

الله احْمَدْ

ایستگاه ریاضی ۹

(کتاب کار)

روح الله تختی پور

(مدرس کشوری)

تلاشی در مسیر صفتیت

سرشناسه : تختی‌پور، روح‌الله، ۱۳۵۱
عنوان و نام پدیدآور : ایستگاه ریاضی ۹ (کتاب کار)
مشخصات نشر: دزفول: اهورا قلم، ۱۳۹۴
مشخصات ظاهری : ۱۱۹ ص: مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ۲۹×۲۲ س م
شابک : ۸-۷۴-۷۱۲۵-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرستنويسي: فيپای مختصر
يادداشت: فهرستنويسي کامل اين اثر در نشانی <http://opac.nlai.ir> قابل دسترسی است.
شماره کتابشناسی ملي: ۳۹۱۶۰۹۴



ایستگاه ریاضی ۹

نویسنده: روح‌الله تختی‌پور

گروه ویراستاران: عبد‌الرضا اعتماد‌نژاد

فرشته شجاعی - فریبا شکیبا

شهره شجاعی - پروین حیدری

فروزان بافنده - غلام‌رضا تفضلی

آریتا باقریان‌زاده

انتشارات: اهورا قلم

واحد کودکان و نوجوانان: پرنده آبی

قطع: رحلی

نوبت چاپ: اول - تابستان ۱۳۹۴

چاپ: مهر

تیراز: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۱۱۵۰۰۰ ریال

شابک: ۸-۷۴-۷۱۲۵-۶۰۰-۹۷۸

ISBN: 9 78-6 00-7 125-7 4-8

ahoora.ghalam@yahoo.com

www.ahoora-ghalam.ir

پست الکترونیک:

آدرس اینترنتی:

آدرس: دزفول، خیابان اکباتان، بین خ میرداماد و خ قاضی، کوچه بنفسه، پلاک ۱۹۴

شماره تماس: ۰۹۱۶۶۴۱۵۸۹۴ - ۰۹۱۴۲۲۴۹۱۲۴

شماره تماس جهت تهیه کتاب: ۰۹۱۶۶۴۵۱۶۲۳

تلشی در معرفت

باسم‌هه تعالی

کنین بر قر انديشه بر نگزند
به نام خداوند جان و خرد

«مقدمه ۴»

كتابی که در دستان شماست، برای آشنایی بیشتر شما با مباحث كتاب ریاضی نهم با رویکرد حل مسئله و اكتشاف راهبردهای مناسب مسائل، با تمرینات متنوع مانند سؤالات **تشریحی**، نقطه چین **چهارگزینه ای**، صحیح، غلط، دست ورزی و ... نوشته شده است.

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشید که این كتاب را به عنوان یک مکمل یعنی کامل کننده مباحث كتاب درسی نگاه کنید. كتاب درسی را حل کنید و سپس برای ثبیت اطلاعات و سنجش میزان یادگیری و افزایش تسلط خود از قسمت های متنوع این كتاب استفاده کنید.

همکاران گرامی : بی شک این مجموعه دارای اشکالات و نارسانی هایی است که برای رفع آن نیازمند تذکرات، پیشنهادت و انتقادات شما همکاران محترم می باشیم. از شما اساتید و صاحب نظران تقاضا دارم تا با نظرات دلسوزانه خود ما را در امر هر چه بهتر کردن چنین مجموعه هایی یاری دهید. لطفا نظرات خود را به آدرس الکترونیکی www.Tahktipoor@gmail.com

ارسال نماید.

در پایان از آقای احمد سجادمنش و خانم ندا محسنی نژادوکلیه همکارانی که در تهیه و چاپ این كتاب ما را یاری دادند، تقدیر و تشکر می کنم.

«یادمان باشد که انسان را پاداشی بیش تر یا کم تر از مقدار تلاشش نیست.»

با تشکر

روح الله تختی پور - دزفول - تابستان ۱۳۹۴

تلاشی در مسیر نووفقیت

فهرست

صفحه

۵

فصل اول : مجموعه ها

۱۷ .

آزمون فصل اول

۱۹

فصل دوم : عددهای حقیقی

۳۰

آزمون فصل دوم

۳۳ .

فصل سوم : استدلال و اثبات در هندسه

۴۳

آزمون فصل سوم

۴۹

فصل چهارم : توان و ریشه

۵۸ ..

آزمون فصل چهارم

۶۰

آزمون نوبت اول

۶۳

فصل پنجم : عبارت های جبری

۷۴

آزمون فصل پنجم

۷۸ ..

فصل ششم : خط و معادله های خطی

۹۲ :

آزمون فصل ششم

۹۵ ...

فصل هفتم : عبارت های گویا

۱۰۳ ...

آزمون فصل هفتم

۱۰۶

فصل هشتم : حجم و مساحت

۱۱۴ ...

آزمون فصل هشتم

تلاش برای درسیزی موافقیت

خلاصه درس :

فصل اول

مجموعه ها

تعريف مجموعه : به دسته ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) از هم، مجموعه می گوییم.

◀ **مثال «۱»:** مجموعه ای اعداد طبیعی زوج یک رقمی

* مجموعه را به صورت آکولاد { } نشان می دهیم.

* مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A, B, C و... نامگذاری می کنیم.

* به هریک از اعداد یا کلمات درون مجموعه عضو گفته می شود و با علامت ∈ نشان می دهیم و اگر آن عدد متعلق به مجموعه نباشد، با علامت ≠ مشخص می شود.

◀ **مثال «۲»:**

$$A = \{-3, 5, 7\} \Rightarrow 5 \in A \quad , \quad 10 \notin A$$

مجموعه تهی : مجموعه ای که عضوی نداشته باشد، تهی نامیده می شود و با علامت \emptyset (فی) یا { } نوشته می شود.

◀ **مثال «۳»:** مجموعه ای اعداد طبیعی بین ۴ و ۵ یک مجموعه تهی است. زیرا هیچ عدد طبیعی بین ۴ و ۵ وجود ندارد.

نکته ای مهم : در نوشتن اعضای مجموعه تکرار و ترتیب اعضای مجموعه مهم نیست.

◀ **مثال «۴»:** مجموعه های زیر همه باهم مساوی اند.

$$A = \{4, 5, 6, \sqrt{36}\} \quad , \quad B = \left\{ \sqrt{16}, 6, \frac{25}{5}, 5 \right\} \quad , \quad C = \{4, 5, 6\}$$

نمودار ون : مجموعه را می توان با استفاده از منحنی های بسته نمایش داد.

یکی از اولین کسانی که از این نمودارهای خط بسته استفاده کرد، ریاضیدانی به نام **جان ون** بود.

◀ **مثال «۵»:** اگر $D = \{10, 11, 12\}$ باشد، نمودار آن به شکل D می باشد.

مجموعه های یکانی : مجموعه ای که فقط یک عضو داشته باشد مانند مجموعه ای اعداد طبیعی که نه اول و نه مرکب باشد : $B = \{1\}$

زیر مجموعه : مجموعه A زیر مجموعه B است، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد این مطلب را به صورت $A \subseteq B$ نشان می دهیم و اگر A زیر مجموعه B نباشد می نویسیم : $A \not\subseteq B$

دو مجموعه برابر : دو مجموعه مانند D, E برابرند، هرگاه هر عضو E عضوی از D و هر عضو D نیز عضوی از E باشد و می نویسیم : $E=D$

◀مثال «۶» :

$$\left\{ 6, \frac{3}{5}, \sqrt{49} \right\} = \left\{ \sqrt{36}, \frac{6}{10}, 7 \right\}$$

نکته ۱ : هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. $A \subseteq A$

نکته ۲ : مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. $\emptyset \subseteq A$

فعالیت :

جدول زیر را کامل کنید.

تعداد اعضای مجموعه	ϕ	۱ عضوی	۲ عضوی	۳ عضوی	۴ عضوی	۵ عضوی
تعداد زیر مجموعه ها	۱	۲	۴	۸		

فکر می کنید مجموعه i $i=1, 2, \dots, n$ عضوی چند زیر مجموعه خواهد داشت؟

الگویی مناسب کشف کرده و تعداد زیر مجموعه ها را به صورت یک عبارت جبری بر حسب n بنویسید.

$$= 1 = \text{زیر مجموعه } \Rightarrow \{ \} \Rightarrow \text{مجموعه تهی باشد}$$

$$= 2 = \text{تعداد زیر مجموعه } \Rightarrow \{a\} \text{ و } \emptyset \Rightarrow \text{مجموعه ۱ عضوی باشد}$$

$$= 4 = \text{تعداد زیر مجموعه } \{a,b\} \text{ و } \{a\} \text{ و } \{b\} \text{ و } \emptyset \Rightarrow \text{مجموعه ۲ عضوی باشد}$$

$$= \text{تعداد زیر مجموعه } \Rightarrow \text{مجموعه ۳ عضوی باشد}$$

$$= \text{تعداد زیر مجموعه } \Rightarrow \text{مجموعه } n \text{ عضوی باشد}$$

◀مثال ۷ : مجموعه ای دارای ۵ عضو است این مجموعه چند زیر مجموعه دارد؟

n) تعداد عضوهاست).

$$\text{زیرمجموعه } = 2^7 = 128 \Rightarrow 2^5 = 32 = \text{تعداد زیرمجموعه}$$

نمایش مجموعه ها :

(الف) مجموعه ای اعداد طبیعی :

$$N = \{ \dots, ., . \}$$

$$W = \{ \dots, ..., . \}$$

(ب) مجموعه ای اعداد حسابی :

ج) مجموعه‌ی اعداد صحیح :

$$Z = \{ \dots, -, -, -, +, +, +, \dots \}$$

د) مجموعه‌ی عده‌های طبیعی زوج :

$$E = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2K \mid K \in N\}$$

ه) مجموعه‌ی عده‌های طبیعی فرد :

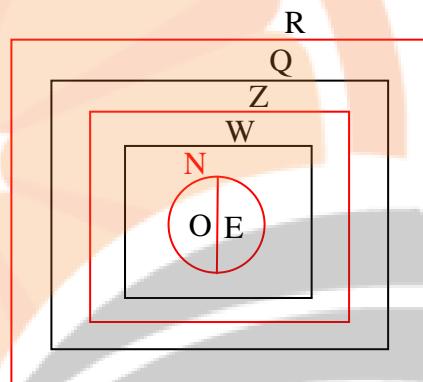
$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2K - 1 \mid K \in N\}$$

و) مجموعه‌ی عده‌های گویا :

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

نکته :

$$\begin{array}{c} N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{زیر مجموعه} \quad \text{زیر مجموعه} \quad \text{زیر مجموعه} \quad \text{زیر مجموعه} \end{array}$$

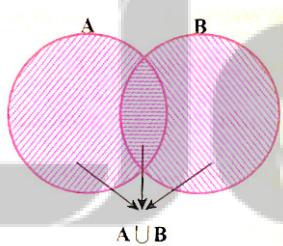


* در فصل «۲» مجموعه‌ی اعداد حقیقی و گویا را کامل و دقیق معرفی خواهیم کرد.

اجتماع مجموعه‌ها : اجتماع دو مجموعه A, B مجموعه‌ای است شامل همه‌ی اعضایی که حداقل در یکی از مجموعه‌های A, B باشند و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم به زبان ریاضی :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

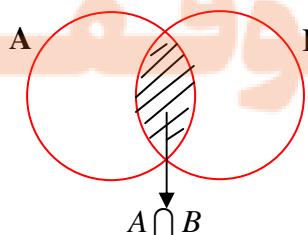
نمودار ون



اشتراف مجموعه‌ها : اشتراک دو مجموعه A, B مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی است که هم عضو A و هم عضو B هستند و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

نمودار ون :



◀ **مثال «۸»:** دو مجموعه‌ی $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 3\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های A, B را با اعضاشان بنویسید.

ب) $A \cup B$, $A \cap B$ را تشکیل دهید.

پاسخ :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} , B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

(الف)

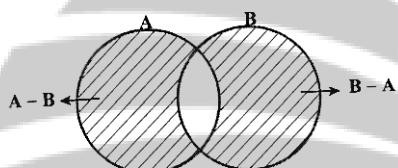
(ب)

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

تفاضل دو مجموعه : مجموعه‌ی $A-B$ (A-B) مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

نمودار ون



$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

به زبان ریاضی :

◀ **مثال «۹»:** اگر $E = \{b, m, d, h\}$ و $C = \{a, m, d\}$ باشد در این صورت $C-E$ و $E-C$ را بنویسید.

پاسخ :

$$C - E = \{a, m, d\} - \{b, m, d, h\} = \{a\}$$

$$E - C = \{b, m, d, h\} - \{a, m, d\} = \{b, h\}$$

$$C - E \neq E - C$$

نکته :

قرارداد : تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

◀ **مثال «۱۰»:** تعداد عضوهای $A = \{2, 3, 7\}$ می‌شود 3

مجموعه متناهی : مجموعه‌ای که اعضای آن قابل شمارش باشد (محدود باشد)

مجموعه نامتناهی : مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش نباشد.

◀ مثال «۱۱»: کدام یک از مجموعه های زیر متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) H : مجموعه ای اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰

$$\{ \dots , 999 \}$$

ب) K : مجموعه ای اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱۰۰۰

$$\{ \dots , \dots \}$$

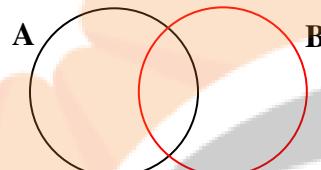
پاسخ: H متناهی است چون قابل شمارش یا محدود است و K نامتناهی است زیرا محدودیتی ندارد.

دو مجموعه جدا از هم: دو مجموعه غیرتھی A, B را مجزا گوییم، هرگاه اشتراک بین این دو مجموعه تھی باشد.

$$B = \{4, 5\}, A = \{2, 3\}$$

نکته :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



◀ مثال «۱۲»: اجتماع دو مجموعه B, A دارای ۱۲ عضو است در صورتی که مجموعه A دارای ۸ عضو و مجموعه B دارای ۷ عضو باشد، اشتراک دو مجموعه چند عضو دارد؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$12 = 8 + 7 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 15 - 12 = 3$$

چند نکته مهم :

تفاضل	اشتراک	اجتماع
$A - \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$	$\phi \cup A = A$
$\phi - A = \phi$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A - A = \phi$	$(A \cap B) \subseteq A$	$A \subseteq (A \cup B)$
$B \subseteq A \Rightarrow B - A = \phi$	$(A \cap B) \subseteq B$	$B \subseteq (A \cup B)$
	$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$	$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$
	$A \cap B = \phi \Rightarrow \{A = \phi \text{ یا } B = \phi \text{ یا } A, B = \phi\}$	$A \cup B = \phi \Rightarrow A = \phi, B = \phi$

تلاشی در مسیر موفقیت

مجموعه ها و احتمال (یادآوری) :

$$\frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت ها}} = \text{احتمال رخدان یک پیشامد} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{یا}$$

◀ مثال «۱۳»: اگر تاسی را بیاندازیم احتمال اینکه:

الف) عدد رو شده شمارنده ۶ بیاید.

ب) عدد رو شده کمتر از ۴ بیاید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

پاسخ: الف) مجموعه کل حالت ها

$$A = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow n(A) = 4$$

شمارنده های ۶

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب) مجموعه اعداد کمتر از ۴ را B می نامیم:

$$B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

برای مطالعه

شگفتی اعداد

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

شما هم الگو را تا دو ردیف دیگر ادامه دهید.

تلاش در مسیر موفقیت

سوالات امتحانی

مجموعه ها

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) «جمعی از شاعران خوب» معرف یک مجموعه است.

(ب) مجموعه $\{\sqrt{25}, \phi\}$ دارای ۳ عضو است.

(ج) دو مجموعه $\{(-2)^4\}$ و $\{4^2\}$ باهم مساوی اند.

(د) مجموعه $\{1000, 203, 1\}$ بی شمار عضو دارد.

(ه) اگر $B \subseteq A$ باشد، آنگاه $A \cup B = A$

(و) اگر $D \subseteq B$ باشد آنگاه $B \cap D = D$

(ز) $N \subseteq Z \subseteq Q$: طبیعی، Z : صحیح، Q : گویا)

(ح) مجموعه $\{8\}$ دارای ۸ زیر مجموعه است.

(ط) مجموعه $W = \{k - 1 \mid K \in N\}$ معرف مجموعه اعداد حسابی است.

(ی) مجموعه $M = \{x \in Z \mid x \leq 4\}$ دارای ۴ عضو است.

(ر) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

(الف) مجموعه ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه نامیده می شود.

(ب) اگر $P \subseteq S$ باشد آنگاه $P \cap S = P \cup S = P$ و .

(ج) اشتراک دو مجموعه C, D هر یک از دو مجموعه C, D است.

(د) حاصل $(A \cap B) \cup (B - A)$ برابر با مجموعه C است.

(ه) مجموعه $\{x \in A \mid x \notin B\}$ مساوی است با

(و) مجموعه $E = \{\emptyset, \{-7\}, \{7\}\}$ دارای ۳ عضو است.

(ز) اگر $H \subseteq K$ باشد، آنگاه $K - H = K$

۳. گزینه‌ی صحیح را علامت بزنید.

(الف) کدام گزینه مجموعه $\{1\}$ را مشخص می کند؟

(۱) اعداد زوج اول

(۳) اعداد گویای بین ۰ و ۱

(۲) اعداد صحیح بین -۱ و ۱

(۴) اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۰

(ب) کدام عبارت یک مجموعه را مشخص نمی کند؟

(۱) دسته ای از گل های زیبا

۲) دسته ای از اعداد طبیعی کمتر از ۲۰

۳) حروف انگلیسی نقطه دار

۴) مجموعه ای اعداد اول سه رقمی

ج) مجموعه ای $D = \left\{ \frac{-10}{5}, \sqrt{\sqrt{16}}, -2 \right\}$ دارای چند عضو است؟

۴) عضو

۳) عضو

۲) عضو

۱) عضو

د) مفهوم $\{x | x \in A, x \in B\}$ چیست؟

۴) $B - A$

۳) $A - B$

۲) $A \cap B$

۱) $A \cup B$

ه) اگر $A \cap B = \{x \in W | x \geq 2\}$, $A = \{x \in N | x \leq 2\}$ آنگاه $B = \{x \in W | x \geq 2\}$ دارای چند عضو است؟

۴) عضو

۳) عضو

۲) عضو

۱) بی شمار

و) اگر $A \subseteq B$ باشد، کدام رابطه ای زیر نادرست است؟

۴) $A \cap B = A$

۳) $A \cup B = B$

۲) $A - B = A$

۱) $A - \emptyset = A$

ز) مجموعه ای اعداد طبیعی کوچک تر از صفر کدام است؟

۴) $\{x | x \in N\}$

۳) $\{ \cdot \}$

۲) $\{0\}$

۱) $\{ \}$

ح) کدام یک از رابطه های زیر صحیح است؟

۴) $N \subseteq W$

۳) $Q \subseteq Z$

۲) $Z \subseteq N$

۱) $N \not\subseteq Z$

ط) مجموعه $M = \{x | x \in N, x < \sqrt{10}\}$ چند عضو دارد؟

۴) ۳

۳) بی شمار

۲) ۹

۱) ۴

ی) مجموعه $\{ \frac{x}{x+1} | x \in N\}$ با کدام یک از مجموعه های زیر برابر است؟

۲) $\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$

۱) $\{ \dots, 0, 1, 2, 3, 4 \}$

۴) $\left\{ \dots, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$

۳) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$

۴. اگر $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = A$ و $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = B$ باشد حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با

نوشتن اعضاء بدست آورید.

(الف) $A \cup B =$

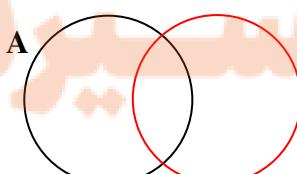
(ب) $A \cap B =$

(ج) $A - B =$

(د) $B - A =$

۵. در شکل زیر مجموعه ای خواسته شده را **هاشور** بزنید.

$(A - B) \cup (B - A)$



۶. مقدار x, y را چنان بیابید که دو مجموعه $B = \{x, -9\}$, $A = \{3, x+y\}$ باهم مساوی باشند.

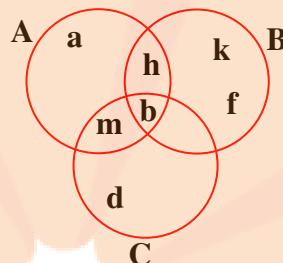
۷. جای خالی را به گونه ای پر کنید که عبارتی درست حاصل شود.

$$\notin Q, A \cup A = , N, Z, B \cap \emptyset =$$

۸. با توجه به نمودار زیر اعضای مجموعه های خواسته شده را بیابید.

$$(A \cap B) \cap C =$$

$$(A \cup B) - C =$$



۹. اگر $\{6, 7, 8\}$, $E = \{8, 10\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ باشد، هر یک از مجموعه های زیر را با اعضاپیشان مشخص کنید.

الف) $B \cup E =$

ب) $D \cap B =$

ج) $E \cup \emptyset =$

د) $(E \cup D) - B =$

هـ) $(B \cup E) \cap D =$

۱۰. اگر $M = \{\emptyset, \{\}, \{4\}, 4\}$ باشد :

الف) مجموعه M چند عضو دارد؟

ب) مجموعه M چند زیر مجموعه دارد؟

ج) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$4 \in M$$

,

$$\{\emptyset\} \subseteq M$$

,

$$\{\{4\}\} \subseteq M$$

,

$$3 \in M$$

۱۱. اگر $\{-5, 1, -2, 2, -5, 1\} = D$, $B = \{-2, 2, -5, 1\}$ باشد درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$$-5 \notin D$$

$$2 \in B$$

$$5 \notin D$$

$$-20 \notin D$$

$$D \subseteq B$$

$$B \subseteq D$$

$$\{-2, -5\} \subseteq B$$

۱۲. مجموعه های زیر را با اعضاء مشخص کنید.

$$A = \{-\omega x \mid x \in Z, -2 \leq x < 1\} =$$

$$B = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \quad , x \leq \omega \right\} =$$

$$C = \left\{ \frac{\cdot^x - 1}{q} \mid x \in W, x < \xi \right\} =$$

$$D = \{ \forall K + \forall |K \in N \quad , K \leq \omega \} =$$

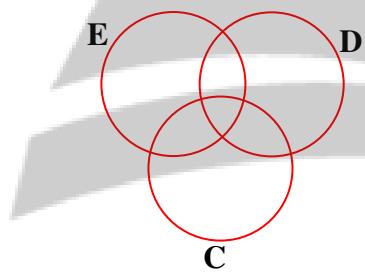
$$E = \{ \forall K - \exists |K \in Z \quad , -\forall < K < \exists \} =$$

۱۳. دو مجموعه $B = \{x \in W | x < 4\}$ ، $A = \{x \in N | x \leq 5\}$ را در نظر بگیرید.

الف) هر یک از مجموعه های A , B را با اعضا یشان مشخص کنید.

ب) $A - B, A \cap B, A \cup B$ را با اعضا مشخص کنید.

۱۴. حاصل $(E \cup D) \cap (C \cup D)$ را هاشور بزنید.



$$A = \{0, 1^+, 10, 11^+, \dots\} =$$

$$B = \{1, r, \vartheta, v, \dots\} =$$

$$C = \{\wedge, \vee, \neg, \wedge, \vee, \neg\} =$$

$$D = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots \right\} =$$

$$E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} =$$

$$F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\} =$$

۱۵. مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$$\therefore \sqrt{36} = \{-6, -25, -7\}$$

۱۷. اگر $A = \{d, b, m\}$ باشد :

(الف) همه‌ی زیر مجموعه‌های A را بنویسید.

(ب) A دارای چند زیر مجموعه‌ی دو عضوی است؟

۱۸. تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه ۳ عضوی است؟ راهنمایی : (از عبارت 2^n کمک بگیرید).

۱۹. یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟ (ابتدا جدول زیر را کامل کنید).

تعداد اعضاء	۲	۳	۴	۵	
تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی	۱	۳	۶	۱۰	

۲۰. اگر تاسی را بیاندازیم احتمال اینکه :

(الف) عدد رو شده مضرب ۲ باشد.

(ب) عدد رو شده اول بیاید.

(ج) عدد رو شده کمتر از ۸ بیاید.

۲۱. اگر دو تاس را باهم بیاندازیم چقدر احتمال دارد :

(الف) هر دو عدد رو شده مثل هم باشند.

(ب) هر دو عدد فرد بیایند.

(ج) مجموع دو عدد ۸ باشد.

