دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۸ فروردین ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	شاهین پروازی-عادل حسینی-افشین خاصه‌خان-علی سلامت-علی شهرابی-پویان طهرانیان-کامیار علّییون-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-سوگند روشنی-سهام مجیدی‌پور
	ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-محسن بهرام‌پور-رضا توکلی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-سوگند روشنی-احمدرضا فلاح
	فیزیک	بابک اسلامی-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-امیرمسعود حاجی‌مرادی-محمدعلی راست‌پیمان-بهنام رستمی-سعید شرق پوریا علاقه‌مند-مسعود قره‌خانی-جلیل گلی-علیرضا گونه-حسین مخدومی-سیدعلی میرنوری-حسام نادری-سعید نصیری علی نظری-مصطفی واثقی-شادمان ویسی
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-ارژنگ خانلری-پیمان خواجوی‌مجد-حمید ذبحی-یاسر راش-روزبه رضوانی-امیرحسین طیبی امیرحسین مسلمی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	بابک اسلامی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی علی سرآبادانی	عادل حسینی	عادل حسینی	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم محبوبه بیک‌محمدی
		ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: سیدعلی میرنوری	
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	میلاد سیاوشی	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

تلاشی در مسیر موفقیت

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $2x^2-x-10$ برابر با $2x+6$ است:

$$f(x)=(2x^2-x-10)q_1(x)+2x+6 \xrightarrow{x=-2} f(-2)=2$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر x^2-x-2 برابر با $x+10$ است:

$$f(x)=(x^2-x-2)q_2(x)+x+10 \xrightarrow{x=2} f(2)=12$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر x^2-4 را به صورت $r(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$f(x)=(x^2-4)q_3(x)+ax+b$$

در تساوی بالا، یک بار $x=2$ و یک بار هم $x=-2$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=12 \Rightarrow 2a+b=12 \\ f(-2)=2 \Rightarrow -2a+b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{5}{2}, b=7$$

پس باقی‌مانده برابر با $r(x)=\frac{5}{2}x+7$ است.

حال معادله را حل می‌کنیم: $r(x)=\frac{5}{2}x+7=-8 \Rightarrow x=-6$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

ترتیب تبدیل‌ها در هر گزینه را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

گزینهٔ «۱»: $y=f(2x-4)=\log_2(2x-4)$

گزینهٔ «۲»: $y=f(2(x-2))=f(2x-4)=\log_2(2x-4)$

گزینهٔ «۳»: $y=f(x-2)+1=\log_2(x-2)+1$
$=\log_2(x-2)+\log_2 2=\log_2(2x-4)$

گزینهٔ «۴»: $y=f(2(x-4))=f(2x-8)$
$=\log_2(2x-8)\neq\log_2(2x-4)$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(پویان طهرانیان)*

خط $x=\frac{1}{3}$ محور تقارن سهمی $y=3x^2-2x+1$ است $(x=-\frac{b}{2a})$، پس با تقارن نسبت به این خط، ضابطه و نمودار تابع تغییری نمی‌کند. حال ۲ واحد به سمت xهای منفی انتقال می‌دهیم:

$$y=3(x+2)^2-2(x+2)+1=3x^2+10x+9$$

و سپس این تابع را با خط $y=1-4x$ تقاطع می‌دهیم:

$$3x^2+10x+9=1-4x \Rightarrow 3x^2+14x+8$$
$$=(3x+2)(x+4)=0 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=-4$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

با توجه به شکل، ریشهٔ داخل پرانتز باید $\frac{b}{2}+1$ باشد:

$$x-b=0 \xrightarrow{x=\frac{b}{2}+1} \frac{b}{2}+1-b=0 \Rightarrow b=2$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=a(x-2)^3+2$ است. نقطهٔ $A(2+\sqrt[3]{2},0)$ روی تابع است.

$$\Rightarrow a(2+\sqrt[3]{2}-2)^3+2=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow a=-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-(x-2)^3+2$$

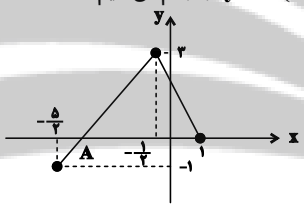
برای محاسبهٔ $f^{-1}\left(\frac{43}{8}\right)$ باید معادلهٔ $f(x)=\frac{43}{8}$ را حل کنیم:

$$f(x)=\frac{43}{8} \Rightarrow -(x-2)^3+2=\frac{43}{8}$$
$$\Rightarrow (x-2)^3=-\frac{27}{8} \xrightarrow{\text{ریشه‌سوم}} x-2=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

ابتدا نمودار $y=f(-2x)$ را رسم می‌کنیم.



مختصات نقطه A را بدست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} (-\frac{5}{2},-1) \\ (-\frac{1}{2},3) \end{array}\right\} \xrightarrow{m=\frac{3-(-1)}{-\frac{1}{2}-(-\frac{5}{2})}=2} y-3=2(x+\frac{1}{2})$$
$$\xrightarrow{y=0} x_A=-2$$

برای این که نمودار $y=f(-2x+b)$ از ناحیه دوم نگذرد، باید نمودار $y=f(-2x)$ به اندازهٔ حداقل ۲ واحد به سمت راست انتقال یابد، تا نقطه A در قسمت نامنفی محور xها قرار بگیرد.

$$y=f(-2(x-2))=f(4-2x)$$

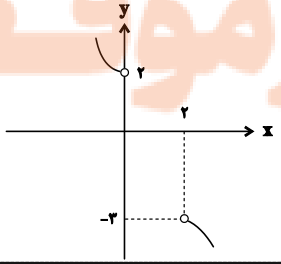
پس حداقل مقدار b برابر ۴ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

ضابطهٔ اول $y_1=1-(x-1)^3$ و ضابطهٔ سوم $y_3=2x-x^2-3$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.

$$y_3=2x-x^2-3=-(x-1)^2-2$$



با توجه به y_1 و y_3 ، ضابطهٔ y_2 باید تابعی اکیداً نزولی باشد، پس باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$y_2 = ax + a + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ y_2(0) \le 2 \Rightarrow a + 1 \le 2 \Rightarrow a \le 1 \\ y_2(2) \ge -3 \Rightarrow 3a + 1 \ge -3 \Rightarrow 3a \ge -4 \Rightarrow a \ge -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} a \in [-\frac{4}{3}, 0)$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

تابع f اکیداً صعودی است که $D_f = [1,5]$، زیرا $y_1 = \sqrt{x-1}$ و $y_2 = -\sqrt{5-x}$ توابعی اکیداً صعودی هستند، پس بیشترین مقدار تابع در انتهای دامنه یعنی $x = 5$ رخ می‌دهد.

$$f(5) = \sqrt{5-1} - \sqrt{5-5} = 2$$

این یعنی رأس سهمی باید نقطهٔ $(5,2)$ باشد:

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 5 \Rightarrow a = 10$$

پس داریم:

$$y = 2 \Rightarrow g(5) = 2 \Rightarrow 5^2 - 10(5) + b = 2 \Rightarrow b = 27$$

$$g(x) = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2$$

$$\Rightarrow g(\sqrt{2}+5) = 4$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(علی سلامت)*

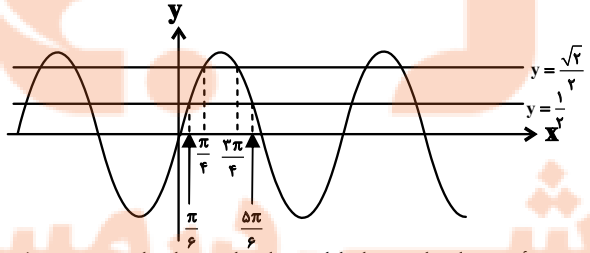
ابتدا با توجه به نقاط داده شده و اکیداً نزولی بودن تابع f نامعادلهٔ داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \le f(\sin x) \le 3 \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le f(\sin x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

دقت کنید که به دلیل اکیداً نزولی بودن تابع f جهت نامعادله عوض شد.

حال برای حل نامعادلهٔ فوق از روش هندسی استفاده می‌کنیم:



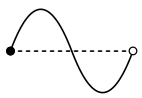
مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، اجتماع بازه‌هایی به فرم $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ یا $\left[2k\pi + \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$ است

که طول همهٔ آن‌ها برابر $\frac{\pi}{12}$ است.

