# دفترچهٔ پاسخ

## آزمون ۲۱ مهر ماه ۱۴۰۲

## اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

| | نام درس | نام طراحان |
|---|---|---|
| اختصاصی | حسابان ۲ | امیرمحمد باقری‌نصرآبادی-مسعود برملا-شاهین پروازی-عادل حسینی-طاهر دادستانی-علی سرآبادانی-کامیار علّییون مهدی ملارمضانی-علیرضا نداف‌زاده-جهانبخش نیکنام |
| | هندسه | امیرحسین ابومحبوب-محمد حمیدی-افشین خاصه‌خان-محمد خندان-کیوان دارابی-فراز دعاگوی‌تهرانی-سوگند روشنی فرشاد صدیقی‌فر-امیر مالمیر-مهرداد ملوندی-حمید ناصر |
| | ریاضیات گسسته | امیرحسین ابومحبوب-رضا توکلی-کیوان دارابی-سوگند روشنی-علی منصف‌شکری |
| | فیزیک | عبدالرضا امینی‌نسب-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-محمدعلی راست‌پیمان-سیدمحمدرضا روحانی‌راد-مریم شیخ‌ممو شیلا شیرزادی-پوریا علاقه‌مند-مسعود قره‌خانی-محسن قندچلر-مصطفی کیانی-علیرضا گونه-حسین مخدومی محمدکاظم منشادی-حسام نادری-مجتبی نکوئیان-شادمان ویسی |
| | شیمی | هدی بهاری‌پور-محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-پیمان خواجوی‌مجد-روزبه رضوانی-میلاد شیخ‌الاسلامی‌خیاوی-مسعود طبرسا امیرحسین طیبی-علیرضا کیانی‌دوست-حسن لشکری-امیرحسین مسلمی |

### گزینشگران و ویراستاران

| نام درس | حسابان ۲ | هندسه | ریاضیات گسسته | فیزیک | شیمی |
|---|---|---|---|---|---|
| گزینشگر | علیرضا نداف‌زاده | امیرحسین ابومحبوب | سوگند روشنی | بابک اسلامی | ایمان حسین نژاد |
| گروه ویراستاری | مهدی ملارمضانی<br>سعید خان‌بابایی | عادل حسینی<br>مهرداد ملوندی | عادل حسینی<br>مهرداد ملوندی | مصطفی کیانی<br>زهره آقامحمدی<br>حمید زرین کفش | امیررضا حکمت‌نیا<br>محمدحسن محمدزاده مقدم<br>امیرحسین مسلمی |
| ویراستاری رتبه های برتر | ماهان زواری<br>پارسا نوروزی‌منش | کیارش صانعی | کیارش صانعی | دانیال راستی<br>کیارش صانعی | ماهان زواری<br>بنیامین یعقوبی<br>احسان پنجه‌شاهی |
| مسئول درس | عادل حسینی | امیرحسین ابومحبوب | امیرحسین ابومحبوب | محمد ساکی | ایمان حسین‌نژاد |
| مستندسازی | سمیه اسکندری | سرژ یقیازاریان تبریزی | سرژ یقیازاریان تبریزی | احسان صادقی | سمیه اسکندری |

### گروه فنی و تولید

| | | |
|---|---|---|
| مدیر گروه | مهرداد ملوندی | |
| مسئول دفترچه | نرگس غنی‌زاده | |
| گروه مستندسازی | مدیر گروه: محیا اصغری | مسئول دفترچه: الهه شهبازی |
| حروف‌نگار | فرزانه فتح اله‌زاده | |
| ناظر چاپ | سوران نعیمی | |

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

**دفتر مرکزی:** خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

## حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود برملا)*

دو زوج $(3\,,1)$ و $(a^2-2a\,,1)$ در این رابطه حضور دارند. پس برای تابع بودن $f$، لازم است مؤلفه‌های دوم این دو زوج برابر باشند:

$$a^2-2a=3 \Rightarrow a^2-2a-3=(a-3)(a+1)=0$$
$$\Rightarrow a=3 \quad \text{یا} \quad -1$$

به ازای $a=-1$ به خاطر دو زوج $(4\,,-1)$ و $(6\,,-1)$ رابطهٔ $f$ تابع نمی‌شود. به ازای $a=3$ تابع $f$ به صورت زیر خواهد بود:

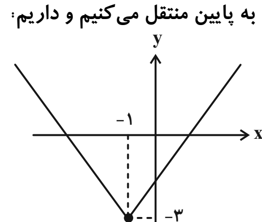
$$f=\{(1\,,3)\,,(3\,,6)\,,(-1\,,4)\}$$

*(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)*

---

۲- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

برای رسم نمودار تابع $y=|x+1|-3$، نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به چپ و ۳ واحد به پایین منتقل می‌کنیم و داریم:




برد این تابع بازهٔ $[-3\,,+\infty)$ است و می‌دانیم برد زیرمجموعهٔ هم دامنه باید باشد. پس در گزینه‌ها، بازهٔ $[-5\,,+\infty)$ می‌تواند هم‌دامنه باشد.

*(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)*

---

۳- **گزینهٔ «۳»** *(کامیار علّیون)*

در دامنه هر دو ضابطه $x=\pm1$ حضور دارد، پس مقدار ضابطه‌ها به ازای $x=\pm1$ باید برابر باشند:

$$x=-1:\quad a-(-2)^2=\frac{(-1)^2+b(-1)-1}{(-1)+2} \Rightarrow a-4=-b$$
$$\Rightarrow a+b=4 \qquad (I)$$
$$x=1:\quad a-(0)^2=\frac{(1)^2+b(1)-1}{(1)+2} \Rightarrow a=\frac{b}{3} \qquad (II)$$

از دستگاه دو معادله- دو مجهول بالا $a=1$ و $b=3$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1-(x-1)^2 & ; \ |x|\le 1\\ \dfrac{x^2+3x-1}{x+2} & ; \ |x|\ge 1\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(a+b)=f(4)=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

*(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)*

---

۴- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

دامنهٔ تابع $g$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. باید دامنهٔ $f$ هم همین مجموعه باشد، این یعنی مخرج ضابطهٔ $f(x)$ باید ریشهٔ مضاعف $x=-3$ را داشته باشد، پس داریم:

$$x^2-2cx+9=(x+3)^2=x^2+6x+9$$
$$\Rightarrow -2c=6 \Rightarrow c=-3$$

ضابطه‌ها هم باید برابر باشند، پس $f(x)$ باید برابر $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+3)^2}$ باشد.

$$\Rightarrow x^2-ax+b=(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$
$$\Rightarrow a=-5 \quad , \quad b=6$$

در نهایت داریم: $a+b+c=-2$

*(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)*

---

۵- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

ضابطهٔ تابع $f$ می‌تواند دو حالت داشته باشد. اگر شیب آن را مثبت فرض کنیم، باید از نقاط $(-1\,,4)$ و $(2\,,7)$ عبور کند و اگر شیب را منفی در نظر بگیریم، باید از نقاط $(-1\,,7)$ و $(2\,,4)$ بگذرد. در این دو حالت ضابطهٔ تابع $f$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(-1,4)\,,(2,7):\ \text{شیب}=\frac{7-4}{2-(-1)}=1 \Rightarrow f(x)=x+5$$
$$(-1,7)\,,(2,4):\ \text{شیب}=\frac{4-7}{2-(-1)}=-1 \Rightarrow f(x)=-x+6$$

در نتیجه ضابطهٔ تابع $y=f(2x)-3$ می‌تواند $2x+5-3=2x+2$ یا $-(2x)+6-3=-2x+3$ باشد.

*(ریاضی ۱- تابع: صفحهٔ ۱۰۳)*

---

۶- **گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

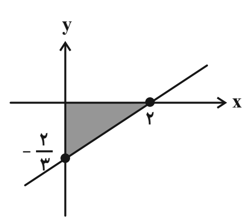
ضابطهٔ تابع $f$ را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$g(x)=f(x+3)+f(2x+1)=(a(x+3)+b)+(a(2x+1)+b)$$
$$=3ax+4a+2b$$

ضابطهٔ این تابع باید با ضابطهٔ $y=x$ متحد باشد:

$$\Rightarrow\begin{cases}3a=1 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\\ 4a+2b=0 \Rightarrow b=-2a=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع $f$، $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$ است. نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است:




مثلث رنگی شکل، سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{\frac{2}{3}\times 2}{2}=\frac{2}{3}$$

*(ریاضی ۱- تابع: صفحهٔ ۱۰۳)*

۷- **گزینهٔ «۲»** (مهدی ملارمضانی)

در تابع خطی $f(x) = ax + b$ داریم:

$$f(x) = ax + b \quad , \quad f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2a}{x} + b$$

$$\Rightarrow ax + b + \frac{2a}{x} + b = \frac{3x^2 - x + 6}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{3ax^2 + 6bx + 6a}{3x} = \frac{3x^2 - x + 6}{3x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 6b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ $f$ به صورت زیر است و داریم:

$$f(x) = x - \frac{1}{6} \Rightarrow f\left(\frac{7}{6}\right) = 1$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحهٔ ۱۰۳)

---

۸- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

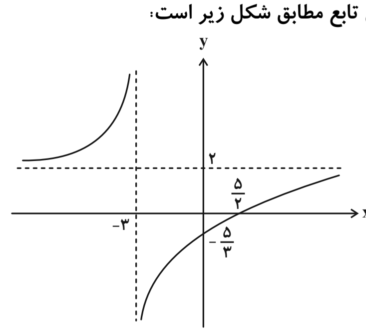
ابتدا ضابطهٔ تابع $f$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x + 6 - 11}{x + 3} = 2 - \frac{11}{x + 3}$$

یعنی اگر داشته باشیم $g(x) = \frac{1}{x}$، ضابطهٔ تابع $f$ برابر است با:

$$f(x) = 2 - 11g(x + 3)$$

این یعنی برای رسم نمودار تابع $f$، نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ را ۳ واحد به چپ می‌بریم، سپس عرض نقاط آن را در ۱۱- ضرب می‌کنیم و سپس ۲ واحد به بالا می‌بریم. نمودار این تابع مطابق شکل زیر است:




(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

---

۹- **گزینهٔ «۱»** (علی سرآبادانی)

راه‌حل بهتر این است که نمودار تابع $g$ را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا منتقل کنیم تا به نمودار تابع $f$ برسیم: $f(x) = g(x-2) + 3$

$$\Rightarrow f(x) = ((x-2)^2 - 2(x-2) + 3) + 3 = x^2 - 6x + 14$$

پس $a = 6$ و $b = 14$ و در نتیجه $a + b = 20$ است.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

---

۱۰- **گزینهٔ «۳»** (کامیار علّیون)

ابتدا مختصات $A'$، نقطهٔ نظیر $A$ روی تابع $y = 2f(2x - m) + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(2) = 5 \Rightarrow 2x - m = 2 \Rightarrow x = \frac{m+2}{2}$$

$$y = 2f(2) + 1 = 11 \Rightarrow A'\left(\frac{m+2}{2} \; , \; 11\right)$$

حال برای این که نقطهٔ $A'$ پایین‌تر از خط $y = 2x - 1$ نباشد، داریم:

$$y_{A'} \geq 2x_{A'} - 1 \Rightarrow 11 \geq 2\left(\frac{m+2}{2}\right) - 1 \Rightarrow m \leq 10$$

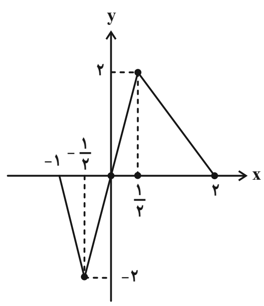
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

---

۱۱- **گزینهٔ «۴»** (مسعود برملا)

در ابتدا عرض نقطه با طول $x = -2$ را حساب می‌کنیم. از دو نقطهٔ $(0 , 2)$ و $(-1 , 0)$ خطی با معادلهٔ $y = 2x + 2$ می‌گذرد. با جای‌گذاری $x = -2$ در آن، عرض نقطهٔ $y = -2$ به دست می‌آید.

حال برای رسم نمودار تابع $g$، نمودار $f$ را ابتدا یک واحد به راست می‌بریم و سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. نمودار تابع $g$ به صورت زیر خواهد شد.

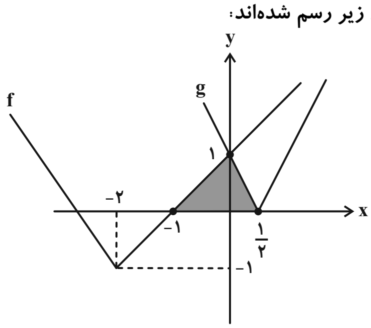



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

---

۱۲- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

برای رسم نمودار تابع $f$، نمودار $y = |x|$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. برای رسم $g$ نیز، نمودار تابع $y = |x|$ را ابتدا ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم و سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. نمودار توابع $f$ و $g$ در شکل زیر رسم شده‌اند:




مثلث رنگی در شکل، سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(1) = \frac{3}{4}$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (کامیار علّیون)

مسیر انتقال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد راست}}y=f(x-۱)\xrightarrow[\text{راستای عمودی و افقی}]{\text{دو برابر منبسط در}}$$

$$y=۲f(\frac{۱}{۲}x-۱)\xrightarrow{\text{۱ واحد بالا}}y=۲f(\frac{۱}{۲}x-۱)+۱$$

$$۲)\ y=f(x)\xrightarrow{\frac{۱}{۲}\text{ واحد بالا و ۱ واحد راست}}y=f(x-۱)+\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{راستای عمودی و افقی}]{\text{دو برابر منبسط در}}y=۲(f(\frac{۱}{۲}x-۱)+\frac{۱}{۲})=۲f(\frac{۱}{۲}x-۱)+۱$$

$$۳)\ y=f(x)\xrightarrow{\frac{۱}{۲}\text{ واحد بالا}}y=f(x)+\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{راستای عمودی و افقی}]{\text{دو برابر منبسط در}}$$

$$y=۲(f(\frac{۱}{۲}x)+\frac{۱}{۲})=۲f(\frac{۱}{۲}x)+۱\xrightarrow{\text{۱ واحد راست}}$$

$$y=۲f(\frac{۱}{۲}(x-۱))+۱=۲f(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲})+۱$$

$$۴)\ y=f(x)\xrightarrow[\text{راستای عمودی و افقی}]{\text{دو برابر منبسط در}}y=۲f(\frac{۱}{۲}x)$$

$$\xrightarrow{\text{۲واحد راست}}y=۲f(\frac{۱}{۲}(x-۲))=۲f(\frac{۱}{۲}x-۱)$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد بالا}}y=۲f(\frac{۱}{۲}x-۱)+۱$$

بنابراین گزینهٔ «۳»، مسیر نادرست می‌باشد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

---

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (مسعود برملا)

در ضابطهٔ تابع $f$ عبارت $\sqrt{۴-x^۲}$ را داریم که محدودهٔ قابل قبول $x$ برای آن $[-۲\,,\,۲]$ است، پس برای این‌که دامنهٔ $f$ دو عضوی باشد، باید $x=\pm ۲$ ریشه‌های عبارت $۲x^۲+ax+b$ باشند، تا دامنهٔ تابع $f$ همین $x=-۲$ و $x=+۲$ شوند. داریم:

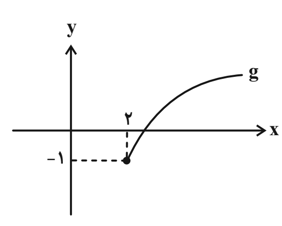
$$۲x^۲+ax+b=۲(x+۲)(x-۲)=۲x^۲-۸$$

$$\Rightarrow a=۰\ ,\ \ b=-۸$$

پس ضابطهٔ تابع $g$ به صورت $g(x)=\sqrt{۴x-۸}-۱$ است.

$$g(x)=۲\sqrt{x-۲}-۱$$

با انتقال دو واحد به راست نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، انبساط عمودی آن با ضریب ۲ و انتقال آن به اندازهٔ یک واحد به پایین، نمودار تابع $g$ حاصل می‌شود.