تلاشی در مسیر موفقیت

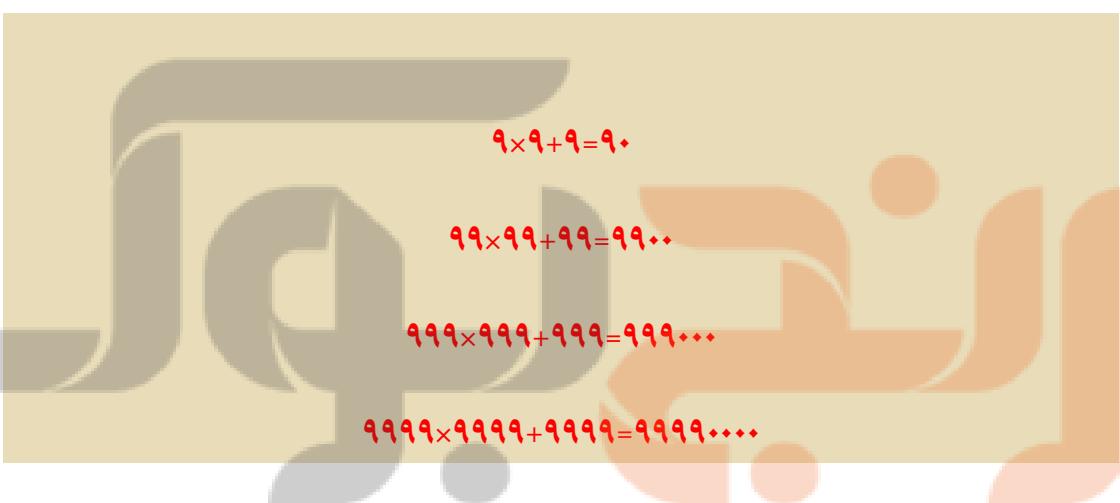
بیش تر بدانیم :

مثلث زیر که به مثلث خیام - پاسکال معروف است در بعضی از مسائل مانند تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه و تعداد حالات پرتاپ چند سکه باهم و کاربرد دارد. سعی کنید ارتباطی بین اعداد بیابید.



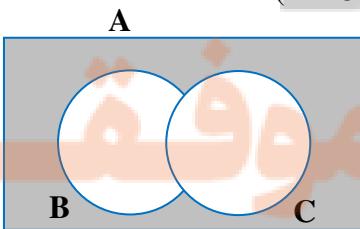
به همین ترتیب مجموع اعداد روی سطر $(n+1)$ می تواند تعداد زیر مجموعه های آن مجموعه n عضوی را مشخص کند مثلاً سطر ششم دارای اعداد ۱ و ۵ و ۱۰ و ۱۰ و ۵ و ۱ می باشد یعنی مجموعه ۵ عضوی دارای $1+5+10+10+5+1=32$ زیر مجموعه است.

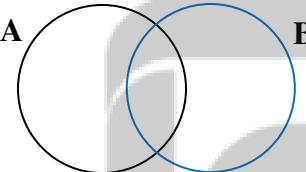
الگوهای عددی



تلاشی در مسیر موفقیت

درس مجموعه ها	مهرماه	بسمه تعالی	آزمون مستمر فصل اول
بارم	رسو اکرم (ص): انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.		ردیف
۲	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) هر عدد حسابی یک عدد گویا است. ب) مجموعه ای اعداد طبیعی کمتر از ۲ دارای دو عضو است. ج) مجموعه ای جواب $\{x \mid x \in N, x^2 = 9\}$ برابر تهی است. د) $O = \{2K + 1 \mid K \in N\}$ همه ای اعداد فرد را نشان می دهد.	۱	
۲	هر عبارت را با عدد یا کلمه ای مناسب کامل کنید. الف) مجموعه ای $\{\frac{1}{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{10}\}$ دارای عضو است. ب) مجموعه ای $\{-3\}$ را مجموعه عضوی می نامیم. ج) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $A \cap B =$ است. د) $\{K \mid K \in N\}$ بیانگر مجموعه اعداد گزینه ای مناسب را علامت بزنید.	۲	
۲	الف) مجموعه $P = \{0, \varphi, \{5\}, \{0, \varphi\}\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟ ۱) یکی ۲) ۴ تا ۳) ۸ تا ۴) ۱۶ تا ب) کدام گزینه مساوی تهی است? ۱) اعداد طبیعی مضرب ۳ و کمتر از ۱۰۰۰ ۲) اعداد طبیعی کوچک تر از ۱ ج) مجموعه ای $C = \{x \mid x \in Z, x^2 = x\}$ با کدام یک از مجموعه های زیر مساوی است? ۱) $\{-1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{1\}$ و $\{-1\}$ ۴) $\{0\}$ د) در نمودار زیر قسمت هاشور خورده برابر است با:	۳	
۲	$A \cap (B \cup C)$ (۲) $(B - C) \cup A$ (۴)	$A \cup (B \cap C)$ (۱) $A - (B \cup C)$ (۳)	



	اگر $\{2n+1 n \in N, n < 3\}$ ، $T = \{x x \in N, x \leq 4\}$ ، $O = \{1, 3, 5, 7\}$ باشد : الف) مجموعه های T, S را با اعضاشان مشخص کنید.	۴
۱/۵	$S = \{ \quad \}$ ، $T = \{ \quad \}$	
۱/۵	$S \cup T =$ $T \cap O =$ $T - S =$	ب) حاصل عبارات زیر را با اعضای آنها بنویسید.
۱/۵		برای هر یک از جملات زیر یک شکل مناسب رسم کنید. الف) $A \cap B = \emptyset$ ب) $A \subseteq B \subseteq C$ ج) $A \cap B = A, B \cap C = \emptyset$
۱/۵	$A = \{x + 5 x \in Z, -2 \leq x < 2\} =$ $B = \{x^2 - 1 x \in W, x < 4\} =$	اعضای مجموعه های زیر را بنویسید.
۱/۵	$C = \{ \dots \} =$ $D = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\} =$	مجموعه های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.
۱		حاصل $(A - (A \cap B))$ را روی شکل زیر با هاشور زدن مشخص کنید.
۱/۵	$B = \{4, y+2\}$ ، $A = \{x-5, 5\}$ باهم مساوی اند. مقادیر x, y را به دست آورید.	دو مجموعه $\{ \dots \}$ باهم مساوی اند. مقادیر x, y را به دست آورید.
۲		تمام زیر مجموعه های $M = \{a, b, c\}$ را بنویسید.
۱		سئوال جایزه : مجموعه $\{\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots\} = A$ را با علائم ریاضی بنویسید.

فصل دوم

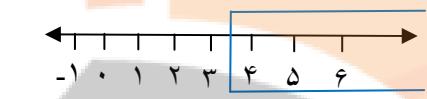
اعداد حقیقی

عدادهای گویا: $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ - یعنی هر عددی را که به توان

به شکل کسر نوشته باشد که صورت و مخرج عددی صحیح بوده و مخرج صفر نباشد.

* یک مجموعه را به سه حالت می‌توان نمایش داد: توصیفی، زبان نمادین (ریاضی)، نمایش هندسی (محور).

◀ **مثال «۱»: مجموعه $\{4, 5, 6, 7\}$ را به حالت‌های مختلف نمایش دهید.**

نمایش هندسی (محور)	زبان نمادین (علایم ریاضی)	توصیفی
	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 4\}$	عدادهای طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۴

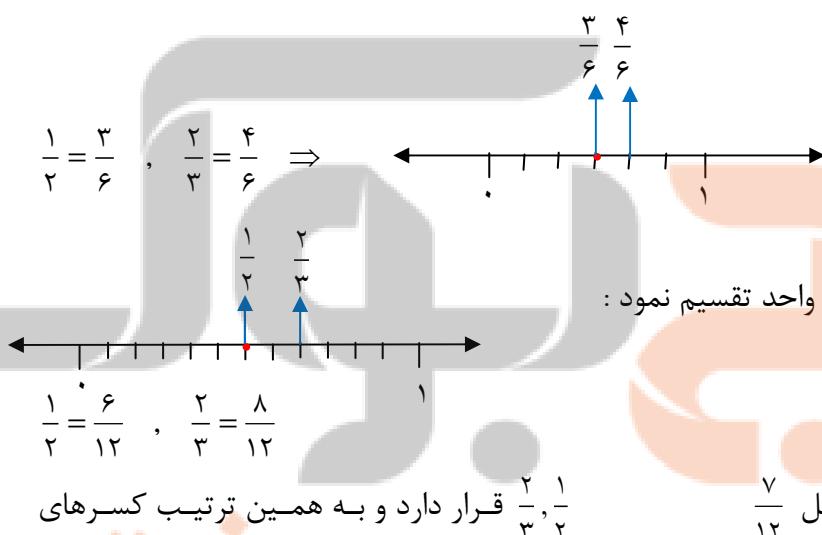
* پیدا کردن کسرهایی بین دو کسر دلخواه :

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ باشد، روش‌های زیر را

◀ **مثال «۲»:**

بررسی می‌کنیم:

(الف) **نمایش هندسی:** سعید ابتدا مخرج‌ها را یکسان کرد و سپس آن‌ها را روی محور نمایش داد.



واحدهای ۶ قسمتی را به ۱۲ واحد تقسیم نمود:

سعید نتیجه گرفت عددی مثل $\frac{7}{12}$ دیگری بین این دو کسر پیدا کرد.

(ب) **محاسبات ریاضی:** حامد میانگین دو کسر $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ را محاسبه کرد و ادعا کرد که حاصل بین دو

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} = \text{میانگین}$$

کسر قرار می‌گیرد یعنی:

حالا بین $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}$ دو کسر دیگر پیدا می کنیم :

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{12}}{2} = \frac{\frac{13}{12}}{2} = \frac{13}{24} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12} < \frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2}, \frac{7}{12}$ پیدا کردیم. این روند را ادامه داده و بی شمار کسر بین آنها بدست می آوریم.

نکته : بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد و عدهای گویا را نمی توان با نوشتن عضوها نمایش داد.

ج) جمع کردن صورت ها باهم و مخرج ها باهم : بی $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ یک کسر پیدا کنید.

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}$$

اگر دو عدد گویا را به صورت اعشاری بنویسیم، به سادگی می توان عددی بین آن دو عدد بدست آورد.

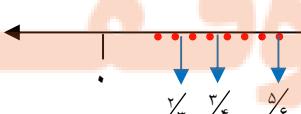
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{5} = 0.4 \\ \frac{3}{4} = 0.75 \\ \frac{5}{8} = 0.625 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{2}{5}$$

* مقایسه کسرها :

الف) هم مخرج کردن کسرها : نادیا برای مقایسه ی سه کسر $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ برای آنها مخرج مشترک ۱۲ را انتخاب کرده و سپس آنها را باهم مقایسه کرد.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

ب) نمایش هندسی : شادی کسرها را به صورت تقریبی روی محور نمایش داده و سپس باهم مقایسه کرد.



ج) محاسبات ریاضی : شینا با ماشین حساب حاصل هر کسر را بدست آورد و سپس باهم مقایسه کرد. (تا دو رقم اعشار)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} \approx 0.83 \\ \frac{3}{4} \approx 0.75 \\ \frac{2}{3} \approx 0.66 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

** تبدیل کسر متعارفی به عدد اعشاری :

۱) **عددهای اعشاری متناهی یا مختوم :** اگر در تقسیم صورت بر مخرج، باقیمانده صفر شود، آن کسر را مختوم گویند.

$$\frac{2}{5} = 0.\overline{4}, \quad \frac{3}{20} = 0.\overline{15}$$

◀ **مثال «۳»:**

نکته «۱»: اگر در تجزیه مخرج کسر فقط عامل های اول ۲ و ۵ باشند، حتماً آن کسر مختوم است.

۲) **عددهای اعشاری متناوب ساده :** اگر در خارج قسمت عددی مرتبت تکرار شود، آن را متناوب ساده گویند.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

◀ **مثال «۴»:**

(خط تیره‌ی بالای عدد یعنی آن عدد تکرار می‌شود به عدد تکراری دوره‌ی گردش گویند).

نکته «۲»: در مخرج کسرهایی که متناوب ساده‌اند، عامل های اول ۲ یا ۵ وجود ندارد.

۳) **عددهای اعشاری متناوب مرکب :** این نوع اعداد از تقسیم صورت بر مخرج کسرهایی حاصل می‌شوند که علاوه بر عامل های اول سازنده مخرج ۲ و ۵ از سایر عدهای اول نیز استفاده شود و خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم به رقم‌های تکراری می‌رسد و دوره‌ی گردش پیدا می‌کند.

◀ **مثال «۵»:**

$$\frac{2}{15} = 0.1\overline{3333\dots} = 0.\overline{13}$$

$$\frac{2302}{990} = 2.\overline{3252525} = 2.\overline{325}$$

بیشتر بدانیم

* **حاصل جمع اعداد اعشاری متناوب :** ابتدا اعداد را به صورت گسترده نوشته و سپس مانند اعداد معمولی محاسبه می‌کنیم.

◀ **مثال «۶»:**

$$1.\overline{6} + 3.\overline{25} = 1.\overline{622222\dots} + 3.\overline{255555\dots} = 4.\overline{877777\dots} = 4.\overline{87}$$

* **اعداد گنگ یا آصم**: اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن ها نامتناهی و دارای دوره‌ی تناوب نمی باشند، را اعداد گنگ گوییم و با Q' نامگذاری می کنیم مانند:

$$0.\overline{11}, \sqrt{10}.1 + \sqrt{2}$$

نکته :

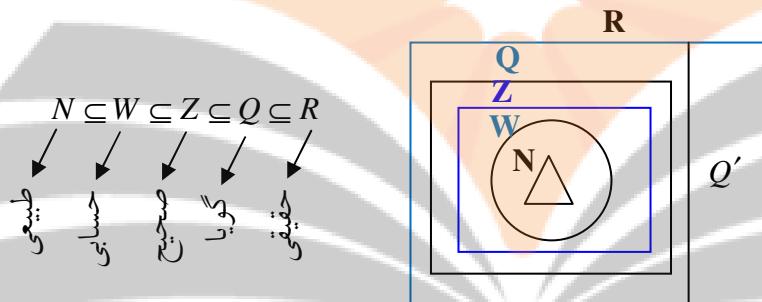
(الف) جمع دو عدد گویا و گنگ همواره گنگ است. $(2 + \sqrt{10}) \in Q'$

(ب) ضرب عددی گنگ در عددی گویا عددی گنگ است. $2\sqrt{5} \in Q'$

(ج) ضرب دو عدد گنگ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in Q', (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2 \in Q$$

* **مجموعه اعداد حقیقی**: از اجتماع مجموعه های گویا و گنگ مجموعه‌ی اعداد حقیقی به دست می آید. یعنی $R = Q \cup Q'$ (یعنی اعداد حقیقی)

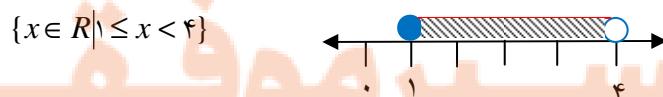


◀ مثال «۷» :

$$\sqrt{8} \in Q', \sqrt{9} \in Q, 0 \in Q, 0.\overline{124} \in Q'$$

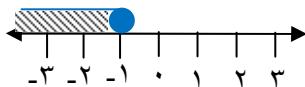
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ است پس همه‌ی اعداد حقیقی را می‌توان با خط ممتدی روی محور نشان داد: یک خط از ابتدای آن نقطه تا انتهای آن مجموعه رسم می‌کنیم. اگر آن نقطه انتهايی یا ابتدایی در مجموعه وجود داشته باشد، تو پر و در غیر این صورت تو خالی خواهد بود.

◀ مثال «۸» :



◀ مثال «۹»:

$$\{x \in R \mid x \leq -1\}$$



* **قدر مطلق:** فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و یا علامت $|a|$ نوشته می‌شود. پس قدر مطلق صفر مساوی صفر و قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه‌ی آن است «به طور کلی، قدر مطلق هر عدد، عددی مثبت است».

◀ مثال «۱۰»:

$$|5|=5 \quad , \quad \left|-\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5} \quad , \quad |-{\sqrt{5}}|={\sqrt{5}}$$

$$|-20-30+5|=|-45|=45$$

$$|0.5+6|=|6.5|=6.5$$

نکته «۱»: قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد مساوی حاصل ضرب قدر مطلق آن هاست.

◀ مثال «۱۱»:

$$|(-5) \times (-4)| = |-5| \times |-4| = 5 \times 4 = 20$$

نکته «۲»: قدر مطلق مجموع دو عدد کوچک‌تر یا مساوی مجموع قدر مطلق آن دو عدد است.

◀ مثال «۱۲»:

$$|-7+4| \leq |-7| + |4|$$

$$\Rightarrow |-3| \leq 7+4$$

$$\Rightarrow 3 \leq 11$$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 . \end{cases}$$

نکته «۳»: تعریف قدر مطلق: با نماد ریاضی

نکته «۴»: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ یعنی قدر مطلق حاصل تقسیم دو عدد مساوی است با حاصل تقسیم قدر

مطلق آن دو عدد. ($y \neq 0$).

◀ مثال «۱۳»:

$$\left|\frac{-8}{7}\right| = \frac{|-8|}{|7|} = \frac{8}{7}$$

$$\sqrt{a^r} = |a| \quad \text{نکته «۵»:}$$

$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})} = \sqrt{-\sqrt{2}} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

اعدادی منفی

◀ مثال «۱۴»:

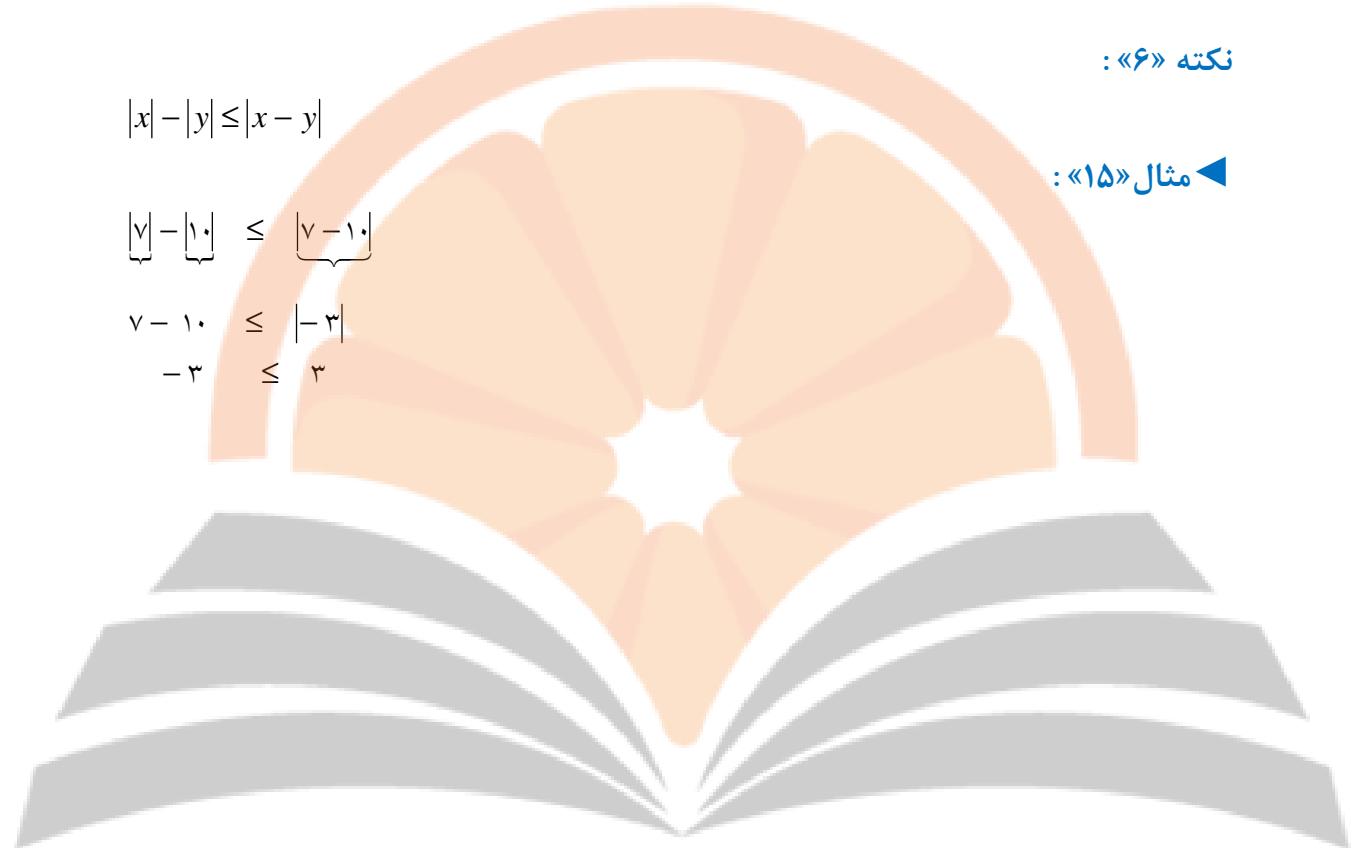
نکته «۶»:

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

◀ مثال «۱۵»:

$$|\sqrt{7} - \sqrt{10}| \leq |\sqrt{7} - \sqrt{10}|$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{10} \leq |-3| \\ -3 \leq \sqrt{3}$$



نیزه بود

تلاشی در مسیر موفقیت

نمونه سوالات
فصل اعداد حقیقی

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) $\sqrt{15}$ عددی گویا است.

(ب) مجموعه ای اعداد گویا را می توان با نوشتن عضوها نمایش داد.

(ج) $\frac{5}{12}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ قرار دارد.

(د) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد.

(ه) نمایش اعشاری $\frac{2}{5}$ عددی مختوم است.

(و) حاصل $\frac{1}{3}$ به صورت اعشار عددی متناوب است.

(ز) عدد $\frac{3}{4}$ از عدد $\frac{3}{5}$ کوچک تر است.

(ح) از اجتماع دو مجموعه \mathbb{Z}, Q مجموعه همه ای اعداد حقیقی حاصل می شود.

(ط) عدد $\sqrt{1/44}$ عدد گنگ است.

(ی) اگر $a < 0$ باشد آنگاه $|a| = -a$

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

(الف) بین هر دو عدد گویا عدد گویا وجود دارد.

$$\left| \frac{a}{b} \right|$$

(ب) مجموعه ای عدهای گویا به زبان نمادین :

(ج) حاصل $1/45^3$ به صورت کسر مساوی است با

(د) عدد $\frac{7}{6}$ به صورت اعشار مساوی است با

(ه) $N \subseteq W \subseteq \dots \subseteq Q$

(و) اجتماع مجموعه ای عدهای گویا و اصم را مجموعه اعداد گوییم.

(ز) عدد $\sqrt{29}$ بین دو عدد صحیح متولی و قرار دارد.

(ح) عدد $\sqrt{7} + 2$ بین دو عدد صحیح متولی و قرار دارد.

(ط) عدد $\sqrt{13} - 4$ بین دو عدد صحیح متولی و قرار دارد.

(ی) فاصله ای هر نقطه روی محور تا مبدأ را آن عدد می نامیم.

(ک) قدر مطلق مجموع دو عدد از مجموع قدر مطلق آن دو عدد یا است.

(ل) حاصل عبارت $|4 - 7 - 10|$ برابر است با

۳. گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.

(الف) کدامیک از کسرهای زیر از $\frac{4}{5}$ بزرگ‌تر است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{9}{10} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(ب) کدام گزینه از کسرهای زیر مختوم یا متناهی است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{11} \quad (2)$$

$$\frac{7}{6} \quad (1)$$

(ج) کدامیک از عددهای زیر گنگ (اصم) است؟

$$\sqrt{21+4} \quad (4)$$

$$0.\overline{11} \quad (3)$$

$$\frac{3}{14} \quad (2)$$

$$-\frac{9}{5} \quad (1)$$

(د) حاصل ضرب دو عدد گنگ:

۲) گویاست

۳) نه گنگ و نه گویا باشد

ه) عدد $(\sqrt{17}-3)$ بین کدام دو عدد صحیح متولی قرار دارد؟

$$-7 \text{ و } -8 \quad (4)$$

$$-2 \text{ و } -1 \quad (3)$$

$$-6 \text{ و } -7 \quad (2)$$

$$-8 \text{ و } -9 \quad (1)$$

(ز) کدام عبارت زیر درست است؟

$$-\sqrt{17} \in R \quad (4)$$

$$(2+\sqrt{2}) \in Q \quad (3)$$

$$\sqrt{16} \notin N \quad (2)$$

$$R \subseteq Z \quad (1)$$

ح) عدد 0.2923379 به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) Q : گویا

۲) Z : گنگ

۳) W : حسابی

ط) حاصل عبارت $|\sqrt{5}-7+\sqrt{5}|$ برابر است با:

$$2\sqrt{5}+7 \quad (4)$$

$$2\sqrt{5}-7 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$-7 \quad (1)$$

۴. بین دو عدد $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ سه کسر پیدا کنید.

۵. کسرهای زیر را باهم مقایسه کنید. (از کوچک به بزرگ مرتب کنید).

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{.}{11}$$

۶. عددهای کسری را به اعشار و اعداد اعشاری را به کسر تبدیل کنید.

$$\begin{array}{l} \text{الف) } \frac{1}{5} \\ \text{ب) } \frac{2}{3} \\ \text{ج) } 3/157 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ب) } \frac{2}{3} \\ \text{د) } 2/07 \end{array}$$

۷. محاسبات زیر را انجام دهید.(برای دانش آموزان علاقمند)

(الف) $0.\overline{7} \cdot 0.\overline{3} =$

(ب) $0.\overline{3}\overline{1}\overline{5} + 0.\overline{1}\overline{7} =$

(ج) $20.\overline{1}\overline{8} + 1.\overline{4}\overline{1} =$

۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{-7 + \frac{1}{2}}{-3 + 8} \div (-\frac{5}{6}) =$

(ب) $(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}) \times (-\frac{2}{5}) =$

(ج) $\frac{3}{7} + \frac{-2}{5} \times \frac{15}{4} - (-\frac{1}{14}) =$

۹. در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید.