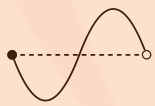
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(کامیار علّیون)*

دوره تناوب تابع $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ می‌باشد، بنابراین نمودار با توجه به علامت a در سمت راست محور y به یکی از دو حالت



یا



می‌باشدکه بیشترین مقدار آن $|a|+b$ و کمترین مقدار $-|a|+b$ خواهد بود، پس با توجه به دو نقطه تلاقی داریم:

$$k \in (-|a|+b, |a|+b)$$

$$\Rightarrow \text{طول بازه} = (|a|+b) - (-|a|+b) = 2|a|$$

این بازه باید شامل ۳ عدد صحیح شود. در حالت $a = 2/1$ بازه شامل حداقل ۴ عدد صحیح می‌شود.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۲۷)

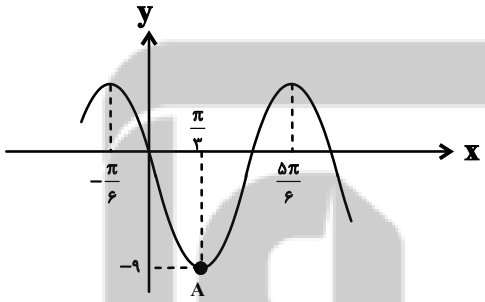
۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

فاصله دو نقطه max متوالی برابر با دوره تناوب است:

$$T = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

طول نقطه min، میانگین طول نقاط max قبل و بعدش است:

$$x_A = \frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{3}$$



به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ ، مقدار f مینیمم شده، پس $\cos(bx + \frac{\pi}{3})$ در این نقطه، ۱ یا ۱- است:

$$|b| = 2 \begin{cases} b = 2 : \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos\pi = -1 \\ b = -2 : \cos(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{-\pi}{3}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $b = 2$ قبول است.

هم‌چنین نقطه $(\frac{\pi}{3}, -9)$ روی f قرار دارد:

$$f(x) = a\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + c \Rightarrow -9 = a\underbrace{\cos\pi}_{-1} + c$$

$$\Rightarrow a - c = 9$$

از طرفی تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$f(0)=0 \Rightarrow a\cos\frac{\pi}{3}+c=0 \Rightarrow \frac{a}{2}+c=0$$

از حل دو معادله $a-c=9$ و $\frac{a}{2}+c=0$، داریم: $a=6$ و $c=-3$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f(x)=6\cos(2x+\frac{\pi}{3})-3$$

$$\Rightarrow f(-\frac{5\pi}{6})=6\cos(-\frac{2\pi}{3})-3=6(-\frac{1}{2})-3=-6$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)

۱۱- **گزینهٔ «۴»** (جوانبخش نیکنام)

دورهٔ تناوب تابع برابر است با $T=\frac{\pi}{2}$. پس داریم: $OB=\frac{3}{2}T=\frac{3\pi}{4}$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\tan 2\alpha\times\frac{3\pi}{4}=\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha=\sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$$

$$f(\frac{11}{2}\alpha)=\tan 11\alpha=\tan(\frac{11\pi}{6})$$

$$=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** (علی شهرابی)

به کمک اتحاد $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$، داریم:

$$\tan(2x+\frac{3\pi}{4})=4 \Rightarrow \frac{\tan 2x-1}{1+\tan 2x}=4$$

$$\Rightarrow 4+4\tan 2x=\tan 2x-1 \Rightarrow \tan 2x=-\frac{5}{3}$$

حالا از اتحاد $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$-\frac{5}{3}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \Rightarrow 5\tan^2 x-6\tan x-5=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=136} \tan x=\frac{6\pm 2\sqrt{34}}{10}=\frac{3\pm\sqrt{34}}{5}$$

$$\xrightarrow{0<x<\frac{\pi}{2}} \tan x=\frac{3+\sqrt{34}}{5} \Rightarrow \cot x=\frac{\sqrt{34}-3}{5}$$

در نهایت داریم:

$$(\sqrt{34}+3)\cot x=(\sqrt{34}+3)\frac{\sqrt{34}-3}{5}=\frac{34-9}{5}=5$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحهٔ ۴۲)

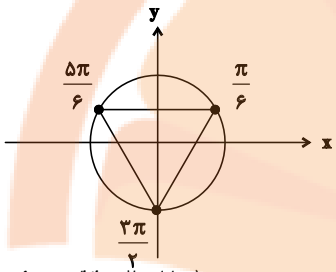
۱۳- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

$$\sin 4x\cos x-\cos 4x\sin x=\sin(4x-x)=1$$

$$\Rightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

جواب‌های روی دایره مثلثاتی به صورت زیر است که مثلث متساوی‌الاضلاع را مشخص می‌کند.



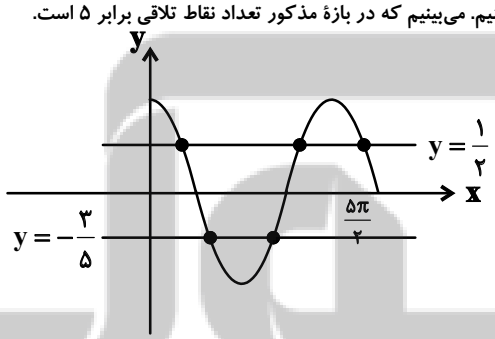
(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (جوانبخش نیکنام)

$$5(2\cos^2\theta-1)+2(\frac{1+\cos\theta}{2})+1=10\cos^2\theta+\cos\theta-3=0$$

$$\Rightarrow (5\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \cos\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{3}{5}$ را رسم می‌کنیم. می‌بینیم که در بازهٔ مذکور تعداد نقاط تلاقی برابر ۵ است.



(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** (کامیار علّیون)

می‌دانیم $\cot x-\tan x=2\cot 2x$، بنابراین:

$$\frac{\cot^2(2x)-1}{\tan^2(2x)+1}=\frac{(2\cot 2x)^2}{8} \Rightarrow \frac{\cot^2(2x)-1}{\tan^2(2x)+1}=\frac{\cot^2(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cot^2(2x)-2=1+\cot^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cot^2(2x)=3 \Rightarrow \cot(2x)=\pm\sqrt{3}$$

در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$\cot(2x)=\sqrt{3}=\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12} \xrightarrow{x\in(0,\pi)} x=\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}$$

$$\cot(2x) = -\sqrt{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x\in(0,\pi)} x = \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = 2\pi$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی سلامت)*

ابتدا به کمک اتحاد $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ضابطه تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{2\sin^2 x + \sin x - 1} = \frac{1}{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}$$

در همسایگی نقاط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ عبارت $\sin x + 1$ همواره مثبت است و عبارت $2\sin x - 1$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین تابع f در این نقاط دارای حدنامتناهی با علامت‌های متفاوت است، این یعنی گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست‌اند.

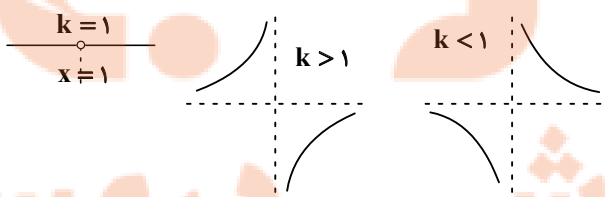
در همسایگی $x = \frac{3\pi}{2}$ عبارت $\sin x + 1$ همواره مثبت و عبارت $2\sin x - 1$ همواره منفی است، در نتیجه $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x) = -\infty$ است.

در همسایگی $x = \frac{\pi}{2}$ نیز حد مخرج مخالف صفر است و گزینه «۴» نادرست می‌شود.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۸)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

خطوط مجانب قائم و افقی تابع f به ترتیب $x = 1$ و $y = 1$ هستند. نمودار این تابع به توجه به مقادیر k یکی از سه حالت زیر است:



در دو حالتی که $k \neq 1$، رابطه $\lim\limits_{x\to+\infty} (fof)(x) = +\infty$ درست است.

به عنوان مثال:

$$k < 1: \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (fof)(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(کامیار علّیون)*

می‌دانیم ریشه‌های مخرج نقاط کاندیدا برای مجانب قائم هستند، بنابراین:

$$x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

مختصات نقاط تلاقی این خطوط با نیمساز ناحیه اول یا همان $y = x$ نقاط $(0,0)$ و (a,a) می‌باشد، پس داریم:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

که با توجه به تلاقی با نیمساز ناحیه اول، $a = 1$ قابل قبول است.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

ابتدا مقدار a را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{1 + |x + \frac{3}{2}| - ax} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{(1-a)x + \frac{5}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{(1-a)x} = \frac{-2}{(1-a)} = a$$

$$\Rightarrow -2 = a - a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$$

$$\xrightarrow{a>0} a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - (2x - 1)}$$

ضابطه را به صورت زیر نیز میتوانیم بنویسیم:

$$f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - (2x-1)} \times \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + (2x-1)}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + (2x-1)}$$

$$= \frac{-2x(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + 2x - 1)}{-3x^2 + 7x - 2} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + 2x - 1)}{(x-2)(3x-1)}$$

در نهایت داریم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(بهانبخش نیکنام)*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x - k}{x + 2} = -3$$

با توجه به نمودار، حاصل $f(x) - (-3)$ وقتی که $x \to -\infty$، منفی است. پس:

$$\frac{-3x - k}{x + 2} + 3 < 0 \Rightarrow \frac{6 - k}{x + 2} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج منفی}} 6 - k > 0 \Rightarrow k < 6$$

اعداد طبیعی قابل قبول که جای k می‌تواند قرار گیرد ۱ تا ۵ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۱۵ است.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۹)

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$A=\begin{bmatrix} x+2 & x^2+x-y \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$$

$$x+2=x+y \Rightarrow y=2$$

$$x^2+x-y=0 \xrightarrow{y=2} x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ غق ق} \\ x=1 \end{cases}$$

به ازای $x=-2$، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز برابر صفر می‌شوند، که این مقدار با توجه به فرض سؤال قابل قبول نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۲۱)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

برای به دست آوردن توان‌های بزرگ ماتریس A، سعی می‌کنیم الگویی را بین توان‌های آن تشخیص دهیم.

