب درجه

$57^\circ \times 3/14 = 179^\circ$ ، $57^\circ \times 3 = 171^\circ$ ، $57^\circ \times 2 = 114^\circ$ ، $57^\circ \times 0/5 = 28/5^\circ$

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با ...۱۸۰... درجه یا ...π... رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با ...π... رادیان. در نتیجه :

$$\frac{\pi}{180}\text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

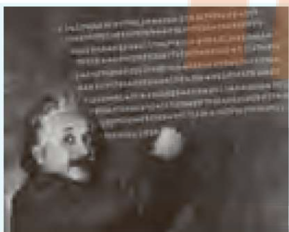
$$\pi\text{ رادیان} = 180^\circ$$

$\xrightarrow{\div 2}$ $\frac{\pi}{2}$ رادیان $= 90^\circ$

$\xrightarrow{\div 3}$ $\frac{\pi}{3}$ رادیان $= 60^\circ$

$\xrightarrow{\div 4}$ $\frac{\pi}{4}$ رادیان $= 45^\circ$

$\xrightarrow{\div 6}$ $\frac{\pi}{6}$ رادیان $= 30^\circ$



خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به‌صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانهٔ mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.

کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{6}$ رادیان

$45^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{4}$ رادیان

$90^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{2}$ رادیان

$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{5}$ رادیان

$60^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{3}$ رادیان

$180^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\text{ رادیان}} \pi$ رادیان

اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

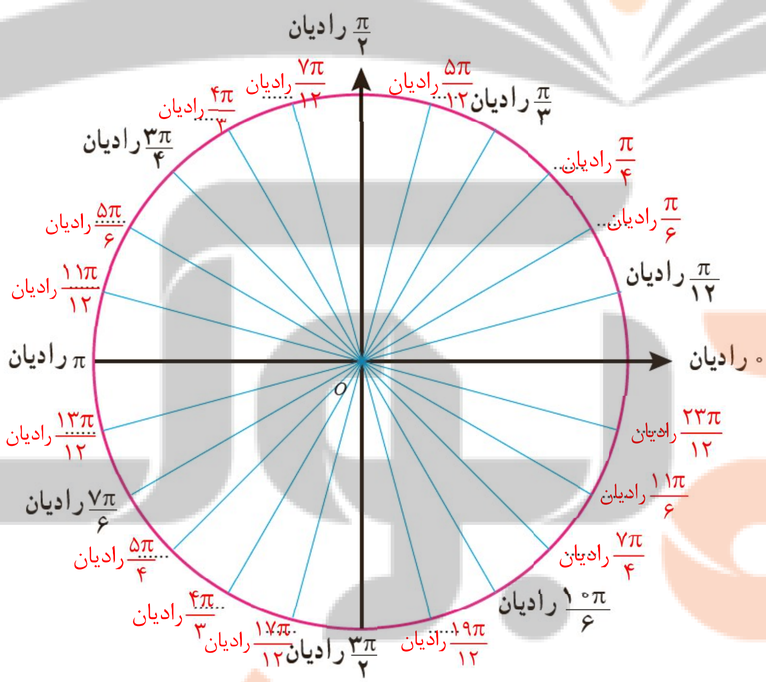
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\text{ رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

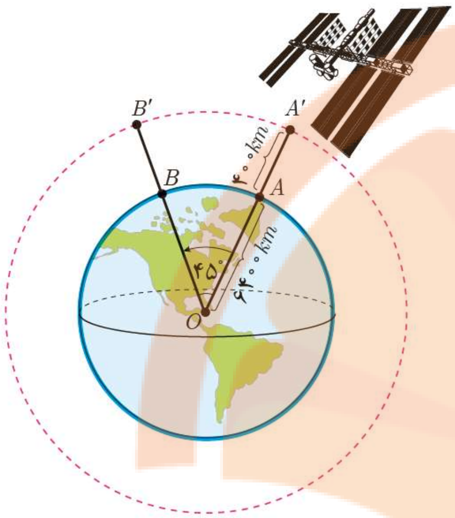
D (درجه)	5°	$25/71^\circ$	24°	72°	120°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{\pi}{7}\text{رادیان}}{\pi\text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{180^\circ}{7} \Rightarrow D\simeq 25/71^\circ \\ \dfrac{24^\circ}{180^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow R=\text{رادیان}\ \dfrac{2\pi}{15} \\ \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{2\pi}{5}\text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{2\times 180^\circ}{5} \Rightarrow D=72^\circ \\ \dfrac{120^\circ}{180^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow R=\text{رادیان}\ \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{5\pi}{4}\text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{5\times 180^\circ}{4} \Rightarrow D=225^\circ \end{cases}$$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



فعالیت



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه °۴۵ می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی °۴۵ را به رادیان تبدیل کنید.

برحسب رادیان $A\hat{O}B$ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $= \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ رادیان

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r =$ ۶۸۰۰ km

$r = 6400 + 400 = 6800\ km$

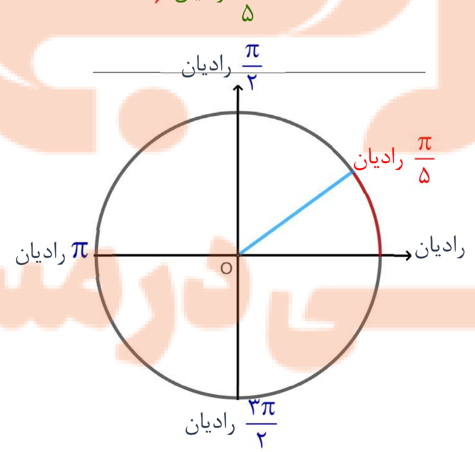
۳ طول کمان روبه‌روی $A'\hat{O}B'$ با فرض $\pi \simeq 3/14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با :

$A'B'$ طول کمان $= l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \Rightarrow l = \frac{3/14}{4} \times 6800 \simeq 5338\ km$

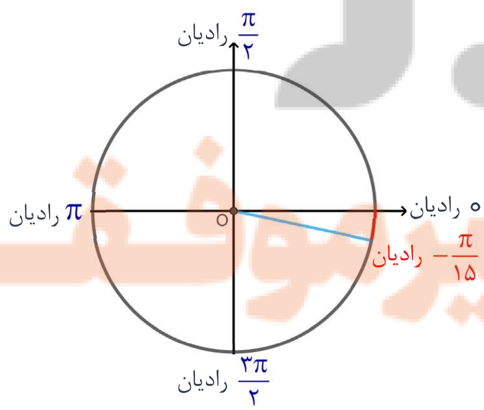
تمرین

۱ هریک از زاویه‌های °۱۲−، °۳۶، °۷۲، °۱۰۵− و °۳۱۵ را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

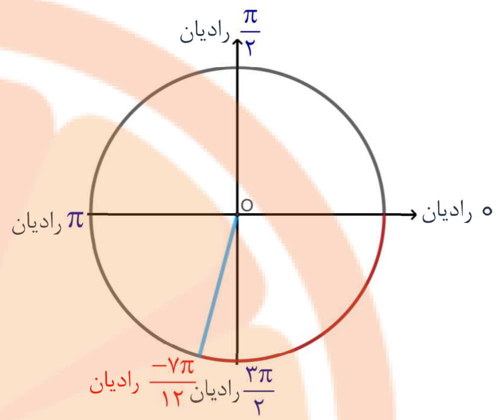
$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{5}$ رادیان



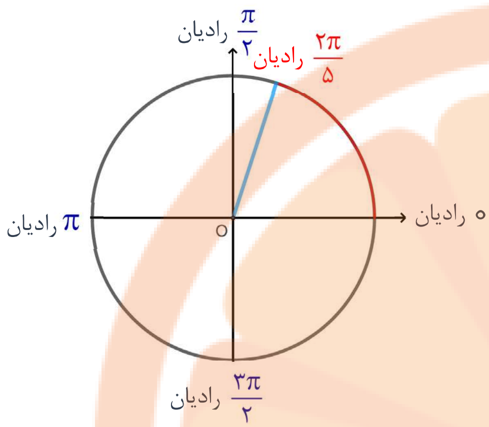
$-12^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{رادیان}} -\frac{\pi}{15}$ رادیان



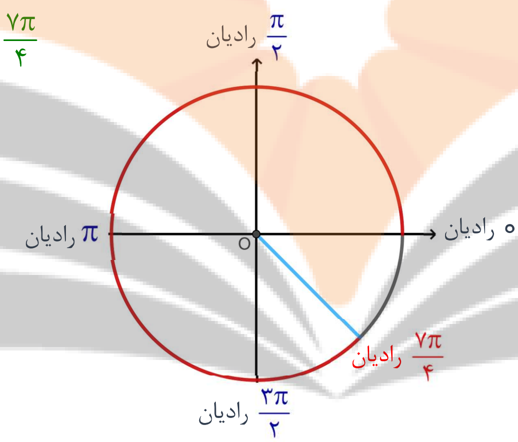
$-105^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}}$ رادیان $-\frac{7\pi}{12}$ رادیان



$72^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}}$ رادیان $\frac{2\pi}{5}$ رادیان

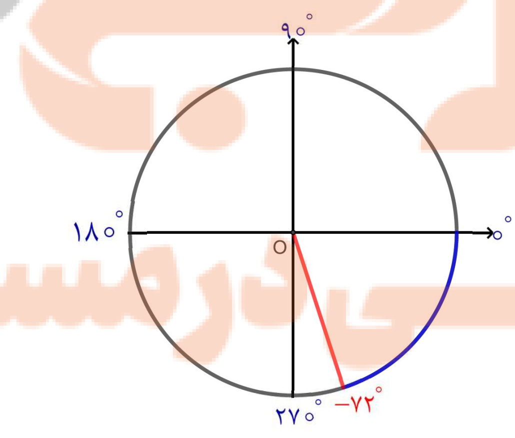


$315^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}}$ رادیان $\frac{7\pi}{4}$ رادیان

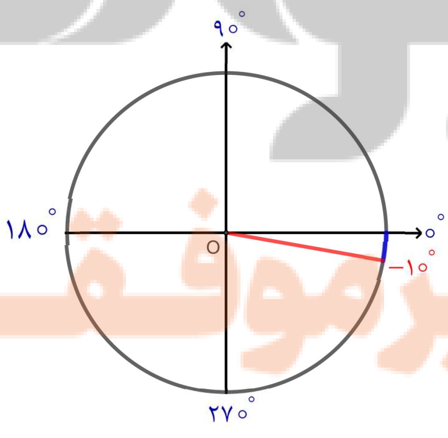


۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

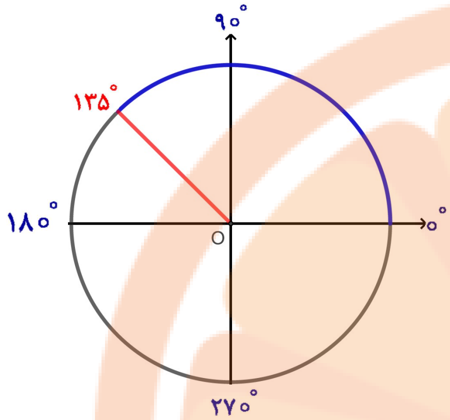
$\frac{-2\pi}{5}$ رادیان $\xrightarrow{\pi = 180^\circ} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$



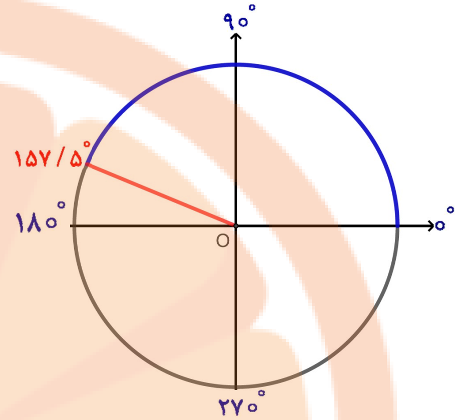
$\frac{-\pi}{18}$ رادیان $\xrightarrow{\pi = 180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$



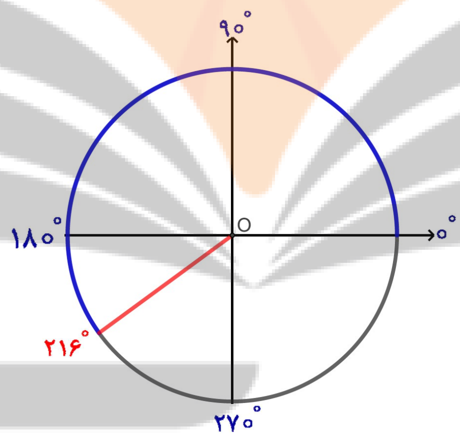
رادیان $\frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\pi = 180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{540^\circ}{4} = 135^\circ$



رادیان $\frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\pi = 180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{1260^\circ}{8} = 157/5^\circ$



رادیان $\frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi = 180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{1080^\circ}{8} = 216^\circ$



۳ زاویهٔ D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازهٔ این زاویه چند درجه است؟

راه اول : رادیان $\frac{\pi}{20} \xrightarrow{\pi = 180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$

راه دوم : $\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{20}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{20} \Rightarrow D = 9^\circ$

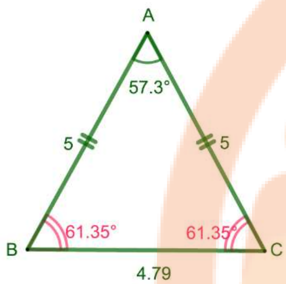
۴ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0/8$ رادیان

نکته : l و r هم واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می آید.

۵ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هر یک از ساق‌های آن است.



همانطور که قبلا دیده ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با ۵۷/۳ درجه است. بنا براین با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است ؛ بنا براین اندازهٔ هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به دست آورد: $\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-۵۷/۳^\circ}{۲}=۶۱/۳۵^\circ$ همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر ، بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویهٔ کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود.پس عبارت فوق درست است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

این عبارت درست است زیرا : $\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow l=r\alpha\Rightarrow l=۱\times\pi=\pi\simeq ۳/۱۴\ \text{cm}$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

این عبارت نادرس است زیرا :

راه اول : زیرا $\frac{۶\pi}{۵}=\pi+\frac{\pi}{۵}$ بنا براین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد ؛ زیرا بیش تر از π رادیان است .

راه دوم : انتهای کمان زاویه ۲۱۶درجه در ربع سوم است . $\frac{۶\pi}{۵}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۰۸۰^\circ}{۵}=۲۱۶^\circ$

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

این عبارت نادرست است زیرا :

راه اول : می دانیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$\frac{\pi}{۹}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۸۰^\circ}{۹}=۲۰^\circ$ $\quad$ $\frac{۷\pi}{۳۶}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۲۶۰^\circ}{۳۶}=۳۵^\circ$ $\quad$ $\frac{۲\pi}{۳}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۳۶۰^\circ}{۳}=۱۲۰^\circ$

$۱۲۰^\circ+۲۰^\circ+۳۵^\circ=۱۷۵^\circ<۱۸۰^\circ$

راه دوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$$\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۳۶}=\frac{۲۴\pi+۴\pi+۷\pi}{۳۶}=\frac{۳۵\pi}{۳۶}\Rightarrow\frac{۳۵\pi}{۳۶}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۶۳۰۰^\circ}{۳۶}=۱۷۵^\circ<۱۸۰^\circ$$

راه سوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° یا همان π رادیان است پس :

$$\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۳۶}=\frac{۲۴\pi+۴\pi+۷\pi}{۳۶}=\frac{۳۵\pi}{۳۶}<\pi$$

خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $۱\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر با $۵۷/۳^\circ$ است.

حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

۰/۵ رادیان	$\simeq$	$۲۸/۶^\circ$
$\frac{۴}{۵}$ رادیان	$\simeq$	$۴۵/۸^\circ$
۲ رادیان	$\simeq$	$۱۱۴/۶^\circ$
۳ رادیان	$\simeq$	$۱۷۱/۹^\circ$
۳/۱۴ رادیان	$\simeq$	$۱۷۹/۹^\circ$
$\frac{\pi}{۳}$ رادیان	$\simeq$	۶۰°
$\frac{\pi}{۴}$ رادیان	$\simeq$	۴۵°
π رادیان	$\simeq$	۱۸۰°

$۰/۵\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۲۸/۶^\circ$, $\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۴۵/۸^\circ$, $۲\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۱۴/۶^\circ$

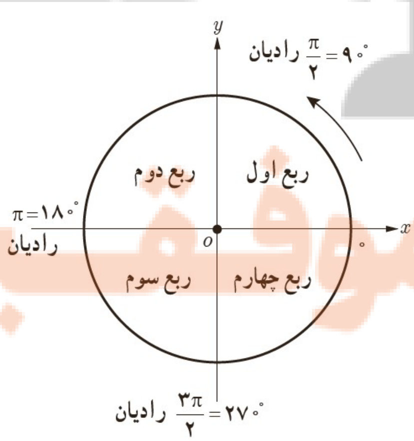
$۳\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۷۱/۹^\circ$, $۳/۱۴\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۷۹/۹^\circ$, $\frac{\pi}{۳}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۶۰^\circ$

$\frac{\pi}{۴}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۴۵^\circ$, $\pi\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۸۰^\circ$

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

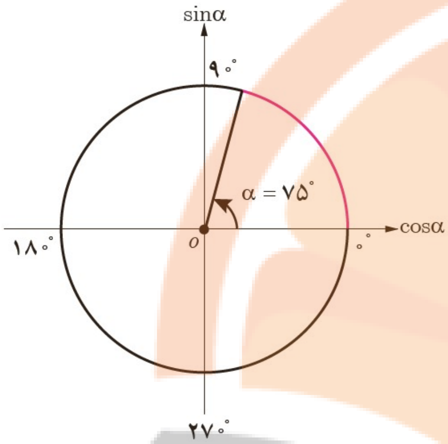
در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.



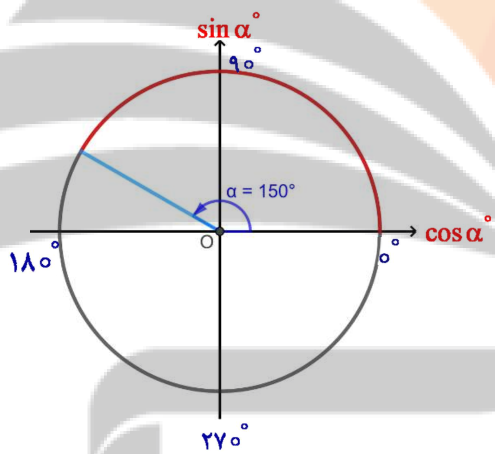
ربع / نسبت مثلثاتی	اول $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

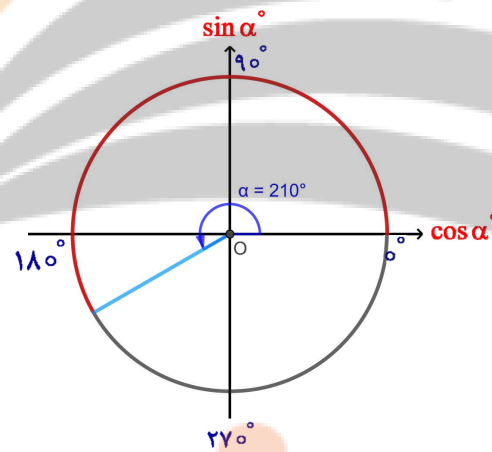
فعالیت

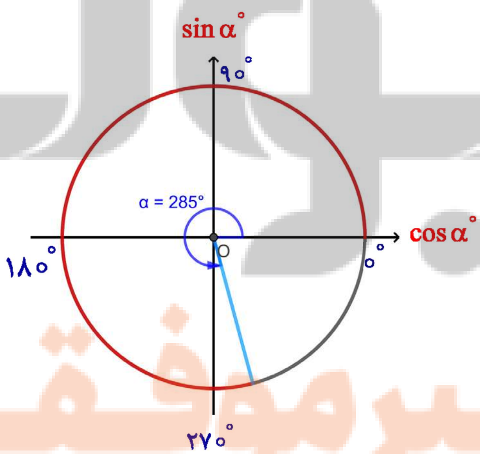
۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

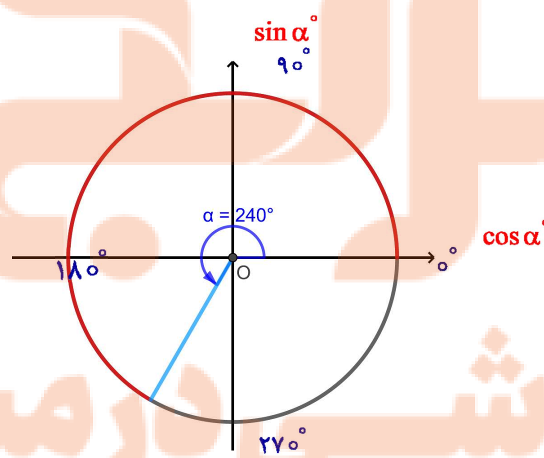


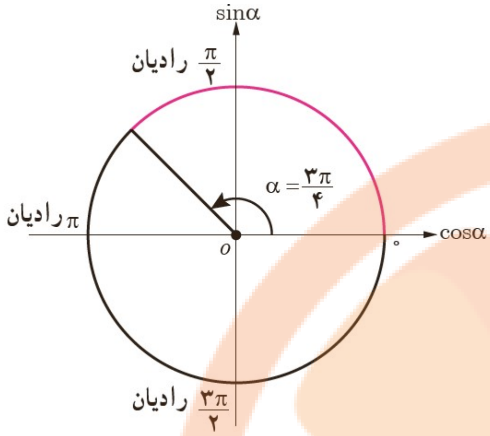
علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\tan\alpha > ۰$	ربع اول	۷۵°
$\sin\alpha > ۰$	ربع دوم	۱۵۰°
$\cos\alpha < ۰$	ربع سوم	۲۱۰°
$\cot\alpha > ۰$	ربع سوم	۲۴۰°
$\tan\alpha < ۰$	ربع چهارم	۲۸۵°











علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha < ۰$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha > ۰$	ربع دوم	$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha < ۰$	ربع چهارم	$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha > ۰$	ربع اول	$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha > ۰$	ربع سوم	$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان

$\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$ رادیان بیش تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$\pi - \frac{\pi}{۵} = \frac{۴\pi}{۵}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۵}$ رادیان از π رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان از ۲π رادیان کم تر است پس در ربع چهارم قرار دارد.

$\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۱۲}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار دارد.

$\pi + \frac{\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از π رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار دارد.

۲ اگر $\sin\alpha = \frac{-۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \xrightarrow{\cos\alpha < ۰} \cos\alpha = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{-۱}{۳}}{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}} \longrightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{-۱}{۳}} \longrightarrow \cot\alpha = ۲\sqrt{۲}$$

۳ اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha > ۰$ و $\cot\alpha < ۰$ لذا انتهای کمان α در ربع چهارم واقع است. بنابراین :

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha} = ۱+\cot^۲\alpha = ۵ \longrightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۵} \longrightarrow \sin\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha = \frac{۴}{۵} \longrightarrow \cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha = \frac{-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

حل : چون $\cos x < ۰$ و $\sin x > ۰$ لذا انتهای کمان x در ربع دوم واقع است . بنا بر این :

$$\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x \longrightarrow \sin^۲ x = ۱-\frac{۱۶}{۲۵} \longrightarrow \sin^۲ x = \frac{۹}{۲۵} \longrightarrow \sin x = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{-۴}{۵}} \longrightarrow \tan x = \frac{-۳}{۴}$$

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} \longrightarrow \cot x = \frac{-۴}{۳}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α / نسبت	۰ رادیان = ۰°	$\frac{\pi}{۶}$ رادیان = ۳۰°	$\frac{\pi}{۴}$ رادیان = ۴۵°	$\frac{\pi}{۳}$ رادیان = ۶۰°	$\frac{\pi}{۲}$ رادیان = ۹۰°	π رادیان = ۱۸۰°	$\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان = ۲۷۰°	۲π رادیان = ۳۶۰°
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

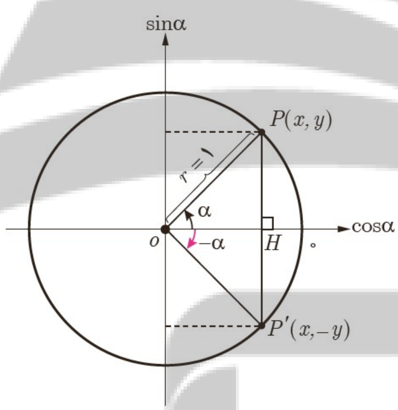
ب) $\frac{\tan^{2}(\frac{\pi}{6})+\sin^{2}(\frac{\pi}{4})}{\cot^{2}(\frac{\pi}{4})-\cos^{2}(\frac{\pi}{3})}+\underbrace{\cos^{2}75^{\circ}+\sin^{2}75^{\circ}}_{1}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+1=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}}+1=\frac{10}{9}+1=\frac{19}{9}$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=30^{\circ}$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -30° در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

$$\sin(-30^{\circ})=\frac{-y}{r}=-\sin 30^{\circ}=\frac{-1}{2}$$

$$\cos(-30^{\circ})=\frac{x}{r}=\cos(30^{\circ})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30^{\circ})=\frac{-y}{x}=-\tan(30^{\circ})=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

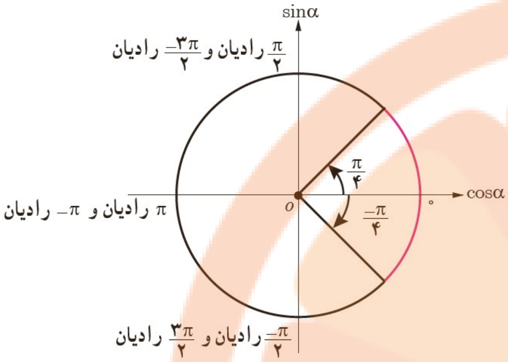
$$\cot(-30^{\circ})=\frac{x}{-y}=-\cot(30^{\circ})=-\sqrt{3}$$

در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{4}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.



$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\cot(-\frac{\pi}{4}) = -\cot(\frac{\pi}{4}) = -1$$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{3})\times\cos(\frac{-\pi}{6}) + \tan(\frac{-\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$$

الف) $\frac{\cos(-90^\circ)+\sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ)-\cos(-360^\circ)} = \frac{\cos 90^\circ - \sin 270^\circ}{-\sin 180^\circ - \cos 360^\circ} = \frac{0-(-1)}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{6}) + \tan(\frac{-\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{6}) - \tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

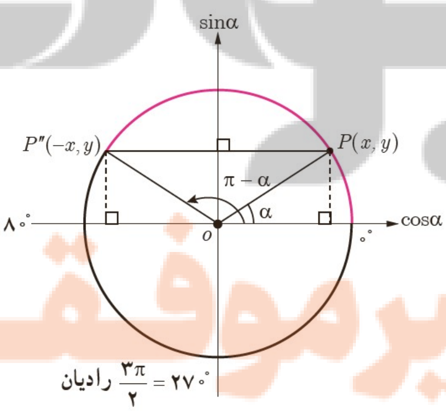
پ) $\cos(-45^\circ)\times\cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ)\times\sin(-60^\circ) = \cos(45^\circ)\times\cos(60^\circ) + (-\sin(45^\circ))\times(-\sin(60^\circ))$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ 30° و 150° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ 150° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 150° عبارت‌اند از :



$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$

$$\cot 150^\circ = \frac{\cos 150^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

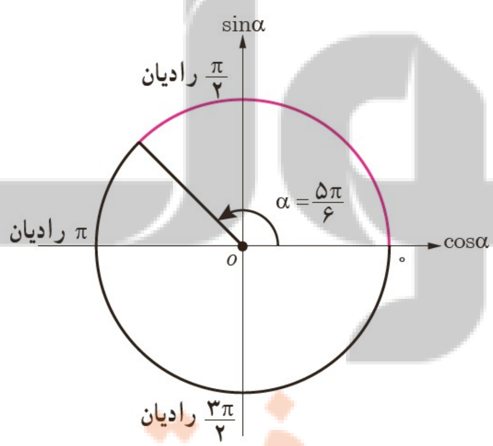
الف) ۷۵° — $۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$ — مکمل زاویه ۷۵° ، زاویهٔ ۱۰۵° است.

ب) -۲۵° — $۱۸۰^\circ-(-۲۵^\circ)=۲۰۵^\circ$ — مکمل زاویه -۲۵° ، زاویهٔ ۲۰۵° است.

پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان — $\pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ — مکمل زاویه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ رادیان است.

ت) $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان — $\pi-(\frac{-\pi}{۴})=\frac{۵\pi}{۴}$ — مکمل زاویه $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان است.

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(-۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-(-\cot۶۰^\circ)=\sqrt{۳}$$

$$\cos(۱۳۵^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cos۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.

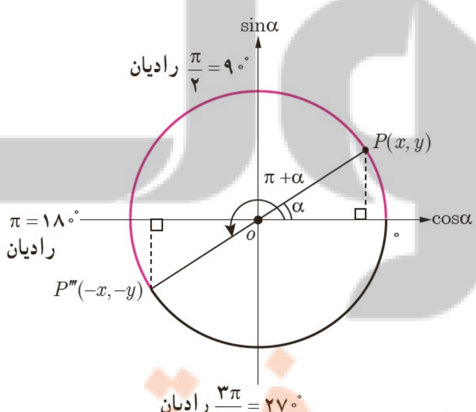
انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-y=-\sin۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-x=-\cos۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\frac{۱}{\tan ۲۱۰^\circ}=\sqrt{۳}=\cot ۳۰^\circ$$



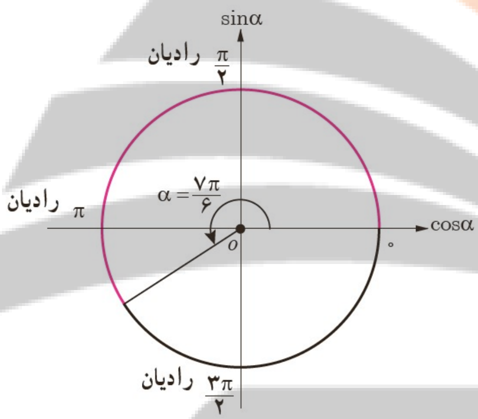
قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۶} = \cos(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۷\pi}{۶} = \tan(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۶} = \cot(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cos(\frac{-۴\pi}{۳}) = \cos(\frac{۴\pi}{۳}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) = -\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -(-\sin(\frac{\pi}{۶})) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = \cot(\pi+\frac{\pi}{۴}) = \cot(\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت

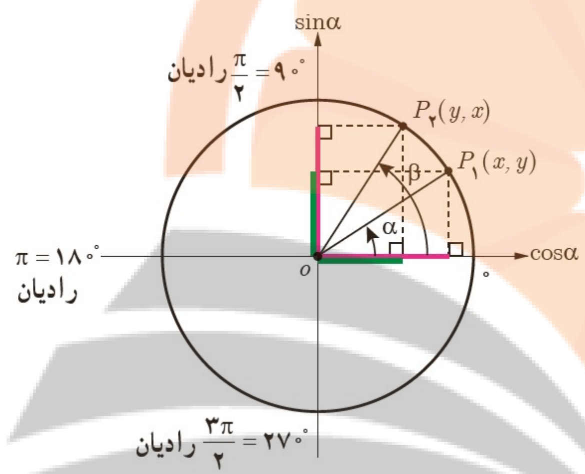
دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۶۰^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :

$$\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$



زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

$\sin \frac{\pi}{۴} = \cos \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\tan \frac{\pi}{۴} = \cot \frac{\pi}{۴} = ۱$ $\tan ۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ = ۱$

همچنین زاویه ....۰. و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \cos ۰ = ۱$$