$\sqrt{3} \bigcirc Q'$ ، $\cdot \bigcirc W$ ، $\sqrt{17} \bigcirc Q$ ، $Q \bigcirc R$

$Z \bigcirc Q$ ، $0.\overline{1}\overline{1} \bigcirc Q'$ ، $0.\overline{7}\overline{3} \bigcirc R$ ، $-\frac{8}{9} \bigcirc N$

۱۰. بین $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

۱۱. بین ۵ و ۶ سه عدد گنگ بنویسید.

۱۲. $\sqrt{17}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

تلاشی در مسیر موفقیت

۱۳. مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in R \mid -\leq x < 3\}$$

$$B = \{x \in R \mid -1 < x < 4\}$$

$$C = \{x \in R \mid x \leq -2\}$$

$$D = \{x \in R \mid x \geq 1\frac{1}{2}\}$$

۱۴. با توجه به محور مجموعه ای متناظر آن را بنویسید.

$$E = \{x \in R \mid$$

$$F = \{$$

$$G = \{$$

۱۵. مجموعه های سمت چپ را به مجموعه مناسب در سمت راست وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
$Z \cap Q$	R
$Q \cup Q'$	\emptyset
$Q \cap Q'$	Q
$R - Q'$	Z
$W \cap Z$	W

۱۶. الف) عدد $\sqrt{20} + 5$ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

ب) عدد $5 - \sqrt{50}$ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۷. الف) بین دو عدد ۶ و ۵ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

ب) بین ۵ و ۶ چند عدد **گویا** وجود دارد؟ با ذکر مثال.

ج) بین ۵ و ۶ چند عدد **گنگ** وجود دارد؟ با ذکر مثال.

۱۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $|-8 - 7/\sqrt{5} + 10| =$

(ب) $|(-4) \times (+5)| =$

(ج) $|7 - 5\sqrt{3}| =$

(د) $|3^3 - 27| =$

(ه) $|- \sqrt{45} - \sqrt{20} + 3\sqrt{5}| =$

(و) $\sqrt{3 - \sqrt{10}}^{\circ} =$

(ز) $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^{\circ}} =$

۱۹. اگر $a = -3$ و $b = -7$ باشد حاصل $|a+b| - |ab|$ را به دست آورید.

۲۰. اگر $P = \frac{-3}{10}$, $n = \frac{4}{5}$, $m = -\frac{2}{3}$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $|6m - 20n + 5 \cdot p| + 10|P| + 3|m| =$

(ب) $\sqrt{(m+p)^{\circ}} - \frac{49}{36} =$

۲۱. نتیجه منطقی از عبارات را دریافت کرده و تساوی ها را کامل کنید.

۱) $a > 0 \Rightarrow |a| =$

۲) $a < 0 \Rightarrow |a| =$

۳) $a > 0, b > 0 \Rightarrow |a+b| =$

۴) $a < 0, b < 0 \Rightarrow |a+b| =$

بسمه تعالیٰ

آزمون پایانی فصل اعداد حقیقی

ردیف	رسول اکرم (ص) : بهترین علم آن است که مفید باشد	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) کسر $\frac{3}{5}$ از $\frac{5}{6}$ بزرگ تر است.</p> <p>(ب) $\sqrt{14}$ بین دو عدد ۳ و ۴ قرار دارد.</p> <p>(ج) $\sqrt{4/5}$ عددی گنگ است.</p> <p>(د) $\frac{2}{3}$ برابر با $\frac{2}{3}$ است.</p>	۲
۲	<p>جملات زیر را کامل کنید.</p> <p>(الف) نمایش اعشاری متناوب کسر $\frac{1}{3}$ برابر با ... است.</p> <p>(ب) اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن ها <u>نامتناهی</u> و دوره‌ی <u>تناوب ندارند</u>، مجموعه می‌شوند.</p> <p>(ج) عدد $2 + \sqrt{18}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.</p> <p>(د) به مجموعه‌ی تمام عده‌های گویا و باهم مجموعه‌ی اعداد حقیقی گویند.</p>	۲/۵
۳	<p>گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(الف) کدام یک از اعداد زیر گویا است؟</p> <p>(۱) عدد $0/\overline{11}$</p> <p>(۲) $3\sqrt{2}$</p> <p>(۳) $0/011021\dots$</p> <p>(۴) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$</p> <p>(ب) کدام گزینه عبارتی نادرست است؟</p> <p>(۱) $Z \subseteq Q$</p> <p>(۲) $Q \cap Q' = \emptyset$</p> <p>(۳) $N \cup Z = \emptyset$</p> <p>(۴) $Q \cup Q' = R$</p> <p>(ج) عدد کدام گزینه از سایر عده‌ها کوچک تر است؟</p> <p>(۱) $\frac{-1}{3}$</p> <p>(۲) $\frac{-2}{3}$</p> <p>(۳) $\frac{-3}{2}$</p> <p>(۴) عدد $3 + \sqrt{39}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟</p> <p>(۱) ۹ و ۱۰</p> <p>(۲) ۱۰ و ۱۱</p> <p>(۳) ۱۱ و ۱۰</p> <p>(۴) ۷ و ۸</p>	۲
۴	<p>بین $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ سه کسر مشخص کنید و سپس آن ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.</p>	۱/۵

۰/۷۵	$\frac{\frac{1}{3}}{ -3 \times 3 - 1 } =$	الف) حاصل عبارت زیر را به صورت عدد اعشاری بنویسید.	۵
۰/۵		ب) کسر $\frac{7}{4}$ را به صورت عدد اعشاری متناوب بنویسید. ج) اگر $a = -3$ و $b = -7$ باشد حاصل $ a+b - ab $ را به دست آورید.	
۰/۷۵		در جای خالی علامت \in یا \subseteq قرار دهید.	۶
۱/۵	$z \bigcirc Q$, $\{-\frac{2}{3}, \sqrt{7}\} \bigcirc R$, $\sqrt{0/09} \bigcirc Q$ $-\frac{2}{3} \bigcirc z$, $0.\overline{11} \bigcirc Q'$, $\frac{\sqrt{36}}{2} \bigcirc N$		
۰/۷۵		الف) مجموعه $A = \{x \in R 0 < x \leq 2\}$ را روی محور زیر نشان دهید.	۷
۰/۷۵	$B = \{ \quad \}$	ب) با توجه به محور مجموعه i متناظر با آن را بنویسید.	
۰/۵		ج) آیا $\sqrt{7}$ عضوی از مجموعه B است چرا؟	
۱/۵	$3 + 2 - \sqrt{5} =$	حاصل عبارت زیر را به دست آورده و سپس روی محور نمایش دهید.	۸
۱/۵	$ a - 2c + 4b + 5a =$	اگر $C = -3$, $B = \frac{3}{2}$, $a = -2$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.	۹

۰/۵	الف) بین اعداد ۴ و ۵ دو عدد گنگ بیابید. ب) بین $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ دو عدد گنگ بنویسید.	۱۰
۱ ۱ ۰/۵	حاصل عبارات زیر را به دست آورید. الف) $ -2/3 \div \left -7 + \frac{1}{2} \right =$ ب) $ 3 - \sqrt{7} + -2 - \sqrt{7} =$ ج) $\sqrt{(5 - \sqrt{37})^2} =$	۱۱
۱	سُؤال جایزه : عدد اعشاری متناوب $0.\overline{15}$ را به کسر تبدیل کنید.	۱۲
 الگوی عددی جالب		

$$6 \times 6 + 4 = 40$$

$$66 \times 66 + 44 = 4400$$

$$666 \times 666 + 444 = 444000$$

$$6666 \times 6666 + 4444 = 44440000$$

شما هم می توانید این الگو را تا دو ردیف دیگر ادامه دهید.

تلاشی در مسیر موفقیت

خلاصه درس :

فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

* **استدلال** : استدلال دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجھول بوده است.

* **اثبات** : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گوییم.

* **فرض و حکم مسئله** : اطلاعاتی که در مسئله داده و یا حقایقی که مرتبط با آن مسئله است و از قبیل آن ها می دانستیم، **فرض مسئله** و خواسته ای مسئله و مجھولات مربوط به آن، **حکم مسئله** هستند.

تعمیم یک خاصیت : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر اعضای آن مجموعه نیز وجود داشته باشد، می توان درستی نتیجه ای بدست آمده را به همه ای اعضای آن مجموعه تعمیم داد.

* **هم نهشتی مثلث ها** : در سال قبل حالت های هم نهشتی را یاد گرفته اید :

- | | |
|--------------------------------|--|
| برای همه ای مثلث ها | ۱. دو ضلع و زاویه بین (ض زض)
۲. دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
۳. سه ضلع (ض ض ض) |
| مخصوص مثلث قائم الزاویه | |
| | ۴. وتر و یک ضلع (و ض)
۵. وتر و یک زاویه تند (و ز) |

گام هایی برای حل مسئله هندسی :

۱. **درک و فهم مسئله** : صورت مسئله را با دقیق بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده ای آن را بشناسید. مفاهیمی همچون خط، پاره خط، عمود منصف، نیم ساز، مماس، شعاع، نوع مثلث، نوع چهار ضلعی و... می تواند در حل مسئله مؤثر باشد.

۲. **رسم شکل** : متناسب با داده های مسئله شکلی را رسم کرده و به کمک آن شکل گام های بعد را برمی داریم.

۳. **مشخص کردن فرض و حکم مسئله** : داده های مسئله (فرض) و خواسته های مسئله (حکم) را در یک جدول نوشته و مشخص می کنیم.

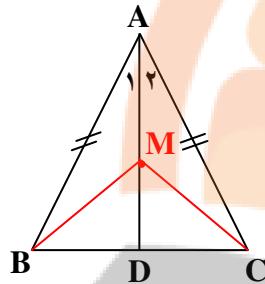
۴. **راهبرد حل مسئله** : برای رسیدن از فرض به حکم راه حل مناسبی پیدا کنید.

روش های مختلفی مانند هم نهشتی مثلث ها، تشابه دو شکل، رابطه فیثاغورس، زوایای محاطی و مرکزی، خطوط موازی و مورب و... در حل مسئله مفید خواهند بود.

◀ **مثال «۱»:** نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله ای هر نقطه دلخواه روی نیم ساز زاویه ای رأس، از دو سر قاعده برابر است.

گام «۱»: در صورت مسئله از مثلث متساوی الساقین، نیم ساز، زاویه رأس و قاعده استفاده شده که از خواص مثلث متساوی الساقین (ساق ها برابر و زاویه های مجاور قاعده نیز برابرند) و نیم ساز بودن (زاویه رأس نصف می شود) کمک می گیریم.

گام «۲»: رسم شکل : مثلث متساوی الساقینی به قاعده \overline{BC} و رأس A رسم می کنیم.



$$\frac{\text{فرض}}{\text{حکم}} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC}, B = C, A_1 = A_r \\ \overline{MB} = \overline{MC} \end{array} \right. \quad \text{گام «۳»:}$$

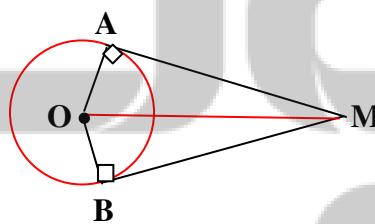
گام «۴»: نوع راهبرد هم نهشتی دو مثلث

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \\ A_1 = A_r \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مشترک}} \text{حالت (ض ز ض)} \rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC \Rightarrow \overline{MB} = \overline{MC}$$

◀ **مثال «۲»:** ثابت کنید اگر از یک نقطه خارج از دایره دو مماس بر دایره رسم شود، طول این دو مماس باهم برابرند.

گام اول : خاصیت خط مماس بر دایره را از پایه هشتمن خواندیم : شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

گام دوم : رسم شکل : متناسب با داده های مسئله شکل مقابل را رسم می کنیم.



$$\frac{\text{فرض}}{\text{حکم}} \quad \left| \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB}, A = B = 90^\circ \\ \overline{AM} = \overline{BM} \end{array} \right. \quad \text{گام سوم:}$$

گام چهارم : راهبرد حل مسئله : هم نهشتی

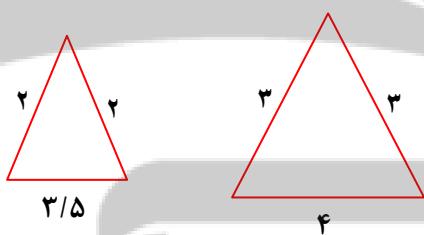
$$\begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{حالت: وتر و یک ضلع} \\ \text{وتر مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow O \overset{\Delta}{A} M \cong O \overset{\Delta}{B} M \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$$

شکل های متشابه : هرگاه در دو شکل همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) و اندازه ی زاویه ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل **متشابه** گوییم.

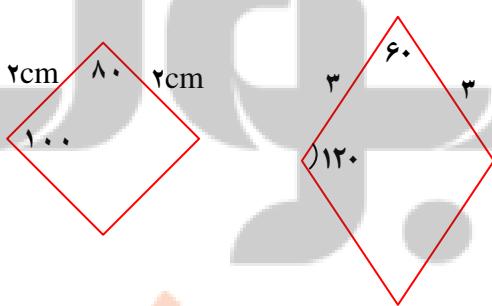
نکته «۱» :

- الف) دو مربع دلخواه همواره متشابه اند.
- ب) دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه اند.
- ج) هر دو شکل هم نهشت باهم متشابه اند.
- د) دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند. زیرا ممکن است زاویه های نظیر مساوی نباشند.
- هـ) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر نکرده باشند.
- و) دو مثلث متساوی الساقین دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه های نظیر باهم برابر نبوده یا اضلاع متناظر متناسب نباشند (به یک اندازه تغییر نکرده باشند).

◀ **مثال «۳» :** مثلث های زیر متساوی الساقین هستند اما متشابه نیستند زیرا :



◀ **مثال «۴» :** دو لوزی زیر باهم متشابه نیستند. زیرا زاویه های نظیر برابر نیستند.



نکته «۲» : نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

◀ **مثال «۵» :** دو مثلث ABC و DEF باهم متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{1}{2}$ است. اگر

اضلاع مثلث ABC به اندازه ی ۳ و ۵ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه ی $x-3$ و $2y+8$ و 10 باشند، مقدار x و y را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{3}{x-3} = \frac{5}{10} = \frac{6}{2y+8} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = \frac{10 \times 3}{5} = 6 \rightarrow x-3 = 6 \rightarrow x = 9 \\ 2y+8 = \frac{10 \times 6}{5} = 12 \rightarrow 2y+8 = 12 \rightarrow 2y = 12 - 8 = 4 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

توجه: اگر از نسبت تشابه ۲ استفاده کنیم یعنی اضلاع مثلث ABC هر کدام ۲ برابر بزرگ شده اند پس در مثال قبل می‌توان نوشت:

$$x-3 = 3 \times 2 \Rightarrow x-3 = 6 \rightarrow x = 9$$

$$2y+8 = 6 \times 2 \rightarrow 2y+8 = 12 \rightarrow y = 2$$

نکته ۳:

الف) نسبت محیط‌های دو n ضلعی با نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

ب) نسبت مساحت‌های دو n ضلعی با مجدور نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

مثال «۴»: نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازهٔ ضلع پنج ضلعی بزرگ ۶ باشد، اندازهٔ ضلع پنج ضلعی کوچک تر چند است؟

پاسخ: بنا به نکته ۳ قسمت «ب» داریم: اگر نسبت تشابه را $\frac{a}{b}$ فرض کنیم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \times 2}{3} = 4$$

نکته «۴»: در دو مثلث متشابه:

الف) نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

ج) نسبت میانه‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

د) نسبت نیم سازه‌ای متناظر با نسبت تشابه برابر است.

ه) نسبت مساحت‌ها با مجدور نسبت تشابه برابر است.

مثال «۵»: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{16}{25}$ است. نسبت ارتفاع‌های متناظر دو مثلث را به دست آورید.

پاسخ: نسبت تشابه را $\frac{x}{y}$ می‌گیریم پس:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

نسبت تشابه

چون نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر است پس نسبت ارتفاع‌های دو مثلث هم $\frac{4}{5}$ است.

نمونه سوالات

فصل هندسه و استدلال

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) اطلاعات داده شده و معلومات مسئله را فرض مسئله گوییم.

(ب) با مشاهده کردن و حواس پنج گانه هم می توان به درستی یک موضوع اطمینان کرد.

(ج) اگر خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه ثابت کردیم، آن خاصیت برای تمامی اعضای مجموعه درست است.

(د) برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی و کلاسیک وجود ندارد.

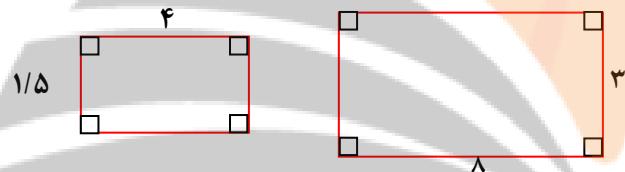
(ه) در هر مستطیل قطرها باهم برابرند.

(و) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه‌اند.

(ز) دو لوزی دلخواه همواره متشابه‌اند.

(ح) نسبت تشابه دو $\frac{1}{2}$ است.

(و) هر دو مربع دلخواه متشابه‌اند.



۲. جملات زیر را کامل کنید.

(الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی را در هندسه گویند.

(ب) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، می گوییم.

(ج) اطلاعات داده شده در مسئله را و خواسته‌ی مسئله را گویند.

(د) اولین گام در حل مسئله هندسی است.

(ه) گام دوم در حل مسائل هندسی این است که با توجه به مسئله

(و) در دو شکل متشابه اضلاع و زاویه‌های نظیر هستند.

(ز) نسبت اضلاع متناظر دو شکل را گویند.

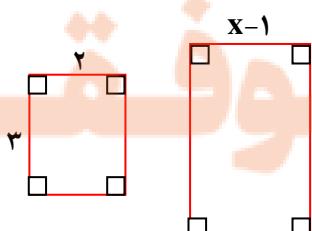
(ح) دو لوزی در صورتی متشابه‌اند که نظیر باهم برابر باشند.

(ط) دو مستطیل در صورتی متشابه‌اند که ... متناظر باشند.

(ی) هر دو مربع دلخواه متشابه

(ک) هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه متشابه

(ل) مقدار X در شکل های متشابه زیر برابر است با



۳. گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.

(الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبل برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده را چه می‌نامند؟

- ۱) فرض مسئله ۲) حکم مسئله ۳) استدلال ۴) شهود

ب) اگر $a < 0$ و $b > 0$ باشد، کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟

- (۱) $ab > 0$ (۲) $ab = 0$ (۳) $ab < 0$ (۴) $(a-b) > 0$

ج) کدام گزینه از حالت‌های هم نهشتی دو مثلث محسوب نمی‌شود؟

- (۱) (ض ض ض) (۲) (ز ض ز) (۳) (ض ض ض) (۴) (ز ز ز)

د) کدام مورد زیر همواره معتبر نیست؟

(۱) دو زاویه متقابل به رأس باهم مساوی‌اند.

(۲) هر نقطه که روی نیم ساز یک زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

(۳) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.

(۴) محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث درون آن مثلث قرار می‌گیرد.

ه) در دو شکل متشابه:

- (۱) اضلاع مساوی و زاویه‌ها متناسب‌اند
 (۲) اضلاع متناسب و زاویه‌ها برابرند.
 (۳) اضلاع و زوايا نامساوی‌اند
 (۴) اضلاع و زاویه‌ها به یک نسبت تغییر می‌کنند.

و) کدام شکل همواره با خودش متشابه است؟

- (۱) مستطیل (۲) لوزی (۳) مربع (۴) مثلث متساوی الساقین

ز) طول‌های اضلاع یک مثلث ۷ و ۹ و ۱۴ است. محیط مثلثی که با این مثلث متشابه بوده و

بزرگ‌ترین ضلع آن ۲۱ باشد، چند است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

ح) دو لوزی متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. اگر ضلع لوزی کوچک ۴۵ سانتی‌متر باشد،

ضلع لوزی بزرگ‌تر برابر است با:

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۹۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

و) در یک نقشه مقیاس $\frac{1}{500}$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۱۵ میلی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چند متر است؟

(۱) ۷۵۰۰ متر (۲) ۷۵۰ متر (۳) ۷۵ متر (۴) ۷/۵ متر

۴. سارا گفت همهٔ اعداد طبیعی مثبت اند و چون اعداد طبیعی زیر مجموعهٔ ای از اعداد گویا هستند، پس همهٔ اعداد گویا نیز مثبت اند. آیا استدلال سارا معتبر است چرا؟

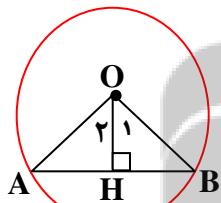
۵. در مسائل زیر فرض و حکم مسئله را مشخص کنید.

الف) ثابت کنید: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.

ب) نشان دهید: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

۶. تساوی های زیر را کامل کرده تا نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن وتر را نصف می کند.

فرض	
حکم	

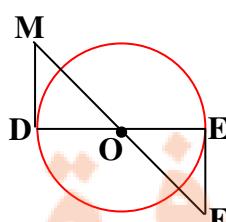


$$\begin{array}{l} \overline{OA} = \text{دایره} \\ \overline{OH} = \text{جون} \end{array}$$

⇒ از تساوی اجزای متناظر دو مثلث

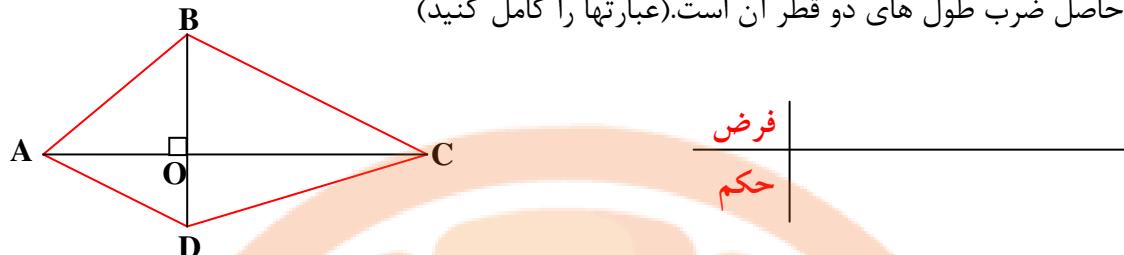
\Rightarrow حالت) \approx

۷. در شکل زیر O مرکز دایره و خط های DM و EF بر دایره مماس اند.



$$\text{؟ } \overline{EF} = \overline{DM} \text{ چرا}$$

۸. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی محدب برهم عمود باشند، مساحت چهارضلعی نصف حاصل ضرب طول های دو قطر آن است. (عبارتها را کامل کنید)

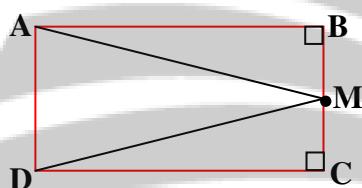


$$\text{مساحت مثلث } ABC + \text{مساحت مثلث } ABCD = \text{مساحت چهارضلعی } ABCD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \quad \times \quad + \frac{1}{2} \times \quad \times \\ &= \frac{1}{2} \quad AC(\quad + \quad) \\ &= \frac{1}{2} \times \quad \times . \end{aligned}$$

فرض
حکم

۹. در مستطیل زیر M وسط \overline{BC} است ثابت کنید مثلث AMD متساوی الساقین است.



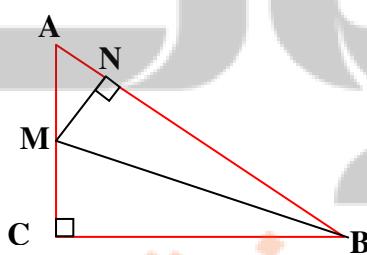
فرض
حکم

دلیل

$$\left. \right\} \Rightarrow (\quad) \Rightarrow \text{حالت} (\quad) \cong \Rightarrow \quad .$$

از تساوی اجزای متناظر دو مثلث نتیجه می‌گیریم که

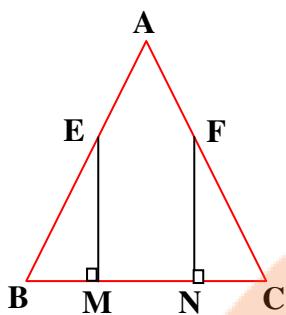
۱۰. در شکل زیر $\overline{BM} = \overline{BN}$ نیم ساز زاویه B است چرا



فرض
حکم

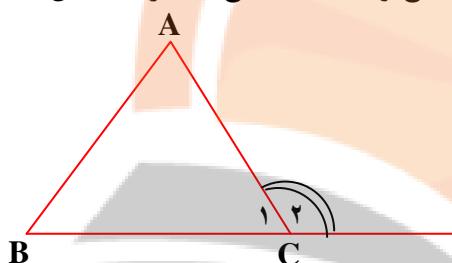
تلاشی در مسیر موفقیت

۱۱. مثلث ABC متساوی الساقین و F و E و ساق ها هستند چرا طول پاره خط های BM و CN برابر است؟



۱۲. نشان دهید در هر مثلث اندازه یک زاویه خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن برابر است.

یادآوری: زاویه ی خارجی یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود.



۱۳. ثابت کنید اگر در یک متوازی الاضلاع قطرها مساوی یکدیگر باشند آن چهارضلعی مستطیل است.

۱۴. نشان دهید طول دو مماس که از یک نقطه خارج از دایره بر آن دایره رسم می شوند، باهم برابرند.