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=2A$$

$$A^3=A^2A=(2A)A=2A^2=2(2A)=2^2A$$

از روابط فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم که $A^n=2^{n-1}A$. بنابراین داریم:

$$A^{12}=2^{11}A=\begin{bmatrix} 2^{11} & -2^{11} \\ -2^{11} & 2^{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 2\times 2^{11}=2^{12}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در صورتی بی‌شمار جواب دارد که شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ برقرار باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m}{7}=\frac{2}{m-5} \Rightarrow m(m-5)=14$$

$$\Rightarrow m^2-5m-14=0 \Rightarrow (m-7)(m+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-2 \end{cases}$$

اکنون شرط $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ را برای مقادیر به دست آمده بررسی می‌کنیم:

$$m=7 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b'}=\frac{2}{7-5}=1 \\ \frac{c}{c'}=\frac{14-8}{6}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

$$m=-2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b'}=\frac{2}{-2-5}=-\frac{2}{7} \\ \frac{c}{c'}=\frac{-4-8}{6}=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

بنابراین دستگاه تنها به ازای $m=7$، بی‌شمار جواب داد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحهٔ ۲۶)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** (سوگند روشنی)

$$|3A|A=2I \Rightarrow ||3A|A|=|2I| \Rightarrow |3A|^2|A|=2^2|I|$$

$$\Rightarrow (3^2|A|)^2|A|=4 \Rightarrow 81|A|^3=4 \Rightarrow |A|^3=\frac{4}{81}$$

حاصل عبارت $||A|A|$ برابر است با:

$$||A|A|=|A|^2\times|A|=|A|^3=\frac{4}{81}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

$$۲A=\begin{bmatrix}۲|A| & ۱\\ -۱ & ۲|A|\end{bmatrix}\Rightarrow |۲A|=۴|A|^۲+۱$$

$$\Rightarrow ۴|A|=۴|A|^۲+۱\Rightarrow ۴|A|^۲-۴|A|+۱=۰$$

$$\Rightarrow (۲|A|-۱)^۲=۰\Rightarrow ۲|A|-۱=۰\Rightarrow |A|=\frac{۱}{۲}$$

$$۲A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

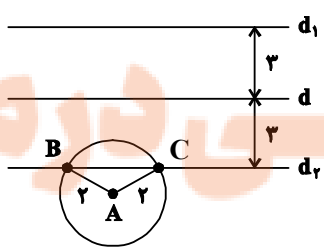
مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ برابر ۲ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۳۰)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(ممد فندان)*

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واحد است و مکان هندسی نقاط از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ واحد باشند، دو خط موازی با d در طرفین آن و به فاصلهٔ ۳ واحد از d هستند.

مطابق شکل زیر، این دو مکان هندسی، حداکثر در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

تمام قطرهای یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند. با انتخاب دو مقدار برای m، مختصات مرکز دایره را پیدا می‌کنیم.

$$m=-۱\Rightarrow (-۱+۱)x+(۳+۱)y=۴\Rightarrow ۴y=۴\Rightarrow y=۱$$

$$m=۳\Rightarrow (۳+۱)x+(۳-۳)y=۴\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

بنابراین $O(۱,۱)$ مرکز این دایره است و شعاع دایره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R=OA=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

فاصلهٔ خط مماس بر یک دایره از مرکز آن دایره، برابر شعاع دایره است، پس داریم:

$$\frac{|۱-۲(۱)-k|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\sqrt{۵}\Rightarrow \frac{|-k-۱|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow |k+۱|=۵\Rightarrow \begin{cases}k+۱=۵\Rightarrow k=۴\\ k+۱=-۵\Rightarrow k=-۶\end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

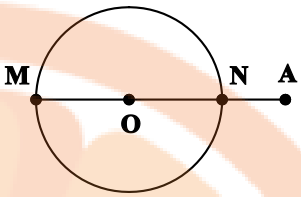
۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(سهام مجیری‌پور)*

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$$

مرکز دایره: $O(۲,-۱)$

شعاع دایره: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۲^۲-۴(-۴)}=۳$

بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط واقع بر دایرهٔ C، از طول قطر این دایره $(۲R=۶)$ بزرگ‌تر است، پس نقطهٔ A خارج از دایرهٔ C قرار دارد و مطابق شکل نقطهٔ M دورترین نقطهٔ دایره نسبت به نقطهٔ A است و داریم:



$$OA=\sqrt{(m-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{(m-2)^2+16}$$

$$AM=7\Rightarrow OA+OM=7\Rightarrow \sqrt{(m-2)^2+16}+3=7$$

$$\Rightarrow \sqrt{(m-2)^2+16}=4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (m-2)^2+16=16$$

$$\Rightarrow (m-2)^2=0\Rightarrow m-2=0\Rightarrow m=2$$

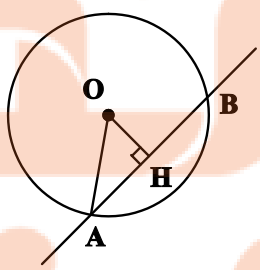
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

مرکز دایره، نقطهٔ $O(-3,2)$ است. فاصلهٔ این نقطه از خط $x-y+2=0$، برابر است با:

$$OH=\frac{|-3-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر در یک دایره، آن وتر را نصف می‌کند، پس داریم:

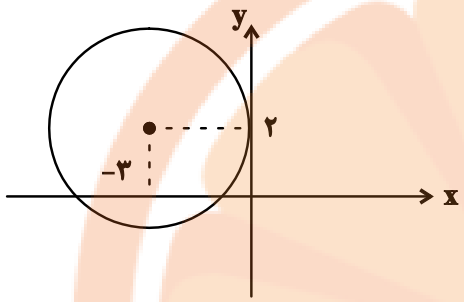


$$AH=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^2=OH^2+AH^2=\frac{18}{4}+\frac{18}{4}=9$$

$$\Rightarrow OA=R=3 \text{ (شعاع دایره)}$$

این دایره مطابق شکل بر محور yها در یک نقطه مماس است و محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس ۳ نقطهٔ مشترک با محورهای مختصات دارد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

$$C: x^2+y^2-2x+4y-11=0$$

مرکز دایره: $O(1,-2)$

شعاع دایره: $R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-11)}=4$

اگر $C'(O',1)$ با دایرهٔ C مماس داخل باشد، آنگاه داریم:

$$OO'=|R-R'|=|4-1|=3$$

اگر مختصات نقطهٔ O' به صورت (x,y) باشد، با توجه به مقدار OO' می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=3\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

$$\xrightarrow{y=0} (x-1)^2+2^2=9\Rightarrow (x-1)^2=5$$

$$\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{5}\Rightarrow \begin{cases} x_1=1+\sqrt{5} \\ x_2=1-\sqrt{5} \end{cases}$$

فاصلهٔ این دو نقطه که روی محور طول‌ها قرار دارند، برابر است با:

$$|x_2-x_1|=|(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})|=2\sqrt{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

تلاشی در مسیر موفقیت

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عدد $4k+1$ قطعاً عددی فرد است و در صورتی که مربع کامل باشد، قطعاً مربع عددی فرد خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$4k+1=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$$

$$\Rightarrow k=n^2+n=n(n+1)$$

یعنی k همواره به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی است.

بدیهی است عددی به فرم $n(n+1)$ در صورت طبیعی بودن n، هیچ‌گاه نمی‌تواند مربع کامل باشد و به ازای $n>1$ ، هیچ‌گاه عددی اول نیست.

این عدد تنها در صورتی مضرب ۳ است که یکی از دو عدد n یا $n+1$ مضرب ۳ باشند و مثلاً به ازای $n=4$، نمی‌تواند مضرب ۳ باشد.

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۳)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا عبارت را به فرم زیر نوشته و ساده می‌کنیم:

$$(n-1)!=n^2-1\Rightarrow (n-1)(n-2)!=(n-1)(n+1)$$

$$\Rightarrow (n-2)!=n+1$$

البته با فرض $n-1=0$ یا $n=1$ نیز تساوی برقرار نیست.

بنابراین لازم است $n+1$ مضربی از $n-2$ باشد پس:

$$n-2\mid n+1\Rightarrow n-2\mid (n+1)-(n-2)\Rightarrow n-2\mid 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-2=1\Rightarrow n=3\Rightarrow (n-1)!=n^2-1\rightarrow 2!=8\ \times \\ n-2=3\Rightarrow n=5\Rightarrow (n-1)!=n^2-1\rightarrow 4!=24 \end{cases}$$

بنابراین فقط $n=5$ جواب است.

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(رضا توکلی)*

اگر $(n^3+1,8)=4$ باشد. باید n^3+1 مضرب ۴ باشد اما مضرب ۸ نباشد. حال بررسی می‌کنیم چه موقع $4\mid n^3+1$.