$\tan\frac{\pi}{۲} = \cot ۰ =$ تعریف نشده

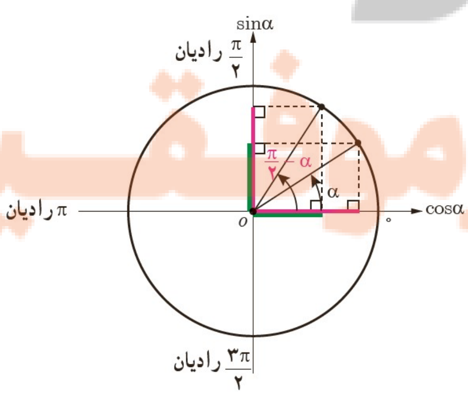
در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$



تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر : یکی با

$\sin\alpha=\cos\beta \qquad , \qquad \tan\alpha=\cot\beta$

$\cos\alpha=\sin\beta \qquad , \qquad \cot\alpha=\tan\beta$

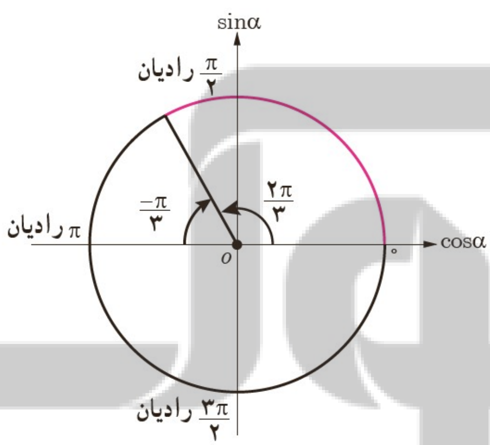
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول ـ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$. بنابراین :



$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

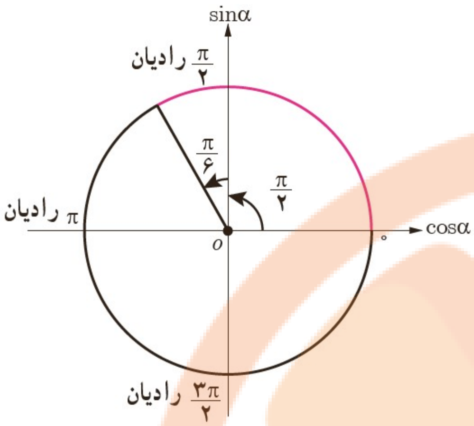
$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cot\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

روش دوم ـ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$

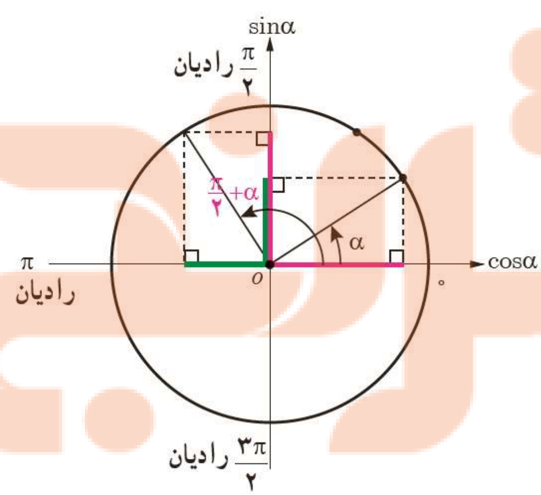
$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\cot(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

یا به عبارتی $\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}+(-\frac{\pi}{۶})$ پس $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $-\frac{\pi}{۶}$ متمم هم هستند. با توجه قانون نسبت های مثلثاتی برای دو زاویهٔ متمم داریم :

$$\begin{cases}\sin\frac{۲\pi}{۳}=\cos(-\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}\\ \cos\frac{۲\pi}{۳}=\sin(-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}\end{cases},\quad \begin{cases}\tan\frac{۲\pi}{۳}=\cot(-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}\\ \cot\frac{۲\pi}{۳}=\tan(-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

ازطرفی با توجه به تساوی $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}$ به جای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مقدار مساوی آن یعنی $(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})$رادیان را قرار دهیم .

در حالت کلی :



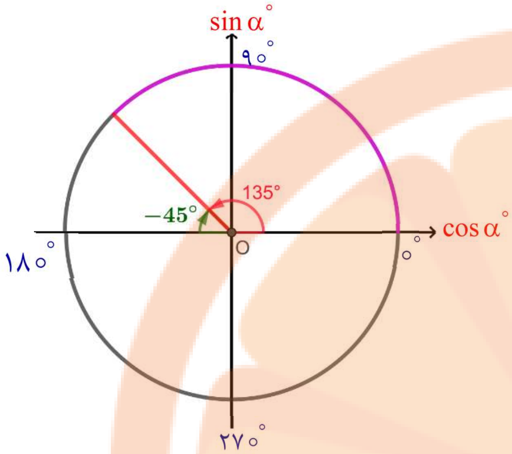
$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

کار در کلاس



نسبت‌های مثلثاتی زاویه °۱۳۵ را به دو روش به‌دست آورید.

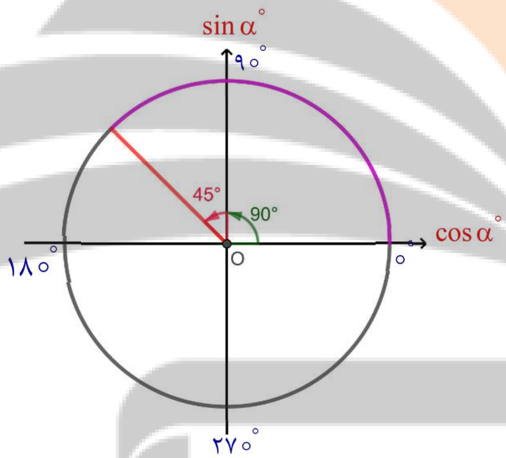
راه اول :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$



راه دوم :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

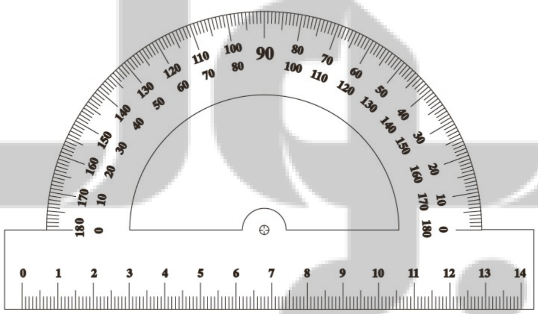
$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

کار در کلاس

به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :



۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟

(مثلاً $\sin ۱۰^\circ = \sin ۱۷۰^\circ$)

می دانیم زاویه های مکمل دارای سینوس های برابر هستند.

بنا براین داریم :

$\sin ۲۰^\circ = \sin ۱۶۰^\circ$, $\sin ۳۰^\circ = \sin ۱۵۰^\circ$

$\sin ۴۰^\circ = \sin ۱۴۰^\circ$, $\sin ۵۰^\circ = \sin ۱۳۰^\circ$

$\sin ۶۰^\circ = \sin ۱۲۰^\circ$, $\sin ۷۰^\circ = \sin ۱۱۰^\circ$

$\sin ۸۰^\circ = \sin ۱۰۰^\circ$

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان $= ۹۰^\circ$ می‌شود؟
نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

به عنوان مثلا می توانیم ۱۲۰° و ۳۰° یا ۱۳۵° و ۴۵° یا ۱۵۰° و ۶۰° اشاره کنیم .

به عنوان مثال می توانیم نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° را به کمک نسبت های مثلثاتی ۶۰° به دست آوریم :

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

خیر نمی توان یافت با توجه به روابطی که برای زوایا مکمل ، متمم و دو زاویه که اختلاف آن ها ۹۰° $(\frac{\pi}{۲})$ باشد ، کسینوس ها برابر نیستند.

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۸۰° را از روی مکمل آن بیابید.

مکمل زاویه ۱۸۰° زاویه ۰° است . بنا براین داریم :

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۸۰^\circ) = \sin ۰^\circ = ۰$$

$$\cos ۱۸۰^\circ = -\cos ۰^\circ = -۱$$

$$\tan ۱۸۰^\circ = -\tan ۰^\circ = ۰$$

$$\cot ۱۸۰^\circ = -\cot ۰^\circ = \text{تعریف نشده}$$

۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را از روی مکمل آن بیابید.

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

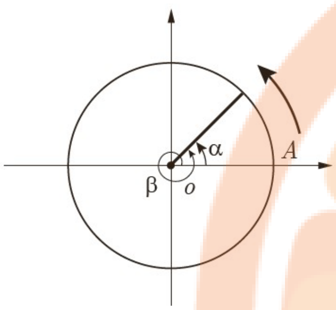
$$\cos ۱۳۵^\circ = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

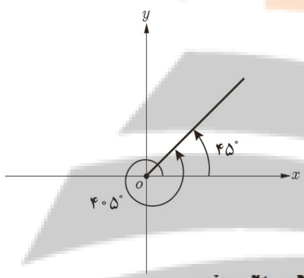
فعالیت



یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی یعنی ۳۶۰° بزرگ‌ترند مانند زاویهٔ ۴۰۵°.

برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازه ۴۵° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه ۴۰۵° و ۴۵° را هم انتها می‌نامیم.

دو زاویهٔ α و β را هم انتها گوییم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل).



اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا ۱۸۰° است. مثلاً زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° هم انتها هستند؛ زیرا $۴۰۵^\circ-۴۵^\circ=۳۶۰^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ ۴۵° در ربع اول است، بنابراین :

$$\sin ۴۰۵^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

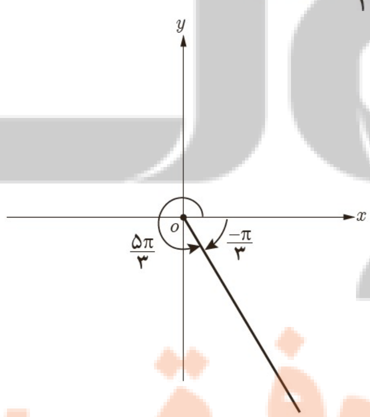
$$\cos ۴۰۵^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۰۵^\circ=\tan(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\tan ۴۵^\circ=۱$$

$$\cot ۴۰۵^\circ=\cot(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\cot ۴۵^\circ=۱$$

حال همین بررسی را روی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ بنابراین

دو زاویه $-\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).



چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین :

$$\sin\frac{۵\pi}{۳}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(\frac{-\pi}{۳})=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۳}=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\tan(-\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۳}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cot(-\frac{\pi}{۳})=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

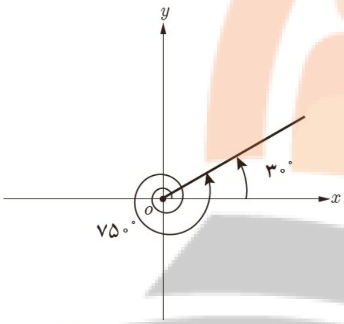
$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

کار در کلاس



مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$\sin ۷۵۰^\circ=\sin(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

$\tan(-۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan۴۵^\circ=-۱$

۱) $\cos ۳۰۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

۲) $\sin ۴۲۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۶۰^\circ)=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\tan(-۲۲۵^\circ)=-\tan(۲۲۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۱۳۵^\circ)=-(-\tan۱۳۵^\circ)=\tan۱۳۵^\circ$
$=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan۴۵^\circ=۱$

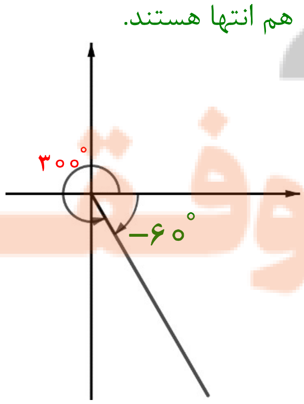
۴) $\cot(-۳۳۰^\circ)=-\cot(۳۳۰^\circ)=-\cot(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)=-(-\cot۳۰^\circ)=\cot۳۰^\circ=\sqrt{۳}$

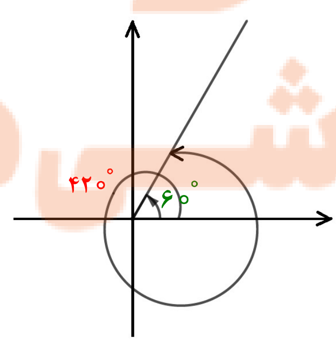
۵) $\sin\frac{۱۱\pi}{۴}=\sin(۲\pi+\frac{۳\pi}{۴})=\sin\frac{۳\pi}{۴}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶) $\cos(\frac{-۷\pi}{۴})=\cos(\frac{۷\pi}{۴})=-\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos(-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

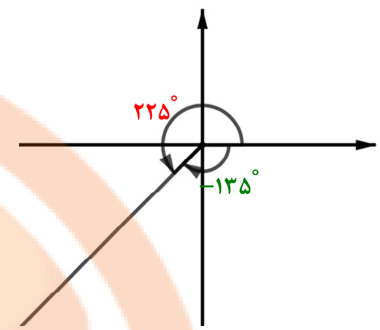
دو زاویه ۶۰° و ۴۲۰° هم انتها هستند.

دو زاویه -۶۰° و ۳۰۰° هم انتها هستند.

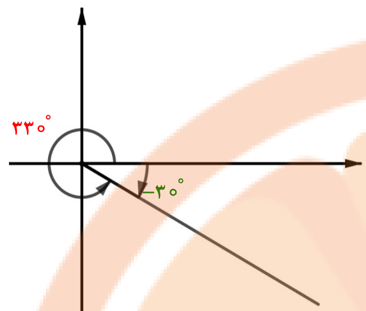




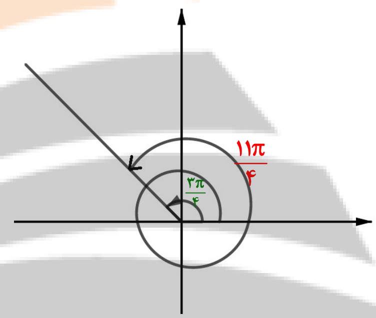
دو زاویه ۲۲۵° و ۱۳۵° هم انتها هستند.



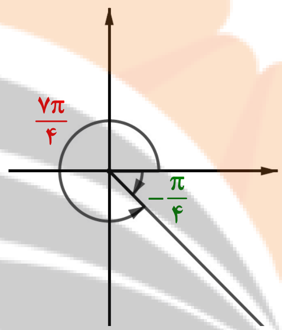
دو زاویه ۳۳۰° و -۳۰° هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۱۱\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۷\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



تمرین

۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan ۴۵^\circ + (-\cot ۶۰^\circ) = -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos ۲۱۰^\circ + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)$

$$= -\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پ) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) = \sin ۶۳۰^\circ - \tan ۵۴۰^\circ = \sin(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ) - \tan(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ)$

$$= -\sin ۹۰^\circ - \tan ۱۸۰^\circ = -۱ + ۰ = -۱$$

ت) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan ۷۲۰^\circ - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

$$= \cos ۷۲۰^\circ - \cot ۶۰۰^\circ + \tan ۷۲۰^\circ + \tan ۶۰۰^\circ$$

$$= \cos(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) - \cot(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ) + \tan(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) + \tan(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ)$$

$$= \cos ۰^\circ - (-\cot ۱۲۰^\circ) + \tan ۰^\circ - \tan ۱۲۰^\circ = \cos ۰^\circ + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \tan ۰^\circ - \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

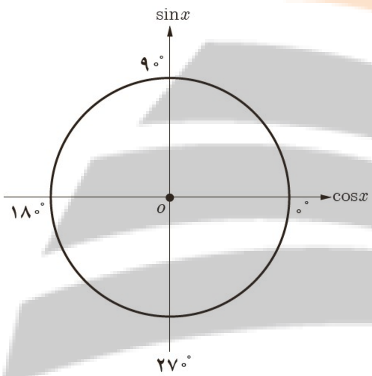
$$= \cos ۰^\circ - \cot ۶۰^\circ + \tan ۰^\circ + \tan ۶۰^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}$$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos(۸\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۳}-\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}$

ج) $$\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴})+\tan(\frac{-۴\pi}{۳})}=\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴})+\tan(-\frac{۴\pi}{۳})}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})}{-\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{-۴-\sqrt{۶}}{۱۰}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید :



نسبت / زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ=\sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)=\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

$\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۲۴^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۳۶^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

$\tan(-۱۰۰۰^\circ)=-\tan ۱۰۰۰^\circ=-\tan(۳\times ۳۶۰^\circ-۸۰^\circ)=-(-\tan ۸۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ=\sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۵۵^\circ)=\sin ۱۵۵^\circ$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم انتها هستند. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف هر دو زاویهٔ ارائه شده در هر قسمت مضربی از ۲π رادیان یا ۳۶۰° است : $۸۷۵^\circ-۱۵۵^\circ=۷۲۰^\circ=۲\times ۳۶۰^\circ$

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

الف) $\sin x=\cos(۲۰^\circ+x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم : $x+۲۰^\circ+x=۹۰^\circ \Rightarrow x=۳۵^\circ$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{۱۸})=\cot(\frac{۲\pi}{۹}+x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم : $x+\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۲\pi}{۹}+x=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۹}$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

با توجه به نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم ، می توانیم زوایای فوق را به دست آوریم اما برای یکتایی پاسخ ارائه شده می توانیم توضیح دهیم که می توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی های فوق صدق کنند کافی است مضارب ۲π رادیان یا ۳۶۰° را به این زوایا اضافه کنیم مثلاً : برای قسمت(الف) $x=۳۹۵^\circ$ یا برای قسمت (ب) $x=\frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز قابل قبول هستند.