۱۵. دو مستطیل به نسبت $\frac{3}{4}$ باهم متشابه اند اگر طول مستطیل بزرگ تر ۲۸ سانتی متر باشد، اندازه ی طول مستطیل کوچک تر چند سانتی متر است؟

۱۶. مقیاس یک نقشه $1 : 1000$ است. اگر فاصله ی بین دو نقطه روی نقشه $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد، فاصله ی این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟

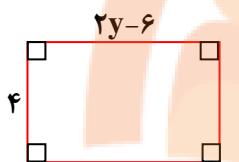
۱۷. الف) آیا دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند چرا؟

ب) آیا دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند چرا؟

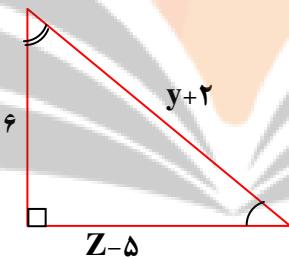
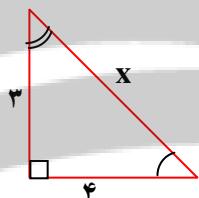
۱۸. الف) نسبت تشابه دو شکل هم نهشت را بنویسید.

$\frac{2}{3}$ است).

ب) دو مستطیل زیر باهم متشابه اند. مقدار x, y را به دست آورید.



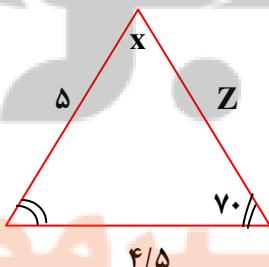
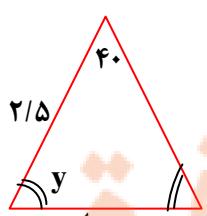
۱۹. دو مثلث زیر باهم متشابه اند مقادیر Z, y, x را به دست آورید.



۲۰. مثلث ABC به ضلع ۴ و ۵ و ۶ با مثلث DEF به ضلع $\frac{1}{2}x + 9, 10, 8$ باهم متشابه اند :

الف) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

ب) مقدار X را به دست آورید.



۲۱. دو مثلث متساوی الساقین زیر باهم متشابه اند.

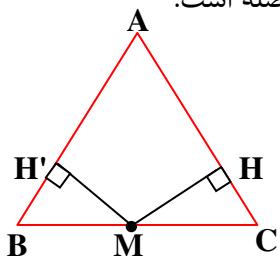
الف) مقادیر مجهول را روی شکل بنویسید.

ب) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

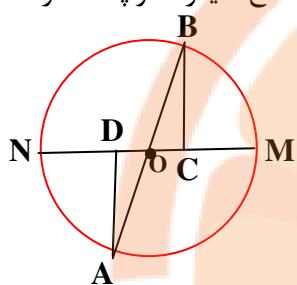
آزمون پایانی فصل هندسه و استدلال

ردیف	بارم	رسول اکرم (ص) : طلب دانش بر هر مسلمان واجب است.	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
۱	۲	<p>(الف) اگر خاصیتی از یک عضو مجموعه را اثبات کردیم، می توان آن خاصیت را به سایر اعضاء نیز تعمیم داد.</p> <p>(ب) اگر $ab < 0$ باشد می توان نتیجه گرفت که حتماً $a < 0$ است.</p> <p>(ج) دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه همواره متشابه اند.</p> <p>(د) اطلاعات داده شده در مسئله را فرض مسئله گوییم.</p>	
۲	۲	<p>گویند.</p> <p>(الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم شدن موضوعی را مسئله اهمیت زیادی دارد.</p> <p>(ب) در حل مسائل هندسی تشخیص فرض و</p> <p>(ج) اگر زاویه بین دو خط در نقشه 50° درجه باشد، زاویه ای بین همان خطوط در طبیعت برابر است با</p> <p>(د) هرگاه در دو شکل زاویه ها تغییر نکرده و اضلاع متناسب باشند به آن دو شکل می گوییم.</p>	کامل کنید.
۳	۲	<p>گزینه هی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(الف) کدام شکل همواره با نوع خودش متشابه است؟</p> <p>(۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) مثلث متساوی الاضلاع (۴) مثلث متساوی الساقین</p> <p>(ب) نقشه شهرستان دزفول $\frac{1}{20000}$ کوچک شده است. اگر فاصله ای امامزاده های روبدند و سبزقبا ۲ کیلومتر باشد، فاصله ای این دو نقطه در نقشه چند سانتی متر است؟</p> <p>(۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۲</p> <p>(ج) کدام استدلال همواره معتبر <u>نیست</u>؟</p> <p>(۱) مثلث متساوی الاضلاع است، در نتیجه هر زاویه ای آن 60° درجه است.</p> <p>(۲) چهارضلعی متوازی الاضلاع بوده و یک زاویه قائم دارد، در نتیجه آن چهارضلعی مستطیل است.</p> <p>(۳) زاویه رأس یک مثلث متساوی الساقین 40° درجه است. در نتیجه هر زاویه مجاور به قاعده 70° درجه است.</p> <p>(۴) دو پنج ضلعی منتظم متشابه اند در نتیجه آن دو پنج ضلعی هم نهشت اند.</p> <p>(۵) کدام گزینه ترتیب گام های حل مسئله هندسی را به درستی نشان می دهد؟</p> <p>(۱) رسم شکل- درک و فهم مسئله- فرض و حکم- تشخیص راهبرد</p> <p>(۲) درک و فهم مسئله- رسم شکل- فرض و حکم- تشخیص راهبرد</p> <p>(۳) فرض و حکم- درک و فهم مسئله- رسم شکل- تشخیص راهبرد</p> <p>(۴) درک و فهم مسئله- فرض و حکم- تشخیص راهبرد- رسم شکل</p>	

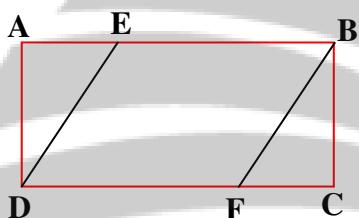
ثابت کنید وسط قاعدهٔ هر مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن به یک فاصله است.



در شکل زیر O مرکز دایرهٔ و $\overline{DN}, \overline{CM}$ هر کدام یک سانتی متر از شعاع دایرهٔ کوچک ترند چرا $?\overline{BC} = \overline{AD}$

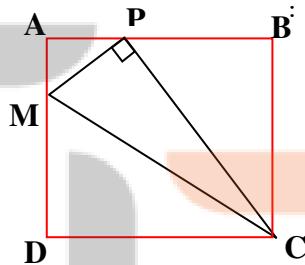


چهارضلعی ABCD مستطیل و $?\overline{DE} = \overline{FB}$ چرا $?\overline{AE} = \overline{FC} = 1/5$



مربع است نشان دهید: ABCD

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2}$$



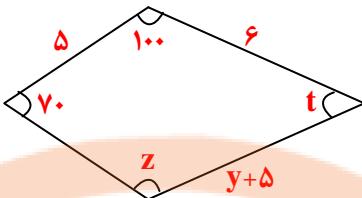
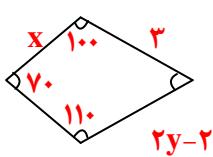
الف) است. اگر ضلع لوزی بزرگ $\frac{3}{7}$ سانتی متر باشد، لوزی کوچک چه قدر است؟

۱

۷

۸

ب) دو چهارضلعی زیر باهم متشابه اند مقادیر مجهول را به دست آورید.



۱

الف) دو مثلث متساوی الساقین در چه شرایطی متشابه اند؟

۱

ب) با رسم شکل و ذکر دلیل نشان دهید دو مستطیل دلخواه همواره متشابه نیستند؟

۱

۰/۵

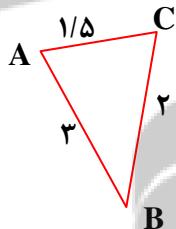
الف) مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلث DEF به اضلاع ۹ و $5y+2$ و 15 متشابه است مقدار y را به دست آورید.

۹

ب) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

۱/۵

به کمک خطوط موازی مثلثی رسم کنید که با مثلث ABC متشابه بوده و نسبت آن ها ۲ باشد.



۱۱

تست هوش

به جای علامت ؟ چه عددی مناسب است؟ سعی کنید ارتباط منطقی بین اعداد پیدا کنید.

۱۲ و ۱۵ و ۴ و ۳

۲۰ و ۲۸ و ۵ و ۴

۳۰ و ۴۵ و ۶ و ۵

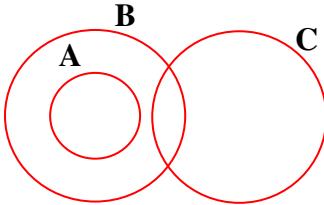
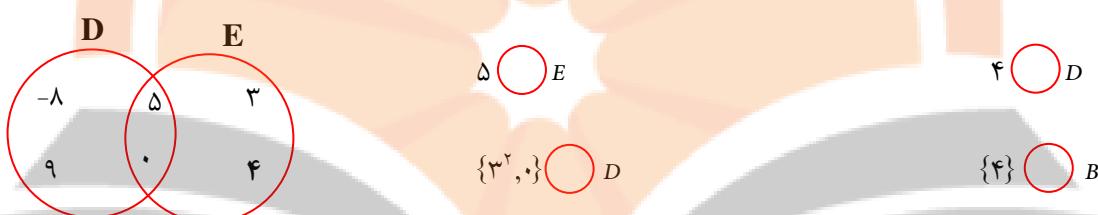
۲۴ و ۶۶ و ۷ و ۶

۵۶ و ۵۵ و ۸ و ۷

؟ و ۶ و ۷ و ۸

آزمون پیش نوبت اول

ردیف		رسول اکرم (ص) : بهترین علم آن است که مفید باشد.	بارم
۱		<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) هر مجموعه زیر مجموعه خودش است.</p> <p>ب) مجموعه $\{\frac{8}{2}, \sqrt{16}, 4\}$ دارای ۴ عضو است.</p> <p>ج) عدد $\frac{3}{14}$ یک عدد گنگ است.</p> <p>د) از اشتراک دو مجموعه گویا و گنگ مجموعه اعداد حقیقی به دست می آید.</p>	۱
۲		<p>جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>* مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه نام دارد.</p> <p>* تعداد زیر مجموعه های $\{\phi, ۰, ۱\}$ مساوی است.</p> <p>* فاصله ای بین یک نقطه تا مبدأ را آن عدد گوییم.</p> <p>* دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته های قبلی را گویند.</p>	۲
۳		<p>گزینه مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) حاصل $(R - Q')$ برابر کدام مجموعه است؟</p> <p>ϕ (۴) Q (۳) N (۲) Z (۱)</p> <p>ب) کدام گزینه عبارتی نادرست است؟</p> <p>۱) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.</p> <p>۲) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح هستند.</p> <p>۳) هر عدد گویا یک عدد حسابی است.</p> <p>۴) هر عدد صحیح یک عدد گویا است.</p> <p>ج) نمایش کدام کسر زیر به صورت اعشاری، متناهی یا مختوم است؟</p> <p>$\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{3}{25}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)</p> <p>د) عدد $\sqrt{19} + 2$ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟</p> <p>۷ و ۶ (۴) ۶ و ۵ (۳) ۱ و ۲ (۲) ۱ و ۳ (۱)</p>	۱
۴	۰/۵	<p>اگر $B = \{x \in N ۸ \leq x < ۱۲\}$, $A = \{7, 8, 9\}$ باشد :</p> <p>الف) مجموعه B را با اعضا ایش مشخص کنید.</p> <p>ب) حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با اعضا بنویسید.</p>	۱/۵
		$A - B =$ $A \cap B =$ $A \cup B =$	

۰/۷۵		با توجه به نمودار مقابل $(B - A) \cap C$ را هاشور بزنید.	۵
۰/۵		اگر تاسی را دو بار بیاندازیم :	۶
۰/۵	$n(s) = ?$	الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن چند عضو دارد؟	
۱		ب) احتمال اینکه مجموع دو عدد ۷ باشد، چند است؟	
۱		با توجه به نمودار زیر در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید.	۷
۱		الف) مجموعه اعداد گویا را با نماد ریاضی بنویسید.	۸
۱	$A = \{9, x^2, -8\}$, $B = \{\frac{18}{2}, 16, 2y - 6, \sqrt{81}\}$	ب) مقدار x, y را طوری بیابید که مجموعه‌های B, A برابر باشند.	
۰/۵		الف) بین -1 و $\frac{1}{2}$ دو کسر بنویسید.	۹
۰/۵		ب) نمایش اعشاری کسر $\frac{3}{5}$ را بنویسید.	
۰/۵		ج) عدد 302 را به صورت کسر بنویسید.	
۱/۵	$(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}) \div (\frac{-10}{9})$	الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.	۱۰
		ب) مجموعه اعداد گویا را به زبان ریاضی بنویسید.	
۰/۵		الف) بین $\sqrt{8}, \sqrt{5}$ یک عدد گنگ بنویسید.	۱۱
۰/۵		ب) عدد ...۰۱۲۳۴۲۵... گویاست یا گنگ چرا؟	
۰/۵	$Q \cap Z = ..$, $Q \cup Q' =$	ج) تساوی‌های زیر را کامل کنید.	

۰/۷۵	الف) مجموعه A را روی محور نمایش دهید.	۱۲
۰/۷۵	ب) اگر $b = -5, a = \sqrt{2}$ باشد حاصل $ a + b ^3$ را به دست آورید.	
۱	ثابت کنید قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{2}$.	۱۳
۱/۵	نشان دهید طول دو مماسی که از نقطه‌ای خارج از دایره بر دایره رسم می‌شوند مساوی است.	۱۴
	<p>برهان:</p>	
۰/۷۵	الف) آیا دو لوزی دلخواه همواره متشابه‌اند؟ چرا؟	۱۵
۱	ب) دو مثلث OCD , OAB متشابه‌اند. مقادیر x, y, z را به دست آورید.	
۱	<p>سوال جایزه:</p>	۱۶
	اگر $B = \{x \in \mathbb{R} \sqrt{2} \leq x < 2\}, A = \{x \in \mathbb{R} 1 \leq x < \sqrt{3}\}$ بنویسید.	

فصل ۴

توان و ریشه

خلاصه درس:

* **توان منفی :** توان های منفی را هم می توان محاسبه کرد. اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ باشد داریم :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

یعنی اگر عدد صحیح غیر صفری از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت انتقال داده شود، توان آن عدد قرینه می شود.

◀ **مثال «۱» :**

$$9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{9}^3 = \frac{1}{81}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \left(\frac{1}{-2}\right)^5 = \frac{1}{-32}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$$

یادآوری : هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر برسد، حاصل یک می شود.

◀ **مثال «۲» :**

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{-1} - (-2)^{-3} = 1 - \left(\frac{1}{(-2)^3}\right) = 1 - \frac{1}{-8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$$

نکته : کلیه ای قوانین عدههای توان دار برای توان های منفی هم صدق می کند. یعنی اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند روابط زیر برقرارند :

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

◀ **مثال «۳» :** حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$\underbrace{3^{-4} \times (-5)^{-4}}_{(\text{الف})} \times (-15)^{-9} = (-15)^{-4} \times (-15)^{-9} = (-15)^{-13}$$

$$12^{-7} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{-7} \div (-8)^3 = (12 \times \frac{-2}{3})^{-7} \div (-8)^3 = (-8)^{-7} \div (-8)^3 = (-8)^{-7-3} = (-8)^{-10}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

* **نماد علمی**: برای سهولت در محاسبه‌ی اعداد بسیار بزرگ یا کوچک آن‌ها را به صورت ضرب توانی از ۱۰ می‌نویسیم. این اعداد را به دو گروه تقسیم می‌کنیم: گروهی از اعداد مثبت بزرگ‌تر از یک و گروه دیگر اعداد مثبت کم‌تر از ۱.

(الف) **نماد علمی اعداد بسیار بزرگ**: ابتدا از سمت چپ یک رقم جدا کرده (یک رقم صحیح) و سپس به تعداد رقم‌های بعد از ممیز توانی از ۱۰ را نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می‌نویسیم.

◀ **مثال «۴»**: نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

$$1023456 \dots \quad (\text{الف})$$

$$1278/95 \quad (\text{ب})$$

پاسخ:

$$1023456 \dots = 10 \times 10^{12}$$

$$1278/95 = 1/27895 \times 10^3$$

توان ۱۲ یعنی تعداد ارقام بعد از ممیز.

توان ۳ یعنی ممیز به تعداد ۳ رقم به سمت چپ حرکت کرده است.

(ب) **نماد علمی اعداد بسیار کوچک**: ابتدا از سمت چپ یک رقم مخالف صفر جدا کرده و سپس به تعداد ارقام قبل از ممیز توانی منفی از ۱۰ را نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می‌نویسیم.

◀ **مثال «۵»**: نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

$$6/7 \times 10^{-5} \quad (\text{الف})$$

$$1/394 \times 10^{-2} \quad (\text{ب})$$

به طور کلی: نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^{-n}$ می‌باشد که a عددی بین ۰ و ۱۰ و n عددی صحیح می‌باشد.

◀ **مثال «۶»**: حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$0/0012 \times 450 \dots = 1/2 \times 10^{-3} \times 4/5 \times 10^5 = 1/2 \times 4/5 \times 10^{-3} \times 10^5 = 5/4 \times 10^2$$

* **ریشه‌گیری**:

(الف) **ریشه دوم**: هر عدد دارای دو ریشه دوم است که این ریشه‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

$$+,- = \text{ریشه‌های دوم} \Rightarrow 9 = (-3)^2$$

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

(ب) **ریشه سوم**: توان سوم (مکعب) عددی مانند ۲ برابر ۸ است. پس ریشه سوم ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

◀ مثال «۷» :

$$(-4)^3 = -64 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

به طور کلی : اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

نکته : هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

* **ضرب و تقسیم رادیکال‌ها :** اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) مساوی باشند، می‌توان آن

رادیکال‌ها را در هم ضرب یا برهم تقسیم کرد یعنی برای هر دو عدد a و b داریم :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[3]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

نکته «۱» : قوانین فوق برای ریشه‌های بالاتر از ۳ نیز درست می‌باشد.

◀ مثال «۸» :

$$\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21}, \quad \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-216} = -6$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5}{4}$$

نکته «۲» : اگر عبارت زیر رادیکال جمع یا تفریق باشد، نمی‌توان آن را به صورت چند رادیکال جداگانه نوشت یعنی :

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

نکته «۳» : در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها، ابتدا قسمت صحیح را محاسبه کرده و سپس رادیکال‌ها در هم ضرب یا برهم تقسیم می‌کنیم.

◀ مثال «۹» :

$$3\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} = (3 \times 4) \times \sqrt{5 \times 2} = 12\sqrt{10} \quad (\text{الف})$$

$$8\sqrt[3]{54} \div 2\sqrt[3]{2} = \frac{8\sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{2} \times \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 4\sqrt[3]{27} = 4 \times 3 = 12 \quad (\text{ب})$$

* **جمع و تفریق رادیکال‌ها :** اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً مثل هم باشند، می‌توان آن‌ها را همانند عبارت‌های جبری باهم جمع یا تفریق کرد.

◀ مثال «۱۰» :

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + 3\sqrt{11} - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{11} &= (5 - 8)\sqrt{2} + (3 + 4)\sqrt{11} \\ &= -3\sqrt{2} + 7\sqrt{11} \end{aligned}$$

◀ مثال «۱۱» : عبارت زیر را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63} &= \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9 \times 7} \\ &= 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} \\ &= -\sqrt{5} - 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

* **گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی** : گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات، لازم است که مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم. برای این منظور صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

◀ مثال «۱۲» : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{7}} &= \frac{5}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \\ \frac{3}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5} \end{aligned}$$

نکته : اگر عدد مخرج ریشه دوم باشد، صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم و اگر عدد مخرج ریشه سوم داشته باشد، صورت و مخرج را در ریشه سوم همان عدد ضرب کرده ولی عدد زیر رادیکال باید توان ۲ داشته باشد. برای سایر ریشه ها نیز با همان ریشه ضرب کرده و توان عدد زیر رادیکال باید یک واحد کم تر از ریشه باشد. به عبارت دیگر اگر مخرج کسری $\sqrt[n]{a^n}$ با شرط $n < m$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب می کنیم.

◀ مثال «۱۳» : مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{4}{\sqrt[4]{2}} = \frac{4}{\sqrt[4]{2}} \times \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{4\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{2^5}} = \frac{4\sqrt[4]{16}}{2} = 2\sqrt[4]{16}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

نمونه سوالات
فصل توان و ریشه

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

- (الف) حاصل 2^{-4} برابر $\frac{1}{16}$ است.
- (ب) مقدار $2^{-1} + 2^0$ مساوی ۱ است.
- (ج) 5^{-1} بزرگ تر از 5^{-2} است.
- (د) نماد علمی 16×10^{-3} می شود.
- (ه) همان $4300^4 = 43 \times 10^4$ است.
- (و) ریشه سوم عدد ۱۲۵ می شود.
- (ز) هر عدد دارای دو ریشه سوم است.
- (ح) حاصل $\sqrt[3]{(-7)^2}$ برابر است با ۷.
- (ط) اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد آنگاه $y - x = x - y$.
- (ی) عبارت $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$ همان است.

۲. جملات زیر را کامل کنید.

- (الف) حاصل $5^{-7} \div 5^{-5}$ به صورت عدد توان دار برابر است با
- (ب) در تساوی $10^{-x} = 10^{-3} \times 10^x$ مقدار x برابر با
- (ج) نمایش علمی عدد ۴۰۳۰۰ می شود
- (د) اعداد منفی ریشه دوم ، اما ریشه سوم
- (ه) ریشه سوم عدد $\frac{8}{27}$ عدد است.
- (و) دو عدد رادیکالی که قسمت زیر رادیکال و
- (ز) ساده شده ای عبارت $\sqrt{32} + \sqrt{72}$ برابر است با
- (ح) اگر محیط مربعی ۴۷۵ باشد، مساحت مربع برابر با
- آن ها یکسان باشند باهم جمع می شوند.
- است.

۳. گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.

- (الف) حاصل $(-4)^{-8} \times (-4)^{-10} = (-4)^{-18}$
- (ب) $(-4)^{-10} \times (-4)^{-10} = (-4)^{-20}$
- (ج) $(-4)^{-8} = (-4)^{-10} \times (-4)^{-2}$
- (د) $(-4)^{-10} = (-4)^{-8} \times (-4)^{-2}$

ب) کدام گزینه نادرست است؟

$$(2^r)^{-4} = 2^{-12} \quad (2)$$

$$4^{-1} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$(-1)^{-1} = 1 \quad (4)$$

$$3^{-3} = -9 \quad (3)$$

ج) نماد علمی عدد ۵۴۷ برابر است با :

$$547 \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$547 \times 10^{-5} \quad (1)$$

$$547 \times 10^{-4} \quad (4)$$

$$547 \times 10^{-4} \quad (3)$$

د) حاصل $\sqrt{3} \div (\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48})$ برابر است با :

$$3 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$5\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

هـ) ساده شده ای عبارت $5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{50}$ کدام است؟

$$7\sqrt{5} - \sqrt{50} \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{52} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \quad (1)$$

و) اگر $x > 0$ باشد حاصل عبارت $2x - 3\sqrt{x^3}$ برابر چه گزینه ای است؟

$$-x \quad (4)$$

$$x \quad (3)$$

$$5x \quad (2)$$

$$-5x \quad (1)$$

۴. سئوالات ستون سمت راست را به جواب های مربوطه در ستون چپ وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
$\frac{1}{3}$	$(-3)^{-1}$
$\frac{1}{9}$	$3^{-1} + (-)^1$
۱	$(\frac{1}{3})^{-2}$
۹	27×3^{-3}

۵. حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$5^{-4} \times 5^3 \times 25 =$$

$$20^{-8} \div 5^{-8} \times 4^6 =$$

$$8^{-5} \times 2^{-10} \div 16 =$$

$$\frac{a^{\Delta} b^{\gamma} z^{-\tau}}{a^{-\tau} b^{\gamma} z^{\gamma}} =$$

۶. مقدار هر عبارت را به دست آورید.

$$5^{-1} + 1^{-3} - \frac{6}{5} =$$

$$(-2)^1 + (2^{-2})^{-3} - (-5)^1 =$$

$$(10 - 2^3) \div (2^4 \div 2^{-1}) =$$

۷. اعداد زیر را با هم مقایسه کنید. ($<=>$)

$$6^{-1} \bigcirc 0$$

$$4^{-1} \bigcirc 4^{-2}$$

$$1^{-11} \bigcirc (-)$$

۸. مقدار x را به دست آورید.

$$7^x \times 7^{-4} = 7^{10} \Rightarrow x =$$

$$(4^{-x})^5 = 4^5 \Rightarrow x =$$

$$x^{-10} \div (-3)^{-10} = 6^{-10} \Rightarrow x =$$

۹. اعداد زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

(الف) $1394000 =$

(ب) $1200000 =$

(ج) $0/0004 =$

(د) $0/00672 =$

۱۰. حاصل عبارت های زیر را به دست آورده و به صورت نماد علمی بنویسید.

$$3 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{11} =$$

$$25 \times 10^{-4} \div 5 \times 10^{-3} =$$

۱۱. نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$2/3 \times 10^4 =$$

$$5/34 \times 10^6 =$$

$$6/03 \times 10^{-3} =$$

$$6 \times 10^{-7} =$$

۱۲. دور کره ای زمین در استوا تقریباً 4×10^7 متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی متر باشد، چند مورچه لازم است تا با هم دور کره زمین در استوا را پوشانند؟ (هر متر برابر ۱۰۰۰ میلی متر است).

