دفترچه پاسخ

آزمون ۷ مهر ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی پایه و حسابان ۲	امیرحسین ابومحبوب-محمدرضا توجه-عادل حسینی-طاهر دادستانی-میلاد سجادی‌لاریجانی-حبیب شفیعی-علی شهرابی-رضا طاری حمید علیزاده-مرضیه گودرزی-جهانبخش نیکنام-بنیامین یعقوبی
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-جواد حاتمی-فرزانه خاکپاش-امیرهوشنگ خمسه-کیوان دارابی-سوگند روشنی محمد صحت‌کار-رضا عباسی‌اصل-فرشاد فرامرزی-محمدابراهیم گیتی‌زاده-سینا محمدپور-محمد هجری
	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-رضا پورحسینی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-کیوان دارابی-سوگند روشنی-علی سعیدی‌زاد فرشاد فرامرزی-احمدرضا فلاح-نیلوفر مهدوی-محمد هجری
	فیزیک	مهران اسماعیلی-زهره آقامحمدی-مهدی براتی-امیرحسین برادران-لاله بهادری-علیرضا جباری-امیرعلی حاتم‌خانی-معصومه شریعت‌ناصری مریم شیخ‌ممو-شیلا شیرزادی-سیاوش فارسی-مصطفی کیانی-مهدی میراب‌زاده-امیراحمد میرسعید-سیده ملیحه میرصالحی-مجتبی نکوئیان
	شیمی	هدی بهاری‌پور-امیر حاتمیان-ارژنگ خانلری-حمید ذبحی-امید رضوانی-روزبه رضوانی-امیرحسین طیبی‌سودکلایی-رسول عابدینی‌زواره محمد عظیمیان‌زواره-روح اله علیزاده-حسین ناصری‌ثانی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب سوگند روشنی	مصطفی کیانی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	سعید خان‌بابایی مهدی ملارمضانی	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی حمید زرین‌کفش	بهنام قازانچایی محمدحسن محمدزاده مقدم امیرحسین مسلمی
بازبینی نهایی (رتبه برتر)	بنیامین یعقوبی	کیارش صانعی	کیارش صانعی	ماهان زواری	ماهان زواری
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	محمد ساکی	ایمان حسین‌نژاد
مستند سازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳ ۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۴»** *(بنیامین یعقوبی)*

سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$
$$\frac{۳}{۳} = \frac{m-۲}{m-۲} = \frac{m+۱}{m+۱}$$

پس به ازای تمامی مقادیر m برقرار است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

بدیهی است که a و $\sqrt{a}$ مثبت‌اند، پس این سه عدد می‌توانند به حالت‌های a , $\sqrt{a}$, ۰ یا ۰ , $\sqrt{a}$, a تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. برای هر کدام داریم:

$$I)\ ۰ , \sqrt{a} , a \Rightarrow ۰ + a = ۲\sqrt{a} \Rightarrow a - ۲\sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $a = ۰$ دنبالهٔ ثابت تولید می‌شود.

$$II)\ ۰ , a , \sqrt{a} \Rightarrow ۰ + \sqrt{a} = ۲a \Rightarrow ۲a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(۲\sqrt{a}-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ \sqrt{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

در نهایت مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $۰ + ۴ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۷}{۴}$ است.

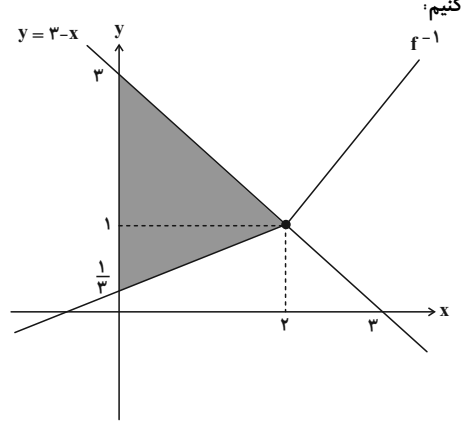
(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۴ و ۱۹ و ۲۰)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳x-۱ & ; \quad x < ۱ , y < ۲ \\ \frac{x+۳}{۲} & ; \quad x \geq ۱ , y \geq ۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{x+۱}{۳} & ; \quad x < ۲ \\ ۲x-۳ & ; \quad x \geq ۲ \end{cases}$$

نمودار تابع $f^{-۱}$ را به همراه خط $y = -x + ۳$، در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



مساحت قسمت سایه خورده در شکل ستون قبل، سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(۳ - \frac{۱}{۳})(۲) = \frac{۸}{۳}$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

دامنه‌های دو تابع f و g به ترتیب $D_f = [-۲ , ۲]$ و $D_g = [-۳ , +\infty)$ است و دامنهٔ تابع fog را از رابطهٔ زیر حساب می‌کنیم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

پس داریم:

$$D_{fog} = \{x \geq -۳ \mid -۲ \leq -\sqrt{x+۳} \leq ۲\}$$
$$= \{x \geq -۳ \mid \sqrt{x+۳} \leq ۲\} = \{x \geq -۳ \mid x \leq ۱\}$$
$$\Rightarrow D_{fog} = [-۳ , ۱]$$