درس سوم

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

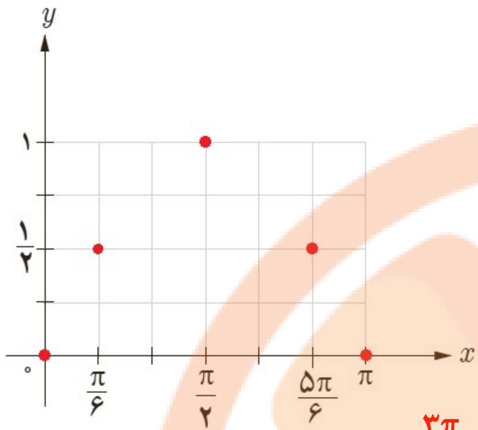
فعالیت

۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(۰,۰)$	۰	۰
$(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$
$(\frac{\pi}{۲},۱)$	۱	$\frac{\pi}{۲}$
$(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$(\pi,۰)$	۰	π

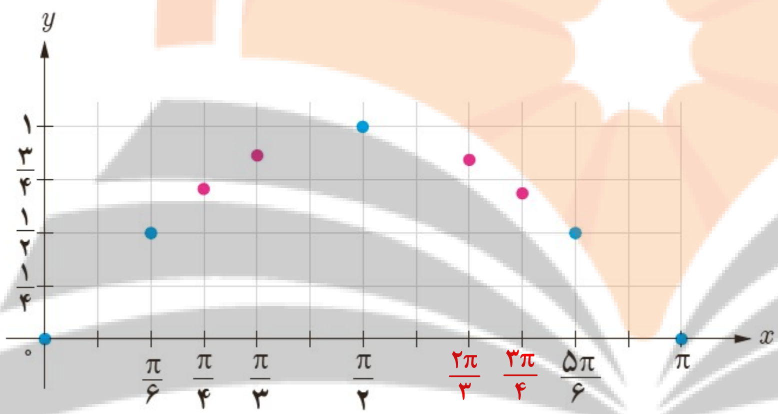
مجموعهٔ زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\pi,۰)\right\}$$

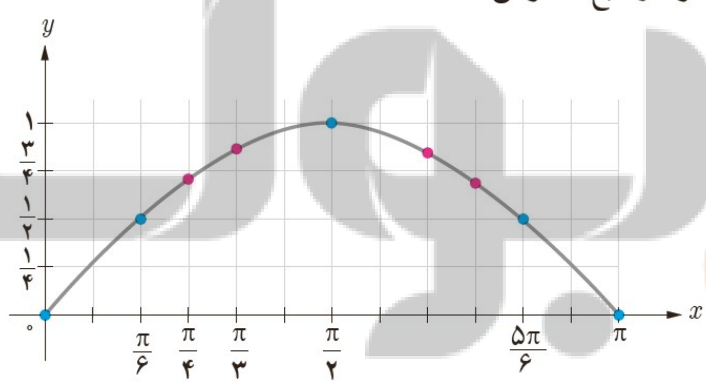


۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.

۳ با افزودن نقاط $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{\pi}{۴})$، $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{\pi}{۳})$، $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{۲\pi}{۳})$ و $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴})$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$)



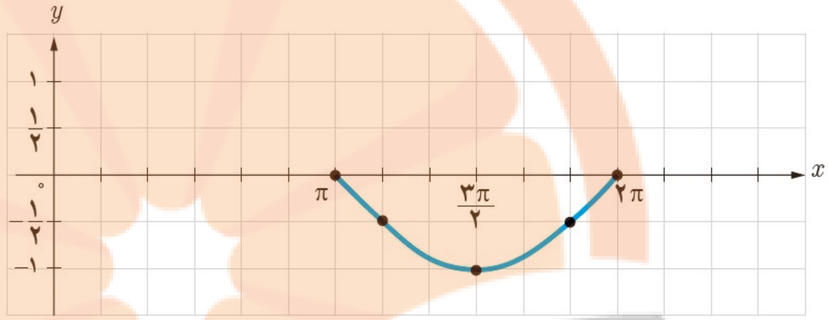
۴ نقاط حاصل در شکل را به‌ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[۰, \pi]$ این شکل به‌طور دقیق‌تری به‌دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطهٔ $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



۵ مراحل صفحهٔ قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ [π و ۲π] انجام دهید.

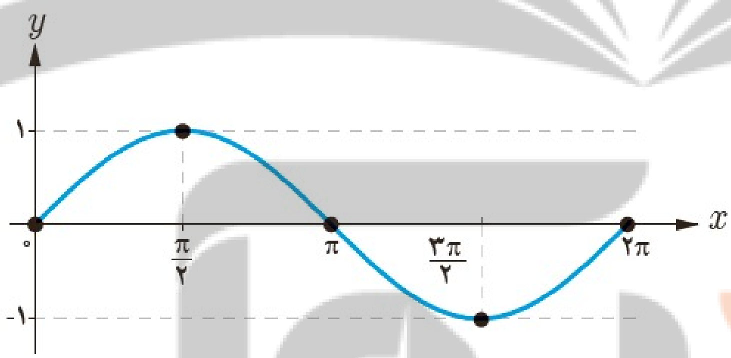
برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به‌دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

x	$y=\sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi,۰)$
$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۷\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	$(\frac{۳\pi}{۲},-۱)$
$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۱۱\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$
۲π	۰...	$(۲\pi,۰)$



۶ با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x$ در بازه [۰ و ۲π] در شکل زیر رسم شده است.

حال با توجه به این شکل جدول زیر را دربارهٔ مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱-کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۱- به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است .	مقدار تابع در ربع سوم منفی است .	مقدار تابع در ربع چهارم منفی است .

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+۲k\pi)=\sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت:

$$\sin(x+۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی‌کند

بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های [۰ و ۲π] و [۲π , ۴π] یکسان است.

همچنین داریم :

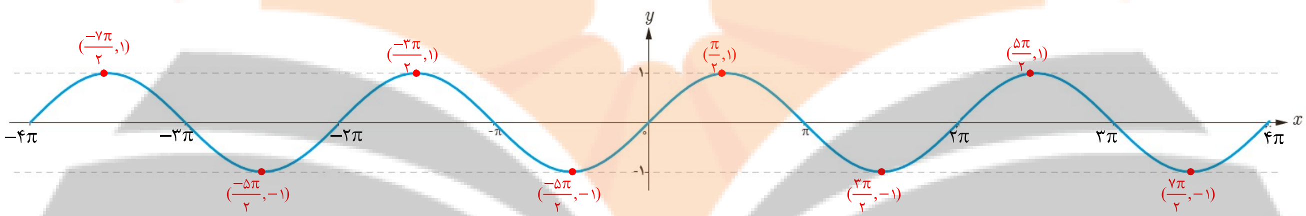
$$\sin(x-۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰\ ,\ ۲\pi]$ و $[-۲\pi,۰]$ یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۲k\pi\ ,\ (۲k+۲)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[۰\ ,\ ۲\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[۲\pi\ ,\ ۴\pi]$، $[۴\pi\ ,\ ۶\pi]$، $[-۲\pi\ ,\ ۰]$، $[-۴\pi\ ,\ -۲\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,۱]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۵\pi}{۲}$، $x=\frac{-۳\pi}{۲}$، $x=\frac{-۷\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

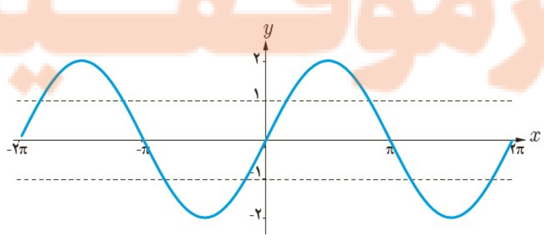
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با -۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=\frac{۷\pi}{۲}$، $x=\frac{-\pi}{۲}$، $x=\frac{-۵\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱ $y=۲\sin x$

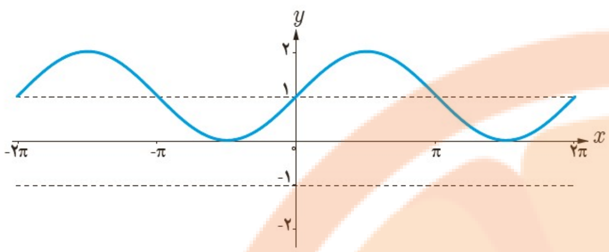
برای رسم نمودار این تابع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چون برد تابع بازهٔ $[-۲,۲]$ است، کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم. نمودار حاصل در بازهٔ $[-۲\pi,۰]$ نیز تکرار می شود. و شکل مقابل به دست می آید.



(الف)

۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$

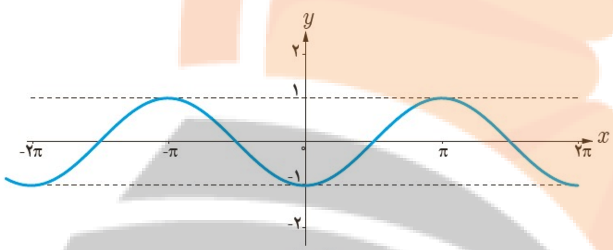
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ یک واحددر جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.



(ب)

۳ $y=\sin x+۱$

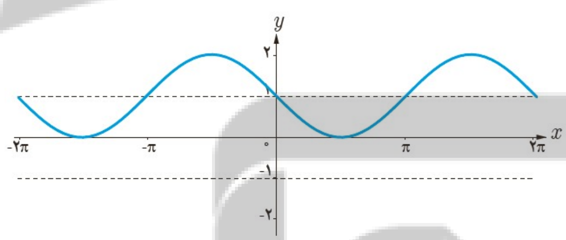
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ واحددر جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.



(پ)

۴ $y=-\sin x+۱$

برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.



(ت)

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

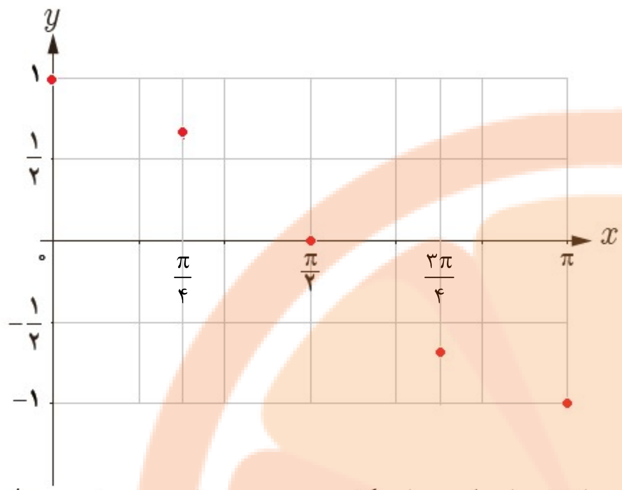
x	$y=\cos x$	مختصات نقطه
۰	۱	(۰,۱)
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq ۰/۷$	$(\frac{\pi}{۴},۰/۷)$
$\frac{\pi}{۲}$	۰	$(\frac{\pi}{۲},۰)$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq -۰/۷$	$(\frac{۳\pi}{۴},-۰/۷)$
π	-۱	$(\pi,-۱)$

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$f=\{(۰,۱),(\frac{\pi}{۴},۰/۷),(\frac{\pi}{۲},۰),(\frac{۳\pi}{۴},-۰/۷),(\pi,-۱)\}$

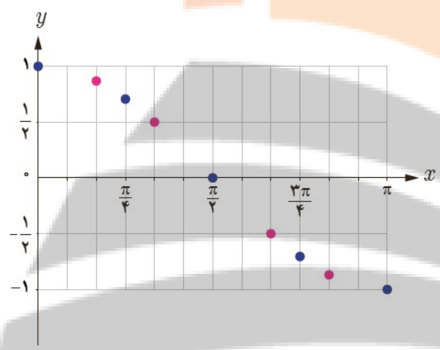
آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

بله یک تابع را مشخص می کند.



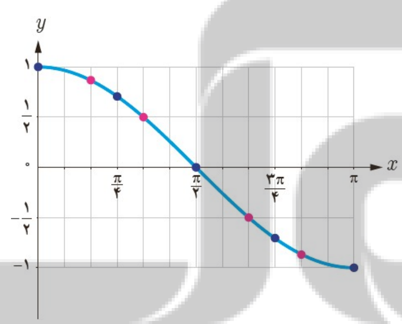
۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

۳ نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{3}\simeq 1/7$).

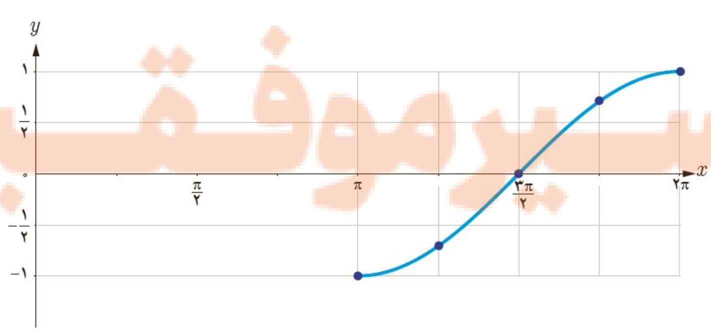


x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y=\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید.
این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[\circ\,,\pi]$ مشخص می‌کند.

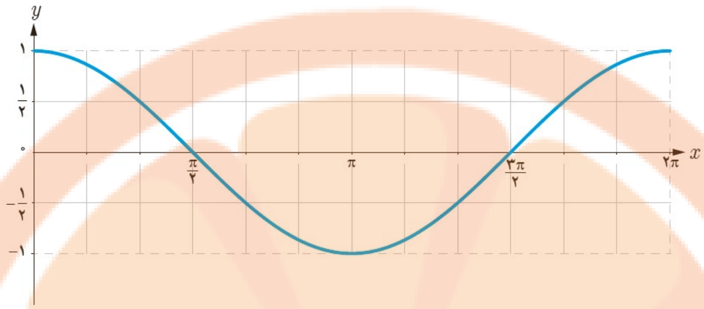


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.