این نمودار فقط از ربع اول و چهارم می‌گذرد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

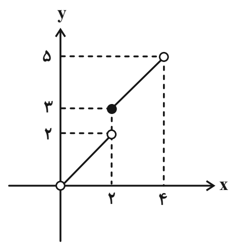
۱۵- **گزینهٔ «۳»** (امیرمحمد باقری نصرآبادی)

به صورت زیر، در بازه‌های مختلف ضابطه‌های مختلف تابع $f$ را به دست می‌آوریم:

$$۰<x<۲\Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<۱\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۰\Rightarrow f(x)=x$$

$$۲\le x<۴\Rightarrow ۱\le\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۱\Rightarrow f(x)=x+۱$$

و نمودار تابع به صورت زیر است:




سطح زیر این نمودار از یک مثلث و یک ذوزنقه تشکیل شده است که مساحت آن برابر است با:

$$S=(\frac{۲\times ۲}{۲})+(\frac{۳+۵}{۲})\times ۲=۲+۸=۱۰$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

---

۱۶- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا نراف‌زاده)

شاخهٔ اول نمودار (یعنی قسمتی که در بازهٔ $[۰\,,\,b]$ است)، زمانی رخ می‌دهد که $[x]$ و $[ax]$ هر دو صفر باشند. این نکته هم بدیهی است که تابع جزءصحیحی، در جایی دچار ناپیوستگی می‌شود که در حداقل یکی از عبارت‌های جزءصحیحی مقدار عبارت داخل جزءصحیح، صحیح شود.

در این سؤال، در $x=b$ حداقل یکی از عبارت‌های $x$ یا $ax$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد. اگر $[x]$ را محدودکننده در نظر بگیریم، $b=۱$ و $۰<a<۱$ خواهد بود. در این صورت حد چپ تابع در $x=b$ باید ۱ باشد، نه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. به این نکته دقت کنید که با شرط $۰<a<۱$، در بازهٔ $[۰\,,\,۱)$ تابع $y=\sqrt{x}$ را خواهیم داشت. پس در نتیجه $a>۱$ است و $[ax]$ عبارت محدود کننده است، یعنی $ax$ در $x=b$ مقداری صحیح به خود می‌گیرد. چون اولین عدد صحیح سمت راست $x=۱$ است، $ab=۱$ و در نتیجه $b=\frac{۱}{a}$ است. در بازهٔ $[۰\,,\,\frac{۱}{a})$، تابع $f$ با تابع $y=\sqrt{x}$ مساوی است و حال داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{a})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{۱}{a})^-}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{۱}{a}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=۲$$

پس تابع $f$ به صورت $f(x)=\sqrt{x-[x]}-[۲x]$ است. در بازهٔ $[\frac{۱}{۲}\,,\,۱)$، تابع $f$ با تابع $y=\sqrt{x}-۱$ برابر است، در نتیجه مقدار $c$ برابر عرض این تابع در نقطه‌ای با طول $b=\frac{۱}{۲}$ است.

$$c=\sqrt{\frac{1}{2}}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

---

۱۷- **گزینهٔ «۲»** (شاهین پروازی)

$[2x]$ عددی صحیح است، پس باید $\frac{x^2}{2}+1$ هم صحیح باشد. این دو عبارت را برابر عدد صحیح $z$ می‌گیریم:

$$[2x]=\frac{x^2}{2}+1=z\Rightarrow\begin{cases}z\le 2x<z+1\\ x=\sqrt{2z-2}\end{cases}$$

از دو عبارت بالا نتیجه می‌گیریم:

$$z\le 2\sqrt{2z-2}<z+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} z\le 2\sqrt{2z-2}\xrightarrow{z\ge 1} z^2\le 8z-8\\ \Rightarrow z^2-8z+8\le 0\Rightarrow 4-2\sqrt{2}\le z\le 4+2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2z-2}<z+1\Rightarrow 8z-8<z^2+2z+1\\ \Rightarrow z^2-6z+9=(z-3)^2>0\Rightarrow z\in\mathbb{R}-\{3\}\end{cases}$$

اعداد صحیح مجموعهٔ $[4-2\sqrt{2}\ ,\ 4+2\sqrt{2}]-\{3\}$، ۲، ۴، ۵ و ۶ هستند. چهار مقدار برای $z$ و در نتیجه چهار مقدار برای $x$ به دست می‌آید.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

---

۱۸- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

ابتدا ضابطهٔ تابع نهایی را به دست می‌آوریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۴ واحد پایین}}y=f(x)-4\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}$$

$$y=f(-x)-4\xrightarrow[\text{در جهت محور x ها}]{\text{انبساط با ضریب ۲}}y=f(-\frac{1}{2}x)-4$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}}y=f(-\frac{1}{2}(x-4))-4=y=f(-\frac{1}{2}x+2)-4$$

این ضابطه را با ضابطهٔ $\sqrt{x^2-3x}-6$ برابر قرار می‌دهیم.

$$f(-\frac{1}{2}x+2)-4=\sqrt{x^2-3x}-6$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}x+2)=\sqrt{x^2-3x}-2$$

حال صفرهای تابع $y=f(-\frac{1}{2}x+2)$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x^2-3x}-2=0\Rightarrow\sqrt{x^2-3x}=2$$

$$\Rightarrow x^2-3x=4\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=-1\ ,\ x=4$$

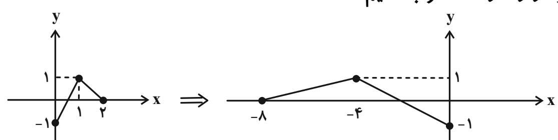
این یعنی $-\frac{1}{2}(-1)+2=\frac{5}{2}$ و $-\frac{1}{2}(4)+2=0$ صفرهای تابع $y=f(x)$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5}{2}$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

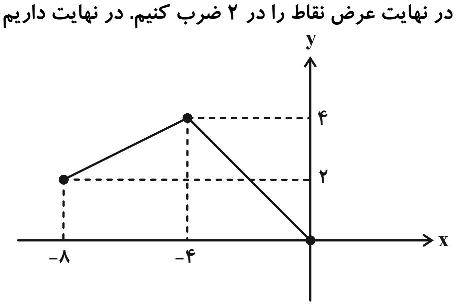
۱۹- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

$$2t+3=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow t=-\frac{1}{4}x-1$$

برای تبدیل نمودار تابع $y=f(2x+3)$ به نمودار تابع $y=f(-\frac{1}{2}x+1)$، باید ۱ واحد به راست منتقل کنیم و سپس طول‌های نمودار را در ۴- ضرب کنیم.



برای محور y ها باید نمودار اولیه را در راستای محور y ها، ۱ واحد به سمت بالا ببریم، در نهایت عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم. در نهایت داریم:



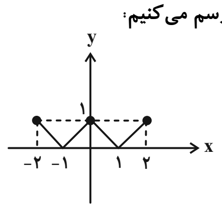
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

---

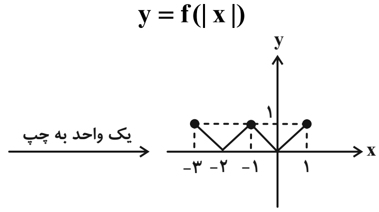
۲۰- **گزینهٔ «۲»** (طاهر دارستانی)

می‌توانیم نمودار مربوط به هر ۴ رابطه را رسم کنیم و گزینهٔ درست را پیدا کنیم. اما در اینجا ما گزینهٔ درست را توضیح می‌دهیم. گزینه‌های نادرست تمرین خودتان باشد. $g(x)=f(|1-x|)$

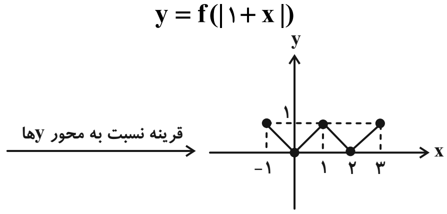
ابتدا $y=f(|x|)$ را رسم می‌کنیم:



$y=f(|x|)$




$y=f(|1+x|)$




$y=f(|1-x|)$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

## هندسه ۳

**۲۱- گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

در بین روابط داده شده، فقط رابطهٔ «الف» یعنی شرکت‌پذیری جمع ماتریس‌ها همواره برقرار است.

رابطهٔ «ب» نادرست است؛ چون جمع یک ماتریس و قرینهٔ آن برابر ماتریس صفر یعنی $\bar{O}$ است نه عدد صفر.

رابطهٔ «پ» نیز در حالتی برقرار است که $r \neq 0$ باشد که در عبارت داده شده این شرط دیده نمی‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

---

**۲۲- گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

با توجه به قطری بودن ماتریس $A$ داریم:

$$\begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ b+2=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B=A \Rightarrow \begin{bmatrix} m & x \\ n & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ x=n=0 \\ y=-5 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$my+na=2(-5)+0\times 3=-10$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

---

**۲۳- گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

برای پیدا کردن ماتریس $A$، مانند حل دستگاه دو معادله دو مجهول عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2A-3B=\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 4A-6B=\begin{bmatrix} -20 & -10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ 3A+2B=\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 3} 9A+6B=\begin{bmatrix} 33 & 36 \\ 39 & 42 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} 13A=\begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 39 & 52 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = 1+2+3+4=10$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

---

**۲۴- گزینهٔ «۴»** (کیوان دارابی)

ابتدا مرتبهٔ ماتریس $B$ را تعیین می‌کنیم:

$$B_{m\times n}\times A_{1\times 3}=(BA)_{3\times 3} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$$

بنابراین $B$ یک ماتریس $3\times 1$ است، یعنی داریم:

$$B=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=[4]$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

---

**۲۵- گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف برای درایه‌های ماتریس‌های $A$ و $B$ داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 \\ 2(2)-1 & 2^2-1 \\ 2(3)-1 & 2(3)-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1^2-1 & 1-2+1 & 1-3+1 \\ 2+2(1) & 2^2-1 & 2-3+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 9 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر است با: $4+9-5=8$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)

---

**۲۶- گزینهٔ «۴»** (مهرداد ملوندی)

با توجه به این‌که ماتریس $C$ اسکالر است، داریم:

$$\begin{cases} A+3B=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\ A-B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times 3} 3A-3B=\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} ۴A = \begin{bmatrix} k+۶ & ۹ \\ -۳ & k \end{bmatrix}$$

**مجموع درایه‌های ماتریس $A$ برابر ۲ است، پس مجموع درایه‌های ماتریس $۴A$ برابر ۸ است و داریم:**

$$(k+۶)+۹-۳+k=۸ \Rightarrow ۲k=-۴ \Rightarrow k=-۲$$

**بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $C$، برابر $۲k=-۴$ است.**

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)*

---

**۲۷- گزینهٔ «۳»** *(سولماز روشنی)*

**ابتدا عبارت خواسته شده در صورت سؤال را باز می‌کنیم:**

$$\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j} = a_{۳۱}+a_{۳۲}+a_{۳۳}+a_{۳۴}$$

**بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس $A$ خواسته شده است. برای پیدا کردن این درایه‌ها کافی است سطر سوم ماتریس سمت چپ را در ماتریس سمت راست ضرب کنیم.**

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۴ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & -۱ & ۱۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j} = ۹-۱+۱۲-۳=۱۷$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)*

---

**۲۸- گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۲ & x & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & y \\ ۱ & ۰ \\ -۷ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۵ & ۲y+۴ \\ x-۳ & ۲y+۱ \end{bmatrix}$$

**ماتریس $AB$ قطری است، بنابراین داریم:**

$$\begin{cases} ۲y+۴=۰ \Rightarrow y=-۲ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

**حال ماتریس $BA$ را محاسبه می‌کنیم:**

$$BA = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ -۷ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۸ & ۶ \\ ۲ & -۱ & ۴ \\ -۱۲ & ۱۰ & -۲۷ \end{bmatrix}$$

**همان‌طور که مشاهده می‌شود، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $BA$، برابر ۱۰ است.**

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)*

**۲۹- گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

**به جای محاسبهٔ کل ماتریس $ABC$، همان ستون مطلوب را پیدا می‌کنیم.**

$$ABC = A(BC)$$

$$\Rightarrow \text{ستون چهارم } (A(BC)) = A \times (\text{ستون چهارم } BC)$$

$$\text{ستون چهارم } BC = B \times (\text{ستون چهارم } C)$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

**حال ماتریس $A$ را از سمت چپ در ستون به دست آمده ضرب می‌کنیم:**

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۸ \\ ۲۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = ۸+۸+۲۴ = ۴۰$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)*

---

**۳۰- گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

**با ضرب کردن ماتریس‌ها از سمت چپ، معادله را ساده می‌کنیم:**

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & ۱ & ۱ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (a-۸)x+۱ & x+۲ & -۳x+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow [(a-۸)x^۲ + x + ۲x^۲ + ۴x - ۳x + a] = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۶)x^۲ + ۲x + a = ۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب جواب‌ها} = \frac{a}{a-۶} = -۵$$

$$\Rightarrow a = -۵a + ۳۰ \Rightarrow ۶a = ۳۰ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{-۲}{a-۶} \xrightarrow{a=۵} \frac{-۲}{-۱} = ۲$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)*

## ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

می‌دانیم حاصل‌ضرب عدد گویا در عدد گویا، عددی گویا است. بنابراین:

$$6(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3})\in Q$$

بنابراین $3\alpha+2\beta$ عددی گویا است. از طرفی:

$$2\alpha+3\beta=\frac{2}{3}(3\alpha+2\beta)+\frac{5}{3}\beta$$

که $\frac{2}{3}(3\alpha+2\beta)$ طبق نتیجهٔ بالا عددی گویا است و $\frac{5}{3}\beta$ طبق فرض عددی گنگ است و در عین حال با برهان خلف ثابت می‌شود مجموع عددی گویا و عددی گنگ همیشه گنگ است و در نتیجه $2\alpha+3\beta$ گنگ خواهد بود.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۵)*

---

۳۲- **گزینهٔ «۴»** (کیوان دارابی)

برای گزینه‌های «۱» تا «۳» مثال‌های نقض زیر وجود دارد.

۱) $C=\{2\}$ $B=\{1\}$ $A=\{1,2\}$

۲) $C=\{1,3\}$ $B=\{1,2\}$ $A=\{1\}$

۳) $C=\{2,3\}$ $B=\{2\}$ $A=\{1,2\}$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)*

---

۳۳- **گزینهٔ «۲»** (رضا توکلی)

گزینهٔ درست گزینه‌ای است که $f(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ عدد گویا شود.

$$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow 2x-1=\sqrt{5}\Rightarrow 4x^2-4x+1=5\Rightarrow x^2-x=1$$

اگر $f(x)=x^2-x+5$ آن‌گاه $f(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=6$ می‌شود.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)*

---

۳۴- **گزینهٔ «۲»** (رضا توکلی)

ابتدا بررسی می‌کنیم چه موقع $5a+3b$ زوج است.