دقت کنید $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$. چون n^2-n ضرب دو عد متوالی است پس زوج است و n^2-n+1 همواره فرد است پس n^3+1 زمانی مضرب ۴ است که $n+1$ مضرب ۴ باشد. $n+1=4q$

اما اگر q زوج باشد $n+1$ مضرب ۸ می‌شود و ب.م.م حاصل ۸ می‌شود.

پس q عدد فرد است و $q=2k+1$.

$$n+1=4q=4(2k+1)\Rightarrow n=8k+3$$

برای اینکه n، دو رقمی باشد کافی است $1\le k\le 12$ باشد، بنابراین ۱۲ مقدار برای n بدست می‌آید.

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۱۳)

۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

می‌دانیم باقی‌مانده ۱۴۰۲ بر ۹ برابر $2+4+0+1$ یعنی ۷ است. در نتیجه:

$$1402\overset{9}{\equiv}7\Rightarrow 1402^{1401}\overset{9}{\equiv}7^{1401}$$

حال برای پیدا کردن باقی‌مانده 7^{1401} بر ۹ داریم:

$$7^3\overset{9}{\equiv}1\xrightarrow{\text{به‌توان ۴۶۷}}7^{1401}\overset{9}{\equiv}1$$

پس باقی‌مانده 1402^{1401} بر ۹ برابر ۱ است.

از طرفی باقی‌مانده ۱۴۰۱ بر ۹ برابر $1+4+0+1$ یعنی ۶ است. در نتیجه:

$$1401^{1402}\overset{9}{\equiv}6^{1402}\overset{9}{\equiv}0$$

بنابراین عبارت داده شده در سوال به صورت زیر ساده می‌شود:

$$1402^{1401}+a\overset{9}{\equiv}1401^{1402}$$

$$1+a\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}-1\Rightarrow a=9k-1$$

$$100\le 9k-1\le 999\Rightarrow 12\le k\le 111$$

$$\Rightarrow k\text{ تعداد }: 111-12+1=100$$

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

به ازای $n\ge 6$، $n!\overset{18}{\equiv}0$، پس داریم:

$$3!+6!+9!+\ldots+300!\overset{18}{\equiv}6+0\overset{18}{\equiv}6$$

$$16x\overset{18}{\equiv}6\Rightarrow -2x\overset{18}{\equiv}6\xrightarrow[(-2,18)=2]{+(-2)}x\overset{9}{\equiv}-3\Rightarrow x=9k-3$$

$$10\le 9k-3\le 99\Rightarrow 2\le k\le 11$$

عدد ۱۰ = ۱ + ۲ − ۱۱ : تعداد ⇒

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** (علی ایمانی)

$$۴۵ \overset{a}{\equiv} ۲۴ \Rightarrow ۲۱ \overset{a}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۲۱ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۳$$

$$(a,۳) = ۱ \Rightarrow a = ۷$$

$$۷^۲ \overset{۱۶}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۱۲۰} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۱۲۱} \overset{۱۶}{\equiv} ۷$$

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۳۷- **گزینهٔ «۳»** (امیدرضا فلاح)

معادله سیاله را حل کرده و y را به دست می‌آوریم:

$$۱۴x - ۲۳y = ۳۵ \Rightarrow -۲۳y \overset{۱۴}{\equiv} ۳۵$$

$$\Rightarrow ۵y \overset{۱۴}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(۵,۱۴)=۱]{\div ۵} y \overset{۱۴}{\equiv} ۷ \Rightarrow y = ۱۴k + ۷$$

$$k = ۷ \Rightarrow \min(y) = ۱۴ \times ۷ + ۷ = ۱۰۵$$

مجموع ارقام : $۱ + ۰ + ۵ = ۶$

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** (سوگند روشنی)

ابتدا ۴۸۰ را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۴۸۰ = ۵ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$$

بنابراین با توجه به اینکه در گراف مرتبه ۶، بزرگ‌ترین درجه کوچک‌تر و یا مساوی ۵ بوده و تعداد رئوس فرد عددی زوج است، پس درجات گراف G به صورت زیر می‌باشد:

$$G : ۵,۴,۳,۲,۲,۲$$

مجموع درجات $= ۲q = ۱۸ \Rightarrow q = ۹$

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{P(P-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۹ + q(\overline{G}) = \frac{۶ \times ۵}{۲} \Rightarrow q(\overline{G}) = ۶$$

$$\overline{G} : \sum \deg(v_i) = ۲(۶) = ۱۲$$

$$\sum |N[v_i]| = ۲q + p = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

مطلوب سوال $\Rightarrow ۱۸ + ۱۲ = ۳۰$

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۳۷)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

زیرگرافی که فقط یک رأس تنها دارد نمی‌تواند ۲ رأسی باشد، تعداد زیرگراف‌های ۱، ۳ و ۴ رأسی را می‌شماریم:

یک رأسی: در این حالت فقط یک رأس از گراف را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

سه رأسی: در این حالت باید دو راسی که بهم متصل هستند را انتخاب کنیم سپس از دو رأس باقیمانده یک رأس تنها انتخاب کنیم:

$$۴ \times \binom{۲}{۱} = ۸$$

چهار رأسی: در این حالت باید یکی از رأس‌های گراف را انتخاب کنیم که تنها شود و بقیه رأس‌ها و یال‌های بین آن‌ها را نگه داریم:

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

جواب $= ۴ + ۸ + ۴ = ۱۶$

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحهٔ ۳۷)

۴۰- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

در گراف داده شده دورهایی به طول ۳ تا ۸ موجود است. به عنوان مثال می‌توان به دورهای زیر اشاره کرد:

دور به طول ۳: abca

دور به طول ۴: afgha

دور به طول ۵: acdefa

دور به طول ۶: abcdefa

دور به طول ۷: acdefgha

دور به طول ۸: abcdefgha

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحهٔ ۳۸)

تلاشی در مسیر موفقیت

فیزیک ۳

۴۱- گزینهٔ «۴» *(پوریا علاقه‌مند)*

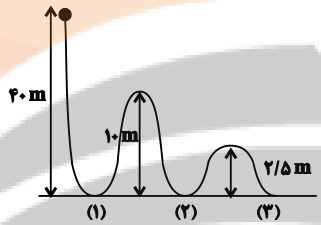
با توجه به شکل و تعریف مسافت و جابه‌جایی، داریم:

$$\text{مسافت} = d = ۴۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۲/۵ + ۲/۵ = ۶۵m$$

$$\text{جابه‌جایی} = |\Delta x| = ۴۰m$$

بنابراین:

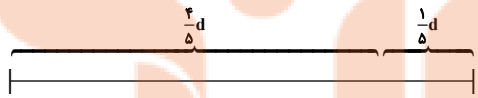
$$\frac{|\Delta x|}{d} = \frac{۴۰}{۶۵} = \frac{۸}{۱۳}$$



(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

۴۲- گزینهٔ «۲» *(سیدعلی میرنوری)*

با توجه به این‌که متحرک در دو مرحله، کل مسیر حرکت را پیموده است، با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:



$$v_{av_1} = v \qquad v_{av_2} = \frac{1}{4}v$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{4}{5}d \\ \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{av_1}} = \frac{4d}{5v} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x_2 = \frac{1}{5}d \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{av_2}} = \frac{4d}{5v} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\frac{4}{5}d + \frac{1}{5}d}{\frac{4d}{5v} + \frac{4d}{5v}} = \frac{1}{\frac{8}{5v}} \Rightarrow v_{av} = \frac{5}{8}v$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۴۳- گزینهٔ «۳» *(زهره آقامحمدی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ فقط در لحظهٔ t_1 جهت بردار مکان عوض می‌شود.

۲) نادرست؛ در لحظه‌های t_2 و t_3 جهت حرکت عوض می‌شود.