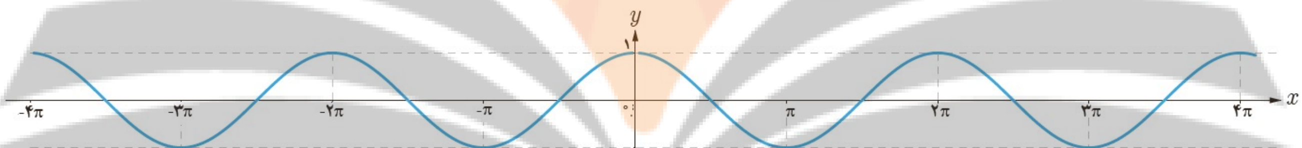
x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$	$[\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲}, \pi]$	$[۰, \frac{\pi}{۲}]$
مقدارتابع از ۰ به ۱ افزایش می یابد.	مقدارتابع از ۱- به ۰ افزایش می	مقدارتابع از ۰ به ۱- کاهش می یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.
مقدارتابع در ربع چهارم مثبت است.	مقدارتابع در ربع سوم منفی است.	مقدارتابع در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[۰, ۲\pi]$، $[۲\pi, ۴\pi]$، $[-۲\pi, ۰]$ و $[-۴\pi, -۲\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[۰, ۴\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس ... R ... و برد آن ... $[-۱,۱]$ ... است.

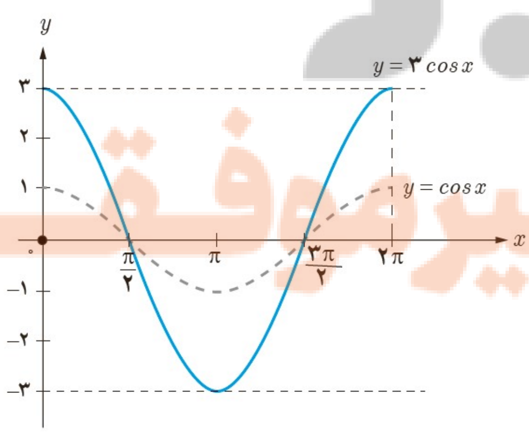
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های ... $x=\frac{k\pi}{۲}$ ... برابر با صفر است. $(k \in \mathbb{Z})$

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ... ۱ ... است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

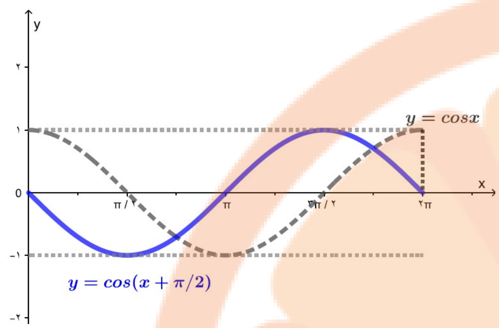
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ... ۱- ... است که در طول‌های $x=(۲k+۱)\pi$ به‌دست می‌آید. $(k \in \mathbb{Z})$

کار در کلاس

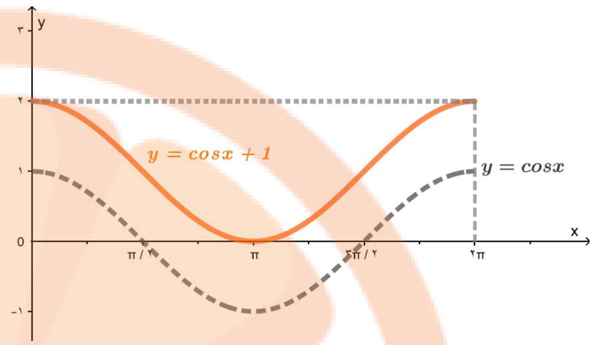
شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



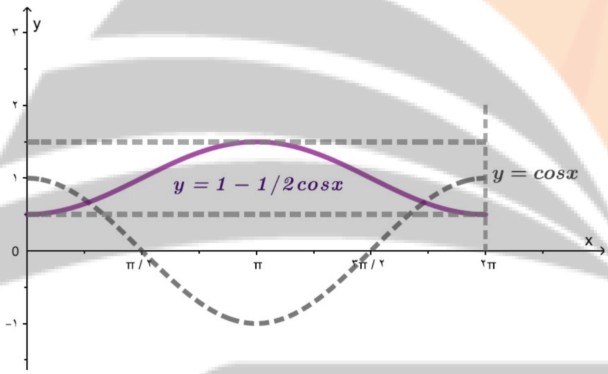
۱ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$



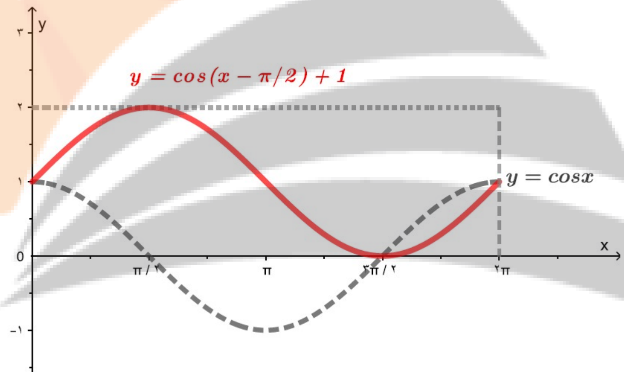
۲ $y=\cos x-۱$



۳ $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$



۴ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$



تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x \quad , \quad y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند. $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x))=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$

۲) $y=\cos x \quad , \quad y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند. $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$

۳) $y=\cos x \quad , \quad y=\cos(۲\pi-x)$

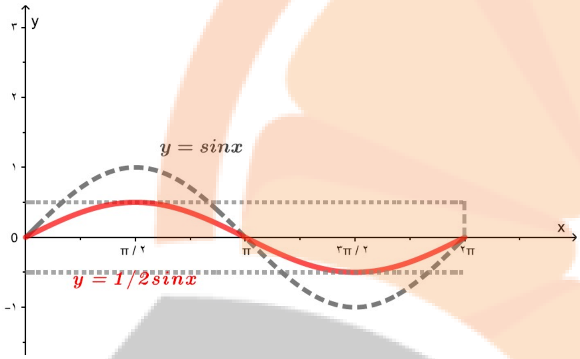
بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند. $y=\cos(۲\pi-x)=\cos x$

۴) $y=\sin x \quad , \quad y=\sin(۵\pi-x)$

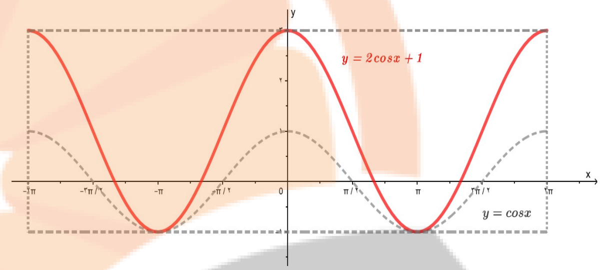
$y=\sin(۵\pi-x)=\sin(۴\pi+\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$ این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

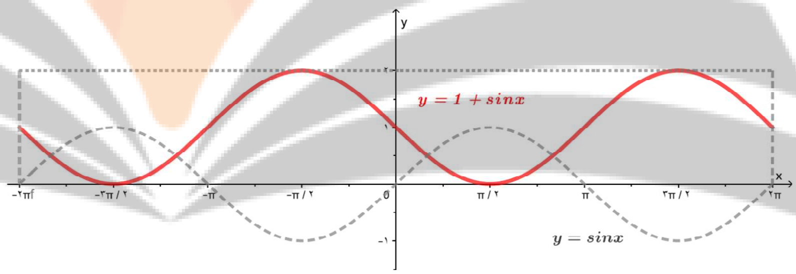
۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad [۰,۲\pi]$



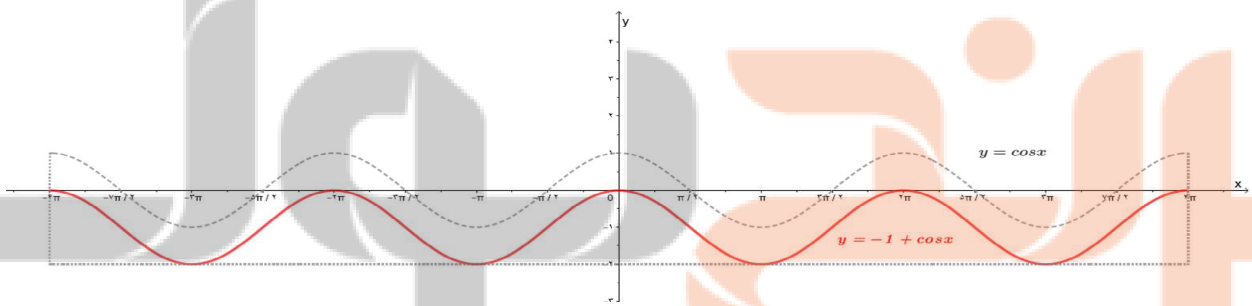
۲) $y=۲\cos x+۱ \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



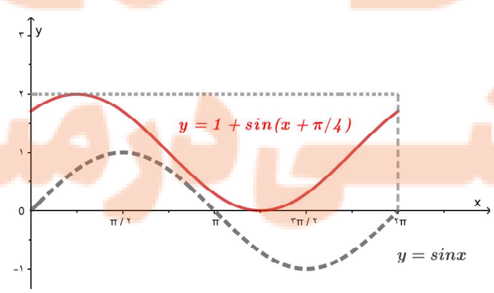
۳) $y=۱-\sin x \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



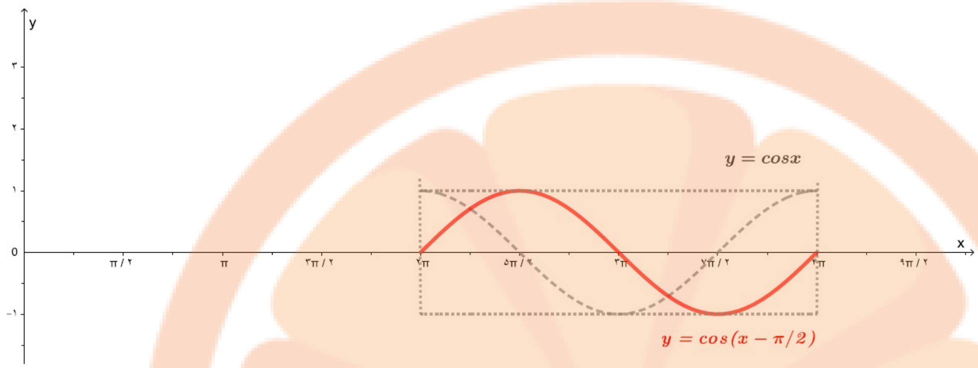
۴) $y=-۱+\cos x \quad , \quad [-۴\pi,۴\pi]$



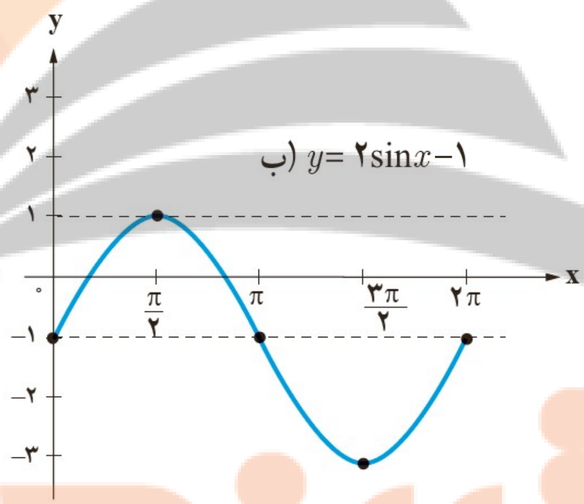
۵) $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \quad , \quad [۰,۲\pi]$

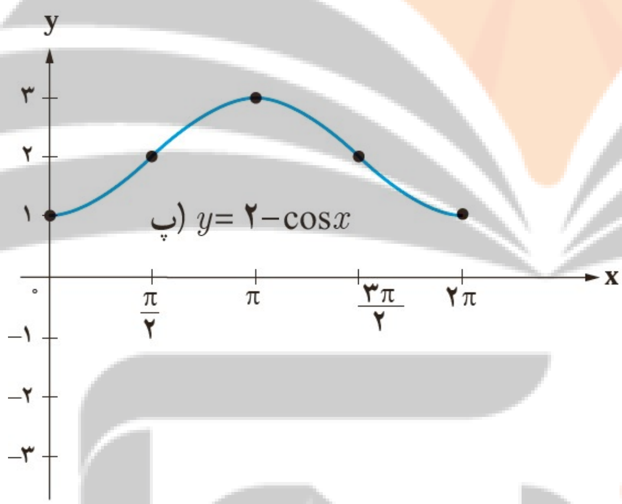


۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$, $[۲\pi,۴\pi]$



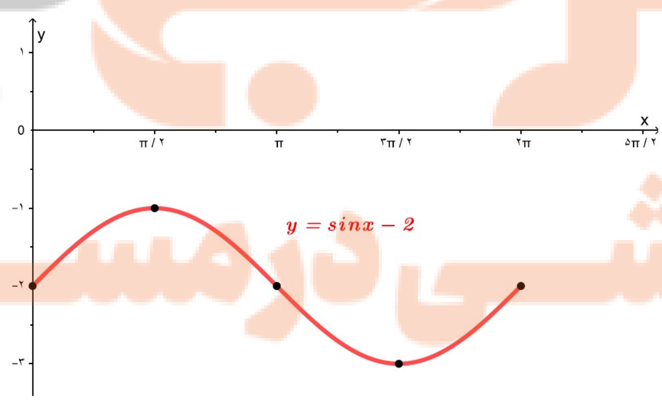
۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام‌یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

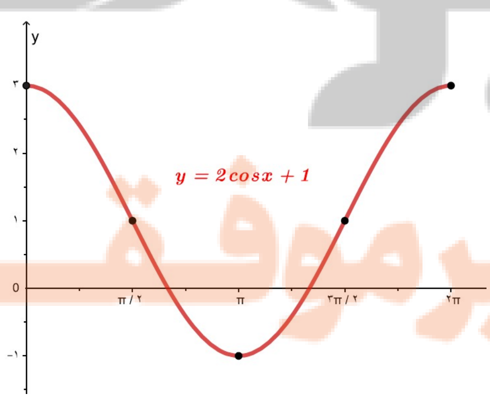




ت) $y=\sin x-۲$

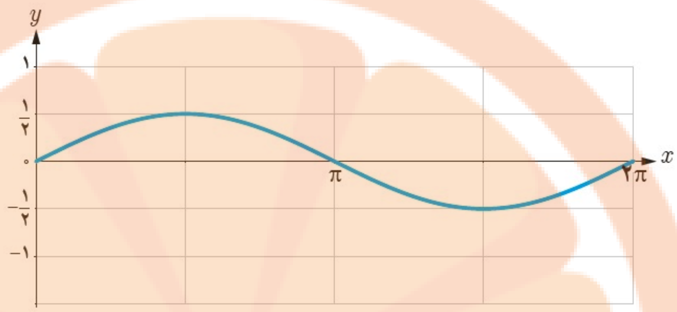
الف) $y=۲\cos x+۱$





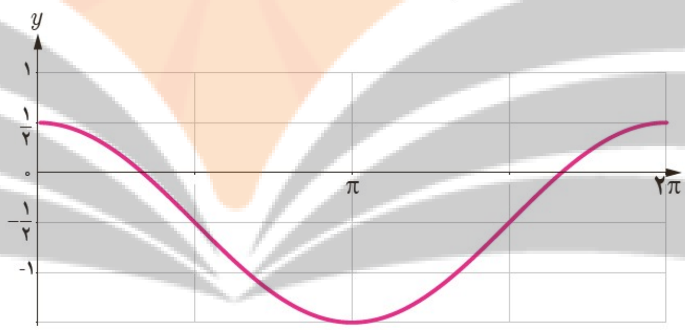
۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{2}\sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است . در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{1}{2}$ را نشان می‌دهد.



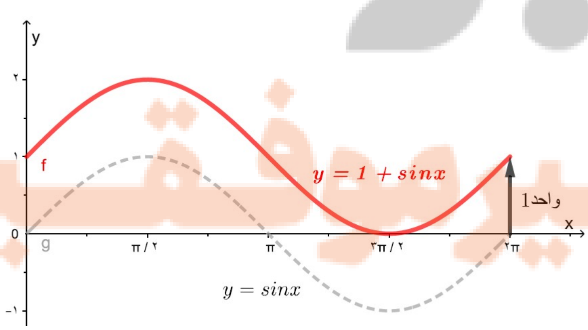
درست است نمودارتابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.