باید $a+b$ زوج باشد. $\Rightarrow 5a+3b=\underbrace{4a+2b}_{\text{زوج}}+a+b=$ زوج

پس $a$ و $b$ هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند پس $a^2$ و $b^2$ هم یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند و در نتیجه $a^2+b^2$ زوج است.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۵ و ۶)*

---

۳۵- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

طبق اثبات به روش بازگشتی، حکم را درست فرض کرده و در نتیجه داریم:

$$x^2+y^2\ge x+y-\frac{1}{2}\xleftrightarrow{\times 2}2x^2+2y^2\ge 2x+2y-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2-2x-2y+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+1+2xy-2x-2y)+(x^2+y^2-2xy)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2+(x-y)^2\ge 0$$

رابطهٔ اخیر همواره درست است و تمام روابط برگشت‌پذیر هستند.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)*

---

۳۶- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

برای عدد صحیح $a$، اگر $a^2$ زوج باشد، $a$ نیز زوج است. بنابراین چون $(\frac{n(n+1)}{3})^2$ زوج است. $\frac{n(n+1)}{3}$ نیز زوج است، $n(n+1)$ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی و قطعاً زوج است. بنابراین کافی است $n=3k$ یا $n+1=3k$ باشد.

$$n=3k\Rightarrow 20\le 3k\le 100\Rightarrow 7\le k\le 33$$

$$\Rightarrow 33-7+1=27 : \text{تعداد}$$

$$n=3k-1\Rightarrow 20\le 3k-1\le 100\Rightarrow 7\le k\le 33$$

$$\Rightarrow 27 : \text{تعداد}$$

بنابراین مجموعاً ۵۴ عدد طبیعی برای $n$ از مجموعهٔ مورد نظر وجود دارد.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۵)*

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ مثال نقض: عدد گویا: صفر – عدد گنگ: $\sqrt{5}$

۲) نادرست؛ مثال نقض: به ازای $n=6$ ، اعداد ۶۳ و ۶۵ به دست می‌آیند که هیچ کدام عدد اول نیستند.

۳) نادرست؛ مثال نقض: $n=3$

۴) درست؛ زیرا برای این‌که رابطهٔ گفته شده، درست باشد، باید حداقل یکی از اعداد $a$ یا $b$ صفر باشد:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\xrightarrow{\text{توان ۲}}a+b=a+b+2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab}=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)*

---

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول قطعاً زوج است و با برهان خلف اثبات می‌شود. فرض می‌کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ فرد باشد، بنابراین هر کدام از $(a_1-b_1)$، $(a_2-b_2)$ و $(a_3-b_3)$ فرد هستند و می‌دانیم جمع ۳ عدد فرد، فرد است.

$$a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3= \text{فرد}$$

$$\Rightarrow (a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)=0 \quad \text{فرد} \quad \text{(تناقض)}$$

عبارت دوم نیز قطعاً زوج است. زیرا حاصل $a_1a_2a_3$ و $b_1b_2b_3$ با هم برابر است. در نتیجه:

$$3a_1a_2a_3+b_1b_2b_3=4(a_1a_2a_3) \quad :\text{زوج است}$$

عبارت سوم نیز قطعاً زوج است زیرا $b_2$ با یکی از اعداد $a_1$ یا $a_2$ یا $a_3$ برابر است و در نتیجه یکی از پرانتزها برابر عدد صفر است. ولی عبارت چهارم می‌تواند زوج نباشد؛ مثال نقض:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & 3 & 1\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 2 & 3\end{array}$$

$$\Rightarrow a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3=2+2(6)+3(3)=23 \quad :\text{فرد}$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۶)*

---

۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(علی منصف‌شکری)*

اعداد $3n+1$ و $3n+2$ متوالی هستند و مجموع هر توانی از آن‌ها فرد است. بنابراین $ab$ فرد و $a$ و $b$ هر کدام فرد هستند. در نتیجه $a^2+b^2$ همواره زوج است.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۵)*

---

۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(علی منصف‌شکری)*

طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$2a^2+2b^2+2k^3\geq 2a+2ab+2b$$

$$a^2+b^2-2ab+a^2-2a+b^2-2b+2k^3\geq 0$$

$$(a-b)^2+(a-1)^2-1+(b-1)^2-1+2k^3\geq 0$$

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 2-2k^3$$

$$\Rightarrow 2-2k^3\leq 0\Rightarrow k^3\geq 1\Rightarrow k\geq 1\Rightarrow \min(k)=1$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)*

## هندسه ۱

**۴۱- گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

می‌دانیم در یک مثلث اگر دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

زاویهٔ $A$ نمی‌تواند کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث $ABC$ باشد، چون در این صورت مجموع زوایای مثلث $ABC$ بزرگ‌تر از $۱۸۰^\circ$ خواهد شد که غیرممکن است. بنابراین ضلع $BC$ (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $A$) نمی‌تواند کوچک‌ترین ضلع مثلث $ABC$ باشد. دقت کنید که در مورد این‌که ضلع $BC$ بزرگ‌ترین ضلع $ABC$ باشد، نمی‌توان قضاوت کرد. به عنوان مثال داریم:

حالت ۱: $\hat{A} = ۷۵^\circ \ , \ \hat{B} = ۶۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۴۵^\circ$

$\Rightarrow$ $BC$ بزرگ‌ترین ضلع است

حالت ۱: $\hat{A} = ۷۵^\circ \ , \ \hat{B} = ۹۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۱۵^\circ$

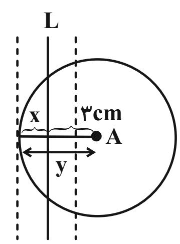
$\Rightarrow$ $BC$ بزرگ‌ترین ضلع نیست

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

---

**۴۲- گزینهٔ «۳»** (محمد حمیدی)

نقاطی که از خط $L$ به فاصلهٔ $x$ هستند دو خط به موازات آن و در دو طرف و به فاصلهٔ $x$ از آن می‌باشند. همچنین نقاطی که از $A$ به فاصلهٔ $y$ هستند دایره‌ای به مرکز $A$ و شعاع $y$ می‌باشد. برای آن‌که مسئله سه جواب داشته باشد، باید دایره یکی از خطوط را در دو نقطه قطع کند و بر دیگری مماس باشند، به عبارت دیگر باید: $۳ + x = y$ برقرار باشد.

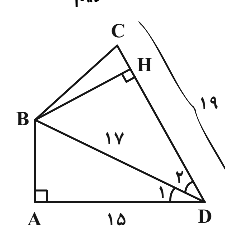



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

---

**۴۳- گزینهٔ «۱»** (فراز دعاگوی تهرانی)

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $ABD$ داریم:




$$AB^۲ = BD^۲ - AD^۲ = ۱۷^۲ - ۱۵^۲ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$$

$B$ روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{D}C$ قرار دارد، پس از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است، یعنی مطابق شکل $BH = AB = ۸$ و در نتیجه داریم:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۵ + \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۹$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸(۱۵ + ۱۹) = ۴ \times ۳۴ = ۱۳۶$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

---

**۴۴- گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به این‌که $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{۲} + \hat{C}$، پس $\hat{A} > \hat{C}$. از طرفی داریم:

$$\hat{B} > ۰ : \frac{\hat{B}}{۲} < \hat{B} \Rightarrow \underbrace{\hat{A} + \underbrace{\frac{\hat{B}}{۲} + \hat{C}}_{\hat{A}}}_{} < \underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}_{۱۸۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۲\hat{A} < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

اما در مورد اندازهٔ زاویهٔ $B$ نمی‌توان قضاوت کرد و این زاویه می‌تواند حاده، قائمه یا منفرجه باشد. به عنوان مثال داریم:

۱) $\hat{B} = ۸۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۳۰^\circ \ , \ \hat{A} = ۷۰^\circ \Rightarrow$ مثلث حاده الزاویه

۲) $\hat{B} = ۹۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۲۲/۵^\circ \ , \ \hat{A} = ۶۷/۵^\circ \Rightarrow$ مثلث قائم الزاویه

۳) $\hat{B} = ۱۰۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۱۵^\circ \ , \ \hat{A} = ۶۵^\circ \Rightarrow$ مثلث منفرجه الزاویه

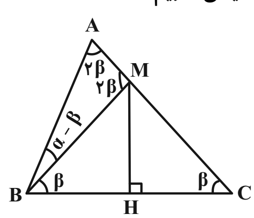
پس محل تلاقی ارتفاع‌های این مثلث، می‌تواند درون یا بیرون مثلث و یا روی یکی از رأس‌های آن باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحهٔ ۱۹)

---

**۴۵- گزینهٔ «۳»** (امیر مالمیر)

نقطهٔ $M$ روی عمودمنصف پاره‌خط $BC$ قرار دارد، پس از دو سر این پاره خط به یک فاصله است، یعنی داریم:




$$BM = CM \xrightarrow{AB=CM} BM = AB$$

بنابراین مثلث $ABM$ متساوی‌الساقین است. از طرفی مطابق شکل با فرض $M\hat{B}C = \beta$ داریم:

$\overset{\Delta}{BMC}$: زاویهٔ $A\hat{M}B$ زاویهٔ خارجی است

$$\Rightarrow A\hat{M}B = \beta + \beta = ۲\beta \xrightarrow{\overset{\Delta}{AMB}} \hat{A} = A\hat{M}B = ۲\beta$$

$$\overset{\Delta}{ABM} : \alpha - \beta + ۴\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + ۳\beta = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۳} \Rightarrow \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۳} = ۶۰^\circ - \frac{\alpha}{۳}$$

*(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)*

---

**۴۶- گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع، عکس نسبت اندازه‌های آن دو ضلع است. حال فرض کنیم $a = ۱۲$ و $b = ۱۵$ باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$h_a + h_b = ۳h_c \xrightarrow{\div h_c} \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_b}{h_c} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = ۳ \Rightarrow \frac{c}{۱۲} + \frac{c}{۱۵} = ۳$$

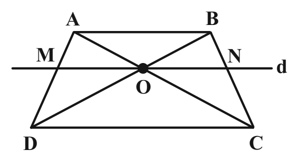
$$\xrightarrow{\times ۶۰} ۵c + ۴c = ۱۸۰ \Rightarrow ۹c = ۱۸۰ \Rightarrow c = ۲۰$$

*(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)*

---

**۴۷- گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

توجه: در ذوزنقه، دو مثلث $AOB$ و $COD$ با هم متشابه‌اند و داریم: $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD}$ و از آنجا که $AB < CD$ در نتیجه $\frac{AO}{OC} < ۱$؛ از طرفی طبق قضیهٔ تالس در مثلث $ACD$، $(MO \parallel CD)$ داریم: $\frac{AM}{MD} = \frac{AO}{OC}$ که با توجه به فرض $\frac{AM}{MD} = \frac{۲}{۳}$. همچنین طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه $\frac{BN}{NC} = \frac{۲}{۳}$ است، پس داریم:




$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ACD} : \frac{MO}{DC} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{MO}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow MO = ۴ \\ \overset{\Delta}{BCD} : \frac{ON}{DC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{ON}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ON = ۴ \end{cases}$$

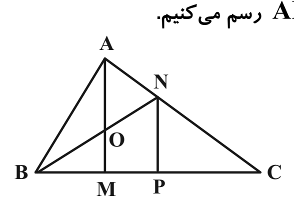
$$\Rightarrow MN = MO + ON = ۸$$

*(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)*

---

**۴۸- گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

$NP$ را موازی $AM$ رسم می‌کنیم.




$$\frac{AN}{AC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AN}{AC - AN} = \frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{AN}{CN} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{CN}{NA} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{BNP} : OM \parallel NP \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{BM}{MP} = \frac{OB}{ON} = ۱$$

$$\Rightarrow BM = MP \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{CAM} : NP \parallel AM \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CP}{MP} = \frac{CN}{NA} = ۲$$

$$\Rightarrow CP = ۲MP \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{BM}{CM} = \frac{BM}{CP + MP} = \frac{MP}{۳MP} = \frac{۱}{۳}$$

*(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)*

---

**۴۹- گزینهٔ «۲»** *(حمید ناصر)*

طبق قضیهٔ تالس در دو مثلث $AEC$ و $ABC$ داریم:

$$DF \parallel AE \Rightarrow \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{AD} \qquad (۱)$$

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{CF}{EF} = \frac{CE}{BE} \xrightarrow{CF = ۲EF} \frac{CE}{BE} = ۲ \Rightarrow CE = ۲BE$$

بنابراین اگر $EF = x$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} FC = ۲x \\ BE = \frac{۳}{۲}x \end{cases}$$

دو مثلث $DEF$ و $BDC$ در ارتفاع رسم شده از رأس $D$ مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها است و در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{BDC}} = \frac{EF}{BC} = \frac{x}{۲x + x + \frac{۳}{۲}x} = \frac{x}{\frac{۹}{۲}x} = \frac{۲}{۹}$$

*(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۷)*

---

**۵۰- گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$\overset{\Delta}{PAB} : EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{EF}{AB} = \frac{PF}{PB} \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{PBC} : FN \parallel PC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{PF}{PB} = \frac{CN}{BC} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{EF}{AB} = \frac{CN}{BC} \xrightarrow{AB = BC} EF = CN$$

با توجه به شکل داریم:

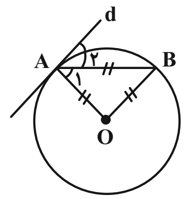
$$ME + FN = MN - EF = BC - CN = BN$$

*(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)*

## هندسه ۲

**۵۱- گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

مثلث $OAB$ متساوی‌الاضلاع است، پس داریم:




$$A\hat{O}B = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$$

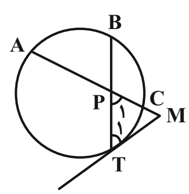
خط $d$ در نقطهٔ $A$ بر دایره مماس است، پس زاویهٔ $A_۲$ زاویهٔ ظلی است و در نتیجه داریم:

$$\hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

*(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)*

---

**۵۲- گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*




$$\hat{T}_۱ = \frac{\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{BC}}{۲} \quad \text{(زاویهٔ ظلی)}$$

$$\hat{P}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{TC}}{۲}$$

مثلث $MPT$ متساوی‌الاضلاع است، پس داریم:

$$\hat{T}_۱ = \hat{P}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{TC} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$$

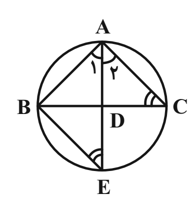
*(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)*

---

**۵۳- گزینهٔ «۴»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

$$\begin{cases} \text{محاطی } \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \text{محاطی } \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{cases} \text{ و } \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE$$




*(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)*

---

**۵۴- گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اندازهٔ هر ضلع $n$ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع $R$، برابر $۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و اندازه هر ضلع $n$ ضلعی منتظم محیط بر آن دایره برابر $۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است، پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۹}}{۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۱۸}} = \frac{\sin ۲۰^\circ}{\tan ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۲۰^\circ}{\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}} = \frac{۲\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ}{\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}}$$

$$= ۲\cos^۲ ۱۰^\circ = ۲a^۲$$

*(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)*

---

**۵۵- گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

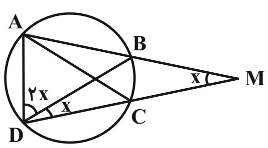
فرض کنیم $\overset{\frown}{BC} = ۲x$ باشد. در این صورت $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD} = ۴x$ است و داریم:

$$A\hat{M}D = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۴x - ۲x}{۲} = x$$

$$B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

$$A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۴x}{۲} = ۲x \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

زاویهٔ $D\hat{A}B$ زاویهٔ محاطی رو به قطر $BD$ و برابر $۹۰^\circ$ است، پس مطابق شکل داریم:



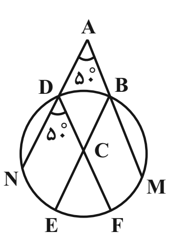

$$\overset{\Delta}{AMD} : ۳x + x + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۲۲/۵^\circ$$

*(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)*

---

**۵۶- گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

فرض کنید $\overset{\frown}{BD} = \alpha$ باشد. در این صورت داریم:




$$BM \parallel DF \Rightarrow \overset{\frown}{MF} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$$

$$DN \parallel BE \Rightarrow \overset{\frown}{NE} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$$

$AB \parallel DC$ و مورب $AN \Rightarrow \hat{D} = \hat{A} = ۵۰^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NEF} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \widehat{EF} = ۱۰۰^\circ - \alpha$

از طرفی مجموع طول‌های دو کمان $BM$ و $DN$، $\frac{۱}{۳}$ محیط دایـره اسـت، پس داریم:

$$\widehat{DN} + \widehat{BM} = \frac{۱}{۳} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

$$(\widehat{DN} + \widehat{BM}) + \widehat{BD} + \widehat{MF} + \widehat{EF} + \widehat{NE} = ۳۶۰^\circ$$

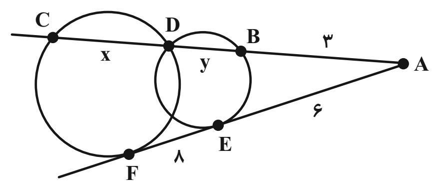
$$\Rightarrow ۱۲۰^\circ + \alpha + \alpha + (۱۰۰^\circ - \alpha) + \alpha = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\alpha = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۰^\circ \Rightarrow \widehat{EF} = ۱۰۰^\circ - ۷۰^\circ = ۳۰^\circ$$

*(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)*

---

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(حمید ناصر)*




طبق روابط طولی برای دایرهٔ کوچک‌تر داریم:

$$AE^۲ = AB \times AD \Rightarrow ۶^۲ = ۳(۳ + y) \Rightarrow ۳۶ = ۹ + ۳y$$

$$\Rightarrow ۳y = ۲۷ \Rightarrow y = ۹$$

طبق روابط طولی برای دایرهٔ بزرگ‌تر داریم:

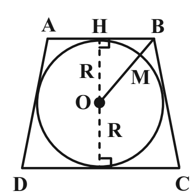
$$AF^۲ = AD \times AC \Rightarrow ۱۴^۲ = ۱۲(۱۲ + x)$$

$$\Rightarrow ۱۹۶ = ۱۴۴ + ۱۲x \Rightarrow ۱۲x = ۵۲ \Rightarrow x = \frac{۵۲}{۱۲} = \frac{۱۳}{۳}$$

*(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)*

---

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*




در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که بر یک دایره محیط است، قطر دایـرهٔ محـاطی واسطهٔ هندسی قاعده‌های ذوزنقه است، بنابراین داریم:

$$(۲R)^۲ = AB \times CD \Rightarrow ۴R^۲ = ۳ \times \frac{۱۶}{۳} = ۱۶$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OBH} : OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ = ۲^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow OB = \frac{۵}{۲}$$

کمترین فاصلهٔ رئوس ذوزنقه تا نقاط واقع بر محیط دایره برابر طول پـاره‌خـط $BM$ در شکل فوق است. با توجه به شکل داریم:

$$BM = OB - OM = \frac{۵}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲}$$

*(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)*

---

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبـق فـرض $r = ۴ - ۲\sqrt{۲}$ و $r_a = ۴ + ۲\sqrt{۲}$ اسـت. چـون مثلـث متساوی‌الساقین است، پس $r_b = r_c$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۴ + ۲\sqrt{۲}} + \frac{۲}{r_b} = \frac{۱}{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{r_b} = \frac{۱}{۴ - ۲\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۴ + ۲\sqrt{۲}} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۲} - ۴ + ۲\sqrt{۲}}{(۴ - ۲\sqrt{۲})(۴ + ۲\sqrt{۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{r_b} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۸} \Rightarrow r_b = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

*(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۶ و ۲۹)*

---

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر $R$ و شـعاع دایـرهٔ بـزرگ‌تـر $nR$ باشد. در این صورت داریم:

$$\sqrt{(\sqrt{۱۰}R)^۲ - (nR - R)^۲} = ۳\sqrt{(\sqrt{۱۰}R)^۲ - (nR + R)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۰R^۲ - (n - ۱)^۲R^۲ = ۹(۱۰R^۲ - (n + ۱)^۲R^۲)$$

$$\xrightarrow{\div R^۲} ۱۰ - (n - ۱)^۲ = ۹(۱۰ - (n + ۱)^۲)$$

$$\Rightarrow ۱۰ - n^۲ + ۲n - ۱ = ۹۰ - ۹n^۲ - ۱۸n - ۹$$

$$\Rightarrow ۸n^۲ + ۲۰n - ۷۲ = ۰ \Rightarrow n^۲ + \frac{۵}{۲}n - ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (n - ۲)(n + \frac{۹}{۲}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۲ \\ n = -\frac{۹}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

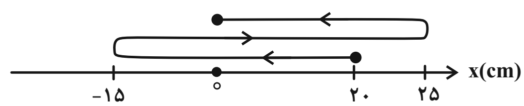
پس شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، ۲ برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است.

*(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)*

## فیزیک ۳

**۶۱- گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقه‌مند)*

می‌دانیم مسافت طی شده برابر طول مسیر حرکتی است که متحرک طی می‌کند. بنابراین با توجه به مسیر حرکت رسم شده در زیر، مسافت طی شده برابر است با:




$$\ell = |-15-20| + |25-(-15)| + |0-25|$$

$$\ell = 35+40+25 = 100cm = 1m$$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ و ۳)*

---

**۶۲- گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

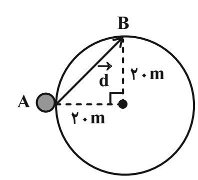
ابتدا محیط دایره را به دست می‌آوریم:

$$L = 2\pi r \xrightarrow[\pi=3]{r=20m} d = 2\times3\times20 = 120m$$ محیط دایره

اکنون با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی شده توسط متحرک را در مدت $20s$ پیدا می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[s_{av}=7/5\frac{m}{s}]{\Delta t=20s} 7/5 = \frac{\ell}{20} \Rightarrow \ell = 150m$$

می‌بینیم، مسافت طی شده توسط متحرک به اندازهٔ $150-120 = 30m$ بیشتر از محیط دایره است. با توجه به این‌که $30m$ برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره $(120m)$ می‌باشد، مطابق شکل زیر، متحرک بعد از $20s$ و یک دور کامل از نقطهٔ $A$ عبور می‌کند و به نقطهٔ $B$ می‌رسد. بنابراین، با محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک، اندازهٔ سرعت متوسط آن را می‌یابیم:




$$d = \sqrt{20^2+20^2} = 20\sqrt{2}m$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=20s} v_{av} = \frac{20\sqrt{2}}{20} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

**۶۳- گزینهٔ «۳»** *(علی برزگر)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ متحرک در لحظه‌های $t_1$، $t_3$ و $t_4$ از مبدأ مکان عبور کرده است.

ب) نادرست؛ جهت حرکت متحرک دو بار در لحظه‌های $t_2$ و $t_4$ تغییر کرده است.

پ) نادرست؛ جابه‌جایی متحرک در کل زمان حرکت برابر $\Delta x = 10-(-10) = 20m$ است.

ت) درست؛ در لحظه‌های $t_2$ و $t_4$ که شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان صفر می‌شود، تندی متحرک صفر می‌شود.

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۶۴- گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

برای به دست آوردن سرعت متوسط $(\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t})$ در جابه‌جایی بین مکان‌های $x_1$ و $x_2$، چهار حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$t_1 < t < t_2: \quad |v_{av_1}| = \frac{|x_2-x_1|}{2t'}$$

$$t_1 < t < t_3: \quad |v_{av_2}| = \frac{|x_2-x_1|}{5t'}$$

$$t_2 < t < t_4: \quad |v_{av_3}| = \frac{|x_1-x_2|}{4t'}$$

$$t_3 < t < t_4: \quad |v_{av_4}| = \frac{|x_1-x_2|}{t'}$$

ملاحظه می‌شود که $|v_{av_4}|$ بیشترین و $|v_{av_2}|$ کمترین اندازهٔ سرعت متوسط می‌باشند. بنابراین داریم:

$$|v_{av_4}| - |v_{av_2}| = 12 \Rightarrow \frac{|x_1-x_2|}{t'} - \frac{|x_2-x_1|}{5t'} = 12$$

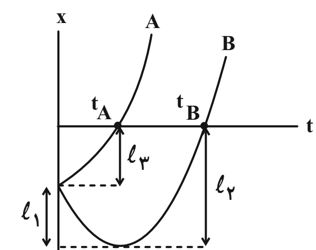
$$\Rightarrow \frac{4(x_1-x_2)}{5t'} = 12 \Rightarrow \frac{x_1-x_2}{t'} = 15$$

$$v_{av_3} = \frac{x_1-x_2}{4t'} = \frac{15}{4}\,\frac{m}{s}$$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

**۶۵- گزینهٔ «۴»** (مسعود خندانی)

می‌دانیم لحظه‌ای که نمودار مکان- زمان محور زمان را قطع می‌کند، متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند و مطابق شکل زیر، متحرک $A$ در لحظهٔ $t_A$ و متحرک $B$ در لحظهٔ $t_B$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. مطابق این شکل، مسافتی که متحرک $A$ در بازهٔ زمانی صفر تا $t_A$ طی می‌کند برابر $\ell_A = \ell_۳$ و مسافتی که متحرک $B$ در بازهٔ زمانی صفر تا $t_B$ طی می‌کند برابر $\ell_B = \ell_۱ + \ell_۲$ است. بنابراین طبق تعریف تندی متوسط $s_{av,\,A} = \frac{\ell_۳}{t_A}$ و $s_{av,B} = \frac{\ell_۱ + \ell_۲}{t_B}$ است. با توجه به این $t_B > t_A$ است، اما مشخص نیست $\ell_۱ + \ell_۲$ چه مقدار از $\ell_۳$ بزرگ‌تر است. بسته به شرایط هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.

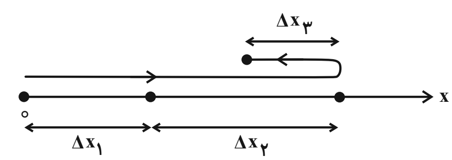



(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

**۶۶- گزینهٔ «۱»** (حسام نادری)

با توجه به شکل زیر و استفاده از رابطه‌های تندی متوسط و سرعت متوسط داریم:




$$v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲ - \Delta x_۳}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} \xrightarrow{\Delta x = v_{av}\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{v_{av,۱}\Delta t_۱ + v_{av,۲}\Delta t_۲ - v_{av,۳}\Delta t_۳}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳}$$

$$v_{av} = \frac{۳۰\times۲۰ + ۴۰\times۲۵ - ۱۰\times۵}{۲۰ + ۲۵ + ۵} = \frac{۱۵۵۰}{۵۰} = ۳۱\frac{m}{s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳|}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} = \frac{۳۰\times۲۰ + ۴۰\times۲۵ + ۱۰\times۵}{۲۰ + ۲۵ + ۵}$$

$$= \frac{۱۶۵۰}{۵۰} = ۳۳\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

**۶۷- گزینهٔ «۳»** (مجتبی نکوئیان)

با توجه به رابطهٔ تندی متوسط $(s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t})$ و سرعت متوسط $(\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t})$ می‌توان نوشت:

$$s_{av} = v_{av} + \frac{۴۰}{۱۰۰}v_{av} \Rightarrow s_{av} = \frac{۱۴۰}{۱۰۰}v_{av}$$

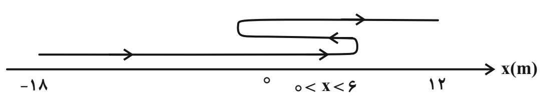
$$\Rightarrow \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۷}{۵}\frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \ell = \frac{۷}{۵}d$$

$$\xrightarrow{d = ۱۲-(-۱۸) = ۳۰m} \ell = \frac{۷}{۵}\times۳۰ = ۴۲m$$

بررسی موارد:

الف) درست؛ متحرک می‌تواند در مکان $x_۲$، بعد از مکان $x_۲$ و یا قبل از مکان $x_۲$ تغییر جهت حرکت دهد که در همهٔ این حالت‌ها با توجه به شرایط سؤال، در لحظهٔ $t_۲$ در حال دور شدن از مبدأ مکان است.

ب) نادرست؛ اگر متحرک در مکان‌های کمتر از $6m$ برای اولین بار تغییر جهت دهد، جهت بردار مکان سه بار تغییر می‌کند.




پ) درست؛ با توجه به این‌که اختلاف مسافت و جابه‌جایی، $12m$ است، در همهٔ حالت‌ها فاصلهٔ دو نقطه‌ای که متحرک در آن‌ها تغییر جهت می‌دهد، $6m$ است.

ت) درست؛ با توجه به این‌که اولین تغییر جهت در مکان‌های مثبت اتفاق می‌افتد و اختلاف مسافت و جابه‌جایی، ۱۲ متر است، در دومین تغییر جهت، فاصلهٔ متحرک از مکان $x_۲$، قطعاً کمتر از ۱۸ متر است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

---

**۶۸- گزینهٔ «۲»** (پوریا علاقه‌مند)

ابتدا اندازهٔ سرعت متوسط را به دست می‌آوریم. با توجه به داده‌های روی نمودار داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۴ - (-۱۲)}{۱۶} = \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۹}{۴}\frac{m}{s}$$

اکنون سرعت در لحظهٔ $t = ۱۶s$ را که برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان است، می‌یابیم:

$$v_{۱۶s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۲۴-۸}{۱۶-۰} = ۱\frac{m}{s}$$

در آخر داریم:

$$\frac{v_{av}}{v_{۱۶s}} = \frac{\frac{۹}{۴}}{۱} = \frac{۹}{۴}$$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۰)*

---

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست است.

سرعت متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان است. در این شکل نمی‌توان شیب خط مماس در لحظهٔ $t = ۳s$ را محاسبه کرد زیرا اندازهٔ قسمت افقی را نداریم که بتوانیم شیب خط را محاسبه کنیم.

گزینهٔ «۳»: درست؛ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۳ - x_۰}{۳-۰} = \frac{۸-۲۳}{۳} = -۵\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = ۵\frac{m}{s}$$

گزینهٔ «۴»: نادرست؛ چون متحرک تغییر جهت داده است، تندی متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ بیشتر از اندازهٔ سرعت متوسط در این بازه است.