۳) صحیح؛ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت متحرک است. در لحظهٔ t_3 شیب مماس برابر صفر است، پس $v_3 = 0$ و در لحظهٔ t_1 شیب مثبت است، پس $v_1 > 0$. برای محاسبهٔ شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_3 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{\Delta t} < 0$$

۴) نادرست؛ در لحظهٔ صفر، $x_0 < 0$ و در لحظهٔ t_2، $x_2 > 0$ است. بنابراین برای محاسبهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} \neq 0$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۴۴- گزینهٔ «۱» *(سعید شرق)*

اگر طول قطار را L فرض کنیم، مدت زمانی که طول می‌کشد تا شخص از انتهای قطار به ابتدای آن برسد، برابر است با:

$$\Delta t = \frac{L}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{۱۵۰}{۰/۵} = ۳۰۰s$$

اگر فاصلهٔ دو سر قطار در لحظهٔ $t = 0$ برابر با X_0 باشد، در این لحظه فاصلهٔ شخصی که در انتهای یکی از قطارها قرار دارد تا سر قطار دوم برابر با $X_0 + L$ خواهد بود. طی مدت زمانی که شخص از انتهای یک قطار به ابتدای آن می‌رود $(\Delta t = ۳۰۰s)$، اندازهٔ جابه‌جایی هر قطار برابر است با:

$$v' = ۹۰\frac{km}{h} = ۲۵\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v't = ۲۵ \times ۳۰۰ = ۷۵۰۰m = ۷/۵km$$

بنابرین زمانی‌که شخص به ابتدای قطار می‌رسد، فاصلهٔ شخص تا سر قطار دوم برابر است با:

$$X_0 - ۲ \times ۷/۵ = X_0 - ۱۵(km)$$

در نتیجه کاهش فاصلهٔ شخص از قطار روبه‌رو طی این مدت برابر است با:

$$X_0 + L - (X_0 - ۱۵) = L + ۱۵ = ۰/۱۵ + ۱۵ = ۱۵/۱۵km$$

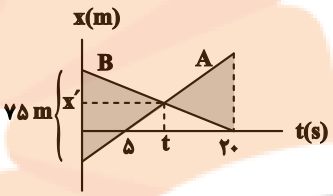
(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** (امیرمسعود حاجی‌مرادی)

طبق صورت سوال، تندی متحرک A دو برابر تندی متحرک B است و چون سرعت متحرک A مثبت و سرعت متحرک B منفی است، بنابراین مطابق شکل می‌توان نوشت:

$$v_A = -۲v_B \Rightarrow \frac{x' - ۰}{t - ۵} = -۲ \times \frac{۰ - x'}{۲۰ - t} \Rightarrow t = ۱۰s$$

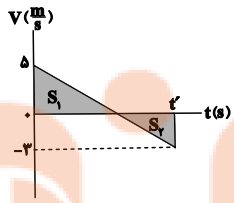
حال با توجه به تشابه مثلث‌ها، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰s$ برابر با $۷۵m$ خواهد شد.



(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** (بابک اسلامی)

مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است. از طرفی اگر نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان باشد، جابه‌جایی آن منفی است. با این توضیحات و تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط و با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{۵}{۳})^۲ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۲۵}{۹}$$

$$\left.\begin{matrix} v_{av} = \frac{\Delta x}{t'} \\ s_{av} = \frac{\ell}{t'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{S_۱ + S_۲}{S_۱ - S_۲}$$

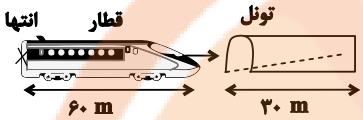
از طرفی با توجه تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{S_۱ + S_۲}{S_۱ - S_۲} = \frac{۲۵ + ۹}{۲۵ - ۹} = \frac{۱۷}{۸}$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** (حسام نادری)

برای خروج کامل قطار باید انتهای قطار کاملاً از تونل خارج شود، یعنی اندازهٔ جابه‌جایی قطار برابر با مجموع طول قطار و طول تونل می‌باشد:



$$\Delta x = ۶۰ + ۳۰ = ۹۰m$$

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \Rightarrow ۹۰ = -\frac{۱}{۲} \times (-۵) \times t^۲ + ۴۰t$$

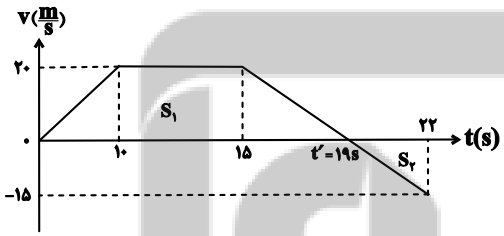
$$\Rightarrow ۲/۵t^۲ + ۴۰t - ۹۰ = ۰ \Rightarrow t = ۲s$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** (مسعود قره‌خانی)

زمانی که نمودار سرعت - زمان به محور زمان نزدیک می‌شود، حرکت کندشونده است. بنابراین ابتدا باید زمانی را که سرعت متحرک بین دو لحظهٔ $t = ۱۵s$ و $t = ۲۲s$ صفر می‌شود، محاسبه کنیم. با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{۲۰}{t' - ۱۵} = \frac{۱۵}{۲۲ - t'} \Rightarrow t' = ۱۹s$$



حال تندی متوسط را در بازهٔ $۱۵s$ تا $۱۹s$ می‌یابیم. چون شتاب ثابت و متحرک تغییر جهت نداده است، این مقدار دقیقاً برابر با میانگین سرعت‌ها در لحظه‌های $t = ۱۵s$ و $t' = ۱۹s$ است.

$$v_{av} = s_{av} = \frac{v_{۱۵} + v_{۱۹}}{۲} = \frac{۲۰ + ۰}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ جابه‌جایی نیز داریم:

$$\Delta x = S_۱ - S_۲ = \frac{(۱۹ + ۵) \times ۲۰}{۲} - \frac{۳ \times ۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \Delta x = ۲۴۰ - ۲۲/۵ = ۲۱۷/۵m$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام رستمی)*

در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

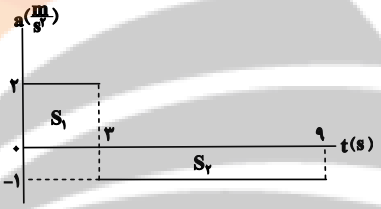
$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 40 = \frac{0 + v_0}{2} \times 8$$

$$\Rightarrow v_0 = 10\frac{m}{s}$$

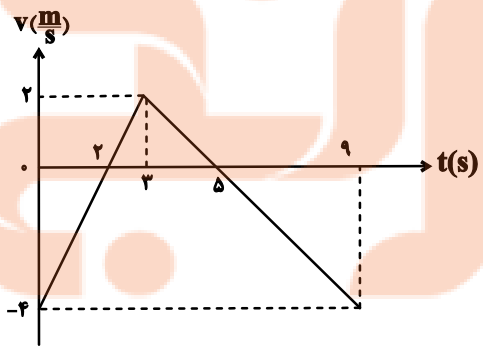
(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی واثقی)*

ابتدا نمودار سرعت – زمان را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} v_0 = -4\frac{m}{s} \\ (0,3s) \xrightarrow{a_1 = 2\frac{m}{s^2}} v_3 = v_0 + S_1 = -4 + (2\times 3) = 2\frac{m}{s} \\ (3s,9s) \xrightarrow{a_2 = -1\frac{m}{s^2}} v_9 = v_3 + s_2 = 2 + ((-1)\times 6) = -4\frac{m}{s} \end{cases}$$



حال مکان متحرک را یافته و نمودار مکان – زمان آن‌را رسم می‌کنیم:

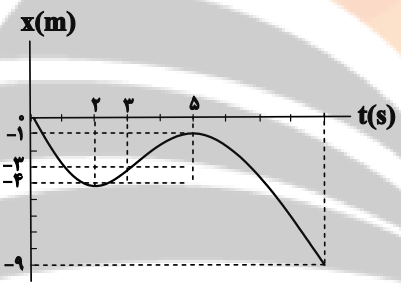
$$\Delta x_{0-3} = \frac{v_0 + v_3}{2}\Delta t_{0-3} = \frac{-4+2}{2} \times 3 = -3m$$

$$\xrightarrow{x_0 = 0} x_3 = \overset{x_0}{0} + \overbrace{(-3)}^{\Delta x_{0-3}} = -3m$$

$$\Delta x_{3-9} = \frac{v_3 + v_9}{2}\Delta t_{3-9} = \frac{2+(-4)}{2} \times 6 = -6m$$

$$\xrightarrow{x_3 = -3m} x_9 = \overbrace{-3}^{x_3} + \overbrace{(-6)}^{\Delta x_{3-9}} = -9m$$

با توجه به نمودار سرعت زمان، در $t = 2s$ و $t = 5s$ سرعت صفر شده است، پس در نمودار مکان - زمان این دو لحظه به‌ترتیب معرف دره و قله است، ضمناً مکان متحرک در لحظهٔ $t = 5s$ را نیز باید حساب کنیم تا مکان قله نمودار به‌دست آید: (مکان دره قطعا منفی است و نیازی به محاسبه ندارد)



$$\Delta x_{3-5} = \frac{v_3 + v_5}{2}\Delta t_{3-5} = \frac{2+0}{2} \times 2 = 2m$$

$$\xrightarrow{x_3 = -3m} x_5 = \overbrace{-3}^{x_3} + \overbrace{(2)}^{\Delta x_{3-5}} = -1m$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۱- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود قره‌خانی)*

برای به‌دست آوردن h از دو معادلهٔ زیر کمک می‌گیریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} h = 5t^2 & \text{کل حرکت} \\ h - 80 = 5(t-2)^2 & \text{از شروع تا ۲ ثانیهٔ آخر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 80 = 5(t-2)^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 16 = t^2 - 4t + 4 = \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5s$$

بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h = 5 \times 5^2 = 125m$$

(فیزیک ۳ - حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

تلاشگران برتر موفقیت

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

علت پدیده‌های گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ قانون اول نیوتون (لَختی) است در حالی که علت پدیدهٔ گزینه ۳ قانون سوم نیوتون (عمل و عکس‌العمل) می‌باشد.