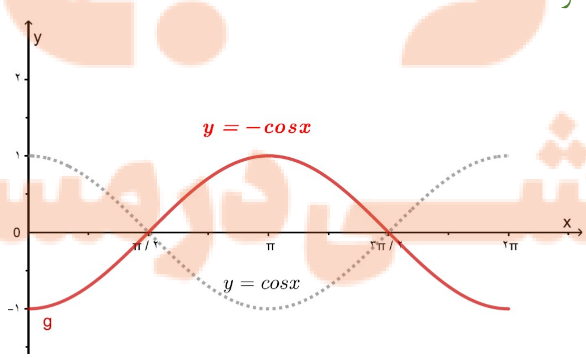
پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=1+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد به موازات محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

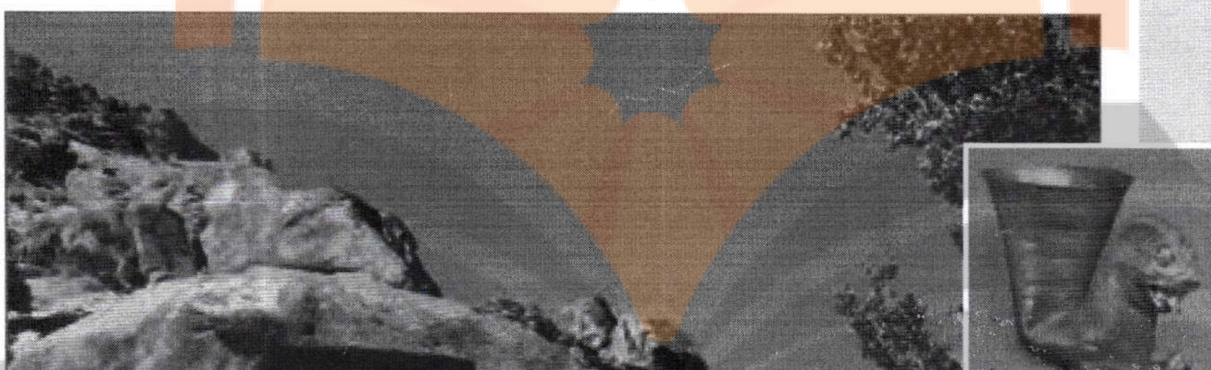
ت) درست است .





فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی



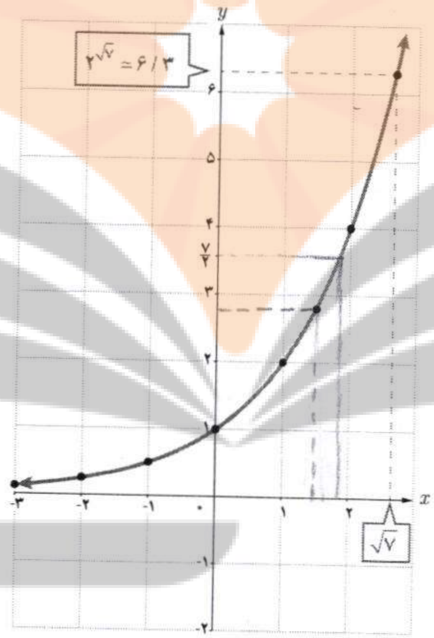
[redacted]

> هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>۰$, $a\neq ۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=۲^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟ ۱

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=(۰,+\infty)$

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟ بله زیرا هر خط موازی محور x ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. ۲٫۸

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $\frac{۷}{۲}\simeq ۲^a$. $a\simeq ۱٫۹$

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

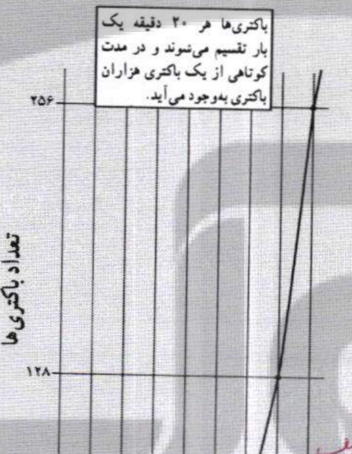
$۲^{-۱}$, $۲^{-۰/۴}$, $۲^{۵}$, $۲^{۰/۳}$, $۲^{\frac{۵}{۲}}$, $۲^{\frac{۳}{۲}}$, $۲^{\sqrt{۵}}$

$۲^{-۱} < ۲^{-۰/۴} < ۲^{۰/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟ $x<y \rightarrow ۲^x < ۲^y$

خواندنی

بیشتر باکتری‌ها در فاصلهٔ ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و قادر به تولیدمثل می‌شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به‌وجود می‌آید و به همین ترتیب تعداد باکتری‌ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ... می‌رسد. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به‌وجود خواهد آمد! باکتری‌ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول‌های بدن، باعث بیماری می‌شوند و به بدن آسیب می‌رسانند.



باکتری سل

خواندنی

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه $\boxed{x^y}$ (یا y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبهٔ 2^5، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمهٔ $\boxed{x^y}$ و بعد عدد ۵ و سپس دکمهٔ تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: دربرخی از ماشین حساب‌ها به‌جای دکمهٔ x^y، نمادی به صورت $\boxed{\wedge}$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$\boxed{2} \to \boxed{x^y} \to \boxed{(} \to \boxed{2} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \to \boxed{2/6}$

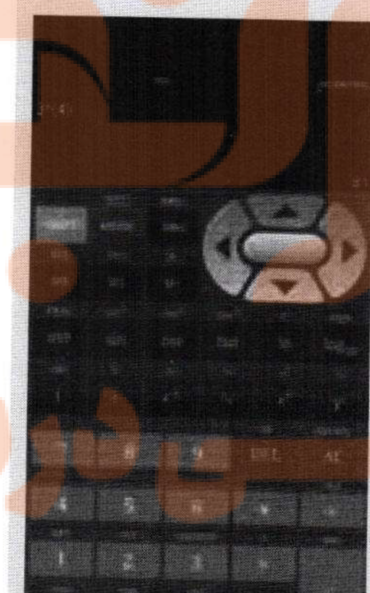
۱) $2^{\sqrt{2}}$

۲) $2^{\sqrt{8}}$

۳) $2^{0/1}$

۴) $2^{-0/5}$

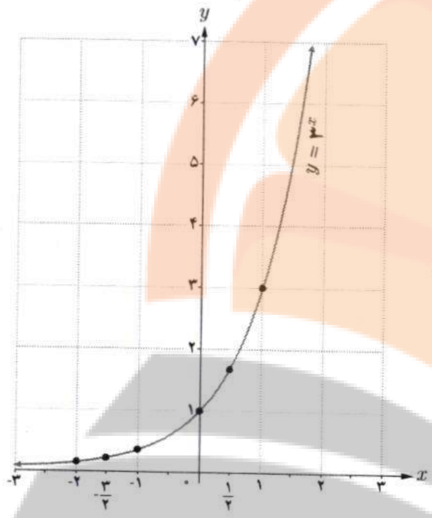
۵) $2^{(1+\sqrt{3})}$



کار در کلاس

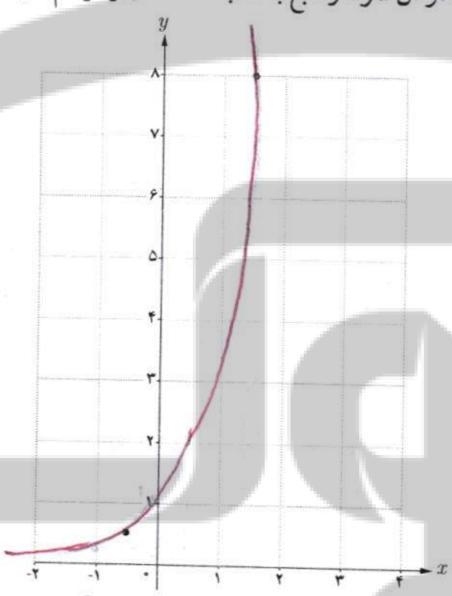
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

x	$y=3^x$
-2	۰/۱۱
$-\frac{3}{2}$	۰/۱۹
-1	۰/۳۳
۰	۱
$\frac{1}{2}$	۱/۷۳
۱	۳



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4^x$ را رسم کنید.

x	$y=4^x$
......-1	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۰	......۱
$\frac{1}{2}$	......۲
$\frac{3}{2}$	۸



۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. دامنه این توابع $\mathbb{R}$ و بردشان $(0,+\infty)$

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5}$ > $3^{\frac{7}{3}}$

ب) $4^{\sqrt{7}}$ > $4^{\sqrt{5}}$

۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

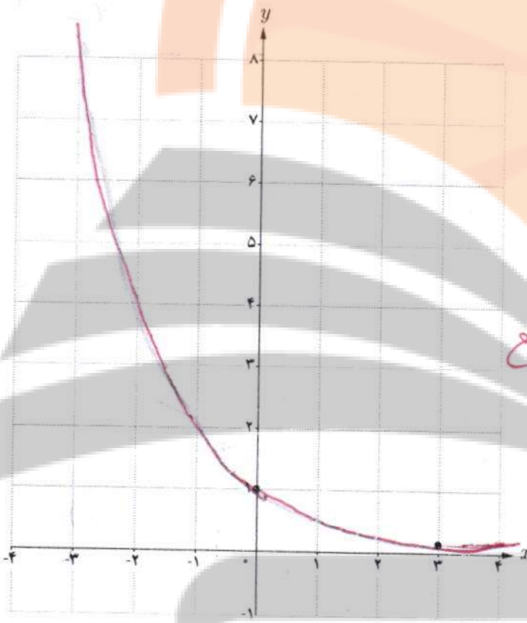
الف) 3^x < 3^y

ب) 4^x < 4^y

فعالیت

۱) با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	8	4	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲) محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

$A(0, 1)$

۳) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D=(0, \infty)$ برد $R=\mathbb{R}$

۴) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

بله زیرا هرخط موازی محور xها را حداکثر دریک نقطه قطع می‌کند

۵) با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{1}{2})^{1/5} > (\frac{1}{2})^{0/5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{4} > (\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}$ پ) $(\frac{1}{2})^{3} < (\frac{1}{2})^{4}$

۶) با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^y$ و $(\frac{1}{2})^x$ وجود دارد؟ $(\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^y$

خواندنی

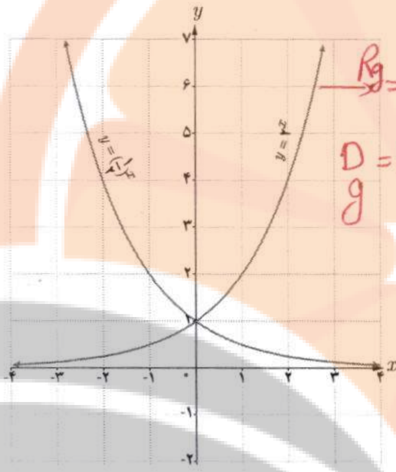
با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور،ضابطهٔ تابع را حروف‌چینی کرده وکلید Enter را بزنید. در پنجرهٔ گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ محور y ها



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=2^x$ به تابع با ضابطهٔ $y=2^{-x}$ یا همان $y=(\frac{1}{2})^x$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ دامنه 2^x همان برد 2^{-x} و برد 2^x همان دامنه 2^{-x} است

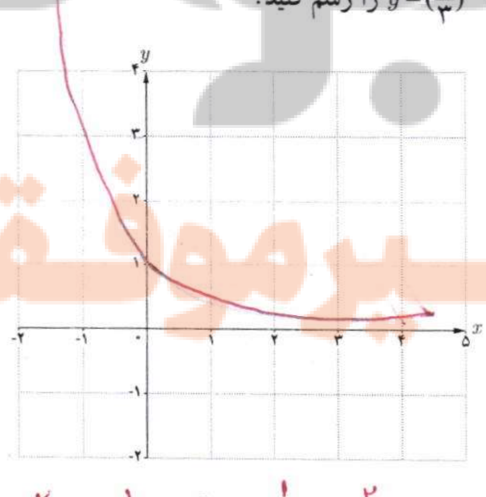
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید.

$y=4^x \qquad y=(\frac{1}{4})^x$

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>0$ و $a\neq1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



x	-2	-1	0	1	2
$(\frac{1}{3})^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

خواندنی

یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی‌گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانیم در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی‌گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$A=100\left[1-(0/9)^t\right]$$

سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰۰ سال

فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

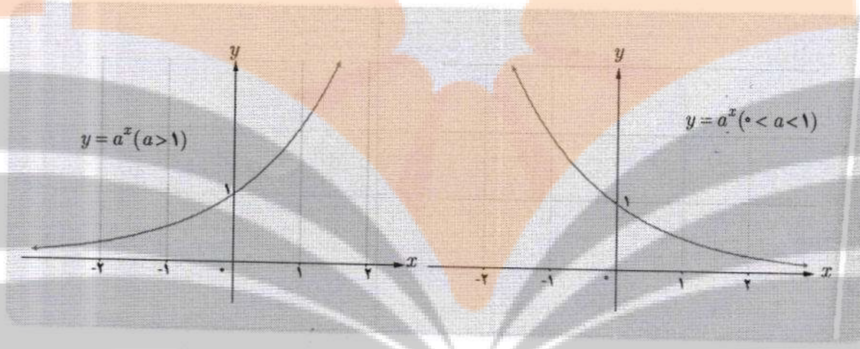
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>۱$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(۰,+\infty)$ است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($۰<a<۱$) IR و برد آن بازهٔ $(۰ , +\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ یک قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک هستند زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \rightarrow ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \rightarrow ۲x-۳=۴ \rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \rightarrow (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \rightarrow ۴x-۲=۳x+۳ \rightarrow x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \rightarrow ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \rightarrow ۳n-۱=۶n+۳ \rightarrow n=-\frac{۴}{۳}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=۲x^۲-۳x+۱$ ✗ ب) $y=x^۳$ ✗ پ) $y=(۰/۱)^x$ ✓

ت) $y=(\frac{۳}{۲})^x$ ✓ ث) $y-۳x=۲$ ✗ ج) $y=\sqrt{x-۱}$ ✗

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ قرار دارند؟

الف) $(۱,۰)$ ✗ ب) $(۳,۱)$ ✗ پ) $(۰,۱)$ ✓ ت) $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ ✗ ث) $(۱,۳)$ ✓ ج) $(-۱,\frac{۱}{۳})$ ✓

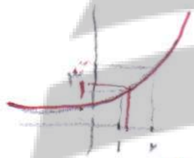
۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\sqrt{۵},\frac{۱}{۲})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۵^x$ قرار دارد. ✓

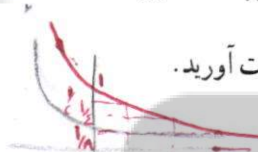
ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱۰^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۱۰)$ است. ✗

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=x^۲$ مساوی‌اند. ✓

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۶^x$ با محور xها، نقطهٔ $(۶,۰)$ است. ✗



۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $۳^{\sqrt{۲}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید. $۴/۷۲۸ \simeq ۴/۸$



ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید. تقریباً $۰/۲۱۲$

۵ فرض کنیم $f(x)=۳^x$ ، $g(x)=(\frac{۱}{۱۶})^x$ و $h(x)=۱۰^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(۳)=۳^۳=۲۷$ ب) $g(-۱)=(\frac{۱}{۱۶})^{-۱}=۱۶$ پ) $h(-۲)=۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۱۰۰}$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲^۲}=۲^{-۱۰} \rightarrow ۳n-۲=-۱۰ \rightarrow n=-\frac{۸}{۳}$

ب) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{y+۱} \rightarrow ۳^{۶y-۶}=۳^{۳y+۳}$ ، $۳y=۹ \rightarrow y=۳$

پ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^۳} \rightarrow ۲^{۶x+۴}=۲^{-۱۸}$ ، $۶x=-۲۲ \rightarrow x=-\frac{۱۱}{۳}$

ت) $۹^x=۳^{x^۲-۴x} \rightarrow ۳^{۲x}=۳^{x^۲-۴x} \rightarrow x^۲-۴x-۲x=۰ \rightarrow x=۰$ و $x=۶$

ث) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=\frac{۲۵}{۹} \rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۳}{۵})^{-۲} \rightarrow x+۱=-۲ \rightarrow x=-۳$

خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزاینده‌ای برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل‌سازی رشدهای سریع استفاده می‌شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می‌شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می‌توان با رابطه $P(x)=۳(۱/۰۱۷)^{x-۱۹۶۰}$ که در آن x نشان‌دهنده سال است، نمایش داد. به کمک این رابطه می‌توان سالی را که در آن جمعیت جهان برابر ۸ میلیارد نفر خواهد شد، تخمین زد.