۱۳. جرم زمین تقریباً 6×10^{24} کیلوگرم و جرم خورشید تقریباً 2×10^{30} کیلوگرم است. جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

۱۴. اندازه ای یک باکتری 5×10^{-7} است. این عدد را به صورت اعشاری بنویسید.

۱۵. جرم یک الکترون تقریباً 9.2×10^{-25} گرم است. جرم یک دانش آموز ۴۶ کیلوگرمی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (یک کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است).

۱۶. حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(-5)^2} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

$$\sqrt[3]{(3-9)^3} =$$

$$\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} =$$

$$\sqrt[3]{(-6)^3} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{1000}} =$$

$$\sqrt[5]{-1} =$$

$$\sqrt[5]{(-1)^5} =$$

۱۷. اگر $x > 0$ و $y > 0$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را به دست آورید.

۱۸. حاصل اعداد سطر اول را به جواب درست در سطر دوم وصل کنید.

$$\sqrt{81} \times \sqrt[3]{-27}$$

$$\cdot \sqrt[3]{\frac{128}{2}}$$

$$\sqrt[3]{-64} \times \sqrt{1}$$

$$\cdot \sqrt[3]{125} + \sqrt{\sqrt{16}}$$

$$-27$$

$$, -4$$

$$, 4$$

$$, 7$$

۱۹. جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

$$\sqrt[3]{64} \times \sqrt[5]{-} = \sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{-}$$

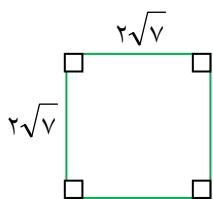
$$\sqrt[3]{\frac{-125}{8}} = \sqrt[3]{\frac{-}{}} =$$

$$\frac{\sqrt{90} \times \sqrt{4}}{\sqrt{40} \times \sqrt{9}} =$$

۲۰. حاصل را به دست آورید.

$$\frac{\sqrt{60} \times \sqrt{18}}{\sqrt[3]{5}} =$$

۲۱. مساحت و محیط شکل های زیر را حساب کنید.



$$S =$$

$$P =$$



$$S =$$

$$P =$$

۲۲. حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{27} =$$

$$\sqrt{128} - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{75} =$$

$$\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[4]{3} =$$

$$\sqrt[3]{abc} \times \sqrt[3]{a^2b^4c^8} =$$

۲۳. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$(الف) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$$

$$(ب) \sqrt{\frac{5}{7}} =$$

$$(ج) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} =$$

$$(د) \sqrt[3]{\frac{11}{16}} =$$

نوبنی بود

تلاشی در مسیر موفقیت

آزمون پایانی فصل توان و ریشه

ردیف	رسول اکرم (ص) بهترین اعمال امت من انتظار فرج است.	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $\frac{1}{\sqrt[7]{-3}}$ برابر با 7^{-3} است.</p> <p>(ب) نماد علمی 4300×10^{-3} می شود.</p> <p>(ج) ریشه سوم $\frac{-1}{\sqrt[216]{-1}}$ عدد است.</p> <p>(د) رابطه $x = -\sqrt{x^3}$ با شرط $x < 0$ درست است.</p>	۲
۲	<p>گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(الف) حاصل $\frac{5}{6} \times \sqrt[18]{(-6)^5}$ کدام گزینه است؟</p> <p>(۱) $\frac{90}{6}^{-14}$</p> <p>(۲) $\frac{90}{6}^{-7}$</p> <p>(۳) 15^{-7}</p> <p>(۴) 15^{49}</p> <p>(ب) نمایش اعشاری عدد $2/3 \times 10^{-3}$ برابر است با:</p> <p>(۱) 0.230</p> <p>(۲) 0.00023</p> <p>(۳) 0.023</p> <p>(۴) 0.0023</p> <p>(ج) بجای a چه عددی می‌توان قرار داد تا نامساوی $\sqrt[5]{a} < \sqrt[5]{16}$ درست باشد؟</p> <p>(۱) 64</p> <p>(۲) 27</p> <p>(۳) 125</p> <p>(۴) 216</p> <p>(د) مساحت مربعی به ضلع $5\sqrt{x}$ برابر چند مترمربع است؟ ($x > 0$)</p> <p>(۱) $25x^2$</p> <p>(۲) $5x^3$</p> <p>(۳) $25\sqrt{x}$</p> <p>(۴) $20\sqrt{x}$</p>	۲
۳	<p>جاهاي خالي را با کلمات يا اعداد مناسب كامل کنيد.</p> <p>(الف) اعداد $\sqrt{b}, \sqrt[3]{b}$ - ریشه‌های دوم عدد هستند.</p> <p>(ب) ریشه سوم عدد $\frac{-125}{64}$ برابر با</p> <p>(ج) حاصل $\sqrt[7]{\sqrt[5]{b}}$ برابر است با</p> <p>(د) ساده شده‌ی حاصل ضرب $\sqrt[3]{2b^2} \times \sqrt[5]{4b^3}$ می‌شود</p>	۲
۴	<p>(الف) علامت \Rightarrow بگذارید.</p> <p>(ب) مقدار هر عبارت را به دست آورید.</p> <p>۰/۵</p> <p>$4^{-1} \bigcirc 2^0$</p> <p>$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$</p> <p>$\frac{1}{5} + (-3^{-3})^{-1} =$ (الف)</p> <p>$\sqrt{\frac{-1}{27}} - \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2} =$ (ب)</p> <p>۱/۵</p>	

۱/۵	$3^{-v} \times 15^{-4} \times 5^{-v} =$ $2/6 \times 10^{-5} \div 1/3 \times 10^{-v} =$	حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.	
۰/۵	$1394000 =$	نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.	۶
۰/۵	$0/0000034 =$		
۱	$0/1234 \times 50000 =$		
۱	$4\sqrt[4]{a^4 b^3} \times (-2\sqrt[2]{a^2 b}) =$	حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.	۷
۱/۵	$\sqrt[5]{54} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72} + \sqrt[3]{128} =$		
۱/۵	$\frac{5}{2\sqrt{3}} =$ $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} =$ $\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}} =$	خرج کسرهای زیر را گویا کنید.	۸
۱/۵	$2\sqrt{50} - \sqrt[3]{48} + \sqrt{72} = a\sqrt{2} + b\sqrt[3]{6}$	در تساوی زیر مقدار a , b را محاسبه کنید.	۹
۱/۵	$a = 0/003$ و $b = 6 \times 10^{-5}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{a}{b}$ را به صورت نماد علمی بنویسید.		۱۰
۱/۵	$2\sqrt{3} - \sqrt{5} \quad 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{49} =$	حاصل عبارت زیر را به دست آورده و سپس ساده کنید.	۱۱
۱	$\sqrt[5]{\sqrt[2]{12}} \times \sqrt[3]{64} \div \sqrt[3]{-8} =$	سئوال جایزه : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.	۱۲

آزمون نوبت اول

ردیف	رسول اکرم (ص) : انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.	بارم												
۱	<p>گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(الف) مجموعه‌ی اعداد گویا بین ۶ و ۱۰ چند عضو دارد؟</p> <p>(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶</p> <p>(ب) کدام گزینه همواره درست است؟</p> <p>(۱) $Z \subseteq N$ (۲) $W \subseteq N$ (۳) $Q \subseteq R$ (۴) $Q \subseteq Z$</p> <p>(ج) اگر $a = -\frac{3}{5}$ و $b = -2$ باشد، حاصل $2 a+b$ برابر است با :</p> <p>(۱) -11 (۲) $5/5$ (۳) $-5/5$ (۴) 3</p> <p>(د) مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ با مستطیلی به ابعاد $2x+1$ و ۱۰ متشابه اند مقدار x چند است؟</p> <p>(۱) $3/5$ (۲) $1/5$ (۳) 3 (۴) 7</p>	۱												
۲	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) مجموعه‌ای شامل همه‌ی عضوهایی است که هم عضو A و هم عضو B هستند این مجموعه را دو مجموعه A و B می‌نامند.(اجتماع، اشتراک)</p> <p>(ب) اگر در نمایش اعشاری یک کسر همه‌ی رقم‌های اعشاری آن مشخص شود و به انتهای برسد به آن کسر گویند.</p> <p>(ج) قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد مساوی حاصل ضرب آن هاست.</p> <p>(د) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، می‌گوییم.</p>	۲												
۳	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $\sqrt{-64} = \sqrt{-764}$ با برابر است.</p> <p>(ب) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه‌اند.</p> <p>(ج) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.</p> <p>(د) مجموعه $\{x \in N x < 1\}$ بی‌شمار عضو دارد.</p>	۳												
۴	<p>هر یک از اعداد سطر اول را به جواب مربوطه در سطر دوم وصل کنید. (دو جواب اضافی است).</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$-25 + 17 - 2$</td> <td>$2^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$</td> <td>$\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[5]{2}$</td> <td>$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$</td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>۴</td> <td>۵</td> </tr> <tr> <td>۱۰</td> <td>-۱۰</td> <td>۱۰</td> <td>۱۰</td> </tr> </table>	$ -25 + 17 - 2 $	$2^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[5]{2}$	$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$	۰	$\frac{1}{4}$	۴	۵	۱۰	-۱۰	۱۰	۱۰	۴
$ -25 + 17 - 2 $	$2^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[5]{2}$	$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$											
۰	$\frac{1}{4}$	۴	۵											
۱۰	-۱۰	۱۰	۱۰											
۵	<p>اگر $\{1, 2, 3\} = A$ و $\{3, 4, 5\} = B$ باشند حاصل $(A \cap B) \cup (A - B)$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.</p>	۱/۵												

۰/۷۵	الف) مجموعه مقابله با علائم ریاضی بنویسید.	۶
۰/۷۵	$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$	
۰/۷۵	ب) مجموعه $(B \cap D) - B$ را روی شکل نشان دهید.	
۰/۵		الف) بین $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ دو کسر بنویسید.
۰/۵	ب) عدد $\frac{2}{3}$ را با نماد اعشاری متناوب بنویسید.	۷
۰/۵	ج) حاصل عبارت مقابله را به دست آورید.	
۰/۵	$(1/2 + 3/7) \div 10 =$	
۰/۵	الف) عدد $\sqrt{7} + 2$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟	۸
۰/۷۵	ب) مجموعه مقابله را روی محور نمایش دهید.	
۱	حاصل عبارات زیر را به دست آورید.	۹
	الف) $ 4 - 3^2 \times (-2 + 5) =$	
	ب) $\sqrt{2 - \sqrt{5}}^2 =$	
۱/۵	در شکل زیر O مرکز دایره $\overline{CD}, \overline{AB}$ دو مماس بر دایره رسم شده اند. چرا طول دو مماس باهم برابر است؟ (چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$)	۱۰
۰/۵	الف) چرا دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند؟	۱۱
۱	ب) مثلث ABC به ضلع های ۸ و ۱۰ و ۱۶ با مثلث DEF به اضلاع $2x-2$, 20 و $2x+14$ باهم متشابه اند. مقدار x را پیدا کنید.	

۱	در یک نقشه مقیاس $1 : 1000$ است. فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۳ سانتی متر است. فاصله‌ی این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چند متر است؟	۱۲
۰/۷۵	در جای خالی علامت \in یا \subseteq قرار دهید. $-\sqrt{25} \bigcirc N$, $\sqrt{\frac{-1}{1...}} \bigcirc Q$, $\{\pi, \sqrt{3}\} \bigcirc R$	۱۳
۱	$\frac{12 \times (3^x)^3 \times 1^y}{(3^x)^3 \times (\frac{1}{3})^{-4}} = \dots =$ عبارت زیر را ساده کنید.	۱۴
۱	اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید. (الف) $0/00000\ 1394 =$ (ب) $139400000 =$	۱۵
۱/۵	الف) عبارت رادیکالی زیر را ساده کنید. $2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{12} \div 3\sqrt{3} =$ ب) مخرج کسر مقابل را گویا کنید. $\sqrt[5]{5x}$	۱۶
۱	سئوال جایزه: مجموعه A را با علائم ریاضی بنویسید.	۱۷
	$A = \{5, 55, 555, 5555, \dots\} =$	

فصل پنجم

عبارت های جبری و معادله

خلاصه درس :

* **یک جمله ای :** یک جمله ای از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می آید. یک جمله ای از دو قسمت تشکیل می شود : ضریب عددی و عبارت حرفی.

◀ **مثال «۱» :** عبارت $\sqrt{5}ax^3$ (ضریب $\sqrt{5}$ و a^3x^3 عبارت حرفی است).

نکته «۱» : فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که در آن $a \in R$ و X متغیر و $n \in W$ می باشد. یعنی حتماً توان متغیر باید عضو مجموعه اعداد حسابی (W) باشد.

◀ **مثال «۲» :** عبارت $5\sqrt{x}$ یک جمله ای نیست زیرا : $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$ و توان متغیر عضوی از مجموعه اعداد حسابی نیست.

نکته «۳» : هر عدد حقیقی یک جمله ای است زیرا توان آن متغیر صفر است.

◀ **مثال «۳» :** عددی مثل 7 یک جمله ای است زیرا : $7 = 7x^0$.

تذکر مهم : اگر در یک عبارت توان حروف منفی بوده و یا حروف در مخرج یا زیر رادیکال باشند، آن عبارت تک جمله ای نیست.

* **درجه ی یک جمله ای :** توان متغیری را که در یک جمله ای وجود دارد، درجه ی یک جمله ای نسبت به آن متغیر می نامند.

◀ **مثال «۴» :** جدول را کامل کنید.

یک جمله ای	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به همهی متغیرها
$\sqrt{7}x^4y$	۴	۱	$4+1=5$
$\frac{3}{8}x$	۱	۰	$1+0=1$

* **یک جمله ای های متشابه :** چند تا یک جمله ای که حروف و توان مساوی داشته باشند، متشابه هستند.

◀ **مثال «۵» :** یک جمله ای های y^3x^5 , $3x^5y$ - متشابه اند اما y^4x^4 , $4x^3y$ متشابه نیستند.

* **جمع و تفریق یک جمله ای های متشابه :** ضرایب عددی آن ها را باهم جمع یا تفرق کرده و قسمت حرفی مشترک را می نویسیم.

نکته «۳» : جملات غیر متشابه باهم جمع یا تفرق نمی شوند. مثل $5y - 2x$ (ساده تر نمی شود.)

* ضرب و تقسیم یک جمله ای ها : برای بدست آوردن حاصل ضرب دو یک جمله ای کافی است ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را نیز درهم ضرب کنیم. برای تقسیم نیز ضرایب عددی را برهم و حروف متناظر را نیز برهم تقسیم می کنیم.

◀ مثال «۶» : حاصل عبارت زیر را بدست آورده و سپس ساده کنید.

$$\cancel{5x(4x^3 - 6y)} - \cancel{7x^3} + 10xy = \underline{20x^3} - \underline{30xy} - \underline{7x^3} + \underline{10xy} = 13x^3 - 20xy$$

* درجه ی چند جمله ای : بزرگ ترین درجه نسبت به آن متغیر را در نظر می گیریم.

◀ مثال «۷» : در چند جمله ای $a^5 + 2a^3b^3 + 10a^2b^5$ درجه نسبت به a مساوی ۳ و درجه نسبت به b مساوی ۵ است.

نکته «۴» : در چند جمله ای ها، جملات را نسبت به توان های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می کنند.

◀ مثال «۸» : چند جمله ای $7x^3a + 5x^3a^3 + 7x^3a^5 - 4x + 2$ را نسبت به متغیر X مرتب کنید.

$$\text{پاسخ : } 7x^3a + 5x^3a^3 + 7x^3a^5 - 4x + 2$$

* اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدار یکسانی داشته باشیم، در این صورت برابری جبری حاصل از آن ها را اتحاد جبری می نامیم.

◀ مثال «۹» : آیا $x^3 + 6x + 9 = (x+3)^3$ یک اتحاد است؟

پاسخ : به ازای چند مقدار مختلف مانند $x=2$ یا $x=-5$ عبارت را آزمایش می کنیم.

$$x=2 \Rightarrow (2+3)^3 = 2^3 + 6 \times 2 + 9 = 25$$

$$x=-5 \Rightarrow (-5+3)^3 = (-2)^3 + 6 \times (-2) + 9 = -8 + (-12) + 9 = -11$$

در نتیجه $(x+3)^3 = x^3 + 6x + 9$ یک اتحاد است.

* اتحاد مربع دو جمله ای:

الف) جبری :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

ب) کلامی :

مربع جمله دوم + ۲ برابر حاصل ضرب جمله ها + مربع جمله اول = $(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول})^2$

◀ مثال «۱۰» :

$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$(x^2 - yz)^2 = (x^2)^2 + 2x^2(-yz) + (-yz)^2 = x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$$

* اتحاد مزدوج :

الف) جبری

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ب) کلامی :

مربع جمله دوم - مربع جمله اول = (جمله دوم - جمله اول) (جمله دوم + جمله اول)

◀ مثال «۱۱» :

$$(x+5)(x-5) = x^2 - 25$$

$$(ab - \frac{3}{4})(ab + \frac{3}{4}) = a^2b^2 - \frac{9}{16}$$

اثبات اتحاد مزدوج :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

* اتحاد جمله مشترک :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

◀ مثال «۱۲» :

$$(x+1)(x+3) = x^2 + (\overbrace{1+3}^2)x + 1 \times 3 = x^2 + 4x + 3$$

* اتحاد مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیشتر) :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

◀ مثال «۱۳» :

$$(x+5)^3 = x^3 + 3x^2(5) + 3x(5)^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

* اتحاد مجموع مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیشتر) :

(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

* اتحاد تفاضل مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیشتر) :

(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

◀ مثال «۱۴» :

$$(t-2)(t+2t+4) = t^2 - 8$$

$$(a+3)(a^2 - 3a + 9) = a^3 + 27$$

* اتحاد مربع سه جمله‌ای :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

◀ مثال «۱۵» :

$$(x+y^2 + 5)^2 = x^2 + y^4 + 25 + 2xy^2 + 10x + 10y^2$$

* اتحادهای فرعی :

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad , \quad a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 3ab(a+b)$$

کاربرد اتحادها : استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده تر می کند.

◀ مثال «۱۶» :

$$998 \times 1002 = (1000-2)(1000+2) = 1000^2 - 2^2 = 1000000 - 4 = 999996$$

* **تجزیه :** گاهی اوقات نیاز است که یک عبارت جبری را به صورت حاصل ضرب چند عبارت جبری دیگر بنویسیم که به این کار تجزیه گویند.

* **روش های تجزیه :**

الف) فاکتورگیری : برای فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱. ب.م.م ضرایب جملات را تعیین می کنیم.
۲. حروف مشترک با توان کم تر را مشخص می کنیم.
۳. ب.م.م ضرایب و حروف مشترک با توان کم تر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم.
۴. تک تک جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و حاصل را درون پرانتز می نویسیم.

◀ مثال «۱۷» : تجزیه کنید.

$$15a^2b + 10a^2b^2 = 5a^2b(3a + 2b)$$

ب) با استفاده از اتحادها : به کمک اتحادهایی مانند : اتحاد مزدوج، اتحاد یک جمله مشترک و اتحاد چاق و لاغر می توان چند جمله‌ای ها را تجزیه کرد.

◀ مثال «۱۸» : تجزیه کنید.

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

ضرب مجموع

اتحاد یک جمله مشترک

باید دو عدد را که مجموع آن ها ۴ و حاصل ضرب آن ها ۳ باشد، پیدا کنیم.

$$x^2 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

ج) دسته بندی فاکتورگیری : در بعضی از عبارت ها نیاز است که ابتدا جملات را دسته بندی کرده و سپس به کمک اتحادها یا فاکتورگیری چند جمله ای ها را تجزیه کنیم.

◀ مثال «۱۹»: تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^2 + 3x + 1 &= (x^2 + 1) + (2x^2 + 3x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 3x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)(x + 1)^2 \end{aligned}$$

نکته «۵»:

چگونگی تشخیص اتحاد مزدوج برای تجزیه :

- ۱) جملات چند جمله ای نباید هم علامت باشند.
- ۲) بتوانیم آن ها را به صورت مربع کامل بنویسیم.
مثالاً $x^2 + 5x + 5$ اتحاد مزدوج نیستند.

*** نامعادلات :** جواب های یک نامعادله مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن ها نامساوی برقرار شود. همه ای جواب های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می دهند که آن را مجموعه ای جواب آن معادله می نامند.

نکته «۶»:

$$(1) \text{ اگر } a < b \text{ آنگاه } a + c < b + c$$

$$(2) \text{ اگر } a < b \text{ آنگاه } a - c < b - c$$

$$(3) \text{ اگر } a < b \text{ و } c < 0 \text{ آنگاه } ac > bc$$

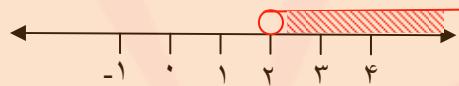
$$(4) \text{ اگر } a < b \text{ و } c > 0 \text{ آنگاه } ac < bc$$

نکته «۷»:

اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

◀ مثال «۲۰»: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6}$ را به دست آورده و آن را روی محور نمایش دهید.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} &< \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6\left(\frac{x}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right) < 6\left(\frac{x-1}{6}\right) \\ &\Rightarrow 2x - 3 < x - 1 \\ &\stackrel{+(-x)}{\rightarrow} 2x - x - 3 < x - x - 1 \\ &\Rightarrow x - 3 < -1 \\ &\stackrel{+3}{\rightarrow} x - 3 + 3 < -1 + 3 \Rightarrow x < 2 \quad \text{یا} \quad \{x \in R \mid x < 2\} \end{aligned}$$



: «۸» نکته

* اگر $a^m > a^n$ و $m > n$ آنگاه $a > 1$

* اگر $a^m < a^n$ و $m > n$ آنگاه $0 < a < 1$

* اگر $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ آنگاه $m > n$ و $a > 1$

* اگر $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$ آنگاه $m > n$ و $0 < a < 1$

◀ مثال «۲۱»:

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \sqrt[2]{\frac{1}{2}}$$



سؤالات امتحانی

فصل عبارت های جبری

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) \sqrt{ax} یک جمله ای است.

(ب) دو جمله ای y^3x^2 و yx^3 متشابه اند.

(ج) درجه ای جمله ای u^x نسبت به متغیر u برابر صفر است.

(د) عبارت x^3+9 را به کمک اتحاد مزدوج می توان تجزیه کرد.

(ه) $\{x|x < 1\}$ مجموعه جواب $x+1 < 2$ است.

(و) اگر $a-b=1$ باشد آنگاه $a > b$.

(ز) دو مجموعه $\{x \in N, 2 < x \leq 6\}$ و $\{6, 10, -10\}$ باهم برابرند.

(ح) اگر $2x < 6$ باشد آنگاه $x > 3$.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

است.

* درجه ای یک جمله ای $5a^3xy^5$ نسبت به متغیر a برابر با

* ضریب عددی جمله $\sqrt[3]{xb}$ برابر است با

* اعداد مخالف صفر یک جمله ای هایی از درجه هستند.

* به تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای همه ای مقادیری که به جای متغیرها قرار می دهیم، برابر باشند گوییم.

* $(X-5)(X+5)=25-2X^2$ از نوع اتحاد است.

* اگر بتوان یک چند جمله ای را به صورت ضرب دو یا چند جمله ای نوشت به طوری که درجه ای آن ها کمتر باشد، گوییم آن چند جمله ای را کرده ایم.

* عبارت $-9X^3$ به کمک اتحاد تجزیه پذیر است.

* اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم نامساوی تغییر می کند.

* مجموعه جواب نامعادله $1-2x < 3$ عبارت است از

* استاندارد شده ی عبارت $5+X^3$ می شود

تلاشی در مسیر موفقیت

۳. جاهای خالی را با جملات مناسب کامل کنید.

$$(a+1)^r = a^r + \dots + 1$$

$$(x+a)(x-a) = x^2 - \dots$$

$$(1+b)^r = 1 + rb + \dots$$

$$(m+ \dots)(m- \dots) = m^2 - 36$$

$$(ax - \dots) = - + 9$$

$$(\sqrt{v} - \dots + v) = v - v^r$$

$$(xy - \frac{1}{r})^r = - + \frac{1}{r}$$

$$(x + \mathfrak{r})(x + \mathfrak{r}) = x^{\mathfrak{r}} +$$

$$(- \dots) = 36x^2 - 12xy +$$

$$(a - 4)(a - 5) =$$

۴. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(x + \omega)^r =$$

$$(ra+b)^r =$$

$$(x - \gamma y)^\gamma =$$

$$(a - \frac{r}{c})^r =$$

۵. جدول زیر را کامل کنید.