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

نیروی خالصی که به جسم وارد می‌شود، برابر است با:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 18\vec{j} + 38\vec{i} - 14\vec{i}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{net} = 24\vec{i} + 18\vec{j} \Rightarrow F_{net} = \sqrt{24^2 + 18^2}$$
$$\Rightarrow F_{net} = 30N$$

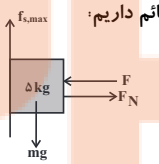
طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow 30 = 20a \Rightarrow a = 1/5 \frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با رسم نیروهای وارد بر جسم و نوشتن قانون دوم نیوتون در راستای افقی و قائم داریم:



$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_N = F$$
$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow mg - f_{s,max} = ma$$
$$\Rightarrow f_{s,max} = m(g-a) = 5 \times (10-2) = 40N$$

آنگاه داریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow 40 = 0/5 \times F_N$$
$$\Rightarrow F_N = 80N \Rightarrow F = 80N$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۳)

۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا اندازهٔ نیروهای اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت و اصطکاک جنبشی را محاسبه می‌کنیم.

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = 0/4 \times 10 = 4N$$
$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = 0/3 \times 10 = 3N$$

چون نیروی اولیه یعنی $5N$ از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه بیشتر است، پس جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow 5 - 3 = a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

از معادلهٔ سرعت-زمان می‌توانیم سرعت را در لحظه $t = 10s$ به‌دست آوریم.

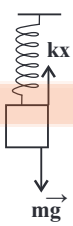
$$v_{10} = at + v_0 \Rightarrow v_{10} = 2 \times 10 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

مطابق شکل پس از لحظهٔ $10s$ نیروی F کمتر از $3N$ می‌شود و چون در این حالت اندازهٔ این نیرو کوچکتر از اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی است، پس شتاب حرکت جسم منفی می‌شود و سرعت جسم کاهش می‌یابد. با توجه به گزینه‌ها تنها گزینهٔ (۴) که عدد آن کوچکتر از $20 \frac{m}{s}$ است، می‌تواند پاسخ سوال باشد.

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۳)

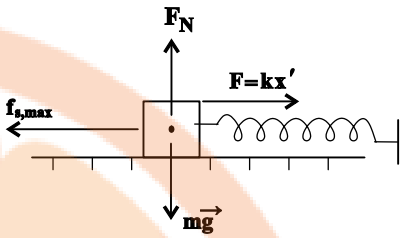
۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

بر وزنه دو نیرو مؤثر است. نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر.



$$kx = mg \qquad (1)$$

در حالت افقی نیروی کشسانی فنر با نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت هم‌اندازه‌اند.



$$f_{s,max} = kx' \Rightarrow \mu_s F_N = kx' \xrightarrow{F_N = mg} \Rightarrow \mu_s mg = kx' \quad (۲)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \mu_s = \frac{x'}{x} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۴)

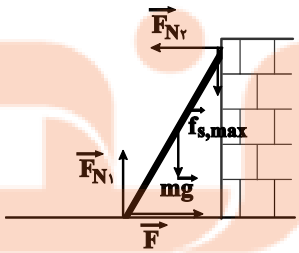
۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(جلیل کلی)*

در صورتی نیروی تکیه‌گاه سطح افقی بیشترین مقدار خود را دارد که نردبان در آستانهٔ حرکت رو به بالا باشد. بنابراین داریم:

$$F_{N_۲} = F$$

$$F_{N_۱} = mg + f_{s,max} \Rightarrow F_{N_۱} = mg + \mu_s F_{N_۲} \Rightarrow F_{N_۱} = mg + \mu_s F$$

$$\Rightarrow ۱۵۰ = ۱۰ \times ۱۰ + \mu_s F \Rightarrow F = ۲۵۰N$$



(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۶)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(شارمان ویسی)*

طبق رابطهٔ بین انرژی جنبشی و اندازهٔ تکانه داریم:

$$\begin{cases} p = mv \\ K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \end{cases} \Rightarrow K = \frac{p^۲}{۲m}$$

$$K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲m}(p_۲^۲ - p_۱^۲)$$

$$\Rightarrow ۳۹ = \frac{۱}{۲m}((p_۱ + ۳)^۲ - p_۱^۲) \xrightarrow{m = ۰/۵kg}$$

$$۳۹ = p_۱^۲ + ۶p_۱ + ۹ - p_۱^۲ \Rightarrow ۶p_۱ = ۳۰ \Rightarrow p_۱ = ۵\frac{kg.m}{s}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

ابتدا نیرویی را حساب می‌کنیم که گوی ساکن به گوی متحرک وارد می‌کند. فرض کنید گوی متحرک (۱) و گوی ساکن (۲) است.

$$\vec{F}_{۲۱} = m_۱\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{۲۱} = m_۱(\frac{\vec{v_۲} - \vec{v_۱}}{\Delta t})$$

$$\vec{F}_{۲۱} = ۰/۴ \times \frac{(۲\vec{i} + ۱/۵\vec{j}) - (۸\vec{i} + ۶\vec{j})}{۰/۲}$$

$$\vec{F_{۲۱}} = ۲(-۶\vec{i} - ۴/۵\vec{j}) = -۱۲\vec{i} - ۹\vec{j}$$

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که گلولهٔ متحرک به گلولهٔ ساکن وارد می‌کند، برابر است با:

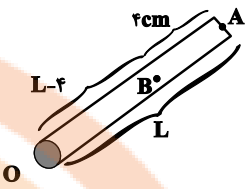
$$\vec{F}_{۱۲} = -\vec{F}_{۲۱}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{۱۲} = -(-۱۲\vec{i} - ۹\vec{j}) \Rightarrow \vec{F}_{۱۲} = ۱۲\vec{i} + ۹\vec{j}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۶۰- **گزینهٔ «۴»** *(سعید نصیری)*

چون دو نقطهٔ A و B بر روی یک میله حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهند، دورهٔ حرکت آن‌ها با هم برابر است. از طرفی همانطور که در شکل زیر می‌بینید، اگر طول میله برابر L باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز برابر L و فاصلهٔ نقطهٔ B از مرکز برابر $(L-۴)$ سانتی‌متر خواهد بود، حال می‌توان نوشت:



$$v_A = ۳v_B \Rightarrow \frac{۲\pi L}{T} = ۳\times\frac{۲\pi(L-۴)}{T}$$

$$\Rightarrow L = ۳L - ۱۲ \Rightarrow L = ۶cm$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسین مفروضی)*

نیروی مرکزگرا ناشی از اصطکاک ایستایی است.

$$f_s = \frac{mv^۲}{r} \xrightarrow[f_s \le \mu_s F_N]{F_N = mg} \frac{mv^۲}{r} \le \mu_s mg$$

$$\Rightarrow v^۲ \le \mu_s rg \Rightarrow v^۲ \le ۰/۳\times۳۰۰\times۱۰$$

$$\Rightarrow v^۲ \le ۹۰۰ \Rightarrow v \le ۳۰\frac{m}{s} \Rightarrow v \le ۱۰۸\frac{km}{h}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

می‌دانیم نسبت شتاب ماهواره با نسبت نیروی گرانشی وارد بر ماهواره برابر است.

$$a_۲ = a_۱ - \frac{۱۹}{۱۰۰}a_۱ = \frac{۸۱}{۱۰۰}a_۱ \Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{۸۱}{۱۰۰}$$

از طرفی، نیروی وارد بر ماهواره از رابطهٔ $F = G\frac{mM_e}{r^۲}$ به‌دست می‌آید

که r فاصلهٔ ماهواره تا مرکز زمین است.

$$\frac{F_۲}{F_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \Rightarrow \frac{۸۱}{۱۰۰} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \Rightarrow \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{۹}{۱۰} \xrightarrow{r_۱ = ۲R_e}$$

$$\frac{۲R_e}{r_۲} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow r_۲ = \frac{۲۰}{۹}R_e$$

$$\xrightarrow{r_۲ = R_e + h_۲} \frac{۲۰}{۹}R_e = R_e + h_۲ \Rightarrow h_۲ = \frac{۱۱}{۹}R_e$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا گونه)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۲»: شتاب نوسانگر دائماً در حال تغییر است و حرکت نوسانگر با شتاب متغیر است.

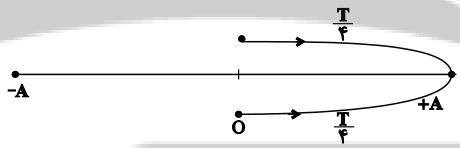
گزینهٔ «۳»: با نزدیک شدن نوسانگر به مرکز نوسان، تندی آن افزایش می‌یابد و جابه‌جایی آن در بازه‌های زمانی مساوی در مقایسه با نقاط بازگشتی بیشتر است.

گزینهٔ «۴»: دورهٔ تناوب از ویژگی‌های منبع نوسان است و ارتباطی با دامنهٔ نوسانگر ندارد.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

شتاب نوسان‌گر در مرکز نوسان صفر است و چون در یک نوسان کامل، دو بار مسیر طی می‌شود، دورهٔ حرکت $۲\times۰/۰۱ = ۰/۰۲s$ است.