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۰)*

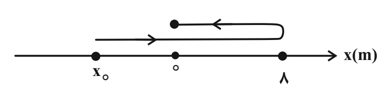
---

۷۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشادی)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی شده در ۵ ثانیهٔ اول حرکت را می‌یابیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۵s]{s_{av} = ۶\frac{m}{s}} ۶ = \frac{\ell}{۵} \Rightarrow \ell = ۳۰m$$

با توجه به داده‌های روی نمودار در شکل زیر، $x_۰$ را می‌یابیم:




$$\ell = |۸ - x_۰| + |۰ - ۸| \xrightarrow{\ell = ۳۰m} ۳۰ = ۸ - x_۰ + ۸ \Rightarrow x_۰ = -۱۴m$$

اکنون اندازهٔ سرعت متوسط را پیدا می‌کنیم:

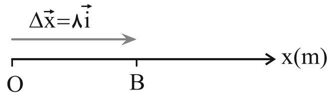
$$v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{\Delta t} \xrightarrow[x_۱ = x_۰ = -۱۴m]{x_۲ = ۰ \ , \ \Delta t = ۵-۰ = ۵s}$$

$$v_{av} = \frac{۰-(-۱۴)}{۵} = ۲/۸\frac{m}{s}$$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

## فیزیک ۳- آشنا

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*




جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ آغازین حرکت $(O)$ را به نقطهٔ پایانی آن $(B)$ متصل می‌کند که مطابق شکل بردار $\overrightarrow{OB}$ و در سوی مثبت محور $x$ است و داریم:

$$\overrightarrow{OB} = ۸\vec{i}$$

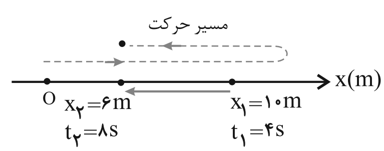
اما بردار مکان، برداری است که در هر لحظه، مبدأ مکان را بـه محـل جسـم وصل می‌کند چون در تمـام مـدت جسـم در نقـاط مثبت محـور قـرار دارد، بنابراین بردار مکان همواره مثبت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)*

---

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*

با توجه به شکل هر یک از موارد داده شده را بررسی می‌کنیم:




با توجه به شکل فوق، چون متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۴s$ در مکان $x_۱ = ۱۰m$ است و فقط یک بار تغییر جهت داده است، قطعاً در مکان‌های $x > ۱۰m$ یا $x = ۱۰m$ ایـن تغییـر جهـت رخ داده اسـت؛ زیـرا اگـر در مکـان‌هـای $۶m < x < ۱۰m$ تغییر جهت رخ دهد، دیگر نمی‌تواند در لحظهٔ $t = ۴s$ به مکان $x_۱ = ۱۰m$ برسد. با توجه به این توضیحات:

الف) نادرست است. در صورتی‌که متحرک در لحظـهٔ $t_۱ = ۴s$ تغییـر جهـت دهد، در بازهٔ زمانی $۴s$ تا $۸s$ (چهار ثانیهٔ دوم) طـول بـردار مکـان همـواره کاهش می‌یابد.

ب) درست است. با توجه به شکل جهت بـردار جابه‌جـایی $(\vec{d})$ در خـلاف جهت محور $x$ است.

پ) نادرست. اگر بردار سرعت متحرک در لحظـهٔ $t_۱ = ۴s$ در جهـت منفـی محور $x$ هـا باشـد، در ایـن صـورت قبـل از لحظـهٔ $t = ۴s$ جهـت حرکـت متحرک تغییر کرده است یعنی در لحظهٔ $t = ۴s$ تغییر جهت رخ داده است.

ت) درست است. در این بازهٔ زمانی بردار مکان همواره مثبت است.

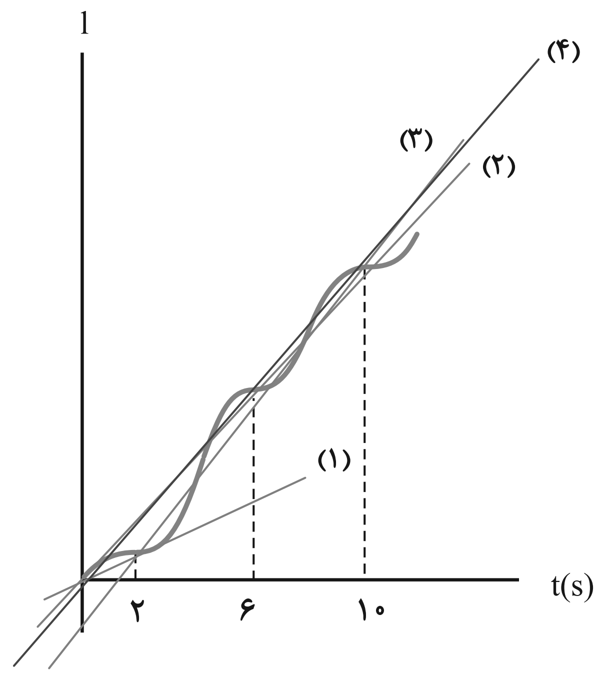
بنابراین، ۲ عبارت از عبارت‌های داده شده درست است.

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۷۳- گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

ابتدا از روی نمودار مکان ـ زمان، نمودار مسافت ـ زمان را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار مسافت ـ زمان در بازه‌های زمانی که جابه‌جایی منفی (بخش‌های نزولی تابع) است، قرینهٔ نمودار مکان ـ زمان را نسبت به محور زمان رسم می‌کنیم و در بازه‌هایی که جابه‌جایی مثبت (تابع صعودی است) است، نمودار، تغییر نمی‌کند. شیب نمودار مسافت ـ زمان در هر بازهٔ زمانی برابر تندی متوسط در آن بازه است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، شیب خط در بازهٔ $t = ۲s$ تا $t = ۱۰s$ بیشتر از بقیه است.




*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۷ تا ۱۰)*

---

**۷۴- گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

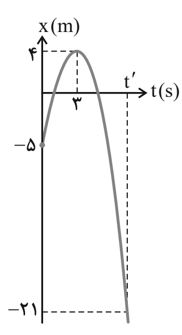
ابتدا نمودار x-t را رسم می‌کنیم، سپس مسافت خواسته شده را می‌یابیم:

$$x = -t^۲ + ۶t - ۵$$

$$t_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{-۲} = ۳s$$

$$\Rightarrow x_s = ۴m \Rightarrow S(۳,۴)$$

| t(s) | ۰ | ۳ |
|---|---|---|
| x(m) | −۵ | ۴ |

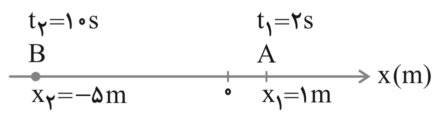



با توجه به این که ضریب $t^۲$ منفی است، سهمی دارای ماکزیمم و نمودار مطابق شکل خواهد بود. با توجه به نمودار مسافت طی شده از $t = ۰$ تا $t'$ به صورت مقابل حساب می‌شود: $\ell = ۵ + ۴ + ۴ + ۲۱ = ۳۴m$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۶)*

---

**۷۵- گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*




در اینجا موقعیت متحرک در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ مشخص است. اما این‌که در این بین، متحرک تغییر جهت داده است یا خیر، نامعلوم است. بنابراین نمی‌توان به‌طور قطعی تندی متوسط را محاسبه کرد. اما الزاماً بزرگ‌تر یا مساوی سرعت متوسط متحرک خواهد بود.

$$s_{av} \geq v_{av}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۵-۱}{۱۰-۲} = \frac{-۶}{۸} \Rightarrow |v_{av}| = ۰/۷۵\,m/s$$

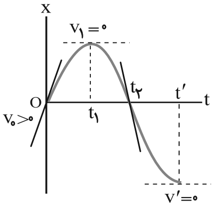
بنابراین خواهیم داشت: $s_{av} \geq ۰/۷۵\,m/s$

*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۷۶- گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

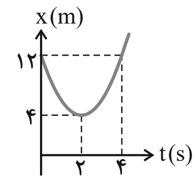
سرعت متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ است. مطابق شکل $v_۰ > ۰$ و $v_۱ = ۰$ بنابراین تا لحظهٔ $t_۱$ بزرگی سرعت در حال کاهش است. (در $t_۱$ به صفر می‌رسد) و از $t_۱$ به بعد افزایش می‌یابد و چون در نهایت و در لحظهٔ $t'$ به صفر می‌رسد در یک لحظهٔ $(t_۲)$ به بعد الزاماً بزرگی سرعتش کاهش می‌یابد تا به صفر برسد. این نقطه را در ریاضی، نقطهٔ عطف منحنی می‌گوییم. (در این نمودار لحظهٔ $t_۲$)




*(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۷ تا ۱۰)*

۷۷- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی)

هنگامی که سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t$ صفر است، بدان معنی است که متحرک در این بازه به جای اولش بازگشته است. با رسم نمودار مکان- زمان، $\ell$ و $\Delta t$ و سپس $s_{av}$ را می‌یابیم:




$$x = 2t^2 - 8t + 12$$

$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2s \Rightarrow x = 4m \Rightarrow S(2,4)$$

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 12m$$

| t(s) | ۰ | ۲ |
|---|---|---|
| x(m) | ۱۲ | ۴ |

با توجه به تقارن سهمی در $t = 2s$ از روی شکل مکان متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ نیز همان مکان در لحظهٔ $t = 0$ یعنی $12m$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 4s]{\ell = 8+8=16m} s_{av} = \frac{16}{4} = 4m/s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

۷۸- **گزینهٔ «۱»** (کتاب آبی)

در ابتدا مکان متحرک در لحظهٔ $t = 14s$ را می‌یابیم. برای پیدا کردن تندی در لحظه $t = 12s$، شیب خط مماس بر نمودار را در این لحظه می‌یابیم.

$$v_{t=12s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{240}{8} = 30\frac{m}{s}$$

حال داریم:

$$v_{t=12s} = v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 30 = \frac{x_2 - 60}{14 - 2} \Rightarrow x_2 = 420m$$

در نهایت داریم:

$$\text{سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول } v'_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ هفتم } v''_{av} = \frac{\Delta x''}{\Delta t''} = \frac{x''_2 - x''_1}{t''_2 - t''_1}$$

$$= \frac{420 - 240}{14 - 12} = 90\frac{m}{s}$$

$$\frac{v'_{av}}{v''_{av}} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۰)

---

۷۹- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی)

ابتدا نمودار مکان – زمان متحرک را که یک سهمی است، رسم می‌کنیم:

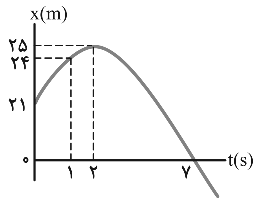
$$x = -t^2 + 4t + 21 \Rightarrow -t^2 + 4t + 21 = 0$$

$$\Rightarrow -(t+3)(t-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3s \\ t = 7s \end{cases}$$

$$t_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_s = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2s$$

$$x_s = -(2)^2 + 4\times 2 + 21 = -4 + 8 + 21 = 25m$$

| t | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | ۲۱ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۴ | ۲۱ |




با توجه به نمودار از لحظهٔ $t = 2s$ تا $t = 7s$ اندازهٔ بردار مکان متحرک همواره در حال کاهش است که سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

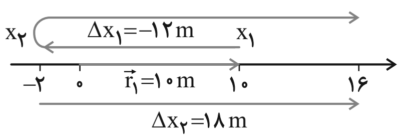
$$v_{av} = \frac{x_7 - x_2}{t_7 - t_2} \Rightarrow v_{av} = \frac{0 - 25}{7 - 2} = -5m/s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

---

۸۰- **گزینهٔ «۱»** (کتاب آبی)

ابتدا مسیر حرکت متحرک روی محور xها را مشخص می‌کنیم. مکان متحرک در $t_1 = 2s$ برابر $x_1 = 10m$ است.




حال $x_2$ را می‌یابیم:

$$\Delta x_1 = v_{av_1} \times \Delta t_1 \xrightarrow{v_{av_1} = -6m/s\ ,\ \Delta t_1 = 4-2 = 2s}$$

$$\Delta x_1 = -6 \times 2 = -12m$$

اکنون اگر روی محور $12m$ به چپ برویم به $x_2 = -2m$ می‌رسیم.

در مرحلهٔ دوم داریم:

$$\Delta x_2 = v_{av_2} \times \Delta t_2 \xrightarrow{v_{av_2} = 3m/s\ ,\ \Delta t_2 = 6s}$$

$$\Delta x_2 = 3 \times 6 = 18m$$

بنابراین سرعت متوسط کل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{-12 + 18}{2 + 6} = \frac{6}{8} = 0/75 m/s$$

برای یافتن مکان پایانی $(x_3)$ از شکل کمک می‌گیریم. با توجه به مسیر حرکت و تغییر جهت، ابتدا از $+10m$ به $-2m$ و از این نقطه به $+16m$ می‌رسد و نقطهٔ پایانی و بردار مکان آن به صورت زیر می‌باشد:

$$x_3 = 16m \Rightarrow \vec{r}_3 = 16\vec{i}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

## فیزیک ۱

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

وقتی گلوله از بالن رها می‌شود، با همان تندی بالن شروع به حرکت می‌کند. بنابراین، چون تندی اولیهٔ گلوله همان تندی بالن است، از تندی بالن نمی‌توان صرف‌نظر کرد. از طرف دیگر، چون وزن گلوله عامل حرکت و شتاب گلوله است، لذا از وزن گلوله نیز نمی‌توان صرف‌نظر نمود. می‌بینیم، عامل تقریباً بی‌تاثیر مقاومت هوا است.

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحهٔ ۵)*

---

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(حسین مفرومی)*

ژول یکای انرژی در $SI$ است که یکای فرعی آن $\frac{kg.m^2}{s^2}$ است.

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)*

---

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(شیلا شیرزادی)*

ابتدا به روش تبدیل زنجیره‌ای ۲۱۸ نانومتر را به میکرومتر تبدیل می‌کنیم:

$$218nm = 218nm \times \frac{10^{-9}m}{1nm} \times \frac{1\mu m}{10^{-6}m} = 218 \times 10^{-3}\mu m$$

اکنون عدد به دست آمده را برحسب نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$218 \times 10^{-3}\mu m = 2/18 \times 10^{2} \times 10^{-3}\mu m = 2/18 \times 10^{-1}\mu m$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)*

---

۸۴- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

با توجه به رابطهٔ $F = ma$، یکای نیرو از حاصل‌ضرب یکای جرم در یکای شتاب به دست می‌آید:

$$[F] = \frac{kg.m}{s^2}$$

در اینجا، کمیت $A$ نیز که از جنس نیرو است، همین یکا را دارد: $[A] = \frac{kg.m}{s^2}$

همچنین، با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ یکای چگالی $\frac{kg}{m^3}$ است. بنابراین یکای $B$ که از جنس چگالی است $\frac{kg}{m^3}$ می‌باشد. $[B] = \frac{kg}{m^3}$

و یکای کمیت $C$ که از جنس مسافت است، متر می‌باشد. $[C] = m$

اکنون رابطهٔ فیزیکی داده شده را به صورتی می‌نویسیم که $D$ در یک طرف معادله قرار گیرد و سپس یکای آن را به دست می‌آوریم:

$$D^2 = ABC^2 \Rightarrow [D^2] = [A][B][C^2] = \frac{kg.m}{s^2} \times \frac{kg}{m^3} \times m^2 = \frac{kg^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow [D] = \frac{kg}{s}$$

با توجه به این‌که آهنگ هر کمیت، نسبت تغییر آن کمیت به زمان است، آهنگ شارش جرم به صورت $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ می‌باشد و یکای آن $\frac{kg}{s}$ است.