ضریب عددی	درجه نسبت به X	متغیرها	عبارت
			$\sqrt{8}xy^r$
			x^ryz
			v

۶. ثابت کنید:

$$(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r(ab+ac+bc)$$

۷. به کمک اتحادهای مزدوج و یک حمله مشترک، حاصل را به دست آورید.

$$(\mathfrak{r} - \delta x)(\mathfrak{r} + \delta x) =$$

$$(t - \frac{r}{\gamma})(t + \frac{r}{\gamma}) =$$

$$(\sqrt{ax} - \sqrt{v})(\sqrt{ax} + \sqrt{v}) =$$

$$\left(\frac{1}{x} - \gamma x\right)\left(\frac{1}{x} + \gamma x\right) =$$

$$(a^\gamma - b^\gamma)(a^\gamma + b^\gamma) =$$

$$(x - 1)(x + 8) =$$

$$(b - \varepsilon)(b - \gamma) =$$

$$(4x + 5)(4x + 3) =$$

۸. عبارت های زیر را **تجزیه** کنید.

$$x^3 - 9 =$$

$$b^3 - 25 =$$

$$16x^3 - 36y^3 =$$

$$9a^3 - \frac{1}{49} =$$

$$x^3 + 8x + 15 =$$

$$x^3 - 7x + 12 =$$

$$x^3 + x - 2 =$$

$$x^3 - 6x + 8 =$$

۹. حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(x+3)^3 =$$

$$(3x - \frac{4}{5})(3x + \frac{4}{5})$$

$$(a-7)(a+) =$$

۱۰. تجزیه کنید.

$$x^3 z - y^3 z =$$

$$3x^3 - 30x + 75 =$$

$$x^4 - 1 =$$

۱۱. حاصل را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$99^3 =$$

$$550^3 - 450^3 =$$

$$98 \times 102 =$$

$$9/7 \times 10/3 =$$

$$201 \times 199 =$$

۱۲. کدام یک از دو تساوی زیر اتحاد نمی باشد؟ چرا؟

$$3x - y = y - 3x \quad (\text{الف})$$

$$x(x+1) = x^2 + x \quad (\text{ب})$$

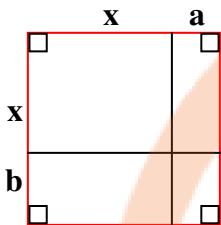
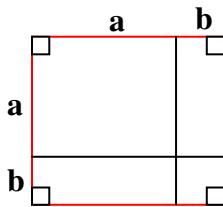
۱۳. سارا مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ رسم کرد. ریحانه طول و عرض این مستطیل را به اندازه x

واحد افزایش دهد. مساحت مستطیل جدید چقدر می شود؟

۱۴. اگر $A = x^3 + 2x + 3$ و $B = 2x^3 - 2x + 4$ باشد، حاصل $A - 2B$ را به دست آورده و آن را استاندارد

کنید.

۱۵. به کمک شکل زیر فرمول کدام یک از اتحادها به دست می آید؟ چگونه؟



۱۶. به کمک شکل مقابل، اتحاد یک جمله مشترک را اثبات کنید.

۱۷. اگر $A=x+5$ و $B=x-3$ باشد حاصل $A \times B - 2x$ را به دست آورید.

۱۸. اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد حاصل $x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}$ را به دست آورید.

۱۹. به کمک دسته بندی و فاکتورگیری عبارت های زیر را تجزیه کنید.

(الف) $4X+ny+4y+nx=$

(ب) $x^3 + xy + zx + zy =$

۲۰. نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب آن ها را روی محور نشان دهید.

(الف) $3x+3 \leq x+3$

(ب) $x+6 > 5x-2$

(ج) $5+2(3-2x) < 2-x$

تلاشی در مسیر موفقیت

۲۱. نامعادله $(x-1) + \frac{x}{2} \geq 0$ را حل کنید.

۲۲. مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

$$\frac{3x-2}{5} \leq \frac{x-2}{3}$$

$$\frac{2}{3}(x+7) \geq \frac{1}{2}(3-x)$$

۲۳. اگر $A \leq \frac{2x+7}{3} \leq B$ ، $1 \leq x \leq 4$ مقادیر A و B را محاسبه کنید.

(راهنمایی : طرفین رابطه دومی را در ۳ ضرب، سپس ۷ واحد کم و در نهایت بر ۲ تقسیم کرده و با رابطه اولی مقایسه کنید).

۲۴. نامعادله $x^2 - 1 > 0$ را حل کرده و مجموعه جواب را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$x^2 - 1 > 0$$

۲۵. حاصل را به ساده ترین صورت بنویسید. (ابتدا عبارت ها را تجزیه کنید).

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9} =$$

$$\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 5x + 6} =$$

آزمون پایانی فصل عبارت های جبری

ردیف	بارم	امام صادق (ع) : زکات دانش آن است که به اهلش بیاموزند. (تحت الحقول ص ۶۶۳)
۱	۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) $x\sqrt{y}$ یک جمله ای است.</p> <p>(ب) عبارت $2x^3y^2$ نسبت به متغیر y از درجه ۳ است.</p> <p>(ج) عبارت $x+y$ $x+y = x + xy$ یک اتحاد است.</p> <p>(د) حاصل 295×305 را می توان به کمک اتحاد مزدوج بدست آورد.</p>
۲	۱	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>$\frac{\sqrt{5}}{2}xyz$ برابر است با *</p> <p>* درجه ای $2a^5b^3$ نسبت به a و b مساوی است.</p> <p>* توان حروفی یک جمله ای ها متعلق به مجموعه</p> <p>* به تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای همه مقادیر برابر باشند، گوییم.</p>
۳	۱	<p>گزینه ای مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(الف) کدام گزینه یک جمله ای است؟</p> <p>$\frac{3}{a}x^2$ (۱) \sqrt{a} (۱)</p> <p>(ب) کدام جمله با $-5xy^4$ متشابه است؟</p> <p>y^4x (۲) -5 (۱)</p> <p>(ج) ساده شده ای عبارت $[(x-y)-(y-x)] - x$ برابر است با :</p> <p>$2x-2y+1$ (۴) $2x-1$ (۳) $-2x+1$ (۲) $2x+1$ (۱)</p> <p>(د) کدام گزینه را می توان با اتحاد مزدوج تجزیه کرد؟</p> <p>$(4x^2+6x+9)$ (۲) (x^2+4) (۱)</p> <p>$(9x^2+20x)$ (۴) $(16x^2-y^2)$ (۳)</p>
۴	۲	حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. $15x^3 + 24y^3 - (3x+2y)(5x+6y) =$
۵	۳	حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۲	<p>اگر $B=x^3+6x$ و $A=-5+2x^3$ باشد :</p> <p>(الف) عبارت A را به صورت استاندارد بنویسید.</p> <p>(ب) حاصل $2B-A$ را به دست آورید.</p>	۶
۰/۵	$b^2-16=$ (الف)	۷
۰/۵	$x^2-8a+15=$ (ب)	
۱	$a(x+y)+b(x+y)$ (ج)	
۱/۵	$\frac{3x^2-9x}{x^2-5x+6} =$	۸
۱/۵	<p>حاصل را به کمک اتحادها بدست آورید.</p> $(\sqrt{5}-0.3)(\sqrt{5}+\frac{3}{10}) =$	۹
۱	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> $(2X+5)(2X-.....) = -25$ $(.....2X)^2 = 1 +4X^2$	۱۰
۲	<p>نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن ها را روی محور اعداد مشخص کنید.</p> <p>(الف) $-3x+14 < x+2$</p>	۱۱
۱	$x(x-6) \leq x^2+2$ (ج)	

۱ علامت عددی حقیقی a و b و c را طوری تعیین کنید که $\frac{b}{ac} > 0$ باشد. (جدول را کامل کنید).

a	b	C	$\frac{b}{ac} > 0$
+	+		+
+		-	+
	-		+
		-	+

۱۲

۱/۵ سؤال جایزه :
یکی از عبارت های زیر را به دلخواه تجزیه کنید.

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$$

$$2x^3 - 5x + 3$$

۱۳

الگوی عددی جالب : شما هم می توانید حداقل دو ردیف دیگر به الگو اضافه کنید. درسته ؟

$$3 \times 3 + 1 = 10$$

$$33 \times 33 + 11 = 1100$$

$$333 \times 333 + 111 = 111000$$

$$3333 \times 3333 + 1111 = 11110000$$

بازی جبدوز

(جبر + دوز)

این بازی دارای دو جدول است. در ابتدا دو مهره همسان (مثلاً دو عدد دکمه) در مرکز جدول کوچک قرار دارد. هر کس در نوبت خود یکی از مهره ها را به دلخواه برمی گزیند و بر روی یکی از عبارت های جدول کوچک قرار می دهد. با این حرکت او می تواند در جدول بزرگ عبارتی را که از حاصل ضرب دو عبارت ساده مهره دار بدست می آید تصاحب کند و با X یا ۰ به خود اختصاص دهد. هر کس که بتواند سه خانه متواالی (افقی، عمودی، مورب) را به خود اختصاص دهد، برنده است. دقت کنید که نفر اولی که مهره انتخاب می کند، عبارت جبری درجه دومی را از آن خود نمی کند و نفر دومی که مهره انتخاب می کند، اولین عبارت درجه ی دو را از جدول 6×6 از آن خود می کند.

$X+1$	$X-3$	$X+2$
$X-4$		$X+4$
$X-2$	$X+3$	$X-1$

$X^2 + 2X + 1$	$X^2 + X - 2$	$X^2 - X - 6$	$X^2 - 9$	$X^2 - 1$	$X^2 - 3X + 2$
$X^2 + 6X + 8$	$X^2 + 7X + 12$	$X^2 + 3X + 2$	$X^2 + 2X - 3$	$X^2 - 2X - 8$	$X^2 - X - 12$
$X^2 - X - 2$	$X^2 - 4X + 3$	$X^2 - 4X + 4$	$X^2 - 6 + 9$	$X^2 + 4X + 3$	$X^2 + 3X - 4$
$X^2 + X - 6$	$X^2 + X - 12$	$X^2 - 2X - 3$	$X^2 - 5X + 4$	$X^2 - 5X + 6$	$X^2 - 7X + 12$
$X^2 + 5X + 4$	$X^2 + 4X + 4$	$X^2 + 2X - 8$	$X^2 + 8X + 16$	$X^2 - 3X - 4$	$X^2 - 4$
$X^2 - 6X + 8$	$X^2 - 16$	$X^2 - 2X + 1$	$X^2 + 5X + 6$	$X^2 + 6X + 9$	$X^2 - 8X + 16$

فصل ششم

خط و معادله های خطی

خلاصه درس :

* **معادله خط :** رابطه بین طول و عرض نقاط تشکیل دهنده ی یک خط را معادله ی آن خط می گویند.

فرم کلی و استاندارد خط به صورت زیر است :

$$y = ax + b$$

در حالت هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط راستی باشد، گوییم آن دو مقدار باهم رابطه خطی دارند. ویژگی مشترک رابطه خطی آن است که نسبت افزایش یا کاهش یک متغیر به افزایش و کاهش متغیر دیگر مقداری ثابت است.

فعالیت :

سارا و اکرم دو خواهر هستند وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود، وقتی سارا ۷ ساله شود اکرم چند سال خواهد داشت؟ (جدول را کامل کنید).

سارا (y)	۶	۷	۱۰
اکرم (x)	۰		۸

اگر سن سارا را y و سن اکرم را x بگیریم خواهیم داشت : $y = x + 4$
که یک معادله ی خط است.

سئوال : آیا رابطه بین طول ضلع مربع و مساحت مربع یک رابطه خطی است؟

پاسخ : خیر - زیرا اگر ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر بگیریم خواهیم داشت :

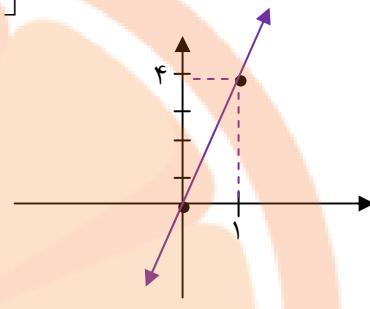
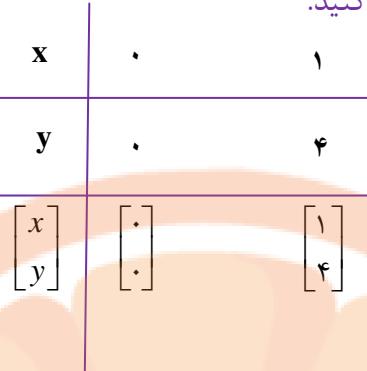
ضلع	۱	۲	۳	۴
مساحت مربع	۱	۴	۹	۱۶

* **رسم خط :** برای رسم خط دو نقطه کافی است. در معادله ی خط عددی دلخواهی مانند ۰ و ۱ و ۲ و قرار می دهیم و مقدار y را به دست می آوریم.

تلاشی در مسیر موفقیت

◀ مثال «۱»: خط $y=4x$ را رسم کنید.

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y=4 \times 0=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 &\Rightarrow y=4 \times 1=4 \Rightarrow y=4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} \rightarrow$$

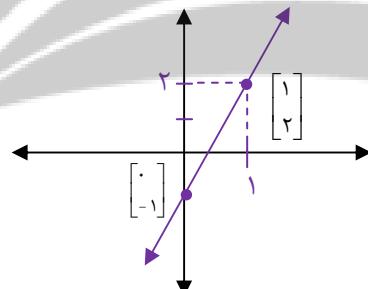
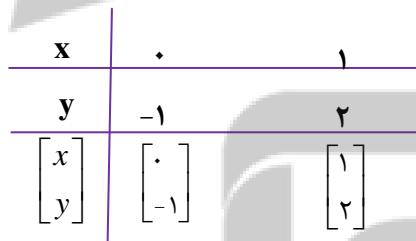


نکته «۱»: معادله ای که به فرم $y=ax$ باشد، مبدأً گذر نام دارد.

◀ مثال «۲»: خط به معادله $y=3x-1$ را رسم کنید.

$$x=0 \Rightarrow y=3 \times 0-1=-1$$

$$x=1 \Rightarrow y=3 \times 1-1=2$$



نکته «۲»: در معادله $y=ax+b$ اگر a عددی کسری باشد، بهتر است پس از اینکه به x صفر دادیم در نقطه دوم بجای x از مخرج کسر استفاده کنیم تا مقدار y عددی صحیح بدست آید و کار راحت تر شود، مانند $x=\frac{2}{5}$ (بجای x از ۰ و ۵ استفاده کنید).

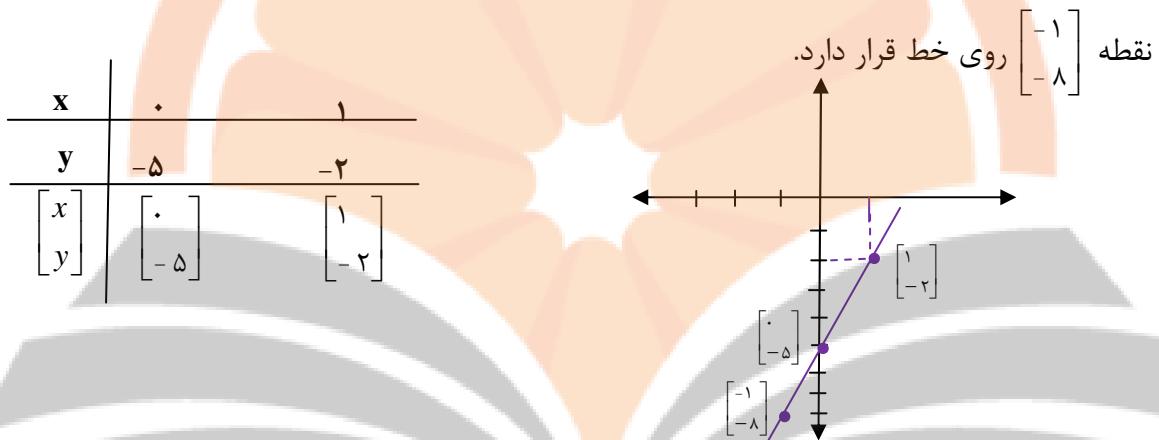
نکته «۳»: شرط اینکه نقطه ای روی خط قرار گیرد آن است که مختصات نقطه در معادله صدق کند یعنی با قرار دادن طول و عرض نقطه بجای x و y در معادله، رابطه ای صحیح برقرار شود.

◀ مثال «۳»: آیا نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$ روی خط $y=3x-5$ قرار دارد؟

مهدی به روش تحلیلی عمل کرد یعنی بجای x و y از -1 و -8 - کمک گرفت:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ -8 &= 3(-1) - 5 \Rightarrow -8 = -8 \end{aligned}$$

سینا روش هندسی (ترسیمی) را انتخاب کرد و ابتدا معادله خط را رسم کرد و ملاحظه کرد که

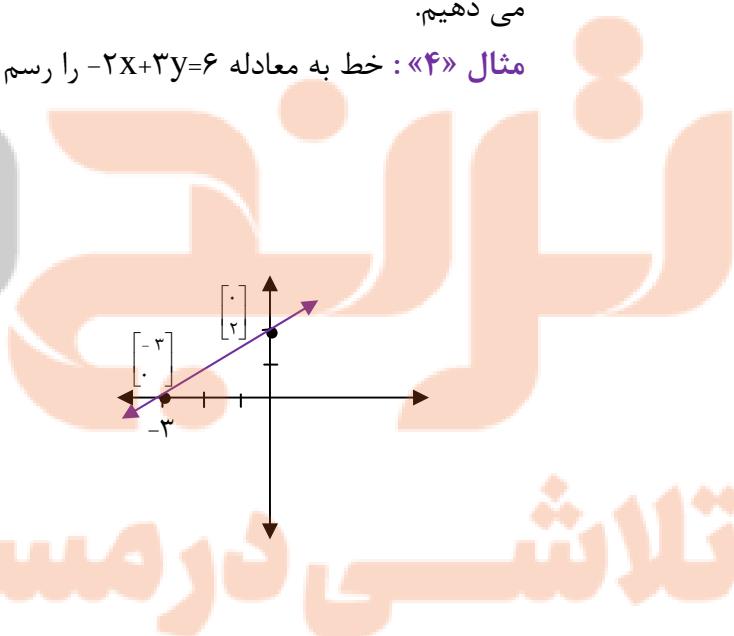
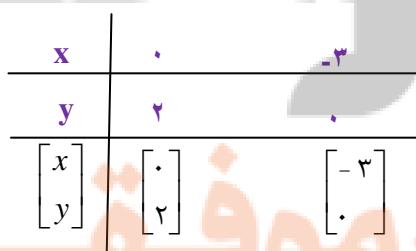


نکته «۴»: در رسم معادلاتی که به فرم $ax + by = c$ هستند، یک بار $x=0$ و بار دیگر $y=0$ قرار می‌دهیم.

مثال «۴»: خط به معادله $-2x + 3y = 6$ را رسم کنید.

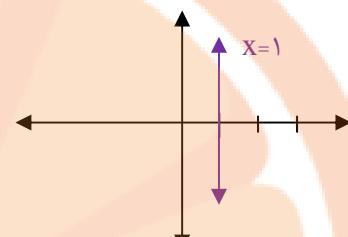
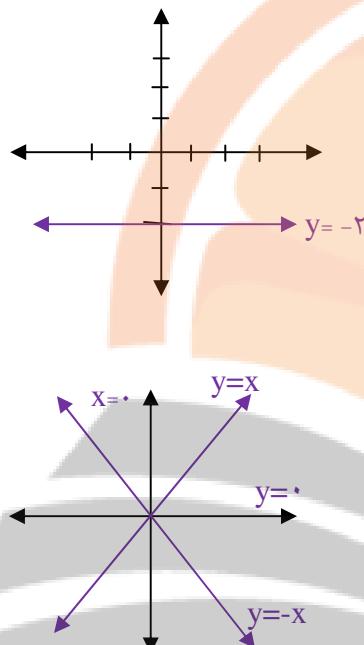
$$x=0 \Rightarrow -2 \times 0 + 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

$$y=0 \Rightarrow -2x + 3 \times 0 = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{-2} = -3$$



* خط های موازی با محورهای مختصات : حالت کلی خطوط به معادله $y=m$ موازی محور x ها (طول ها) و خطوط به معادله $x=n$ موازی محور y ها (عرض ها) است که در آن n یا m اعداد معلوم و ثابتی هستند.

◀ مثال «۵»: خطوط $x=1$ و $y=-2$ را رسم کنید.



نکته «۵»:

(۱) معادله ای محور طول ها (x ها) :

(۲) معادله ای محور عرض ها (y ها) :

(۳) معادله ای نیم ساز ناحیه اول و سوم :

(۴) معادله نیم ساز ناحیه دوم و چهارم :

* شیب و عرض از مبدأ خط :

در معادله $y=ax+b$ ضریب x یعنی a را شیب خط و b را عرض از مبدأ خط گویند.

نکته «۶»: برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدأ خطوط باید آن را به فرم $y=ax+b$ تبدیل کرد.

◀ مثال «۶»: شیب و عرض از مبدأ هر یک از خط های زیر را مشخص کنید.

$$y=4x \Rightarrow \text{شیب } = 4 \quad (\text{الف})$$

$$y=x-5 \Rightarrow \text{شیب } = 1 \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} 12x+4y=16 &\Rightarrow 4y=-12x+16 \\ &\Rightarrow y=\frac{-12}{4}x+\frac{16}{4} \\ &\Rightarrow y=-3x+4 \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

$$\text{شیب } = -3$$

نکته «۷»: شرط اینکه چند خط باهم موازی باشند این است که شیب برابر داشته باشند.

نکته «۸»: شرط اینکه دو خط برهمن عمود باشند این است که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند یا $a \times a' = -1$

◀ مثال «۷»: خط های $y=9x+10$ و $y=9x$ موازیند.

خط های $y=2x+1$ و $y=-\frac{1}{2}x$ برهم عمودند. زیرا شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر است یا $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$.

نکته «۹»: شیب خطی که از دو نقطه عبارت است از :

$$\mathbf{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}}$$

◀ مثال «۸»: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - (-4)}{6 - 2} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$y = ax + b$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow 12 = 4 \times 6 + b \Rightarrow b = 12 - 24 = -12 \Rightarrow b = -12$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = 4x - 12$$

نکته «۱۰»: طول نقطه‌ای که در آن نقطه، خط محور طول‌ها را قطع کند، طول از مبدأ گویند.
برای محاسبه طول از مبدأ، در معادله‌ی خط مقدار y را صفر قرار می‌دهیم.

◀ مثال «۹»: طول از مبدأ خط $y=4x-7$ را بیابید.

$$y = 0 \Rightarrow 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

* دستگاه معادلات خطی :

در ریاضی ششم و هفتم با مسئله‌ای مانند زیر بروخورد داشته اید. با چه راهبردی آن را حل می‌کردید؟

مسئله: در یک مزرعه روی هم ۲۰ مرغ و گاو وجود دارد. مجموع پاهای همه‌ی آن‌ها ۵۶ عدد است در این مزرعه چند مرغ و چند گاو وجود دارد؟

حل: این مسئله با راهبردهایی مانند رسم شکل، حدس و آزمایش و تشکیل معادله یک مجهولی و دو مجهولی قابل حل است. به عنوان نمونه از طریق **تشکیل معادله دو مجهولی** آن را حل می‌کنیم : تعداد مرغ‌ها را x و تعداد گاوهای را y می‌گیریم پس $x+y=20$ هر مرغ ۲ پا و هر گاو ۴ پا دارد پس $2x+4y=56$ این دو معادله را در کنار هم قرار داده و یک دستگاه تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

الف) حل دستگاه از روش حذفی: یکی از مجهولات را در عددی ضرب کرده بطوریکه ضرایب یکی از مجهولات قرینه شوند سپس با جمع نمودن دو معادله، یکی از مجهولات بدست آید.

$$\begin{aligned} -2 \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} \\ \text{جمع } & \hline 2y = 16 \\ y = \frac{16}{2} = 8 & \Rightarrow \boxed{y = 8} \quad \text{تعداد گاوها} \\ x + y = 20 \Rightarrow x + 8 = 20 & \Rightarrow x = 20 - 8 = 12 \Rightarrow \boxed{x = 12} \quad \text{تعداد مرغ ها} \end{aligned}$$

ب) روش جایگزینی (تبديلی): در این روش در یکی از معادلات، یک مجهول را برحسب دیگری حساب کرده و در معادله دیگر جایگزین می‌کنیم تا یک معادله یک مجهولی ساخته شود. مسئله قبل را به این روش هم حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} &\rightarrow x = 20 - y \\ 2(20 - y) + 4y = 56 &\rightarrow 40 - 2y + 4y = 56 \\ 2y &= 56 - 40 = 16 \\ y &= \frac{16}{2} = 8 \\ y = 8 &\rightarrow x = 20 - 8 = 12 \end{aligned}$$

ج) روش قیاسی: از هر دو معادله یکی از مجهولات را بر حسب دیگری حساب کرده و مساوی هم قرار می دهیم تا یک معادله یک مجهولی بدست آید. مثال قبل :

$$x + y = 1 \rightarrow x = 1 - y \quad (1)$$

$$2x + 4y = 56 \Rightarrow 2x = 56 - 4y \rightarrow x = 28 - 2y$$

عبارت های ۱ و ۲ را مساوی هم قرار می دهیم :

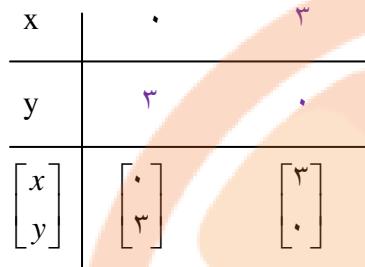
$$\Rightarrow y = \lambda \rightarrow x = 1 - \lambda = 12$$

د) روش ترسیمی: هر دو معادله را در یک دستگاه مختصات رسم کرده، محل تقاطع دو خط جواب معادله است.