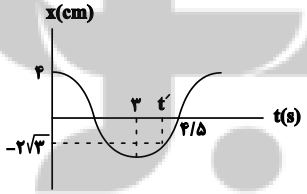
$$f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۰/۰۲} = ۵۰Hz$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(علی نظری)*

$$\frac{T}{۲} = ۳s \Rightarrow T = ۶s$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}\frac{rad}{s}$$



$$\cos\omega t' = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \cos\omega t' = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع سوم}} \omega t' = ۷\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳}t' = ۷\frac{\pi}{۶} \Rightarrow t' = ۳/۵s$$

بنابراین:

$$\Delta t = ۴/۵ - ۳/۵ = ۱s$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(سعید شرق)*

با توجه به مقدار بیشینه سرعت داریم:

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[A=0/06m]{v_{max}=0/2\pi \frac{m}{s}} 0/2\pi = 0/06\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{0/2\pi}{0/06} = \frac{10}{3}\pi(\frac{rad}{s})$$

از طرفی طبق معادلهٔ مکان - زمان داریم:

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow x = 0/06\cos(\frac{10\pi}{3} \times 0/5)$$

$$\Rightarrow x = 0/03m$$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow a = -(\frac{10}{3}\pi)^2 \times \frac{3}{100} = -\frac{\pi^2}{3}(\frac{m}{s^2})$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۶۷- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان با رابطهٔ $x = A\cos(\omega t)$، ملاحظه می‌شود که دامنهٔ نوسان $0/04m$ و $\omega = 50\frac{rad}{s}$ می‌باشد.

از طرفی هرگاه نوسانگر از مرکز نوسان عبور کند، انرژی جنبشی آن بیشینه مقدار است و داریم:

$$K_{max} = E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 120\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times k \times (\frac{4}{100})^2$$

$$\Rightarrow k = 150\frac{N}{m}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

با توجه به نمودار، انرژی پتانسیل نوسانگر در مکان x_1 برابر با انرژی جنبشی آن در مکان x_2 است. بنابراین:

$$U_1 = K_2 \xrightarrow{U_1 = E - K_1} E - K_1 = K_2$$

$$\Rightarrow E = K_1 + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2)$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \Rightarrow v_{max} = 2\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** *(شاهرمان ویسی)*

طبق رابطهٔ دورهٔ نوسان‌های آونگ ساده داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

از روی نمودار شیب را به‌دست آورده و برابر $\frac{4\pi^2}{g}$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{8}{0/5} \Rightarrow g = \frac{\pi^2}{4}\frac{m}{s^2}$$

می‌دانیم:

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = (\frac{R_e}{h+R_e})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R_e}{h+R_e} \Rightarrow h = R_e$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقه‌مند)*

به دلیل پدیده تشدید، آونگ G چون هم طول با D است، دیرتر می‌ایستد.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

تلاشی درمسیر موفقیت

شیمی ۳

۷۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد چهارم و پنجم درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: نادرست- ممکن است کاتیون آن NH_4^+ باشد.

مورد دوم: نادرست – صابون از طریق بخش ناقطبی با مولکول‌های چربی جاذبهٔ واندروالسی برقرار می‌کند. (پیوند اشتراکی تشکیل نمی‌دهد!)

مورد سوم: نادرست – مخلوط آب، روغن و صابون یک کلوئید است و نور را پخش می‌کند.

مورد چهارم: درست – مطابق خود را بیازمایید کتاب درسی صفحهٔ ۹

مورد پنجم: درست – این صابون یک گروه R، ۱۷ کربنی دارد و فرمول شیمیایی آن به صورت $C_{17}H_{35}COONa$ خواهد بود و جرم مولی آن ۳۰۶ گرم بر مول است.

(شیمی ۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** *(ارژنگ خاندی)*

در میان موارد مطرح شده پاک‌کننده صابونی و غیرصابونی فقط در مورد دوم یعنی تشکیل نیروی بین مولکولی واندروالسی میان بخش چربی دوست (آب‌گریز) خود و مولکول‌های چربی یکسان می‌باشند.

(شیمی ۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶، ۹ تا ۱۱)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زبی)*

عبارت اول درست است.

$$CaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq) \rightarrow Ca^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$

عبارت دوم نادرست است.

در مورد مقایسهٔ میزان اسیدی بودن محلول‌ها نمی‌توان از نظریهٔ آرنیوس کمک گرفت.

عبارت سوم درست است.

باریم اکسید (BaO) و لیتیم هیدروکسید $(LiOH)$ باز آرنیوس هستند.

عبارت چهارم نادرست است.

اسیدهای آرنیوس می‌توانند در ساختار خود اتم H نداشته باشند مانند، N_2O_5

عبارت پنجم درست است.

محلول HCl یک پاک‌کننده خورنده است.

(شیمی ۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۵)

۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

گزینهٔ «۴» نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: درست، طبق واکنش سوختن کامل داریم:

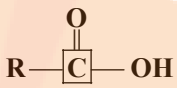
$$1C_{25}H_{52} + 38O_2 \rightarrow 25CO_2 + 26H_2O$$

$$1C_8H_{18} + \frac{25}{2}O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$$

با توجه به تعداد اتم‌های کربن در فرمول مولکولی هم می‌توان نتیجه گرفت مقدار CO_2 تولیدی از سوختن یک مول بنزین کمتر از مقدار CO_2 تولیدی از سوختن یک مول وازلین است.

گزینهٔ «۲»: درست، از صابون گوگرددار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۳»: درست، مطابق شکل زیر در اسید چرب یک اتم کربن به ۲ اتم اکسیژن متصل است.



گزینهٔ «۴»: نادرست، با توجه به فرمول عمومی پاک‌کننده غیرصابونی داریم:

$$n = 14$$

$$C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3^-Na^+$$

$$C_{14}H_{29}C_6H_4SO_3^-Na^+ \Rightarrow C_{20}H_{33}SO_3^-Na^+$$

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۵ و ۱۰ تا ۱۲)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد «الف» و «پ» جملهٔ داده شده را به نادرستی تکمیل می‌کنند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) هرچه دمای آب بیشتر باشد، پاک‌کنندگی نیز بیشتر خواهد بود؛ در نتیجه درصد لکهٔ باقیمانده کاهش می‌یابد. بنابراین رابطهٔ معکوس بین درصد لکهٔ باقیمانده پس از شستشو و دمای آب وجود دارد.

ب) می‌دانیم که پاک‌کننده‌های صابونی با یون‌های موجود در آب سخت واکنش می‌دهند و میزان کف کردن پاک‌کنندهٔ صابونی و میزان یون‌های Ca^{2+} موجود در آب سخت رابطه معکوس دارند.

پ) هرچه درجهٔ یونش یک اسید بیشتر باشد در آب بیشتر یونش پیدا کرده و یون‌های بیشتری تولید می‌کند و در نتیجه رسانایی الکتریکی بیشتر خواهد داشت؛ بنابراین بین این دو مورد رابطهٔ مستقیم برقرار است.

ت) هرچه pH محلول یک اسید کمتر باشد، به این معناست که $[H^+]$ در محلول اسید بیشتر است. بنابراین بین pH و شدت واکنش رابطهٔ معکوس وجود دارد.

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ تا ۲۴)

۷۶- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

K_a فورمیک اسید از استیک اسید بیشتر است، پس در غلظت و حجم برابر شمار یون‌ها در این محلول بیشتر است.

$$\text{مول حل‌شونده} = \text{مولار} \times \text{لیتر} = 0/2 \times 0/5 = 0/1\,mol$$

$$0/1\,mol\,HCOOH \times \frac{46g\,HCOOH}{1\,mol\,HCOOH} = 4/6g$$

$$0/1\,mol\,CH_3COOH \times \frac{60g\,CH_3COOH}{1\,mol\,CH_3COOH} = 6g$$

$$\text{اختلاف جرم} = 6 - 4/6 = 1/4g$$

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زیبی)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت «آ» نادرست است. در محلول‌های خنثی که از واکنش یک اسید و باز حاصل می‌شوند، چون غلظت یون‌های نمک تولیدشده می‌تواند قابل توجه باشد، رسانایی الکتریکی ناچیز نخواهد بود.

عبارت «ب» درست است. در همهٔ محلول‌های آبی در دمای اتاق $[H^+][OH^-] = 10^{-14}\left(\frac{mol}{L}\right)^2$ است.

عبارت «پ» درست است. $K_a(HCOOH) > K_a(CH_3COOH)$

تلاشی درسته برای موفقیت

عبارت «ت» درست است. اغلب اسیدهای شناخته شده، ضعیف هستند و $\alpha < ۱$ است.