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۱)*

---

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی (دیجیتالی)، برابر یک واحد از آخرین رقمی است که آن ابزار می‌خواند که در اینجا برای عدد $0/046cm$، آخرین رقمی که می‌خواند $0/006cm$ است؛ لذا یک واحد از آخرین رقم آن برابر $0/001cm$ می‌شود. بنابراین، دقت اندازه‌گیری ریزسنج برابر است با:

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = 0/001cm \xrightarrow{1cm=10mm}$$

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = 0/001 \times 10 = 0/01mm$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)*

---

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، حجم ظاهری کره را می‌یابیم:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow[\pi=3]{r=5cm} V_{\text{ظاهری}} = \frac{4}{3} \times 3 \times 5^3 = 500cm^3$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، حجم واقعی کره را پیدا می‌کنیم:

$$V_{\text{واقعی}} = \frac{m}{\rho} \xrightarrow[m=180g]{\rho=1200\frac{kg}{m^3}=1/2\frac{g}{cm^3}} V_{\text{واقعی}} = \frac{180}{1/2} = 150cm^3$$

در آخر، حجم حفره را حساب می‌کنیم:

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}} = 500 - 150 = 350cm^3$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)*

---

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

وقتی یک مایع به جامد تبدیل شود، جرم آن ثابت می‌ماند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{\text{مایع}} = m_{\text{جامد}} \xrightarrow{m=\rho V} \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جامد}} V_{\text{جامد}}$$

$$\xrightarrow[\rho_{\text{جامد}}=۱/۵\frac{g}{cm^۳}]{\rho_{\text{مایع}}=۱/۲\frac{g}{cm^۳}} ۱/۲\times V_{\text{مایع}} = ۱/۵\times V_{\text{جامد}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{جامد}} = \frac{۱/۲}{۱/۵} V_{\text{مایع}} \Rightarrow V_{\text{جامد}} = ۰/۸ V_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{جامد}} = ٪۸۰ V_{\text{مایع}}$$

می‌بینیم، وقتی مایع به جامد تبدیل می‌شود، حجم جامد آن ۸۰ درصد حجم مایع است. بنابراین ۲۰ درصد از حجم مایع کاهش می‌یابد.

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)*

---

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(پوریا علاقه‌مند)*

بـا اسـتفاده از رابطـهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ و بـا توجـه بـه ایـن‌کـه $m_۲ = ۶m_۱$ ، $V_۲ = V_۱ + ۴۰۰cm^۳$ و چگـالی ثابـت اسـت، بـه صـورت زیـر $V_۲$ را می‌یابیم. دقت کنید، چون جرم افزایش یافته است و حجم بـا جـرم متناسـب است، حجم نیز افزایش می‌یابد.

$$\rho = \frac{m_۱}{V_۱} = \frac{m_۲}{V_۲} \xrightarrow[V_۱=V_۲-۴۰۰]{m_۲=۶m_۱} \frac{m_۱}{V_۲-۴۰۰} = \frac{۶m_۱}{V_۲}$$

$$\Rightarrow ۶V_۲ - ۲۴۰۰ = V_۲ \Rightarrow ۵V_۲ = ۲۴۰۰ \Rightarrow V_۲ = ۴۸۰cm^۳$$

$$\xrightarrow{۱L=۱۰۰۰cm^۳} V_۲ = \frac{۴۸۰}{۱۰۰۰}L = ۰/۴۸L$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)*

---

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

ابتدا حجم مایع درون ظرف را می‌یابیم.

$$\rho_{\text{مایع}} = \frac{m_{\text{مایع}}}{V_{\text{مایع}}} \xrightarrow[m_{\text{مایع}}=۷۰۰g]{\rho_{\text{مایع}}=۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳}=۲\frac{g}{cm^۳}} ۲ = \frac{۷۰۰}{V_{\text{مایع}}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{مایع}} = ۳۵۰cm^۳$$

چون حجم ظـرف $۴۰۰cm^۳$ و حجـم مـایع $۳۵۰cm^۳$ اسـت، بنـابراین $۴۰۰ - ۳۵۰ = ۵۰cm^۳$ از حجم ظرف خالی می‌ماند. اکنـون حجـم قطعهٔ فلزی را می‌یابیم:

$$V_{\text{فلز}} = \frac{m_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{فلز}}} \xrightarrow[\rho_{\text{فلز}}=۶\frac{g}{cm^۳}]{m_{\text{فلز}}=۸۴۰g} V_{\text{فلز}} = \frac{۸۴۰}{۶} = ۱۴۰cm^۳$$

با توجه به این‌که حجم مایع جابه جا شده برابـر حجـم فلـز اسـت، لـذا، بـا انداختن قطعهٔ فلزی درون مایع، حجم مایع درون ظرف به اندازهٔ $۱۴۰cm^۳$ افزایش می‌یابد که بیشتر از حجم خالی ظرف می‌باشد. بنـابراین چـون حجـم خالی ظرف $۵۰cm^۳$ اسـت، لـذا، $V' = ۱۴۰ - ۵۰ = ۹۰cm^۳$ مـایع از درون ظرف سرریز می‌شود که جرم آن برابر است با:

$$m = \rho V' = ۲\times ۹۰ = ۱۸۰g$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)*

---

۹۰- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

وقتی $\frac{۱}{۵}$ از حجم مایع A از ظـرف سـرریز شـود، $\frac{۴}{۵}$ از حجـم مـایع A درون ظرف قرار می‌گیرد. همچنـین، وقتـی $\frac{۱}{۴}$ از حجـم مـایع B از ظـرف سرریز شود، $\frac{۳}{۴}$ از حجم مایع B درون ظرف قرار می‌گیرد. بنابراین، چـون حجم ظرف‌ها یکسان است، داریم:

$$V_{\text{ظرف}} = \frac{۴}{۵}V_A = \frac{۳}{۴}V_B \Rightarrow V_A = \frac{۱۵}{۱۶}V_B$$

اکنون با توجه به یکسان بودن جرم مـایع‌هـا و بـا اسـتفاده از رابطـهٔ چگـالی می‌توان نوشت:

$$m_A = m_B \xrightarrow{m=\rho V} \rho_A V_A = \rho_B V_B \xrightarrow[\rho_A=۳/۲\frac{g}{cm^۳}]{V_A=\frac{۱۵}{۱۶}V_B}$$

$$۳/۲\times\frac{۱۵}{۱۶}V_B = \rho_B \times V_B \Rightarrow \rho_B = ۳\frac{g}{cm^۳}$$

در آخر چگالی مخلوط جرم برابر از دو مایع A و B را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}}$$

$$\xrightarrow[\rho_B=۳\frac{g}{cm^۳}]{\rho_A=۳/۲\frac{g}{cm^۳},\ m_A=m_B=m} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m+m}{\frac{m}{۳/۲}+\frac{m}{۳}} = \frac{۲m}{\frac{۶/۲m}{۳/۲\times۳}}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{۲\times۳\times۳/۲}{۶/۲} = \frac{۹۶}{۳۱}\frac{g}{cm^۳}$$

*(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)*

## فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۱»** *(شادمان ویسی)*

با توجه به جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی، در مالش یک میلهٔ شیشه‌ای خنثی با پارچهٔ ابریشمی، الکترون‌ها از میلهٔ شیشه‌ای به پارچهٔ ابریشمی منتقل می‌شوند، در نتیجه، میلهٔ شیشه‌ای بار مثبت پیدا می‌کند. یعنی، تعداد الکترون‌های پارچهٔ ابریشمی افزایش و تعداد الکترون‌های میلهٔ شیشه‌ای کاهش خواهد یافت. (مورد «الف» درست است.)

در مالش میلهٔ پلاستیکی با پارچهٔ ابریشمی، الکترون‌ها از پارچهٔ ابریشمی به میلهٔ پلاستیکی منتقل می‌شوند، در نتیجه، میلهٔ پلاستیکی بار منفی پیدا می‌کند. یعنی، تعداد الکترون‌های آن افزایش می‌یابد و تعداد الکترون‌های پارچهٔ ابریشمی کاهش خواهد یافت. (مورد «ت» درست است.)

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحهٔ ۴)*

---

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(محسن قندچلر)*

اگر بار هر ذره برابر $q = ne$ باشد، با استفاده از قانون کولن باید مشخص کنیم در کدام گزینه، $n$ عدد صحیح به دست می‌آید:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow[|q_1|=|q_2|=ne]{r=64cm=64\times10^{-2}m}$$

$$F = 9\times10^{9}\times\frac{ne\times ne}{64\times64\times10^{-4}} \xrightarrow{e=1/6\times10^{-19}C}$$

$$F = \frac{9\times10^{9}\times n^2\times1/6\times10^{-19}\times1/6\times10^{-19}}{64\times64\times10^{-4}} = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2$$

اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: $n$ عدد صحیح نیست.

$$F = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2 \xrightarrow{F=\frac{4}{9}\times10^{-27}N} \frac{4}{9}\times10^{-27} = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{16\times4}{9\times9} \Rightarrow n = \frac{8}{9}$$

گزینهٔ «۲»: $n$ عدد صحیح است.

$$\frac{9}{4}\times10^{-27} = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

گزینهٔ «۳»: $n$ عدد صحیح نیست.

$$\frac{16}{25}\times10^{-27} = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2 \Rightarrow n^2 = \frac{16\times16}{25\times9}$$

$$\Rightarrow n = \frac{16}{5\times3} = \frac{16}{15}$$

گزینهٔ «۴» $n$ عدد صحیح نیست.

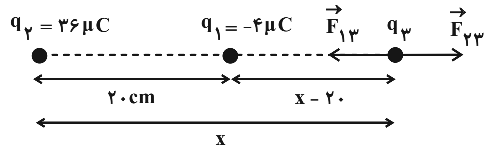
$$\frac{25}{16}\times10^{-27} = \frac{9}{16}\times10^{-27}n^2 \Rightarrow n^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow n = \frac{5}{3}$$

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳ تا ۸)*

---

۹۳- **گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقه‌مند)*

چون بارهای $q_1$ و $q_2$ ناهم‌نام‌اند، باید بار $q_3$ را خارج از فاصلهٔ بین دو بار و روی امتداد خط واصل آن‌ها و نزدیک به باری که قدرمطلق اندازهٔ بار کمتر است، قرار دهیم تا ساکن و در حال تعادل باشد. بنابراین، با توجه به شکل زیر، فاصله از بار $q_2$ را می‌یابیم. دقت کنید، اندازه و نوع بار $q_3$ در تعادل آن بی‌تاثیر است.




$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{r_{13}^2} = \frac{|q_2|}{r_{23}^2} \xrightarrow[r_{23}=x]{r_{13}=x-20} \frac{4}{(x-20)^2} = \frac{36}{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{2}{x-20} = \frac{6}{x} \Rightarrow 6x - 120 = 2x$$

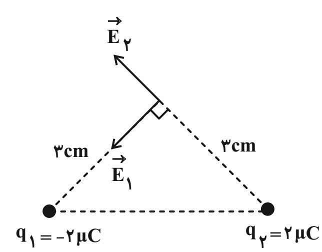
$$\Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = 30cm$$

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۰)*

---

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(مریم شیخ‌ممو)*

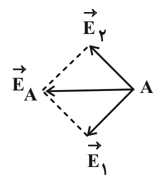
ابتدا اندازه و جهت میدان الکتریکی بارهای $q_1$ و $q_2$ را در نقطهٔ A تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases}|q_1|=|q_2|=2\times10^{-6}C\\ r_1=r_2=3cm=3\times10^{-2}m\end{cases}\Rightarrow E_1=E_2=k\frac{|q_1|}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow E_1=E_2=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{9\times10^{-4}}=2\times10^7\frac{N}{C}$$

اکنون اندازه و جهت میدان الکتریکی خالص را می‌یابیم. دقت کنید، چون $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم‌اندازه و بر هم عموداند، بردار برایند آن‌ها در راستای نیمساز زاویهٔ بین آن‌ها و به طرف چپ است.




$$E_A=\sqrt{E_1^2+E_2^2}\xrightarrow{E_1=E_2}$$

$$E_A=\sqrt{2E_1^2}=E_1\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow E_A=2\sqrt{2}\times10^7\frac{N}{C}$$

چون $\vec{E}_A$ در جهت منفی محور $x$ است، بردار آن به صورت زیر است:

$$\vec{E}_A=(-2\sqrt{2}\times10^7\frac{N}{C})\vec{i}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

---

۹۵- **گزینهٔ «۳»** (مجتبی نکوئیان)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ، فاصلهٔ ذرات باردار $q_1$، $q_2$ و $q_3$ را از نقطهٔ $A$ به دست می‌آوریم:

$$r_1=\sqrt{(4+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{45}cm$$

$$r_2=\sqrt{(-5+2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{45}cm$$

$$r_3=\sqrt{(1+2)^2+(-7+1)^2}=\sqrt{45}cm$$

با توجه به رابطهٔ میدان الکتریکی ذرهٔ باردار می توان نوشت:

$$E_1=\frac{k|q_1|}{r_1^2}=\frac{(9\times10^9)(10\times10^{-6})}{45\times10^{-4}}=2\times10^7\frac{N}{C}$$

$$\xrightarrow[r_1=r_2]{|q_2|=\frac{3}{2}|q_1|}E_2=\frac{3}{2}E_1=\frac{3}{2}\times2\times10^7=3\times10^7\frac{N}{C}$$

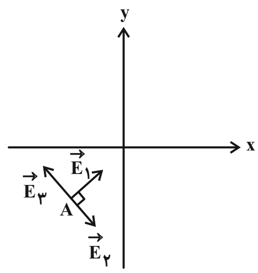
$$\xrightarrow[r_3=r_1]{|q_3|=\frac{1}{2}|q_1|}E_3=\frac{1}{2}E_1=\frac{1}{2}\times2\times10^7=10^7\frac{N}{C}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ معادلهٔ خط واصل نقاط $(B\ ,\ C)$ و $(A\ ,\ D)$ را می‌نویسیم:

$$C \text{ و } B: y-5=-2(x+5)\Rightarrow y=-2x-5$$

$$A \text{ و } D: y+1=\frac{1}{2}(x+2)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

با توجه به این‌که این دو خط در نقطهٔ $A(-2\ ,\ -1)$ متقاطع بوده و بر هم عمود هستند، میدان الکتریکی برایند را می‌توان مطابق با شکل زیر به دست آورد:




$$E_{2,3}=E_2-E_3=3\times10^7-10^7=2\times10^7\frac{N}{C}$$

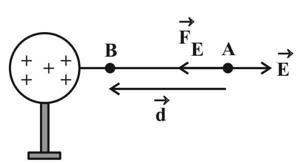
$$E_t=\sqrt{E_1^2+E_{2,3}^2}=\sqrt{(2\times10^7)^2+(2\times10^7)^2}=2\sqrt{2}\times10^7\frac{N}{C}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

---

۹۶- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا روحانی‌راد)

میدان الکتریکی کرهٔ باردار مثبت به طرف راست است. با توجه به این‌که بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود، جابه‌جایی بار الکتریکی و نیرو هم‌جهت‌اند، بنابراین، زاویهٔ بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$ برابر $\theta=0^\circ$ است، لذا، طبق رابطهٔ $W=(F\cos\theta)d$ ، کار میدان الکتریکی مثبت می‌باشد. یعنی $W_E>0$ است.