درس دوم

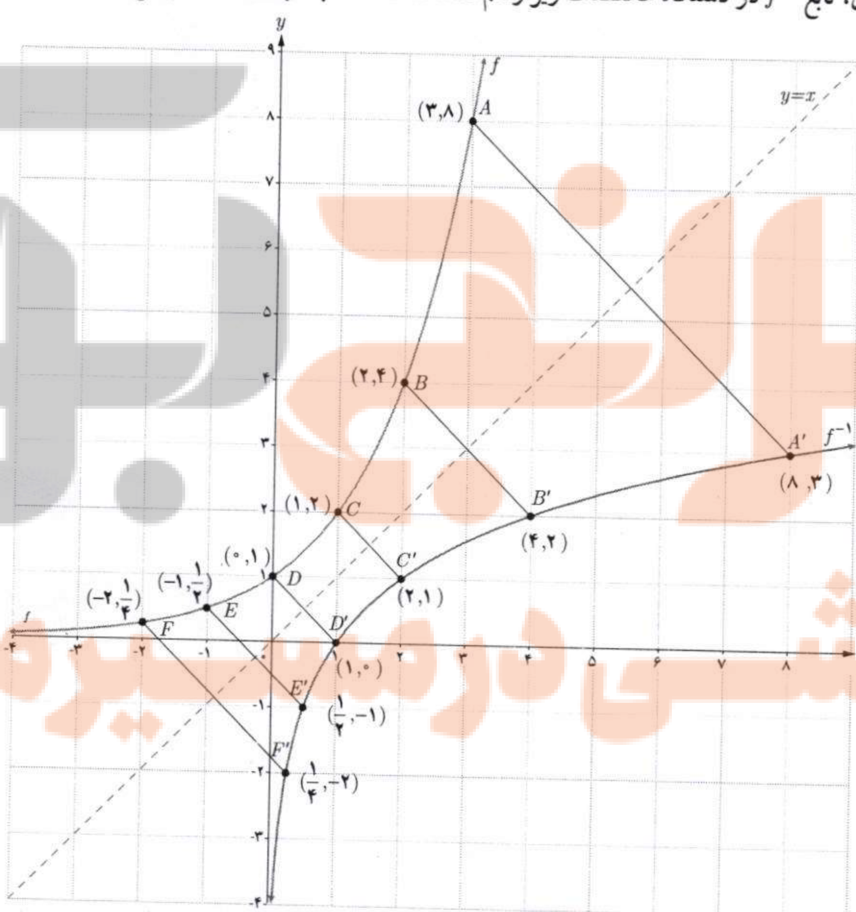
تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و ... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.



خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I_0 شدت صوت مبناست که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است).

$\beta=\log_{I_0} I$

صدا	تراز شدن صوت dB
شدت صوت مبنا	۰
نفس کشیدن	۱۰
برگ درختان در نسیم	۲۰
صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری	۴۰
همهمه در فروشگاه	۶۰
سروصدای خودروها در خیابان شلوغ	۷۰
آستانهٔ دردناکی (برای بسامد 1000 Hz)	۱۲۰
مسلسل	۱۳۰
غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن	۱۴۰
راکت فضایی، در موقع بلند شدن	۱۷۰

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (0, +\infty)$

$D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$, $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

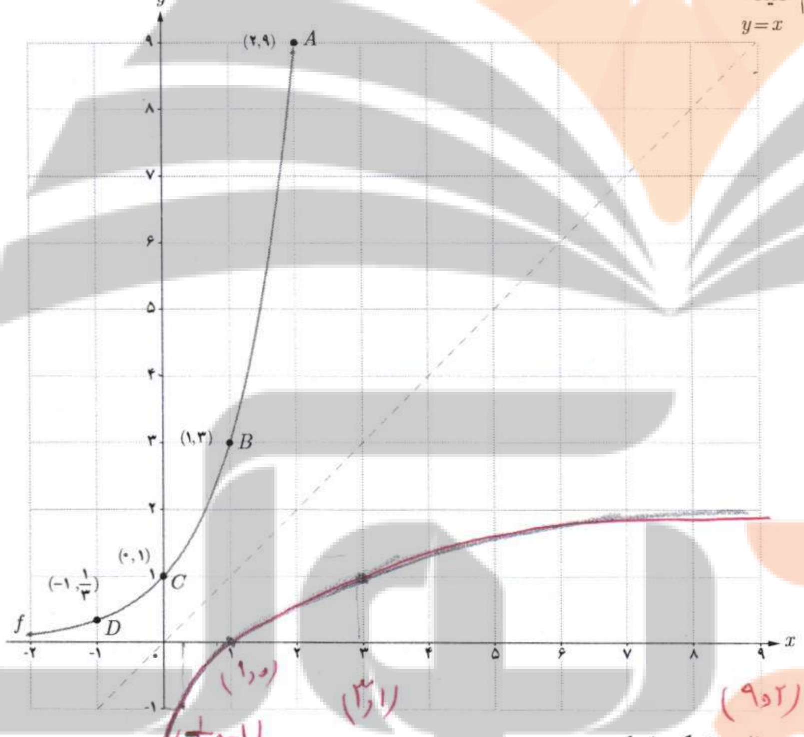
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{4}$	$f(-1) = \frac{1}{2}$	$f(0) = 1$	$f(2) = 4$
$f^{-1}(\frac{1}{4}) = -2$	$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(4) = 2$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(0) = 1$	$f(1) = 3$	$f(2) = 9$
$f^{-1}(\frac{1}{9}) = -2$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(3) = 1$	$f^{-1}(9) = 2$

۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید. $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$, $R_f = D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = 3^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم.

به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

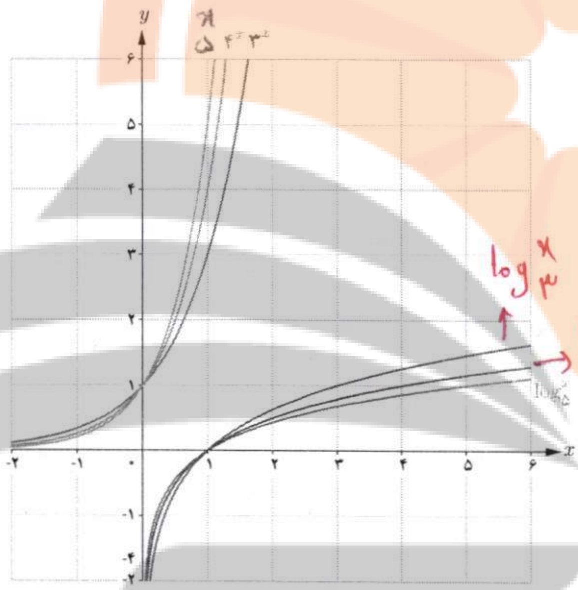
دامنه تابع نمایی همان برد تابع لگاریتمی و برد تابع نمایی همان دامنه تابع لگاریتمی است.

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq 1)$ داریم:

$$f(x)=a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\log_a x$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

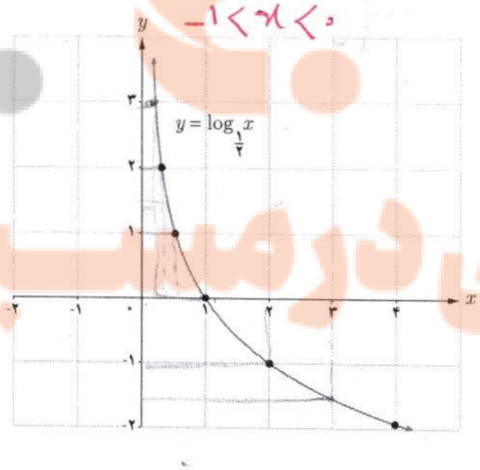


کار در کلاس

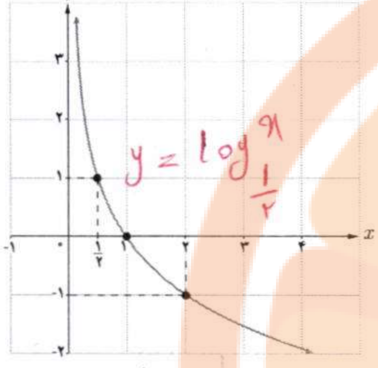
نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} ۳ = x \to (\frac{1}{2})^x = 3$ $\quad -2<x<-1$

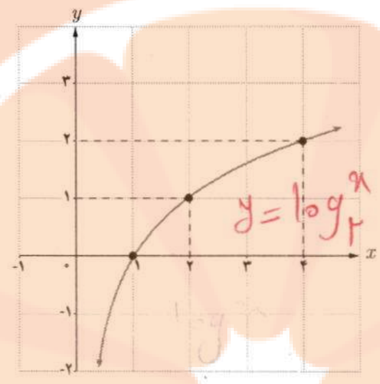
ب) $\log_{۰/۵}(۱/۵) = x$ $\quad (\frac{1}{2})^x = 1/5$ $\quad -1<x<0$



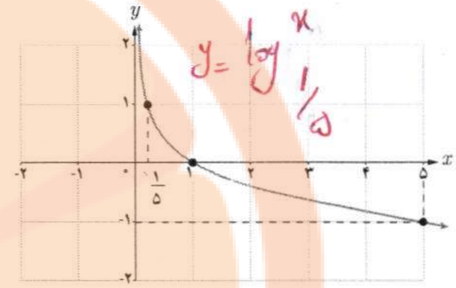
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



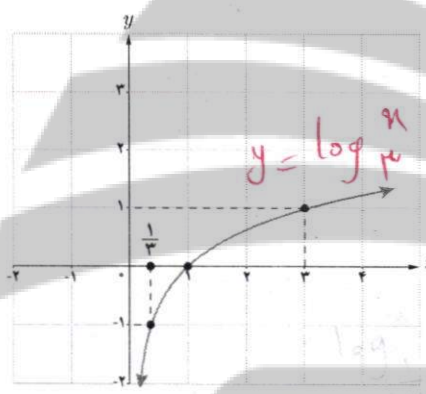
(۱)



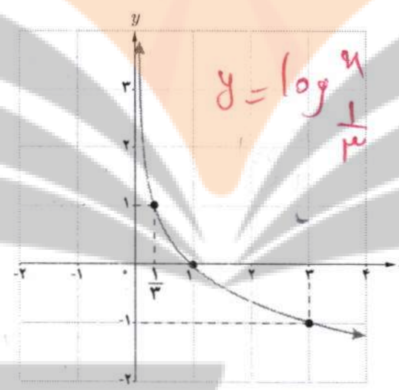
(۲)



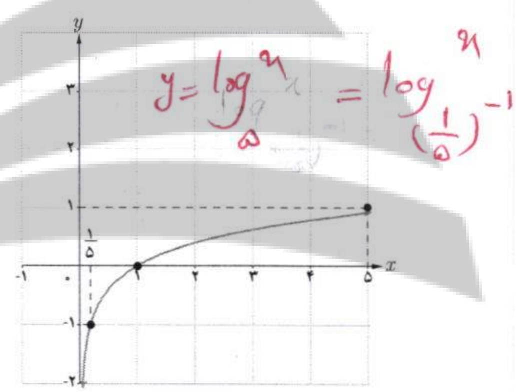
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن اعداد حقیقی است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0<a<1)$، بازه $(0,+\infty)$ و برد آن $(-\infty,+\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ یک قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

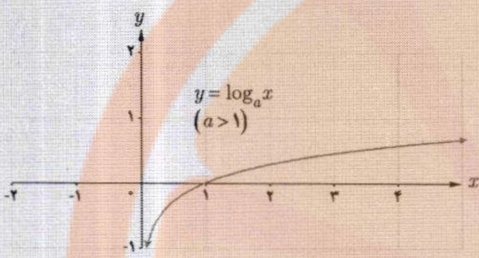
۴ این دو تابع، یک‌به‌یک هستند زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

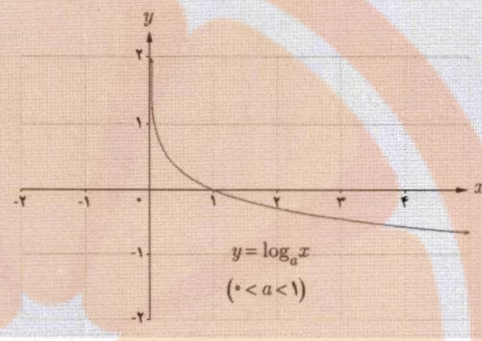
۵ وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است و وارون تابع لگاریتمی، تابع نمایی است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq 1)$ باشد، داریم : $a^0 = 1$، بنابراین همواره :

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

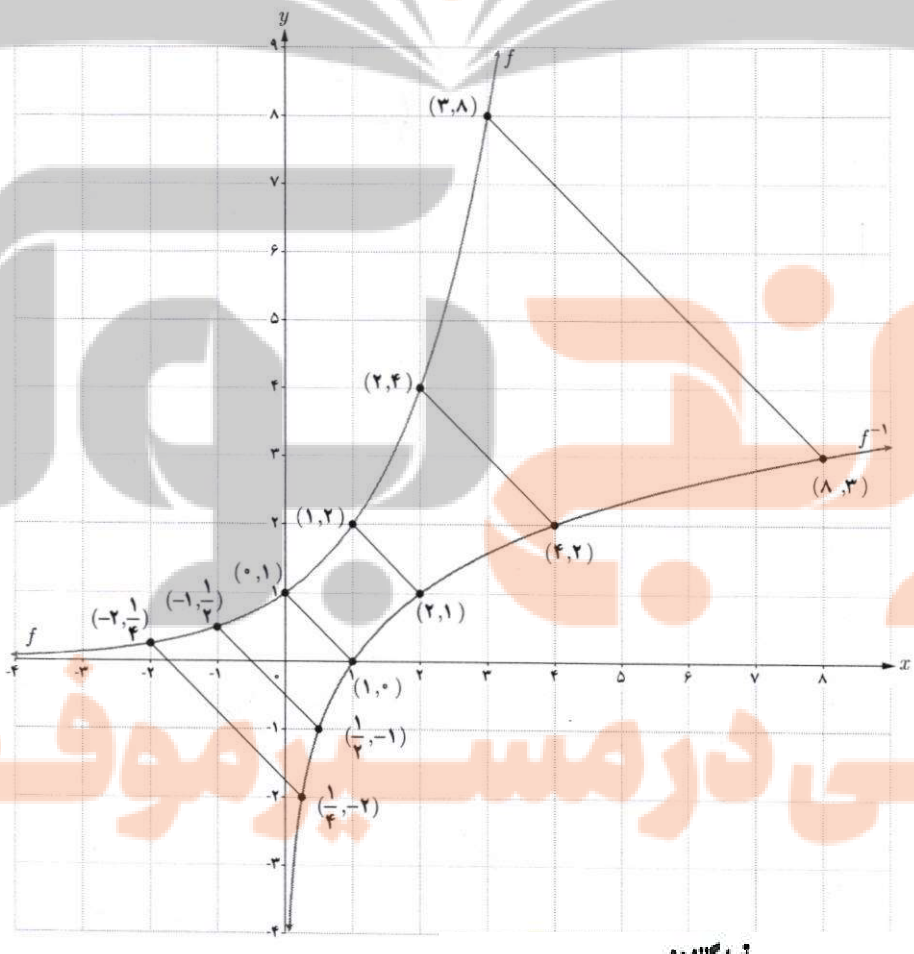




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.



تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$
لگاریتمی	$\log_2 8=3$	$\log_2 4=2$	$\log_2 2=1$	$\log_2 1=0$	$\log_2\frac{1}{2}=-1$	$\log_2\frac{1}{4}=-2$

به‌طور کلی اگر $a^y=x$ آن‌گاه $\log_a x=y$ و به عکس. $(x>0\ ,\ a\neq 1\ ,\ a>0)$

$$b^a=c \Leftrightarrow \log_b c=a \qquad (c>0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$\log_8 1=0 \to 8^0=1$	$10^3=1000 \to \log_{10}1000=3$
$\log_2(\frac{1}{16})=-4 \to 2^{-4}=\frac{1}{16}$	$9^{\frac{1}{2}}=3 \to \log_9 3=\frac{1}{2}$
$\log_5 125=3 \to 5^3=125$	$4^3=64 \to \log_4 64=3$
$\log_{\frac{1}{3}}27=-3 \to (\frac{1}{3})^{-3}=27$	$2^5=32 \to \log_2 32=5$
$\log_{\frac{1}{5}}125=-3 \to (\frac{1}{5})^{-3}=125$	$2^{-3}=\frac{1}{8} \to \log_2\frac{1}{8}=-3$
$\log_{\frac{1}{2}}16=-4 \to (\frac{1}{2})^{-4}=16$	$3^{-4}=\frac{1}{81} \to \log_3\frac{1}{81}=-4$

دریاچه تار (دماوند)

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq ۱)$ باشد، همواره داریم:

$$\log_a ۱ = ۰ \quad \text{و} \quad \log_a a = ۱ \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{۱}{a}\right) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از این رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = \log_c c^{m+n}$ و در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳ \times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین:

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a = ۱۵۵۰۰\left(۵ - \log \frac{p}{۱۰}\right)$ است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

$\log \frac{۲۵}{۱۸} = \log ۲۵ - \log ۱۸ = ۵\log ۵ - \log ۳^۲ × ۲ = ۵(۱-\log ۲) - (۲\log ۳ + \log ۲) =$
$۵(۰/۷) - (۲×۰/۴۸ + ۰/۳) = ۳/۵ - ۱/۲۶ = ۱/۲۴$

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲ = \log(۳×۴) = \log ۳ + \log ۲^۲ = \log ۳ + ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۶ = ۱/۰۸$

۲) $\log ۰/۷۵ = \log \frac{۳}{۴} = \log ۳ - \log ۴ = \log ۳ - ۲\log ۲$
$= ۰/۴۸ - ۲(۰/۳) = -۰/۱۲$

۳) $\log \sqrt{۵} = \log ۵^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log ۵ =$
$\frac{۱}{۲}(\log ۱۰ - \log ۲) = \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۳) = \frac{۷}{۲۰}$

۴) $\log \frac{۲۵}{۱۸} =$ حل بالای صفحه

۵) $\log \sqrt[۳]{۶} = \log ۶^{\frac{۱}{۳}} =$
$\frac{۱}{۳}\log ۶ = \frac{۱}{۳}(\log ۲ + \log ۳) =$
$\frac{۱}{۳}(۰/۳ + ۰/۴۸) = \frac{۱۳}{۵۰}$

۶) $\log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} = \log ۲۷^{\frac{۱}{۲}} - \log ۵^{\frac{۱}{۴}}$
$\frac{۱}{۲}\log ۳^۳ - \frac{۱}{۴}\log ۵ = \frac{۳}{۲}(۰/۴۸) - \frac{۱}{۴}(۱ - ۰/۳) = \frac{۵۹}{۲۰۰}$

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند :

$\log_۴ x+۱ = ۳ \quad , \quad \log_۲ x = \log_۲ ۷ \quad , \quad \log_۵ x + \log_۵(x-۱) = \log_۵ ۱۲$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a \neq ۱)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ (x, y > ۰)$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و به عکس، اگر $x = y \ (x, y > ۰)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از :

$S(x) = ۳۱/۵ + ۱/۱\log(x+۱)$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_۳ x = ۲ \rightarrow x = ۳^۲ = ۹$

۲ $\log_۵(x+۶) = \log_۵(۲x-۳) \rightarrow x+۶ = ۲x-۳ \rightarrow x = ۹$

که $x = ۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳ $\log_۵(x+۶) + \log_۵(x+۲) = ۱ \rightarrow \log_۵[(x+۶)(x+۲)] = ۱$

$\rightarrow (x+۶)(x+۲) = ۵ \rightarrow x^۲+۸x+۱۲ = ۵$

$\rightarrow x^۲+۸x+۷ = ۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱) = ۰ \rightarrow x=-۷$ یا $x = -۱$

توجه کنید که $x = -۷$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x = -۱$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۴) $\log_4(x+2) = \log_4 8 \to x+2=8 \to x=6$

۵) $3\log_2 x = -\log_2 27 \to \log_2 x^3 = \log_2 27^{-1} \to x^3 = \frac{1}{27} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \to x = \frac{1}{3}$

۶) $\log(x+1) - \log(x-3) = 3 \to \log\frac{x+1}{x-3} = 3 \to \frac{x+1}{x-3} = 10^3 \to x+1 = 1000x - 3000 \to x = \frac{3001}{999}$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_5 x = 3 \to 5^3 = x \to x = 125$

۲) $\log_2(2x+1) = 3 \to 2x+1 = 2^3 = 8 \to 2x = 7 \quad x = \frac{7}{2}$

۳) $\log_2(x+1)+\log_2(x+4) = 2 \to \log_2 (x+1)(x+4) = 2 \to x^2+5x+4 = 4 \to x(x+5)=0$
$x=0 \quad x=-5$ غ ق ق

۴) $\log_3 243 = 2x+1 \to \log_3 3^5 = 2x+1 \to 5 = 2x+1 \to x = 2$

۵) $\log_3(x-1) = 4 \to x-1 = 3^4 = 81 \to x = 82$

۶) $\log(2x)-\log(x-3) = 1 \to \frac{2x}{x-3} = 10^1 \to 2x = 10x - 30 \to 8x = 30 \to x = \frac{15}{4}$

۷) $2\log_4(x-1) = 3 \to (x-1)^2 = 4^3 \to x^2-2x+1 = 64 \to x^2-2x-63=0$
$(x-9)(x+7) = 0 \to x=9$
$x=-7$ غ ق ق

تمرین

۱) تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ (a و b و c و d اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq 1$)

$\log_c a(bd) = \log_c a + \log_c bd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (a و b و c اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq 1$ و b)

$\log_c a = m \to c^m = a \quad \log_c b = n \to c^n = b \to \log_b a = \log_{c^n} c^m = \frac{m}{n}\log_c c = \frac{m}{n} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

پ) $a^{\log_a b} = b$ (a و b اعدادحقیقی مثبت‌اند و $a\neq 1$) $\xrightarrow{\text{از طرفین log در مبنای a می‌گیریم}}$

$\log_a a^{\log_a b} = \log_a b \to \log_a b \cdot \log_a a = \log_a b \times 1 = \log_a b$

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \log_b a \times \log_a b = 1$

الف) $\log_7 49^{\frac{1}{5}} = \log_7 7^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\log_7 7 = \frac{2}{5}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$

پ) $-\log_5 5^3 = -3\log_5 5 = -3$

ت) $\log_{10}(10^{\frac{3}{2}})^3 = \log_{10} 10^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$ ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$ پ) $-\log_5 125$ ت) $3\log_{10}\sqrt{1000}$

$f(42) = 3 - 2\log_4(\frac{42}{2}-5) = 3 - 2\log_4 16 = 3-2\times 2 = -1$

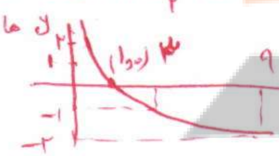
۳ اگر $f(x)=3-2\log_4(\frac{x}{2}-5)$ ، مقدار $f(42)$ را به‌دست آورید.

$\log_a 2 = 2 \to a^2 = 2 = (\sqrt{2})^2 \to a=\sqrt{2}$

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

$\log_a \frac{1}{2} = -4 \to a^{-4} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \to a = 2^{(-\frac{1}{4})(-1)} \to a = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟



y	0	-1	-2	1	2
x	1	3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$(\frac{1}{3})^y = x$

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y=\log_a x$ ، آنگاه $a^x=y$. ✗

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ از نقطهٔ $(1, 0)$ عبور می‌کند. ✓

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓

$p^2-2=p \to p^2-p-2=0 \to (p-2)(p+1)=0$

$p=2$ ق‌ق $\quad p=-1$ غ‌ق‌ق

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$x>-1 \cap x>1 \quad D=(1,+\infty)$

الف) $\log_3(p^2-2)=\log_3 p$ ب) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=1$

$D=(\sqrt{2},+\infty)$

$a>0$ $\quad x>\sqrt{21}$ یا $x<-\sqrt{21}$

پ) $3\log_4 a-\log_4 5=\log_4 25$ ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-21)=-2$

حل ب) $(x+1)(x-1)=5 \to x^2-1=5 \to x^2=6 \to x=\sqrt{6}$

حل پ) $\log_4 a^3 - \log_4 5 = \log_4 25 \to \log_4 \frac{a^3}{5} = \log_4 25 \to \frac{a^3}{5}=25 \to a^3=125 \to a=5$

حل ت) $x^2-21=(\frac{1}{10})^{-2}=100 \to x^2=121 \quad x=\pm 11 \in D$

هر ۲ قابل قبولند

تخت‌جمشید (فارس)

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_{2} x$

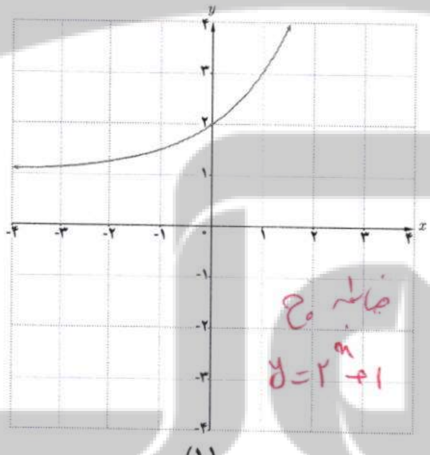
ب) $l(x) = 2 + \log x$

پ) $h(x) = -(\frac{1}{2})^{x}$

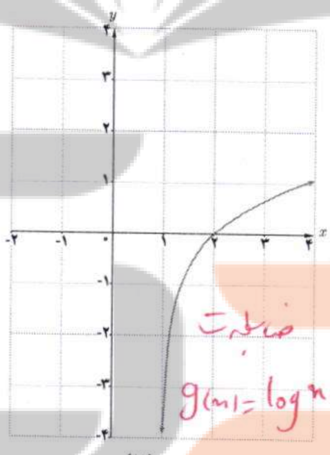
ت) $g(x) = \log (x-1)$

ث) $j(x) = 3^{(x-1)}$

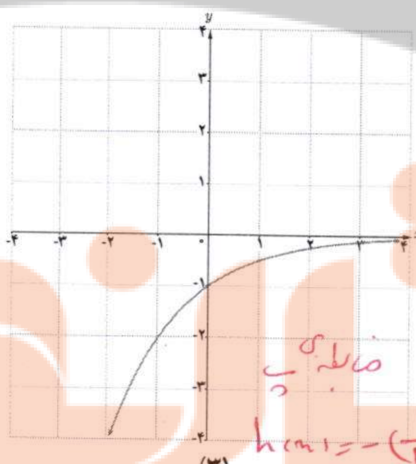
ج) $f(x) = 2^{x}+1$



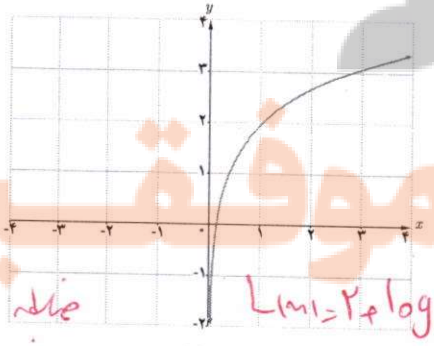
(۱)



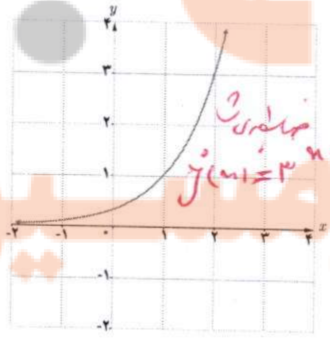
(۲)



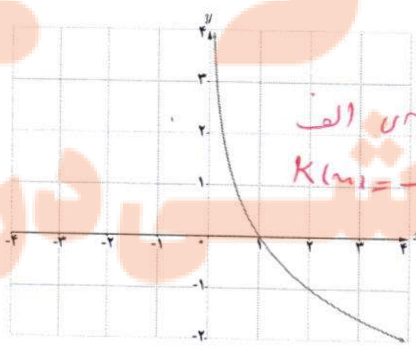
(۳)



(۴)



(۵)

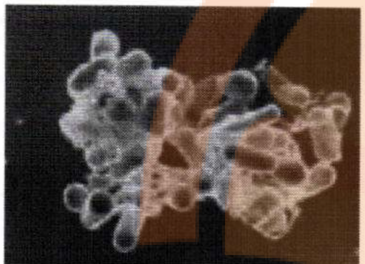


(۶)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ $(a\neq ۱, a>۰)$ مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.


توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۶}=۶۴۰۰$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\rightarrow$

$\log E=۱۱/۸+۱/۵\ (۶/۶)$

$\rightarrow \log E=۲۱/۷\ \rightarrow\ E=۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$

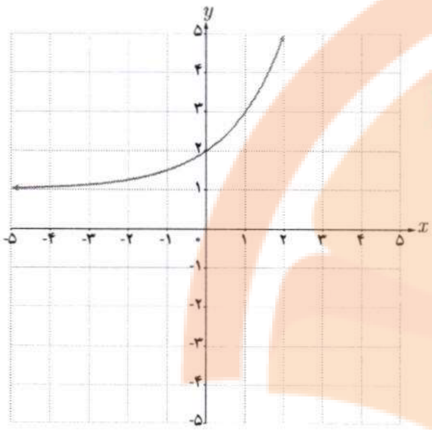
کار در کلاس

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ـ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

t	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
$P(t)$	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۸۰۰	۱۶۰۰

$P(t)=۱۰۰\times(۲^{۲})^{t}=۱۰۰\times ۴^{t}$ هر نیم ساعت ۲ برابر ـ هر ساعت ۴ برابر

تمرین



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.

$a+2^{-b}=2 \rightarrow$

$a+2^{2-b}=5 \rightarrow$

$a+2^{2-b}-a-2^{-b}=5-2 \rightarrow 2^{2-b}-2^{-b}=3 \rightarrow$

$2^{-b}(4-1)=3 \rightarrow 2^{-b}=1 \rightarrow 2^{-b}=2^{0} \rightarrow -b=0 \quad b=0$

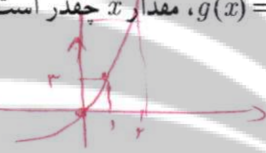
$a+2^{0}=2 \rightarrow a=1 \quad a=1,\ b=0$

الف) $g(-1)=4^{-1}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$

ب) $66=4^{x}+2 \rightarrow 4^{x}=64=4^{3} \rightarrow x=3$

۲ فرض می‌کنیم $g(x)=4^x+2$. الف) $g(-1)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=66$، مقدار x چقدر است؟

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	3	15



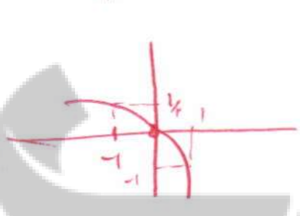
۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4^x-1$ را در بازهٔ $[-2,2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

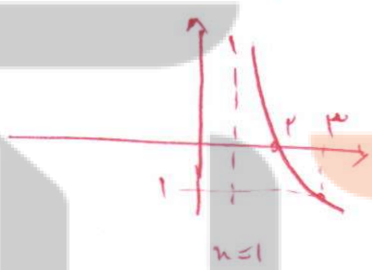
الف) $y=-2^x+1$

ب) $y=-\log_2(x-1)$

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	0	-1



$x-1=0 \quad x=1$



$x=1$