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹، ۲۳، ۲۶ و ۲۷)

۷۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

از آنجا که HCl یک اسید قوی تک پروتون‌دار (با $\alpha = ۱$) است، می‌توان گفت $[HCl] = [H^+]$ بنابراین خواهیم داشت:

$$pH = ۴/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴/۷} = ۱۰^{-۵} \times ۱۰^{۰/۳}$$

$$= ۲ \times ۱۰^{-۵} mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۲ \times ۱۰^{-۵}} = ۵ \times ۱۰^{-۱۰} mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{[H^+]}{[OH^-]} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۵}}{۵ \times ۱۰^{-۱۰}} = ۴ \times ۱۰^{۴}$$

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین مسلمی)

pH محلول (۱) به صورت زیر است:

$$[H^+] = M_۱\alpha_۱ = ۰/۲ \times ۰/۱ = ۰/۰۲M$$

$$\Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log ۰/۰۲ = ۱/۷$$

pH محلول (۲) به صورت زیر است:

$$[H^+] = M_۲\alpha_۲ = ۰/۴ \times ۰/۲ = ۰/۰۸M$$

$$\Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log ۰/۰۸ = ۱/۱$$

اختلاف pH دو محلول برابر $۰/۶$ است.

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۴ تا ۲۶)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** (امیر حاتمیان)

از اطلاعات مسأله استفاده می‌کنیم.

$$pH = ۱۳/۵ \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۵} = ۱۰^{-۱۴} \times ۱۰^{۰/۵}$$

$$= ۳ \times ۱۰^{-۱۴} \;,\; [H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴}$$

$$\Rightarrow [OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۳ \times ۱۰^{-۱۴}} = \frac{۱}{۳} mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow \text{غلظت مولی } NaOH = \frac{۱}{۳} mol.L^{-۱}$$

فرمول مولکولی کلی اسید چرب که زنجیر هیدروکربنی آن سیر شده باشد.

$$\underbrace{C_nH_{۲n+۱}COOH}_{\text{جرم‌مولی} = ۱۴n+۴۶ \frac{g}{mol}}$$

سپس با استفاده از استوکیومتری واکنش تعداد n را بدست می‌آوریم.

$$\text{محلول } ۱/۲L = ۱۴۲g \text{ اسیدچرب} \times \frac{\text{درصد خلوص } ۸۰}{۱۰۰}$$

$$\times \frac{\text{اسیدچرب } ۱mol}{(۱۴n+۴۶)g \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱mol\ NaOH}{۱mol \text{ اسیدچرب}} \times \frac{\text{محلول } ۱L}{\frac{۱}{۳} mol\ NaOH}$$

$$\frac{۱۲}{۱۰} = ۱۴۲ \times \frac{۸۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{(۱۴n+۴۶)}$$

$$\rightarrow ۱۴n + ۴۶ = ۲۸۴ \rightarrow n = ۱۷$$

فرمول مولکولی اسید چرب: $C_{۱۷}H_{۳۵}COOH$ یا $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$

(شیمی۳، مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵، ۶، ۱۲، ۱۳ و ۲۴ تا ۲۶)

۸۱- **گزینهٔ «۴»** (روزبه رضوانی)

از اطلاعات سوال نمی‌توان الزاماً متوجه شد که فلز B، E° مثبتی دارد.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

تلاشگر مسیر موفقیت

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) نادرست، در هر واکنش شیمیایی هنگامی که عدد اکسایش یک گونه منفی‌تر می‌شود، آن‌گونه کاهش‌یافته و گونه‌ای که عدد اکسایش آن مثبت‌تر می‌شود، اکسایش می‌یابد.

ت) نادرست، در این واکنش هیچ عنصری تغییر عدد اکسایش نمی‌دهد و در نتیجه واکنش از نوع اکسایش – کاهش نیست.

$$Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$$

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴، ۵۲ و ۵۳)

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین مسلمی)*

در فرایند آبکاری، غلظت محلول الکترولیت با پیشرفت واکنش تغییری نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبحی)*

اطراف الکترود B گاز کلر تولید می‌شود؛ پس B آند و A کاتد است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: یون‌های Na^+ به سمت کاتد (A) مهاجرت می‌کنند و

الکترونی با $n+l=4$ ندارد.

گزینهٔ «۲»: الکترود B (آند) به قطب مثبت باتری متصل است.

گزینهٔ «۳»: یون‌های $Cl^-(l)$ به صورت مذاب هستند نه محلول !!!

گزینهٔ «۴»: الکترون‌ها از آند (B) به سمت کاتد (A) جریان می‌یابند.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحهٔ ۵۵)

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(حمید زبحی)*

با تقسیم بار الکتریکی مبادله شده بر بار الکترون می‌توان تعداد الکترون مبادله شده را به دست آورد:

$$\text{تعداد الکترون} = \frac{19264}{1/6\times10^{-19}} = 1/204\times10^{23}e^-$$

$$?gCu = 1/204\times10^{23}e^- \text{ مصرف می‌شود}$$

$$\times\frac{1mole^-}{6/02\times10^{23}e^-}\times\frac{1molCu}{2mole^-}\times\frac{64gCu}{1molCu} = 6/4gCu$$

$$?gAg = 1/204\times10^{23}e^- \text{ روی تیغه می‌نشیند}$$

$$\times\frac{1mole^-}{6/02\times10^{23}e^-}\times\frac{2molAg}{2mole^-}\times\frac{108gAg}{1molAg} = 21/6gAg$$

$$\text{تغییر جرم تیغه } 21/6-6/4=15/2g$$

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

$$1)\underline{S}O_3 \rightarrow H_2\underline{S}O_4$$
$$+6 \xrightarrow{\text{صفر}} +6$$

$$2)\underline{N}_2O_5 \rightarrow H\underline{N}O_3$$
$$+5 \xrightarrow{\text{صفر}} +5$$

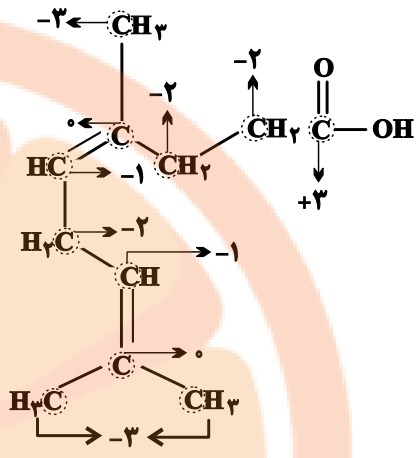
$$3)Fe_2O_3 \rightarrow 2Fe$$
$$+3 \xrightarrow{2\times(-3)=-6} 0$$

$$4)\underline{Mn}O_4^- \rightarrow \underline{Mn}O_4^{2-}$$
$$+7 \xrightarrow{-1} +6$$

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴، ۵۲ و ۵۳)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

با توجه به ساختار گستردهٔ زیر، ۳ اتم کربن دارای عدد اکسایش ۲- و ۲ اتم کربن دارای عدد اکسایش ۱- هستند، پس اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.



(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** (روزبه رضوانی)

واکنش انجام شده به صورت زیر است و نشان می‌دهد که به ازای مصرف ۴ گرم گاز هیدروژن، ۳۲ گرم گاز اکسیژن مصرف می‌شود؛ در نتیجه جرم اکسیژن مصرفی ۸ برابر هیدروژن مصرفی است.

$$O_2 + 2H_2 \rightarrow 2H_2O$$

بررسی سایر موارد:

گزینهٔ «۱»: سلول‌های سوختی انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کنند.

گزینهٔ «۲»: در آند برابر صفر است.

نیم‌واکنش کاتدی: $O_2 + 4H^+ + 4e^- \rightarrow 2H_2O \quad E^\circ = 1/2v$

نیم‌واکنش آندی: $H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^- \qquad E^\circ = 0/0v$

گزینهٔ «۳»: سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز بازدهی نزدیک به ۲۰٪ دارد، در حالی که اکسایش آن در سلول سوختی بازده را تا ۳ برابر (۶۰٪) افزایش می‌دهد.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** (روزبه رضوانی)

عبارت‌های پ و ت درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در سلول‌های سوختی گاز اکسیژن وارد بخش کاتدی شده و کاهش می‌یابد و سوخت وارد بخش آندی شده و اکسایش می‌یابد.

ب) سلول سوختی نوعی سلول گالوانی است.

پ) واکنش کلی انجام شده به صورت روبه‌رو است:

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$

$$\frac{\text{جرم } O_2}{\text{جرم } C_2H_6} = \frac{7\times 32}{2\times 30} \simeq 3/73$$

ت) در سلول‌های سوختی H^+ در غشاء مبادله‌کنندهٔ پروتون از بخش آندی به بخش کاتدی منتقل می‌شود.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** (حمید ذبحی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در سلول گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد (قطب مثبت) و آنیون‌ها به سمت آند (قطب منفی) مهاجرت می‌کنند.

گزینهٔ «۲»: در آهن سفید خراشیده، روی اکسایش (کاهنده) و اکسیژن کاهش (اکسنده) می‌یابد.

گزینهٔ «۳»: در برقکافت آب، نیم‌واکنش اکسایش به صورت: $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ است.

گزینهٔ «۴»: در آبکاری نمی‌توان از نمک‌های نامحلول در آب مانند $AgCl$ و یون فلز موجود در کاتد استفاده کرد.

(شیمی۳، آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶، ۵۴، ۵۵ و ۵۹ تا ۶۱)

تلاشی در مسیر موفقیت