از طرف دیگر، داریم:

$$\Delta U=-W_E\xrightarrow{W_E>0}\Delta U<0$$

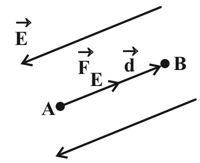
همچنین برای $\Delta V$ داریم:

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q}\xrightarrow[\Delta U<0]{q<0}\Delta V>0$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

چون بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی نیروی الکتریکی وارد می‌شود و جابه‌جایی نیز در خلاف جهت میدان است، زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی برابر صفر می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:




$$\Delta U = -|q|Ed\cos\theta \xrightarrow[E=4\times10^5\frac{N}{C}\ ,\ |q|=5\times10^{-6}C]{d=12cm=0/12m\ ,\ \theta=0}$$

$$\Delta U = -5\times10^{-6}\times4\times10^5\times0/12\times\cos0^\circ \xrightarrow{\cos0^\circ=1}$$

$$\Delta U = -0/24J \xrightarrow{1J=10^6\mu J}$$

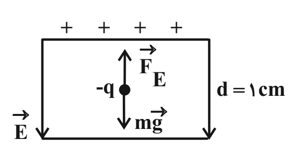
$$\Delta U = -0/24\times10^6\mu J = -2/4\times10^5\mu J$$

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)*

---

۹۸- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

بر ذرهٔ باردار نیروی وزن و نیروی الکتریکی وارد می‌شود. چون ذره در حال تعادل است، باید نیروی الکتریکی رو به بالا باشد. با توجه به این‌که جهت میدان الکتریکی به طرف پایین و جهت نیروی الکتریکی به طرف بالا است، نوع بار منفی می‌باشد. زیرا، بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود. از طرف دیگر، چون ذرهٔ باردار در حال تعادل است نیروی وزن و نیروی الکتریکی هم‌اندازه‌اند، لذا با محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ رسانا به صورت زیر اندازهٔ بار $q$ را می‌یابیم:




$$E = \frac{\Delta V}{d} \xrightarrow[d=1cm=10^{-2}m]{\Delta V=400V} E = \frac{400}{10^{-2}} = 4\times10^4\frac{N}{C}$$

$$F_E = mg \xrightarrow{F_E=|q|E} |q|E = mg$$

$$\xrightarrow[E=4\times10^4\frac{N}{C}]{m=0/02g=0/02\times10^{-3}kg}$$

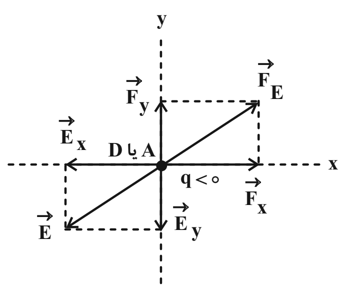
$$|q|\times4\times10^4 = 0/02\times10^{-3}\times10 \Rightarrow |q| = 5\times10^{-9}C$$

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)*

---

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

می‌دانیم جهت میدان الکتریکی در هر نقطه مماس بر خط میدان الکتریکی در آن نقطه است. از طرف دیگر، چون الکترون بار منفی دارد، طبق رابطهٔ $\vec{F} = q\vec{E}$ ، نیروی الکتریکی وارد بر آن، در خلاف جهت میدان الکتریکی می‌باشد. با توجه به این‌که نیروی وارد بر الکترون برابر $\vec{F} = (1mN)\vec{i} + (1mN)\vec{j}$ است، $\vec{F}_x$ در جهت مثبت محور $x$ و $\vec{F}_y$ در جهت مثبت محور $y$ می‌باشد، لذا، باید $\vec{E}_x$ در جهت منفی محور $x$ و $\vec{E}_y$ در جهت منفی محور $y$ باشد. بنابراین، با توجه به شکل زیر، در نقاط A و D نیروی وارد بر الکترون می‌تواند برابر $\vec{F} = (1mN)\vec{i} + (1mN)\vec{j}$ باشد.




*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)*

---

۱۰۰- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

با استفاده از رابطهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی به صورت زیر اختلاف چگالی سطحی بار دو کره را برحسب چگالی سطحی بار کرهٔ کوچک‌تر می‌یابیم:

$$\sigma = \frac{q}{A} \xrightarrow{q_1=q_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow{A=\pi D^2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = (\frac{D_1}{D_2})^2$$

$$\xrightarrow[D_2=8cm]{D_1=4cm} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = (\frac{4}{8})^2 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{1}{4}\sigma_1$$

$$|\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1}\times100| = |\frac{\frac{1}{4}\sigma_1-\sigma_1}{\sigma_1}\times100| = 75\%$$

*(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

## شیمی ۳

**۱۰۱- گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

**بررسی گزینه‌های نادرست:**

**گزینهٔ «۱»: اتیلن گلیکول و اتانول هر دو امکان تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند.**

**گزینهٔ «۲»: فرمول مولکولی وازلین $C_{25}H_{52}$ بوده و یک آلکان به شمار می‌رود که در فرمول پیوند- خط آن از ۲۴ خط (مربوط به پیوندهای $C-C$) استفاده می‌شود.**

**گزینهٔ «۴»: ۲۰ درصد جرمی اوره با فرمول $CO(NH_2)_2$ از کربن تشکیل شده است:**

$$\%C=\frac{(1\times12)gC}{60g\ \text{اوره}}\times100=\%20$$

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۴ و ۵)*

---

**۱۰۲- گزینهٔ «۴»** (امیرحسین مسلمی)

**عبارت‌ها (پ) و (ت) درست هستند.**

**بررسی عبارت‌ها:**

**الف) ترکیب $(A)$ برخلاف ترکیب $(C)$، در آب سخت که حاوی مقادیر چشمگیری یون منیزیم یا کلسیم است خاصیت پاک‌کنندگی خود را از دست می‌دهد.**

**ب) زنجیرهٔ آلکیل صابون $(A)$ سیرنشده است و فرمول صابون $(A)$ با زنجیرهٔ آلکیل سیر شده به صورت $C_{17}H_{35}COONa$ می‌باشد.**

**پ) واکنش تهیهٔ صابون از چربی یا ترکیب $(B)$ به صورت زیر است:**

$$C_{57}H_{104}O_6+3NaOH\rightarrow C_3H_8O_3+3C_{17}H_{33}COONa$$

**ت) ترکیب $(C)$ حاوی کاتیون و آنیون است که بین اتم‌های آنیون آن پیوند کووالانسی وجود دارد.**

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۵ تا ۱۲)*

---

**۱۰۳- گزینهٔ «۱»** (امیرحسین طیبی)

**از اطلاعات صورت سؤال در می‌یابیم که کاتیون این صابون مایع باید چند اتمی ($NH_4^+$) باشد، چون اگر تک اتمی باشد، جفت الکترون پیوندی $(p.e)$ نخواهد داشت.**

**فرمول صابون: $C_nH_{2n+1}COONH_4$**

$$\left\{\begin{array}{l} \text{بخش کاتیونی}:\left[\begin{array}{ccc} & H & \\ & | & \\ H- & N & -H \\ & | & \\ & H & \end{array}\right]^+ \Rightarrow p.e=4 \\ \\ \text{بخش آنیونی}: C_nH_{2n+1}COO^- \\ \Rightarrow p.e=\dfrac{4n+2n+1+(4\times1)+(2\times2)-1}{2}=3n+4 \end{array}\right.$$

$$\frac{3n+4}{4}=11/5\Rightarrow 3n+4=46\Rightarrow 3n=42\Rightarrow n=14$$

$$\Rightarrow \text{فرمول نهایی صابون}=C_{14}H_{29}COONH_4$$

**واکنش تشکیل رسوب: $2C_{14}H_{29}COONH_4+Mg^{2+}$**

$$\rightarrow \underbrace{(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}_{\text{رسوب سفیدرنگ}}+2NH_4^+$$

$$?g\,(C_{14}H_{29}COO)_2Mg=1/3\,mol\,C_{14}H_{29}COONH_4$$
$$\times\frac{1mol\,(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{2mol\,C_{14}H_{29}COONH_4}\times\frac{506g\,(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{1mol\,(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}$$
$$=328/9g\,(C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۵ تا ۹)*

---

**۱۰۴- گزینهٔ «۳»** (حسن لشکری)

**محلول مس $(II)$ سولفات، یک مخلوط همگن و پایدار بوده که نور را از خود عبور می‌دهد.**

**مخلوط آب و روغن و صابون، یک کلوئید با توده‌های مولکولی است که ناهمگن بوده و نور را پخش می‌کند.**

**شربت معده سوسپانسیون بوده و ناپایدار است و نور را پخش می‌کند.**

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۶ و ۷)*

---

**۱۰۵- گزینهٔ «۳»** (میلاد شیخ‌الاسلامی خیاوی)

**عبارت‌های اول، دوم، سوم و پنجم درست هستند.**

**بررسی عبارت‌ها:**

**عبارت اول: با توجه به شکل ۳ صفحهٔ ۸ کتاب شیمی ۳ درست است.**

**عبارت دوم: برای مثال پاک‌کنندگی صابون در پارچه‌های نخی بیشتر از پارچه‌های پلی‌استری است. زیرا چربی با پارچه‌های پلی‌استری جاذبهٔ قوی‌تری ایجاد می‌کند.**

**عبارت سوم: با توجه به خود را بیازمایید صفحهٔ ۹ کتاب شیمی ۳، هر دو تغییر بیان شده سبب افزایش قدرت پاک‌کنندگی می‌شود.**

**عبارت چهارم: با توجه به معادلهٔ واکنش صابون با یون منیزیم، هر مول منیزیم، دو مول صابون را از فرایند پاک‌کنندگی حذف می‌کند.**

$$2RCOONa(aq)+MgCl_2(aq)$$
$$\rightarrow(RCOO)_2Mg(s)+2NaCl(aq)$$

**عبارت پنجم: با توجه به کاوش کنید صفحه‌های ۸ و ۹ شیمی ۳، در اثر هم زدن سریع‌تر، هوای بیشتری در مخلوط حل شده و میزان کف تولیدی بیشتر است.**

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۷ تا ۱۰)*

---

**۱۰۶- گزینهٔ «۲»** (میلاد شیخ‌الاسلامی خیاوی)

**عبارت‌های (ب) و (پ) درست هستند.**

**بررسی عبارت‌ها:**

**الف) در اتیلن گلیکول بخش قطبی بر ناقطبی غالب است؛ بنابراین اتیلن گلیکول در آب، برخلاف هگزان حل می‌شود.**

**ب) در اسیدهای چرب، گروه عاملی کربوکسیل $(COOH)$ می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند. دقت کنید در این مواد بخش ناقطبی بر قطبی غالب است و این مواد در آب نامحلول هستند. اما باید توجه داشت در این سؤال صرفاً امکان تشکیل پیوند مورد پرسش واقع شده نه قدرت یا شمار پیوندهای هیدروژنی.**

پ) زیرا اسیدهای چربی که در تولید صابون جامد استفاده می‌شوند باید دارای زنجیرهٔ هیدروکربنی بزرگی باشند در حالی‌که مادهٔ داده شده قسمت هیدروکربنی کوتاهی دارد و برای این کار مناسب نیست.

ت) مخلوط آب، صابون و چربی، نوعی کلوئید است.

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴ تا ۶)*

---

**۱۰۷- گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

با توجه به این‌که غلظت یون کلرید برابر ۲۸۴۰۰ppm است، پس در یک لیتر از این محلول ۲۸۴۰۰ میلی‌گرم یون $Cl^-$ وجود دارد. با توجه به واکنش‌های موازنه شدهٔ زیر می‌توان نوشت:

$$1)\ MgCl_2(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$$

$$2)\ 3Mg^{2+}(aq) + 2PO_4^{3-}(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$

$$?g\ PO_4^{3-} = 28400\times10^{-3}\ g\ Cl^- \times \frac{1mol\ Cl^-}{35.5g\ Cl^-} \times \frac{1mol\ Mg^{2+}}{2mol\ Cl^-} \times \frac{2mol\ PO_4^{3+}}{3mol\ Mg^{2+}} \times \frac{95g\ PO_4^{3-}}{1mol\ PO_4^{3-}} \times \frac{100}{75} \simeq 33.7g\ PO_4^{3-}$$

$$\text{درصد جرمی یون فسفات} = \frac{33.7}{400}\times100 \simeq 8.45\%$$

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۲)*

---

**۱۰۸- گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$\underbrace{2Al(s)+2NaOH(s)}_{\text{پودر}} + 6H_2O(l) \rightarrow 2NaAl(OH)_4(s) + 3H_2(g)$$

$$\text{جرم مولی پودر} = 2\times27 + 2\times40 = 134g.mol^{-1}$$

$$?g\ H_2 = 268g\ \text{پودر} \times \frac{90}{100} \times \frac{2mol\ \text{پودر}}{134g\ \text{پودر}} \times \frac{3mol\ H_2}{2mol\ \text{پودر}} \times \frac{2g\ H_2}{1mol\ H_2} \times \frac{60}{100} = 6.48g\ H_2$$

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 1.2 = \frac{6.48}{V} \Rightarrow V = \frac{6.48}{1.2} = 5.4L$$

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)*

---

**۱۰۹- گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

فقط عبارت (پ) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر دو اکسید، دو نوع ذره تولید می‌کنند:

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3(\underbrace{2H^+ + 2NO_3^-}_{\text{۴ ذره}})$$

$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2(\underbrace{Ca^{2+} + 2OH^-}_{\text{۳ ذره}})$$

ب) $N_2O_5$ اکسید نافلزی بوده و در آب خاصیت اسیدی دارد و $CaO$ اکسید فلزی بوده و در آب خاصیت بازی دارد.

پ) در محلول‌های بازی (محلول $(II)$) غلظت $[OH^-]$ و در محلول‌های اسیدی (محلول $(I)$) غلظت $[H^+]$ بیشتر است.

ت) $N_2O_5$ و $HNO_3$ ترکیب مولکولی و $CaO$ و $Ca(OH)_2$ ترکیب یونی هستند.