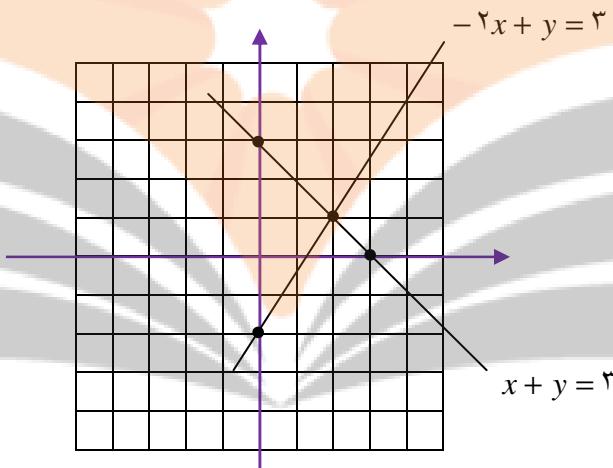
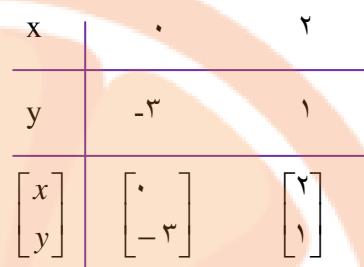
مثال : محل برخورد دو خط $y = -2x + 3$ و $y = -3x - 2$ را از روش رسم خطوط پیدا کنید.

حل : هر یک از معادلات دستگاه را معادله‌ی یک خط راست در نظر گرفته و روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم.

$$x+y=3$$



$$-2x + y = -3$$



طبق شکل محل برخورد دو خط، نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

نکته : در دستگاه $\begin{cases} ax+by=C \\ a'x+b'y=C' \end{cases}$ داریم:

(الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، آن گاه دستگاه جواب دارای یک جواب است.

(ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ آن گاه دستگاه جواب ندارد. یعنی دو خط با هم موازی هستند و نقطه برخوردهی ندارند.

مثال : دستگاه $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 4x+8y=10 \end{cases}$ جواب ندارد زیرا:

فعالیت:

حالا شما شیب هر خط را جداگانه بدست آورید و نشان دهید دو خط با هم موازی هستند.

$$2x + 4y = 6 \Rightarrow 4y = \dots \Rightarrow y =$$

در نتیجه شیب خط $2x + 4y = 6$ برابر است با:

$$4x + 8y = 10 \Rightarrow 8y = \dots \Rightarrow y =$$

پس شیب خط $4x + 8y = 10$ برابر است با:

از روابط بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ دو خط فوق نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟



نئونج بودی

تلاشی در مسیر موفقیت

سوالات امتحانی

معادله خط

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) شیب خط $y=4$ برابر ۴ است.

(ب) خط $y=2x+1$ مبدأ گذر است.

(ج) معادله $y=0$ محور طول هاست.

(د) خط $x=-3$ بر محور طول ها عمود است.

(ه) خط $y=-2$ با محور طول ها موازی است.

(و) خط $y=5x$ با خط $y=-5x$ موازی است.

(ز) معادله ی خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد : $y=5$ است.

(ح) شیب خط $y=2x+3$ برابر با ۲ است.

(ط) نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی خط $y=2x-1$ قرار دارد.

(ی) معادله ی $y=x^2+1$ معادله ی خطی است.

(ک) معادله محور طول ها، $y=0$ می باشد.

(م) خط $x=3$ موازی محور طول ها است.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

* دو خط موازی دارای مساوی اند.

* شیب خط $y=\frac{3}{5}x-2$ برابر است.

* فرم کلی معادله خط مبدأ گذر است.

* عرض از مبدأ خط $y=15x+10$ برابر است با

* معادله ی خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ می گذرد :

* نسبت مقدار عرض به مقدار طول یک نقطه را خط گویند.

* از محل برخورد دو خط $y=2x-3$ و $y=2x+2$ نقطه حاصل می شود.

* شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر است با

* در حالت کلی $y=bx$ معادله ی خطی است موازی محور (طول ها، عرض ها)

* معادله $y=x+3$ یک معادله است. (خطی، غیر خطی)

* خط $x=2$ با محور طول ها زاویه درجه تشکیل می دهد. (۹۰، ۱۸۰)

- * شیب خط $y=4$ برابر است با
- * معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم می‌شود
- * وقتی می‌گوییم شیب جاده ۵ درصد است یعنی در هر می‌رویم.

بالاتر افقی به اندازه‌ی

وقتی می‌گوییم شیب جاده ۵ درصد است یعنی در هر می‌رویم.

۳. گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.

(الف) کدام یک از نقاط زیر روی خط $y=-x+7$ قرار دارد؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -12 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ب) مقدار b برابر چه عددی باشد تا خط $y=2x+b$ از نقطه

$$b=5 \quad (4)$$

$$b=-4 \quad (3)$$

$$b=4 \quad (2)$$

$$b=0 \quad (1)$$

(ج) مختصات نقطه‌ای از خط $4x-3y=14$ که طولش ۲ باشد، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 11/5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(د) معادله خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، کدام است؟

$$y = -\frac{3}{2}x \quad (4)$$

$$y = -\frac{2}{3}x \quad (3)$$

$$y = -2 \quad (2)$$

$$x=3 \quad (1)$$

(ه) خط $2x - \frac{1}{3}y = 2$ با کدامیک از خطوط زیر موازی است؟

$$y = -6x + 3 \quad (4)$$

$$y = 6 + 6x \quad (3)$$

$$y = 2x - 1 \quad (2)$$

$$2x + 3y = 4 \quad (1)$$

(و) معادله خطی که شیب آن -۳ بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد، کدام است؟

$$y = -3x + 5 \quad (4)$$

$$y = 3x - 5 \quad (3)$$

$$y = -3x \quad (2)$$

$$y = 3x + 5 \quad (1)$$

(ز) دو خط $4x + 3y = 2x + 9$ و $y = +\frac{2}{3}x + 2$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۴) متقطع اند

۳) منطبق اند

۲) عمودند

۱) موازیند

(ح) معادله نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم عبارت است از:

$$y = x \quad (3)$$

$$y = -x \quad (2)$$

$$y = 0 \quad (1)$$

(ط) عرض از مبدأ خط $y + 3x + 6 = 0$ برابر است با :

$$-3 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$-6 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۴. خط‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

(الف) $y = 3x$

(ب) $y = \frac{2}{5}x$

(ج) $y = 3x + 1$

(د) $y = \frac{2}{3}x - 5$

۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $5y = 10x + 5$ موازی بوده و از $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن $\frac{1}{2}$ - بوده و عرض از مبدأ آن $1+$ باشد.

۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $1 - x = y$ موازی بوده و از مبدأ مختصات بگذرد.

۸. معادله‌ی خطی را بنویسید که با محور طول‌ها موازی بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۹. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۰. شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) $y = \frac{2}{3}x - 5$

(ب) $2y = 6x + 8$

(ج) $4x - 3y = 12$

(الف) $x + 3y = 15$

۱۱. خط‌های زیر را رسم کنید.

تلاشی در مسیر موفقیت

$$(b) 6x - 9y = 18$$

۱۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۳. عدد b را چنان تعیین کنید که خط $y = 2x + b$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۱۴. عدد m را چنان بیابید که خط $y = 3x + (m - 4)$ مبدأً گذر باشد.

۱۵. آیا نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ روی خط $2y + 3x = -7$ قرار دارد چرا؟

۱۶. مقدار m را طوری تعیین کنید که دو خط زیر باهم موازی باشند.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = (m + 1)x + 3 \end{cases}$$

۱۷. عدد a را چنان بیابید که نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = ax - 4$ واقع باشد.

۱۸. شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۹. مختصات نقطه‌ای از خط $y = \frac{1}{2}x + 3$ را بنویسید که عرض آن ۷- باشد.

۲۰. آیا خط $6x - y = -12$ از نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 12 \end{bmatrix}$ می‌گذرد چرا؟

۲۱. خط‌های $7x + 4y = 7$ و $3x + 12y = 4$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۲۲. هر یک از دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + y = -7 \end{cases} \quad (\text{روش حذفی})$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad (\text{روش جایگزینی})$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{روش دلخواه})$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases} \quad (\text{روش دلخواه})$$

* هر یک از مسائل زیر را با تشکیل معادلات دو مجهولی حل کنید.

۲۳. دو برابر طول مستطیلی مساوی ۳ برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل، ۳۲ متر باشد، طول و عرض آن چند متر است؟

۲۴. در شکل زیر $x = 70$ و $y = 11$ اندازه‌ی X و y را به دست آورید. (اندازه‌ها برحسب میلی متر هستند).



۲۵. در یک مزرعه تعدادی گوسفند و مرغ وجود دارد اگر تعداد سرهای آن‌ها ۳۵ و مجموع پاهای آن‌ها ۱۲۰ تا باشد چند گوسفند و چند مرغ وجود دارد؟

تلاشی در مسیر موفقیت

۲۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند و اختلاف آن‌ها ۳۰ درجه است. اندازه‌ی هر زاویه را حساب کنید.

۲۷. سن خواهر مریم ۳ برابر سن اوست و اختلاف سن آن ها ۱۸ سال است. سن هر یک را تعیین کنید.

۲۸. هواپیمایی می خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می کند. تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویه ۴۵ درجه از زمین بلند می شود. وقتی به بالای انتهای باند می رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟

۲۹. شیب جاده ای ۵ درصد است. اگر ۴۰۰ متر به صورت افقی حرکت کنیم، چند متر بالاتر می رویم؟

۳۰. دستگاه روبرو را به روش **ترسیمی** حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

۳۱. دستگاه مقابل را به روش **حذفی** حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = -2 \end{cases}$$

۳۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + 3y = -14$, $2x - y = 7$ بگذرد و شیب آن مساوی ۲ باشد.

آزمون پایانی معادلات خط

ردیف	امام علی (ع) : غیبت کردن، نشانه منافق است. (میزان الحكمه ج ۹ ص ۴۴۵۱)	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) خط $2x + 1 = y$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.</p> <p>(ب) نقطه $\left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}\right]$ روی خط $\frac{1}{2}x + 2 = y$ قرار دارد.</p> <p>(ج) شیب خط $2y = 4x - 4$ است.</p> <p>(د) دو خط $2y = 4x - 1$ و $y = 2x - 2$ با هم موازی هستند.</p>	۲
۲	<p>گزینه مناسب را علامت بزنید.</p> <p>* معادله‌ی خطی که از نقطه $A = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right]$ گذشته و موازی محور x ها باشد، کدام است؟</p> <p>$y = \frac{2}{3}x$ (۴) $y = \frac{3}{2}x$ (۳) $y = 2$ (۲) $x = 2$ (۱)</p> <p>* خط $-2x + 3 = y$ از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟</p> <p>$\left[\begin{array}{c} 2 \\ 7 \end{array}\right]$ (۴) $\left[\begin{array}{c} -1 \\ 5 \end{array}\right]$ (۳) $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right]$ (۲) $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right]$ (۱)</p> <p>* معادله‌ی خطی که از دو نقطه $\left[\begin{array}{c} 3 \\ -6 \end{array}\right]$ و $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$ می‌گذرد، کدام است؟</p> <p>$y = -6$ (۴) $x = 3$ (۳) $y = -\frac{1}{2}x$ (۲) $y = -2x$ (۱)</p> <p>* معادله‌ی خطی که شیب آن -3 بوده و از نقطه $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array}\right]$ بگذرد، کدام است؟</p> <p>$y = -3x + 5$ (۴) $y = 3x - 5$ (۳) $y = -3x$ (۲) $y = 3x + 5$ (۱)</p>	۲
۳	<p>کامل کنید.</p> <p>(الف) در معادله‌ی $8x - 10 = 4y$ شیب خط برابر با _____ است.</p> <p>(ب) نسبت تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌های دو نقطه را _____.</p> <p>(ج) عرض از مبدأ خط $14 = 2y - 20x$ برابر است با _____.</p> <p>(د) زاویه بین دو خط $3y = 2x - 2$ برابر با _____ درجه است.</p>	۲
۴	هر یک از خط‌های زیر را رسم کنید.	۲/۵

تلاشی در مسیر موفقیت

	(ب) $3x - 4y = 12$	
۱	الف) معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن -5 - بوده و از $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد.	۱۰/۵
۱	ب) معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد.	۶
۱	مقدار b را چنان بیابید که نقطهٔ $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{2}{3}x + b$ واقع باشد.	۷
۱	الف) عرض از مبدأ خط $-9 = 6x + 3y$ را مشخص کنید.	۸
۱	ب) شیب خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.	۲
۲	دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$	۹
۱	در یک پارکینگ روی هم 20 موتورسیکلت و ماشین سواری وجود دارد. اگر مجموع چرخ‌های آن‌ها 56 عدد باشد، در این پارکینگ چند موتور و چند ماشین وجود دارد (معادلهٔ دو مجهولی تشکیل دهید، حل آن لازم نیست).	۱

۱۰	شیب و عرض از مبدأ خط $4y + 8x - 12 = 0$ را بیابید . (با راه حل)	۱/۵
۱۱	دستگاه زیر را به روش جایگزینی حل کنید.	۱/۵
۱۲	معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + 3y = -14$, $2x - y = 7$ بگذرد و شیب آن مساوی باشد	۱/۵
۱۳	سئوال جایزه : معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط به معادلات $2x - 3y = 17$, $y = 5 - 2x$ گذشته و بر خط $\frac{x}{2} + 3y + 1 = 0$ عمود باشد.	۱
۱۴	الگوی عددی جالب: شما هم می‌توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید . درسته؟	۱
۱۵	$13 \times 13 + 1 = 170$ $133 \times 133 + 11 = 17700$ $1333 \times 1333 + 111 = 1777000$ $13333 \times 13333 + 1111 = 177770000$	۱

خلاصه درس:

فصل هفتم

عبارت های گویا

* **عبارت گویا :** عبارت گویا کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای هستند.

$$\frac{\sqrt{7}x}{x^3}, \quad \frac{2x-7}{x^3+3x}, \quad \frac{-a}{b}, \quad \frac{x^3}{2}$$

مانند :

نکته: عبارت هایی مانند : $|a-b|$, $\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $\sqrt[5]{x}$ گویا نیستند.

عبارت های گویا در ریاضی، علوم، پزشکی، مهندسی و اقتصاد کاربرد دارند.

* ممکن است یک عبارت گویا به ازای بعضی مقادیر تعریف نشده باشد یعنی مخرج کسر صفر شود. در این صورت باید مقادیری از متغیر را که به ازای آن ها مخرج کسر صفر می شود، حذف کنیم.

سؤال : عبارت $\frac{x+5}{x^3-3x}$ به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

پاسخ : مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه های آن را پیدا می کنیم :

$$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

یعنی کسر فوق به ازای ۰ و ۳ تعریف نشده است.

* **ساده کردن یک عبارت گویا :** صورت و مخرج کسر را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری می نویسیم و سپس عبارت های مساوی را از صورت و مخرج باهم ساده می کنیم.

یادآوری : در تجزیه از فاکتورگیری و اتحادها کمک می گیریم.

◀ **مثال «۱»:** عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^3-9}{6x+18} = \frac{(x-3)(x+2)}{6(x+2)} = \frac{x-3}{6}$$

* **ضرب و تقسیم عبارت های گویا :** همانند عملیات اعداد گویا انجام می دهیم :

در ضرب، صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می شود :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

در تقسیم، کسر اول در معکوس کسر دوم ضرب می شود :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

نکته : قبل از اینکه ضرب کنیم، ابتدا عبارات را تجزیه و در صورت ساده شدن، آن ها را ساده می کنیم.

◀ **مثال «۲»:** حاصل عبارت زیر را به دست آورده و ساده کنید.

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 4} = \frac{(x-5)(x+1)}{x(x-4)} \times \frac{x-4}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-5}{x(x+2)}$$

* **جمع و تفریق عبارت های گویا :** همانند جمع و تفریق اعداد گویا عمل می کنیم بدین صورت که ک.م.م مخرج ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

◀ **مثال «۳»:** حاصل را به دست آورید.

(الف) $\frac{2x+5}{x-7} - \frac{-3x+2}{x-7} = \frac{2x+5+3x-2}{x-7} = \frac{5x+3}{x-7}$

(ب)
$$\begin{aligned} & \frac{b^2 - 20}{b^2 - 4} + \frac{b - 2}{b + 2} = \frac{b^2 - 20 + (b-2)(b-2)}{b^2 - 4} = \frac{b^2 - 20 + b^2 - 4b + 4}{b^2 - 4} \\ & = \frac{2b^2 - 4b - 16}{b^2 - 4} = \frac{2(b^2 - 2b - 8)}{b^2 - 4} = \frac{2(b-4)(b+2)}{(b-2)(b+2)} = \frac{2(b-4)}{b-2} \end{aligned}$$

* **ساده کردن عبارت های مرکب :** هنگام ساده کردن یک عبارت گویای مرکب همانند کسرهای گویا می توان صورت و مخرج را جداگانه ساده کرد و سپس آن ها را برهم تقسیم نمود و یا اینکه از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب و غیر صفر ضرب کرد.

◀ **مثال «۴»:**

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2}}{b - \frac{b^2}{b-a}} = \frac{\frac{b^2 - a^2 + a^2}{b^2 - a^2}}{\frac{b(b-a) - b^2}{b-a}} = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \div \frac{b^2 - ab - b^2}{b-a} \\ & = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \times \frac{b-a}{-ab} = -\frac{b^2(b-a)}{ab(b-a)(b+a)} = -\frac{b^2}{ab(b+a)} \end{aligned}$$

* **تقسیم چند جمله ای :**

الف) **تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای :** از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین توان ها استفاده می کنیم.

◀ **مثال «۵»:**

$$\frac{-27x^4y^5z}{9x^4zy^4} = \frac{-27}{9} \times \frac{x^4}{x^4} \times \frac{y^5}{y^4} \times \frac{z}{z} = -3y^5$$

ب) تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای : تک تک جملات صورت را بر جمله مخرج تقسیم می کنیم.

◀مثال «۶» :

$$\frac{8m^3 + 6m^2 + m}{2m} = \frac{8m^3}{2m} + \frac{6m^2}{2m} + \frac{m}{2m} = 4m^2 + 3m + \frac{1}{2}$$

ج) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای :

ابتدا تقسیم های معمولی را از ابتدایی یادآوری می کنیم :

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم} \\ \overline{29} \\ 27 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مقسوم علیه} \\ \xrightarrow{3} \\ 9 \\ \xrightarrow{9} \\ \text{خارج قسمت} \\ \text{باقیمانده} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \times 9 + 2 = 29 \\ 2 < 3 \end{array} \right\} \text{رابطه های تقسیم :}$$

مراحل تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای شیوه مراحل تقسیم معمولی است :

مرحله ای اول : ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد از بالاترین توان به کمترین توان متغیر می نویسیم.

$$2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1$$

مرحله ای دوم : اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم.

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

مرحله ای سوم : خارج قسمت بدست آمده در مرحله ای قبل را در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل را زیر مقسوم می نویسیم و کم می کنیم (درواقع باید عبارت دومی را قرینه کنیم).

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^3} - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1 \\ \cancel{-(2x^3 + 2x^2)} \\ \hline -3x^2 + x + 4 \end{array}$$

مرحله ای چهارم : چند جمله ای به دست آمده ای جدید را مانند یک مقسوم علیه جدید می گیریم. مراحل دوم و سوم را تکرار می کنیم. این عمل را آن قدر تکرار می کنیم تا درجه ای عبارت باقی مانده از مقسوم علیه کم تر باشد.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 + x + 4 \\ -(-3x^2 - 3x) \\ \hline 4x + 4 \\ -(4x +) \\ \hline \end{array}$$

سئوالات امتحانی
فصل عبارت های گویا

۱. گزینه مناسب را علامت بزنید.

(الف) کدام عبارت گویا نیست؟

$$\frac{1}{x} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{5} \quad (3)$$

$$\frac{10}{x+2} \quad (2)$$

$$\frac{-a}{b} \quad (1)$$

(ب) ساده شده ای عبارت $\frac{-42x^3y^2}{6x^2y}$ برابر است با :

$$-7xy^2 \quad (4)$$

$$-7xy \quad (3)$$

$$\frac{-7y}{x} \quad (2)$$

$$\frac{-7x}{y} \quad (1)$$

(ج) عبارت گویای $\frac{x+5}{x-2}$ به ازای چه مقداری تعریف نشده است؟

$$x = -5 \quad (4)$$

$$x = 5 \quad (3)$$

$$x = -3 \quad (2)$$

$$x = 3 \quad (1)$$

(د) ساده شده ای عبارت $\frac{x^2 + 3x^2}{x^2 + 3x}$ برابر کدام گزینه است؟

$$x \quad (4)$$

$$x + 3 \quad (3)$$

$$\frac{x+3}{x} \quad (2)$$

$$\frac{x}{3} \quad (1)$$

(ه) کدامیک از عبارت های زیر گویا است؟

$$|x-y| \quad (4)$$

$$\frac{2}{5}x \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{a+b} \quad (2)$$

$$\sqrt{xy} \quad (1)$$

(و) حاصل کدام گزینه مساوی ۱- است؟

$$\frac{3-b}{3+b} \quad (4)$$

$$\frac{2x+3}{3+2x} \quad (3)$$

$$\frac{2x-5}{5-2x} \quad (2)$$

$$\frac{3m+4}{3m-4} \quad (1)$$

۲. مشخص کنید کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟

$$\frac{8}{a+10}, \frac{\sqrt{3x}}{5}, \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \sqrt[7]{x}, \frac{x\sqrt{y}+3}{x^2}$$

۳. هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

(الف) $\frac{x+20}{x}$

(ب) $\frac{3x}{x^2-16}$

(ج) $\frac{x+7}{x(x-2)}$

(د) $\frac{2m+3}{m^2-5m+6}$

۴. حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

(الف) $\frac{28y^2x}{14yx^2} =$

(ب) $\frac{t-7}{7-t} =$

(ج) $\frac{12x+24}{4x^2+8x} =$

(د) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} =$

۵. الف) به ازای چه مقداری از x عبارت گویایی زیر تعریف نشده است؟

$\frac{5x-4}{x^2-2x}$

ب) عبارت گویایی را بیابید که اگر با $\frac{x+1}{x-1}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

تلاشی در مسیر موفقیت

۶. در جای خالی چه عبارتی قرار دهیم تا تساوی برقرار باشد؟

$$\frac{3x}{x-5} = \frac{\dots \times (x-7)}{x^2 - x - 20}, \quad , \quad \dots \times (x-7) = 1.$$

۷. حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\frac{-5x+8}{x+9} + \frac{4x-17}{x+9} =$$

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{x+1}{y-1} =$$

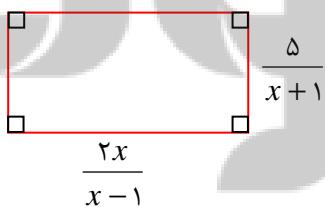
$$\frac{x^2+1}{x^2-4x-21} - \frac{x-3}{x+3} =$$

۸. مساحت یک مستطیل برحسب m به صورت $2m^2 - 4m + 2$ و عرض آن $m-1$ می باشد. طول این مستطیل را برحسب m به دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را به دست آورده و جواب را ساده کنید.

$$\frac{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x}} =$$

۱۰. مساحت و محیط مستطیل زیر را حساب کنید.



تلاشی در مسیر موفقیت

۱۱. ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید (ابتدا در صورت امکان عبارت ها را ساده کنید).

$$\frac{a}{2b} \times \frac{3b}{2a^2} \times \frac{4}{a} =$$

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} \times \frac{x + 2}{x^2 - 8x + 16} =$$

$$\frac{b^2 - 1}{7-b} \div \frac{b+1}{b^2 - 49} =$$

۱۲. اگر نسبت $y-2x$ به $x+y$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت x به y چقدر خواهد بود؟

۱۳. ساده شده ای عبارت $\frac{x^2 - 4}{10x} \times \frac{5x^2}{x^2 - 2x}$ کدامیک از عبارت های زیر است؟

د) $\frac{x-1}{2x}$

ج) $\frac{x+2}{2}$

ب) $\frac{x+2}{2x}$

الف) $x-1$

۱۴. کیومرث در برگه امتحانی خود حاصل عبارتی را به اشتباه چنین نوشت: اشتباه او را توضیح دهید.

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{1-x}{2} = \frac{3x+1-1-x}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

۱۵. الف) عبارت $\frac{2}{3x-1}$ به ازای چه مقداری تعریف نشده است؟

ب) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2} \div \frac{x^2 - x - 2}{x+1} =$$

۱۶. مریم در تقسیم $\frac{x^3 + 2x - 5}{x-1}$ خارج قسمت خود را $x^2 + x + 5$ و باقی مانده تقسیم را $3x - 5$ محاسبه کرده است. آیا مریم تقسیم را کامل و درست انجام داده است چرا؟ (امتحان کنید).

۱۷. تقسیم کنید.

$$2x^3 - 4x^2 + 2x \quad \left| \begin{array}{c} x-2 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$5x^3 + 4x^2 - x + 3 \quad \left| \begin{array}{c} x+1 \\ \hline \end{array} \right.$$

۱۸. اگر خارج قسمت تقسیم $x^3 - 7x^2 - 8x + b$ بر $x+a$ برابر -2 و باقی مانده مساوی 5 باشد، مقادیر a و b را بیابید. (از رابطه های تقسیم استفاده کنید).