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)*

---

**۱۱۰- گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

هر مول استر سه عاملی با ۳ مول $KOH$ واکنش می‌دهد.

$$?\ mol\ \text{استر} = 12L\ KOH \times \frac{0.01mol\ KOH}{1L\ KOH} \times \frac{1mol\ \text{استر}}{3mol\ KOH} = 0.04mol\ \text{استر}$$

$$n = \frac{m_{\text{استر}}(g)}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 0.04 = \frac{33.92}{\text{جرم مولی}}\ \text{مول}$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی} = \frac{33.92}{0.04} = 848g.mol^{-1}$$

فرمول عمومی استرهای بلندزنجیر ۳ عاملی که زنجیر هیدروکربنی آن سیر شده است به صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است و با توجه به جرم مولی آن داریم:

$$12n + (2n-4) + 6(16) = 848 \Rightarrow n = 54$$

$$C_{54}H_{104}O_6$$

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{1}{2}(4\times C\ \text{تعداد} + 1\times H\ \text{تعداد} + 2\times O\ \text{تعداد})$$

$$= \frac{1}{2}(54\times4 + 104\times1 + 6\times2) = 166$$

*(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۲)*

## شیمی ۱

**۱۱۱- گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

**بررسی عبارت‌های نادرست:**

**عبارت اول: فراوانی ایزوتوپ‌ها به صورت « $^{۲۵}Mg < ^{۲۶}Mg < ^{۲۴}Mg$ » است.**

**عبارت چهارم: به دلیل یکسان بودن خواص شیمیایی ایزوتوپ‌ها، سرعت واکنش ایزوتوپ‌های منیزیم با کلر، در شرایط یکسان، برابر است.**

**عبارت پنجم: ایزوتوپ‌ها از نظر خواص شیمیایی مشابه هستند، پس برای جداسازی آن‌ها تنها از روش فیزیکی استفاده می‌شود.**

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۳ و ۵)*

---

**۱۱۲- گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

$$\begin{cases} p + N = ۱۰۸ \\ \dfrac{e}{N} = \dfrac{۲}{۳} \\ e = p - ۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{N} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{e=p-۳} \frac{p-۳}{N} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow N = \frac{۳p - ۹}{۲}$$

$$p + N = ۱۰۸ \xrightarrow{N=\frac{۳p-۹}{۲}} p + \frac{۳p - ۹}{۲} = ۱۰۸$$

$$۲p + ۳p - ۹ = ۲۱۶ \Rightarrow \begin{cases} p = ۴۵ \\ N = ۶۳ \end{cases}$$

$${}_{۴۵}A \begin{cases} \text{دورهٔ } ۵ \\ \text{گروه } ۹ \end{cases}$$

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۵، ۶، ۱۰ و ۱۱)*

---

**۱۱۳- گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

**پاسخ صحیح هر سه پرسش در گزینهٔ «۱» آمده است.**

**بررسی پرسش‌ها:**

**پرسش «الف»: در یون فسفات در مجموع ۴۷ پروتون، ۴۸ نوترون و ۵۰ الکترون وجود دارد، پس ۱۴۵ ذرهٔ زیر اتمی داریم.**

**پرسش «ب»: در زمان ۲۰ ساعت، جرم ۴۰ گرم رادیوایزوتوپ ۴ بار نصف شده است، پس هر نیم‌عمر آن ۵ ساعت است.**

**پرسش «پ»: عدد اتمی A برابر ۱۵ است. ($^{۳۱}_{Z}A^{۳-}$)** $e - n = ۲$

$$(Z + ۳) - (۳۱ - Z) = ۲ \Rightarrow Z = ۱۵$$

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)*

---

**۱۱۴- گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

**عنصر B ، تکنیسم ($^{۹۹}_{۴۳}Tc$) است که در دورهٔ پنجم برای آن جرم اتمی میانگین تعریف نمی‌شود.**

**بررسی گزینه‌ها:**

**۱) عدد اتمی D برابر ۴۵ است که با عدد اتمی گاز نجیب دورهٔ سوم جدول تناوبی ($_{۱۸}Ar$)، ۲۷ واحد اختلاف دارد.**

**۲) عدد اتمی A برابر ۴۲ است که عنصر $_{۱۴}Si$ (دارای یک سوم عدد اتمی A ) در گروه ۱۴ قرار دارد.**

**۳) در $^{۹۹}_{۴۳}Tc$ نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها کوچک‌تر از ۱/۵ است.**

**۴) عنصر E با عدد اتمی ۴۶ در گروه ۱۰ جدول تناوبی قرار دارد. عنصر آهن ($_{۲۶}Fe$) فراوان‌ترین عنصر در کرهٔ زمین است و در گروه ۸ و دورهٔ ۴ جدول تناوبی قرار دارد.**

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۳، ۵ تا ۷ و ۹ تا ۱۳)*

---

**۱۱۵- گزینهٔ «۲»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

**ابتدا جرم اتمی میانگین A و B را به دست می‌آوریم:**

$$\bar{A} = \frac{(۱۴ \times ۷۵) + (۱۵ \times ۲۵)}{۱۰۰} = ۱۴/۲۵$$

$$\bar{B} = \frac{(۱۶ \times ۸۰) + (۱۷ \times ۱۰) + (۱۸ \times ۱۰)}{۱۰۰} = ۱۶/۳$$

پس جرم مولی $A_2B_3$ برابر است با:

$$A_2B_3 = 2(14/25)+3(16/3) = 77/4\,g.mol^{-1}$$

حال جرم خواسته شده را تعیین می‌کنیم:

$$?g\ A_2B_3 = 9/03\times10^{22}\ \ A_2B_3 \times \frac{1mol\ A_2B_3}{6/02\times10^{23}\ \ A_2B_3}$$

$$\times\frac{77/4g\ A_2B_3}{1mol\ A_2B_3} = 11/61g\ A_2B_3$$

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)*

---

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

از آنجایی که عدد جرمی عنصرها یک عدد صحیح است، پس $b$ و $c$ باید به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\underset{\%a}{\underset{\downarrow}{^{11}A}}\ ,\ \underset{\%20}{\underset{\downarrow}{^{b}A}}\ ,\ \underset{\%20}{\underset{\downarrow}{^{c}A}}\ ,\ \underset{x}{\underset{\downarrow}{^{14}A}}$$

$$100 = 20+20+a+x \Rightarrow x = 60-a$$

$$\bar{M} = \frac{11a+(20\times12)+(20\times13)+14\times(60-a)}{100}$$

$$\Rightarrow \bar{M} = 13/4-0/03a$$

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)*

---

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

$$54gN_xO_y\times\frac{1mol\ N_xO_y}{(14x+16y)g\ N_xO_y}\times\frac{6/02\times10^{23}\ \text{مولکول}}{1mol\ N_xO_y}$$

$$\times\frac{x+y\ \text{اتم}}{1\ \text{مولکول}} = 2/107\times10^{24}\ \text{اتم}$$

$$\frac{108}{7}(x+y) = 14x+16y \Rightarrow 54x+54y = 49x+56y$$

$$\Rightarrow 5x = 2y \Rightarrow \frac{y}{x} = 2/5$$

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)*

---

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(هدی بهاری‌پور)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۲) توده‌های سرطانی هم گلوکز نشان‌دار و هم گلوکز عادی را جذب می‌کنند.

۳) ناپایدارترین ایزوتوپ طبیعی هیدروژن، $^{3}_{1}H$ است.

۴) نیم‌عمر تکنسیم بسیار کوتاه است و زود از بین می‌رود؛ بنابراین نمی‌توان آن را ذخیره کرد.

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۶، ۷، ۹ و ۲۱)*

---

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (الف)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت (ب):

امواج نشر شده از کنترل تلویزیون نامرئی بوده و با وسیله‌ای مثل دوربین گوشی قابل رؤیت هستند.

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)*

---

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(هدی بهاری‌پور)*

در طیف نور مرئی، رنگ سبز بین رنگ آبی و زرد قرار دارد. رنگ شعلهٔ سبز می‌تواند مربوط به مس و ترکیب‌های آن باشد.

*(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)*

## شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** (امیر حاتمیان)

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) امروزه به دلیل صرفه‌جویی اقتصادی، تقاضای جهانی برای استفاده از هدایای زمینی افزایش یافته است.

ب) تمام قطعه‌های دوچرخه از فراوری مواد نفتی و مواد معدنی موجود در زمین به دست می‌آیند.

ت) همهٔ مواد طبیعی و همهٔ مواد مصنوعی از کرهٔ زمین به دست می‌آیند.

*(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۱ تا ۵)*

---

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** (امیر حاتمیان)

پاسخ صحیح هر سه پرسش در گزینهٔ «۲» آمده است.

بررسی پرسش‌ها:

الف) ژرمانیم ($_{32}Ge$) با عدد اتمی ۳۲، دومین عنصر شبه‌فلزی گروه ۱۴ جدول تناوبی و قلع ($_{50}Sn$) با عدد اتمی ۵۰، نخستین عنصر فلزی گروه ۱۴ جدول تناوبی است.

$18 = 50 - 32 =$ اختلاف عدد اتمی

ب) تعداد عنصرهای فلزی تک ظرفیتی دورهٔ چهارم جدول تناوبی برابر ۵ است.

| گروه | ۱ | ۲ | ۳ | ۱۲ | ۱۳ |
|---|---|---|---|---|---|
| عنصر | $K^+$ | $Ca^{2+}$ | $Sc^{3+}$ | $Zn^{2+}$ | $Ga^{3+}$ |

پ) با توجه به نمودار ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب شیمی یازدهم بیشترین اختلاف شعاع اتمی بین دو عنصر $_{11}Na$ و $_{17}Cl$ است.

*(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۶ تا ۱۶)*

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین مسلمی)

عناصر A، B و C به ترتیب Mg، O و F هستند؛ بنابراین فقط عبارت (ت) نادرست است.

عبارت (ت): عنصر بعد از Mg در جدول تناوبی، Al است که همانند عنصر قبل از اکسیژن (نیتروژن)، یون پایدار تشکیل می‌دهد.

*(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۶ تا ۱۴)*

---

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا کیانی‌دوست)

$$\left.\begin{array}{l} n-e=8 \\ e=p-3 \end{array}\right\} \Rightarrow n-(p-3)=8 \Rightarrow \begin{cases} n-p=5 \\ n+p=59 \end{cases}$$

$$2n=64 \Rightarrow n=32 \Rightarrow p=32-5=27$$

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

$_{27}Co:[Ar]3d^7\,4s^2 \Rightarrow$ گروه ۹، دورهٔ ۴، دستهٔ d

عبارت دوم: نسبت مورد نظر برابر است با: $\frac{2}{2}=1$

عبارت سوم: $_{27}Co:1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^7\,4s^2$

۷ زیرلایه اشغال شده

$_{35}Br:1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^5$

۸ زیرلایه اشغال شده

عبارت چهارم:

$_{27}Co:3d^7\,4s^2 \Rightarrow (7\times5)+(2\times4)=43$ الکترون‌های ظرفیتی

عبارت پنجم: شمار الکترون‌ها با $l=1$ در عنصرهای $_{19}K$ تا $_{30}Zn$ برابر ۱۲ است.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۶ و ۱۴ تا ۱۶)

---

۱۲۵- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

به‌طور کلی در هر واکنش شیمیایی که به‌طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کمتر است (واکنش‌های طبیعی) و در هر واکنش شیمیایی که به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است (واکنش‌های غیرطبیعی)؛ بنابراین عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی واکنش‌ها:

آ) $Cu + FeO \rightarrow \times$ (غیرطبیعی)

واکنش‌پذیری: واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها

ب) $C + 2CuO \rightarrow CO_2 + 2Cu$ (طبیعی)

واکنش‌پذیری: واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها

پ) $3Mg + Fe_2O_3 \rightarrow 2Fe + 3MgO$ (طبیعی)

واکنش‌پذیری: واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها

ت) $C + Na_2O \rightarrow \times$ (غیرطبیعی)

واکنش‌پذیری: واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

---

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

عبارت‌های (ب) و (پ) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) ششمین عنصر واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی، آهن $(_{26}Fe)$ می‌باشد که در طبیعت به شکل سنگ معدن هماتیت $(Fe_2O_3)$ است.

ب) در میان عنصرهای دورهٔ چهارم جدول تناوبی، $_{29}Cu$ و $_{30}Zn$ از دستهٔ d و ۶ عنصر از دستهٔ p شامل $_{31}Ga$، $_{32}Ge$، $_{33}As$، $_{34}Se$، $_{35}Br$ و $_{36}Kr$، زیرلایهٔ 3d کاملاً پر دارند (در مجموع ۸ عنصر) و ۲ عنصر $_{24}Cr$ و $_{25}Mn$ زیرلایهٔ 3d نیمه پر دارند؛ بنابراین اختلاف خواسته شده برابر $(8-2=6)$ است.

پ) اولین فلز واسطه‌ای که زیرلایهٔ 3d آن پر می‌شود، عنصر $_{29}Cu$ است.

$_{29}Cu : [_{18}Ar]\, 3d^{10}\, 4s^1$

مجموع n و l الکترون‌های ظرفیت $_{29}Cu$

$= 10\times(3+2) + 1\times(4+0) = 54$

ت) اسکاندیم $(_{21}Sc)$ نخستین عنصر واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی است که در ساخت وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها کاربرد دارد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶ و ۲۳)

---

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

می‌دانیم تنها ماده‌ای که از ظرف واکنش خارج می‌شود، گاز $CO_2$ است، پس جرم کاهش یافته همان $CO_2$ است. فرض می‌کنیم در ابتدا ۱۰۰ گرم واکنش‌دهنده در ظرف داریم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$?g\ CO_2 = 100g\ CaCO_3 \times \frac{1mol\ CaCO_3}{100g\ CaCO_3}$$

$$\times \frac{1mol\ CO_2}{1mol\ CaCO_3} \times \frac{44g\ CO_2}{1mol\ CO_2} \times \frac{R}{100} = 30/8g\ CO_2$$

$$\Rightarrow R = 70$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا کیانی‌دوست)

**معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت زیر است:**

$$Cu + 4HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + 2NO_2 + 2H_2O$$

**بنابراین می‌توان نوشت:**

$$?mL\ NO_2 = 2L\ \text{محلول} \times \frac{5\times10^{-3}\ mol\ HNO_3}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{2\,mol\ NO_2}{4\,mol\ HNO_3} \times \frac{25000\,mL\ NO_2}{1\,mol\ NO_2} = 125mL\ NO_2$$

$$?g\ Cu = 2L\ \text{محلول} \times \frac{5\times10^{-3}\ mol\ HNO_3}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{1\,mol\ Cu}{4\,mol\ HNO_3} \times \frac{64g\ Cu}{1\,mol\ Cu} = 0/16g\ Cu$$

$$Cu\ \text{درصد خلوص} = \frac{0/16}{0/2} \times 100 = \%80 \Rightarrow \text{درصد ناخالصی} = \%20$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

---

۱۲۹- **گزینهٔ «۱»** (مسعود طبرسا)

**روش اول:**

$$C_8H_{10} + 4KMnO_4 \rightarrow C_8H_6O_4 + 4MnO_2 + 4KOH$$

$$?\ g\ C_8H_6O_4 = 400mL\ \text{محلول}$$

$$\times \frac{1L\ \text{محلول}}{1000mL\ \text{محلول}} \times \frac{0/2mol\ KMnO_4}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{1molC_8H_6O_4}{4mol\ KMnO_4} \times \frac{166g\ C_8H_6O_4\ \text{خالص}}{1molC_8H_6O_4} \times \frac{100g}{75g}$$

$$\simeq 4/43gC_8H_6O_4$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}(g)}{\text{مقدار نظری}(g)} \times 100 \Rightarrow 90 = \frac{x}{4/43} \times 100$$

$$\Rightarrow x \simeq 3/99g$$

**روش دوم:**

$$\frac{\underset{\text{ماهٔ آلی}}{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ماده}}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\underset{KMnO_4}{\text{بازده} \times \text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}}{\text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{0/2 \times 0/4 \times \frac{90}{100}}{4} = \frac{\text{جرم کل} \times \frac{75}{100}}{166 \times 1} \Rightarrow \text{جرم کل} \simeq 3/99g$$

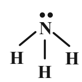
(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

---

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

**ابتدا معادله‌های واکنش‌های داده شده را به صورت موازنه شده می‌نویسیم:**

$$I)\ N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$$



$$II)\ 4NH_3(g) + 5O_2(g) \rightarrow 4NO(l) + 6H_2O(l)$$

**ابتدا برای قسمت اول مقدار مول آمونیاک تولیدی را به دست می‌آوریم؛ از آنجا که در هر مولکول آمونیاک، ۳ پیوند اشتراکی بین $H$ و $N$ وجود دارد، می‌توان نوشت:**

$$?\ N-H = 1120g\ N_2 \times \frac{1mol\ N_2}{28g\ N_2}$$

$$\times \frac{2mol\ NH_3}{1mol\ N_2} \times \frac{3mol\ N-H}{1mol\ NH_3}$$

$$\times \frac{6/02\times10^{23}\ N-H}{1mol\ N-H} \times \frac{75}{100} = 1/0836\times10^{26}\ N-H$$

**اگر فراورده‌ها در شرایط $STP$ باشند (دمای $0^\circ C$ و فشار $1atm$) آب به صورت مایع از گازها جدا می‌شود.**

$$1120g\ N_2 \times \frac{1mol\ N_2}{28g\ N_2} \times \frac{2mol\ NH_3}{1mol\ N_2} \times \frac{4mol\ NO}{4mol\ NH_3}$$

$$\times \frac{22/4L\ NO}{1mol\ NO} \times \frac{75}{100} = 1344L\ NO$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)