۱۹. الف) حاصل $(x^3 - 2x^2 - 3x + 7) \div (x^2 - 4x^3 + x + 7)$ را به دست آورید.

ب) رابطه های تقسیم را بنویسید.

۲۰. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $k - 5x^3 - 6x^2 - 2x - 1$ بخش پذیر باشد.
(راهنمایی : تقسیم را انجام دهید و باقی مانده را مساوی صفر قرار دهید).

الگوی عددی جالب : شما هم می توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید. جالبه نه؟

$$11 \times 11 = 121$$

$$101 \times 101 = 10201$$

$$1001 \times 1001 = 1002001$$

$$10001 \times 10001 = 100020001$$

آزمون پایانی فصل ۷ «عبارت های گویا»

ردیف	رسول اکرم (ص) : انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.	بارم
۱	<p>گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) به ازای چه مقداری از x عبارت $\frac{x-5}{x}$ تعریف نشده است؟</p> <p>X=۰ (۴) X=۵ (۳) X=-۱ (۲) X=۱ (۱)</p> <p>ب) کدام عبارت گویا <u>نیست</u>؟</p> <p>$\frac{5}{6}$ (۴) \sqrt{x} (۳) $\frac{1}{x}$ (۲) $\frac{x}{y}$ (۱)</p> <p>ج) ساده شده‌ی $\frac{18a^3b}{6 \cdot a^2b}$ کدام است؟</p> <p>$\frac{1}{3}ba$ (۴) $\frac{3b}{10a}$ (۳) $\frac{3}{10}a$ (۲) $\frac{10}{3}a$ (۱)</p> <p>د) حاصل کدام گزینه با $\frac{(x+y)z}{b}$ برابر است؟</p> <p>b(x+y)z (۴) $\frac{z}{b}(xy)$ (۳) $\frac{xz+y}{b}$ (۲) $\frac{1}{b}z(y+x)$ (۱)</p>	۲
۲	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>$\frac{\sqrt{x^6}}{2}$ عبارتی گویا است.</p> <p>ساده شده‌ی $\frac{ax+a}{a}$ برابر است با $x+a$.</p> <p>* عبارت $\frac{x+7}{x-1}$ به ازای $x=-1$ تعریف نشده است.</p> <p>* حاصل $\frac{a^2-b^2}{ab}$ برابر با $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ است.</p>	۲
۳	<p>هر یک از عبارات زیر به ازای چه مقادیری <u>تعریف نشده</u> است؟</p> <p>$\frac{x+1}{4x^2+20x}$</p> <p>$\frac{5}{x^2+x-12}$</p>	۲

۲	$\frac{a^r - 9}{3a + 9} =$ $\frac{x^r - y^r}{y - x} =$	عبارات زیر را ساده کنید.	۴
۲	$\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right) \left(\frac{x^r - y^r}{2y}\right)$	حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.	۵
۰/۵	$\frac{z(x+y)}{t} =$ $\cdot (x+y)$	الف) در جای خالی عبارتی مناسب بنویسید تا تساوی برقرار شود.	۶
۱/۵	$\left(\frac{4x^r}{3xy}\right) \div \left(\frac{8x}{y^r}\right) =$	ب) حاصل را بدست آورده و ساده کنید.	
۲	$\frac{x-7}{x+3} - \frac{x+4}{x+3} =$ $(ال){\frac{2a^r - 16}{a^r - 4}} + \frac{a+4}{a+2} =$	حاصل عبارات زیر را بدست آورید.	۷
۲	$A + B = \frac{x+5}{2(x^r - 4)}$	اگر $A = \frac{3}{2x-4}$ باشد مقدار عبارت B را بیابید.	۸
۲	$x^r + x^r + 2 \quad -1 + x^r$	تقسیم زیر را انجام دهید. (ابتدا عبارات را استاندارد کنید.)	۹

۲	به ازای چه مقداری از k چند جمله‌ای $-x^3 + 2x^2 - x + k$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟	۱۰
۱/۵	<p>سوال جایزه :</p> <p>اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 - 7x + b$ بر $x+a$ برابر ۲ باشد، مقادیر a، b را بیابید.</p> <p>الگوی عددی جالب : شما هم می‌توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید. جالبه نه؟</p> <p style="text-align: center;">$9 \times 9 + 9 = 90$</p> <p style="text-align: center;">$99 \times 99 + 99 = 9900$</p> <p style="text-align: center;">$999 \times 999 + 999 = 999000$</p> <p style="text-align: center;">$9999 \times 9999 + 9999 = 99990000$</p> 	۱۱

خلاصه درس :

فصل هشتم

حجم و مساحت

* حجم و مساحت کره :

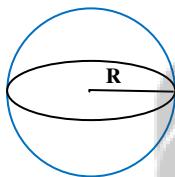
- انواع حجم :
- ۱. منشوری
 - ۲. کروی
 - ۳. هرمی

- حجم های منشوری را به طور کامل در ریاضی هفتم یاد گرفتید.

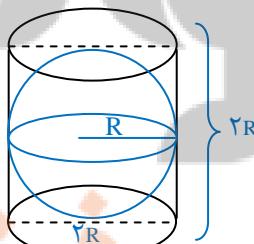
تعریف دایره: دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که همهٔ آن نقاط از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله است. به این اندازهٔ شعاع دایره می‌گوییم.

تعریف کره: کره را همانند دایره تعریف می‌کنیم: کره مجموعه نقاطی از فضا است که همهٔ آن نقاط از یک نقطه در فضا به نام مرکز به یک فاصله هستند. مانند انواع توپ و کرهٔ زمین.

* اگر یک کره را به طور کامل درون یک استوانه قرار دهیم، به طوری که از طرف بالا و پایین بر استوانه مماس شود، گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است.



نکته: اگر کره‌ای در یک استوانه محاط شود، ارتفاع استوانه برابر قطر کره و شعاع قاعده استوانه با شعاع کره مساوی است.



* حجم کره :

با توجه به شکل بالا و یک آزمایش ساده ثابت می شود :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه} = \text{حجم ۳ تا نیم کره}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \pi R^3 = \text{حجم نیم کره}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

در نتیجه :

$$S = 4\pi R^2$$

* مساحت کره : مساحت کره ای به شعاع R برابر است با :

◀ مثال «۱»: حجم و مساحت کره ای به قطر 12cm را به دست آورید.

$$12 \Rightarrow \text{قطر کره} \quad 12 \div 2 = 6 \quad \text{شعاع}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} \times 6^3 = \cancel{\frac{4}{3}} \times \frac{3}{14} \times \cancel{216}^{72} = 90.4 / 32$$

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times \frac{3}{14} \times 6^2 = 4 \times \frac{3}{14} \times 36 = 45.2 / 16$$

پاسخ :

نکته «۱»: از دوران نیم دایره حول قطر آن کره بدست می آید.

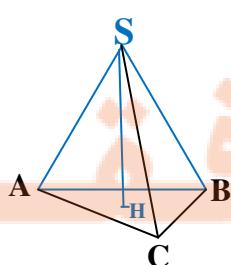
نکته «۲»: از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

* حجم هرم و مخروط :

الف) هرم : هرم شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین (چند ضلعی محض) به نام قاعده است.

ارتفاع هرم : به فاصله ای رأس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم گویند.

◀ مثال «۲»: رأس : S ، شکل قاعده : مثلث، تعداد وجه ها : ۳ وجه، شکل وجه ها : مثلثی ، نام قاعده : مثلث ABC



نکته : وجه جانبی (پهلوهای هرم) همگی مثلثی شکل هستند.

* حجم هرم :

کلامی :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

$$V = \frac{1}{3} sh \text{ هرم}$$

جبری :

◀ مثال «۳»: حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵cm و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر را حساب کنید.

$$S = 5 \times 5 = 25 \Rightarrow V = \frac{s.h}{3} = \frac{25 \times 9}{3} = 75 \text{ cm}^3$$

نکته «۱»: واحد حجم مترمکعب یا سانتی مترمکعب است و در مایعات معمولاً لیتر است.

نکته «۲»: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آن ها باهم برابرند.

* مخروط : مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.



نکته: از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن مخروط بدست می آید.

* حجم مخروط :

کلامی :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$$

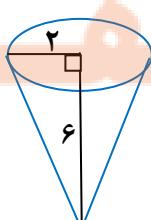
$$V = \frac{1}{3} sh = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

جبری :

R شعاع قاعده (دایره) و h ارتفاع مخروط و $\pi \approx 3/14$

◀ مثال «۴»: حجم مخروط زیر را حساب کنید.

$$V = \frac{sh}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{3/14 \times 2 \times 2 \times 4}{3} = 25/12$$



* سطح و حجم :

- ۱) از دوران **مستطیل** حول طول یا عرض آن، **استوانه** بدست می آید.
- ۲) از دوران **مربع** حول یکی از اضلاع آن، **استوانه** بدست می آید.
- ۳) از دوران **مثلث قائم الزاویه** حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائم، **مخروط** حاصل می شود.
- ۴) از دوران **مثلث قائم الزاویه** حول وتر دو **مخروط** حاصل می شود.
- ۵) از دوران **مثلث متساوی الاضلاع** حول یک ضلع آن دو **مخروط مساوی** پدید می آید.
- ۶) از دوران **مربع** حول یک قطر آن دو **مخروط** هم قاعده و مساوی پدید می آید.
- ۷) از دوران **لوزی** حول یک قطر آن دو **مخروط** برابر و به هم چسبیده بدست می آید.
- ۸) از دوران **نیم دایره** حول قطر آن کره بدست می آید.
- ۹) از دوران **ربع دایره** حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

◀ **مثال «۵»** : حجم حاصل از دوران نیم دایره‌ای به **قطر** 10 cm را حول قطر آن پیدا کنید.

پاسخ : از دوران نیم دایره حول قطر آن کره پدید می آید بنابراین :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi \quad (\text{شعاع کره } 5 = 10 \div 2)$$

* مساحت کل مکعبی به ضلع a برابر است با $6a^2$.

* مساحت کل مکعب مستطیلی به ابعاد a و b و c برابر است با $2(bc + ac + ab)$



نمونه سئوالات

امتحانی سطح و حجم

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

- (الف) کره مجموعه نقاطی از صفحه است که همهٔ نقاط آن از یک نقطه به یک فاصله‌اند.
- (ب) از دوران نیم دایره حول قطر آن نیم کره پدید می‌آید.
- (ج) قاعدهٔ مخروط دایره‌ای و قاعدهٔ هرم یک چند ضلعی است.
- (د) نحوهٔ محاسبه حجم هرم و مخروط مثل هم است.
- (ه) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائم آن هرم پدید می‌آید.
- (و) حجم هرمی با مساحت قاعدهٔ ۲۰ و ارتفاع ۶ برابر است با ۴۰.
- (ز) ممکن است در حالت خاصی حجم کرده با مساحت کره برابر شود.
- (ح) حجم هرمی که مساحت قاعدهٔ آن $\sqrt{973}$ و ارتفاع هرم $\sqrt{27}$ سانتی‌متر باشد، ۲۷ سانتی‌متر مکعب است.

۲. کامل کنید.

- * هرم گویند.
- * به فاصلهٔ رأس هرم تا قاعدهٔ آن را
- * شکل وجه‌های جانبی هرم به صورت
- * اگر دو هرم قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع برابر داشته باشند آنگاه حجم‌های آن دو
- * حجم هرم مربع القاعده‌ای به اضلاع ۴ و ارتفاع هرم ۶ باشد، برابر است با
- * حجم هرم به صورت جبری برابر است با
- * مخروط شبیه هرم است که قاعدهٔ آن به شکل
- * از دوران مستطیل حول طول آن بددست می‌آید.
- * از دوران نیم دایره حول قطر آن پدید می‌آید.
- * از دوران رباعی دایره حول شعاع آن به وجود می‌آید.
- * مساحت کل مکعبی به ضلع ۵ cm برابر است با
- * از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائم آن بددست می‌آید.
- * نسبت مساحت کره به حجم آن مساوی برابر شعاع کره است.
- * اگر مساحت قاعده و ارتفاع یک هرم با مساحت قاعده و ارتفاع یک مخروط برابر باشد، نسبت حجم‌های این دو شکل برابر است با

۳. گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.

(الف) از دوران مربع حول یک ضلع آن چه شکلی پدید می‌آید؟

- (۱) هرم (۲) استوانه (۳) مخروط (۴) کره

(ب) اگر شعاع کره‌ای را ۳ برابر کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۸

(ج) حجم هرم مربع القاعده‌ای به قطر قاعده $\sqrt{1072}$ و ارتفاع ۱۵ چند است؟

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۱

(د) نسبت عددی حجم کره به مساحت کره کدام است؟

- (۱) $4R$ (۲) $3R$ (۳) $\frac{1}{4}R$ (۴) $\frac{1}{3}R$

(ه) حجم مخروطی به شعاع ۱ cm و ارتفاع ۳ cm چند سانتی متر مکعب است؟

- (۱) $\frac{3}{14}$ (۲) $\frac{6}{28}$ (۳) $\frac{9}{42}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

(و) مساحت کره‌ای به قطر ۶ سانتی متر برابر است با :

- (۱) 12π (۲) 36π (۳) 72π (۴) 144π

(ز) مکعب مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ موجود است اگر مساحت کل این مکعب مستطیل ۹۴ سانتی متر مربع باشد، ارتفاع این شکل چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(ح) کره‌ای به قطر ۴ cm را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم، حجم استوانه چند سانتی متر مکعب است؟

- (۱) 4π (۲) 48π (۳) 12π (۴) 16π

۴. حجم و مساحت کره‌ای به شعاع ۳cm را بدست آورید.

۵. سطح کره‌ای را پیدا کنید که حجم آن 36π باشد (برحسب π)

۶. کره‌ای در استوانه‌ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است :

(الف) حجم کره را بدست آورید.

(ب) مساحت کره را بدست آورید.

(ج) حجم استوانه را پیدا کنید.

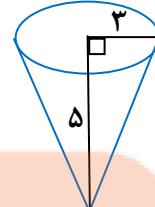
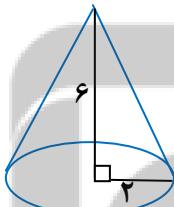
۶. مهدی نیم کره ای توپر به قطر ۲۰ سانتی متر دارد. می خواهد سطح آن را با کاغذ کادو بپوشاند.
حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو به کار می رود؟

۷. حجم هرمی که قاعده‌ی آن یک لوزی به قطرهای ۸ و ۶ و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

۸. حجم هرم مربع القاعده‌ای به قطر قاعده‌ی $\sqrt{372}$ و ارتفاع ۵ متر چند مترمکعب است؟

۹. قاعده‌ی یک هرم مستطیلی به ابعاد ۶ و ۱۰ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۵ سانتی متر باشد، حجم هرم را پیدا کنید.

۱۰. حجم شکل‌های زیر را به دست آورید.



۱۱. الف) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن چه شکلی حاصل می شود؟

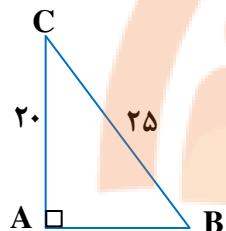
ب) حجم مخروطی به شعاع قاعده ۴ cm و ارتفاع ۱۲ cm را حساب کنید.

۱۲. وتر و یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه‌ای به ترتیب ۱۰ و ۶ می باشند. این مثلث را حول ضلع ۶ سانتی متر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید

۱۳. گنجایش مخروطی ۲۸۲۶۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده‌ی آن ۳ متر باشد، ارتفاع آن چند متر است (هر مترمکعب ۱۰۰۰ لیتر است).

۱۴. الف) اگر هرم منتظمی با قاعده‌ی مثلث را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

ب) مثلث قائم الزاویه ABC را حول ضلع AC دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدهست آورید.



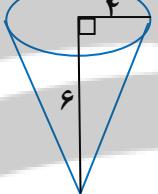
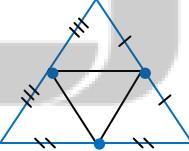
۱۵. در استوانه‌ای که ارتفاع و قطر قاعده‌ی آن باهم برابرند، کره‌ای محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه را پیدا کنید.

نوبتی برو

تلاشی در مسیر موفقیت

آزمون پایانی فصل حجم و مساحت

ردیف	فرزند گلم : سازنده ترین کلمه صبر است برای داشتنش دعا کن.	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) حجم کره ای به شعاع a برابر است با $4\pi a^2$.</p> <p>(ب) شکل وجه های جانبی هرم مستطیل هستند.</p> <p>(ج) حجم هرم مساوی ثلث حجم یک منشور است.</p> <p>(د) از دوران ربع دایره حول شعاع آن، نیم کره پدید می آید.</p>	۲
۲	<p>کامل کنید.</p> <p>* طول عمودی که از رأس بر قاعده هرم رسم می شود، هرم است.</p> <p>* است که همه ای نقاط از یک نقطه به نام مرکز کره مجموعه نقاطی از</p> <p>* از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن پدید می آید.</p>	۲
۳	<p>گزینه مناسب را علامت را بزنید.</p> <p>(الف) از دوران مستطیل حول طول آن چه شکلی حاصل می شود؟</p> <p>(۱) منشور (۲) مخروط (۳) هرم (۴) استوانه</p> <p>(ب) مساحت کره ای به شعاع 1cm چند سانتی متر مربع است؟ ($\pi \approx 3/14$).</p> <p>(۱) $37/68$ (۲) $25/12$ (۳) $12/56$ (۴) $4/18$</p> <p>(ج) حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۲ و ارتفاع ۳ چه قدر است؟</p> <p>(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) $12/56$</p> <p>(د) شعاع قاعده ای مخروطی را نصف و ارتفاع آن را دو برابر می کنیم حجم مخروط حاصل چه کسری از مخروط اولیه است؟</p> <p>(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$</p>	۲
۴	<p>(الف) حجم کره ای به شعاع ۳ سانتی متر را به دست آورید.</p> <p>(ب) مساحت کره ای به قطر 10 سانتی متر را حساب کنید.</p>	۲
۵	<p>امین توب پلاستیکی خود را که اندازه قطر آن 12 سانتی متر بود، به دو قسمت مساوی تقسیم کرد. سپس یکی از نصفه های توب را پر از آب کرد و درون ظرف پلاستیکی استوانه ای شکلی به همان قطر ریخت. آب در استوانه تا چه ارتفاعی بالا می آید؟</p>	۱/۵

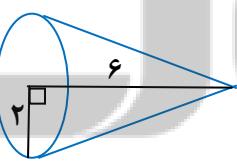
۰/۵	<p>(الف) شکل وجههای جانبی یک هرم چگونه است؟</p>	۶
۱	<p>(ب) در چه شرایطی هرم را منتظم می‌گوییم؟</p>	
۰/۵	<p>(ج) قاعده‌ی هرم محدب است یا مقعر؟</p>	
۱/۵	<p>قاعده‌ی هرمی به شکل مستطیل به ابعاد ۸ و ۶ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۰ سانتی متر باشد، حجم هرم را حساب کنید.</p>	۷
۱/۵	<p>حجم هرمی ۲۲۵ سانتی مترمکعب و مساحت قاعده‌ی آن ۷۵ سانتی مترمربع است. ارتفاع هرم چند سانتی متر است؟</p>	۸
۱/۵	<p>حجم شکل زیر را بدست آورید.</p> 	۹
۱/۵	<p>مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ سانتی متر را حول ضلع ۴ سانتی متر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید.</p>	۱۰
۰/۵	<p>(الف) شکل زیر گستردگی دارد حجم است؟ (مخروط، هرم، منشور)</p> 	۱۱
۲	<p>(ب) حجم مخروطی ۳۱۴ سانتی متر مکعب و ارتفاع آن ۱۲ سانتی متر است. شعاع قاعده مخروط را حساب کنید.</p>	

آزمون نوبت دوم

ردیف	استفاده از ماشین حساب مانعی ندارد.	بارم										
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) شاعران معروف قرن معاصر یک مجموعه را مشخص می کند.</p> <p>(ب) هر دو لوزی دلخواه همواره باهم متشابه هستند.</p> <p>(ج) درجه یک جمله ای $y - 3x^2$ نسبت به متغیر y برابر یک است.</p> <p>(د) نقطه $\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right]$ روی خط $x+1 = \frac{1}{2}y$ قرار دارد.</p>	۱										
۲	<p>گزینه‌ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(A) کدام گزینه نادرست است؟</p> <p>$Q' \cap Z = Z$ (۴) $Q \cap R = Q$ (۳) $Q \cap Q' = \emptyset$ (۲) $Q \cup Q' = R$ (۱)</p> <p>(B) عدد $\sqrt{48} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟</p> <p>(۱) ۷ و ۶ (۲) ۸ و ۹ (۳) ۹ و ۱۰ (۴) ۱ و ۹</p> <p>(C) اگر $x - y = 0$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت :</p> <p>(۱) $x > y$ (۲) $x < y$ (۳) $x = y$ (۴) $x + y = 0$</p> <p>(D) کدام گزینه یک جمله‌ای است؟</p> <p>(۱) $\frac{2}{x}$ (۲) \sqrt{x} (۳) x^{-3} (۴) x^{10}</p>	۲										
۳	<p>جاهاي خالي را با کلمات يا اعداد مناسب کامل کنيد.</p> <p>(۱) اجتماع عضوهای دو مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ را می‌گویند.</p> <p>(۲) اطلاعات داده شده‌ی مسئله را و خواسته‌ی مسئله را می‌نامیم.</p> <p>(۳) برای محاسبه عرض از مبدا خط، در معادله مقدار y را مساوی قرار می‌دهیم.</p> <p>(۴) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن بدست می‌آید.</p>	۱/۲۵										
۴	<p>سؤال را به جواب مربوطه در ستون سمت چپ وصل کنید.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>سؤال</th> <th>جواب</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) شب خط $9x - 12 = 3y$</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>ب) عرض از مبدأ خط $3x + 4y = 4$</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>ج) ریشه سوم عدد 64</td> <td>۳</td> </tr> <tr> <td>د) حاصل $\frac{7}{2^3} + 2^{-2} = ?$</td> <td>۴</td> </tr> </tbody> </table>	سؤال	جواب	الف) شب خط $9x - 12 = 3y$	۱	ب) عرض از مبدأ خط $3x + 4y = 4$	۲	ج) ریشه سوم عدد 64	۳	د) حاصل $\frac{7}{2^3} + 2^{-2} = ?$	۴	۱
سؤال	جواب											
الف) شب خط $9x - 12 = 3y$	۱											
ب) عرض از مبدأ خط $3x + 4y = 4$	۲											
ج) ریشه سوم عدد 64	۳											
د) حاصل $\frac{7}{2^3} + 2^{-2} = ?$	۴											

۰/۵	<p>(الف) مجموعه A را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>$A = \{3x - 1 \mid x \in N, x \leq 2\} = \{$</p>	۵
۰/۷۵	<p>(ب) مجموعه B را به زبان ریاضی بنویسید.</p> <p>$B = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{4}{4}\} = \{$</p>	
۱	<p>اگر $M = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ و $H = M \cap H$ باشد، $M-H$ را مشخص کنید.</p>	۶
۰/۵	<p>(الف) بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ دو کسر بنویسید.</p>	۷
۰/۵	<p>(ب) مجموعه $C = \{x \in R \mid -3 \leq x < 2\}$ را روی محور نشان دهید.</p>	
۰/۷۵	<p>اگر $a = -3$ و $b = -5$ مقدار $a + a+b$ را بدست آورید.</p>	۸
۰/۷۵	<p>در شکل زیر O مرکز دایره و $\overline{AD}, \overline{BC}$ بر دایره مماسند نشان دهید :</p>	۹
۰/۵	<p>(الف) مثلث ABC به اضلاع ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به اضلاع $1-x$ و 10 و $7+x$ باهم متشابه هستند، مقدار x را پیدا کنید.</p>	۱۰
۰/۵	<p>(ب) در یک نقشه مقیاس $\frac{1}{500}$ است. فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۲ سانتی متر است. فاصله‌ی این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چند متر است؟</p>	

۰/۵	$3^{-5} \times 7^{-3} \div 21^4 =$	الف) حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید. ب) عدد زیر را با نماد علمی نمایش دهید.	۱
۰/۵	$0/0\ldots0078 =$		
۰/۷۵	$\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$	حاصل عبارت زیر را به دست آورید و جواب را ساده کنید.	۱۲
۰/۵		مخرج کسر $\frac{5}{\sqrt{2}x}$ را گویا کنید.	۱۳
۰/۷۵	$(a-5)^3$	با استفاده از اتحادها، حاصل را بدست آورید.	۱۴
۱	$a^7 - 9 =$ $x^7 - 7x + 12 =$	تجزیه کنید.	۱۵
۰/۷۵	$5(3 - 2x) \leq -2x + 3$	نامعادله زیر را حل کنید.	۱۶
۱		خط $\frac{2}{3}x - 4 = y$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.	۱۷

۱	$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$	دستگاه مقابله را به روش حذفی حل کنید.	۱۸
۰/۵	معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۵ بوده و با خط $y = \frac{2}{3}x - 4$ موازی باشد.	۱۹	
۱	$x^2 - 5x - 24 \mid x - 8$	تقسیم زیر را انجام دهید.	۲۰
۰/۵	$n - \frac{n^2}{n-m} =$	حاصل را بدست آورید.	۲۱
۰/۵	الف) حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع قاعده ۵ و ارتفاع ۱۲ را بیابید.	۲۲	
۰/۷۵		ب) حجم مخروط زیر را بدست آورید.	