این بازه شامل ۵ عدد صحیح است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا توجه)*

می‌دانیم اگر جرم یک مادهٔ رادیواکتیو $m_۰$ و نیم‌عمر آن T باشد، جرم مادهٔ باقی‌مانده (m) پس از طی شدن زمان t از رابطهٔ $m(t) = \frac{m_۰}{۲^{\frac{t}{T}}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m(t) = m_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m(۶۰) = \frac{m_۰}{۲^{\frac{۶۰}{۱۰}}} = \frac{m_۰}{۶۴}$$

جرم مادهٔ باقی‌مانده $\frac{۱}{۶۴}$ جرم مادهٔ اولیه است، یعنی جرم ماده‌ای که به انرژی تبدیل شده است، $\frac{۶۳}{۶۴}$ جرم ماده اولیه است:

$$\Rightarrow m_{\text{انرژی}} = m_۰ - \frac{m_۰}{۶۴} = \frac{۶۳}{۶۴} m_۰ \simeq ۰/۹۸ m_۰$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحهٔ ۷۶)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\log(۲^x - ۱) + \log ۱۰۰۰ = \log ۸^x + \log ۳۲$$
$$\Rightarrow \log ۱۰۰۰(۲^x - ۱) = \log(۳۲ \times ۸^x)$$
$$\Rightarrow ۱۰۰۰(۲^x - ۱) = ۳۲ \times ۸^x \xrightarrow{\times ۸} ۱۲۵(۲^x - ۱) = ۴ \times ۸^x = ۴(۲^x)^۳$$

حال با تغییر متغیر $t = ۲^x$ داریم:

$$۱۲۵(t-۱) = ۴t^۳ \Rightarrow ۴t^۳ - ۱۲۵t + ۱۲۵ = ۰$$

اگر معادله را به صورت $\frac{t-۱}{t^۳} = \frac{۴}{۵^۳}$ بنویسیم، می‌بینیم که $t = ۵$ جواب معادلهٔ بالا است. پس آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۴t^۳-۱۲۵t+۱۲۵=(t-۵)(۴t^۲+۲۰t-۲۵)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۵=۲^{x_۱}\Rightarrow x_۱=\log_۲^۵\\ t_۲=\dfrac{-۲۰+۲۰\sqrt{۲}}{۸}=۲^{x_۲}\Rightarrow x_۲=\log_۲\dfrac{۵}{۲}(\sqrt{۲}-۱)\end{cases}$$

با توجه به صعودی بودن تابع $y=\log_۲ x$ ، جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $x_۱=\log_۲ ۵$ است.

$$\Rightarrow ۲<\log_۲ ۵<۳\Rightarrow[\log_۲ ۵]=۲$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(مرضیه کودرزی)*

$$\begin{cases}\sin ۲۰۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ\\ \cos ۲۹۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۷۰^\circ)=\cos ۷۰^\circ=\sin ۲۰^\circ\\ \sin ۱۶۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)=\sin ۲۰^\circ\\ \cos ۷۰^\circ=\sin ۲۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{-۲\sin ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ+۲\sin ۲۰^\circ}=-\frac{۱}{۳}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

$$۲\sin(x+\frac{۲\pi}{۷})=\sin(۲x+\frac{\pi}{۱۴})=k$$

با توجه به این‌که $۲x+\frac{۴\pi}{۷}$ یا همان $۲x+\frac{۸\pi}{۱۴}$ با $۲x+\frac{\pi}{۱۴}$، $\frac{۷\pi}{۱۴}$ یا همان $\frac{\pi}{۲}$ اختلاف دارند، می‌توانیم $\sin(۲x+\frac{\pi}{۱۴})$ را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\sin(۲x+\frac{\pi}{۱۴})=-\sin(-۲x-\frac{\pi}{۱۴})$$

$$=-\sin[\frac{\pi}{۲}-(۲x+\frac{۴\pi}{۷})]=-\cos ۲(x+\frac{۲\pi}{۷})$$

$$=-(۱-۲\sin^۲(x+\frac{۲\pi}{۷}))$$

$\sin(x+\frac{۲\pi}{۷})$ را $\frac{k}{۲}$ گرفته‌ایم، پس باید معادلهٔ $۲(\frac{k}{۲})^۲-۱=k$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow\frac{k^۲}{۲}-۱=k\Rightarrow k^۲-۲k-۲=۰$$

$$\xrightarrow{-۱<k<۱}k=۱-\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

با توجه به مقادیر حاصل حد در گزینه‌ها و هم چنین اینکه مقدار عبارت مخرج کسر موردنظر به ازای $x=۱$ صفر است، نتیجه می‌گیریم که حد مورد نظر، مبهمِ $\frac{۰}{۰}$ است. یعنی مقدار عبارت صورت نیز به ازای $x=۱$ باید صفر باشد.

$$\Rightarrow\sqrt{f(۱)}-۲=۰\Rightarrow f(۱)=۴\Rightarrow(۱,۴)\in f$$

پس تابع خطی f از نقاط $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ می‌گذرد.

$$\text{شیب خط}: m=\frac{۴-۲}{۱-(-۱)}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow y-۲=۱(x+۱)\Rightarrow f(x)=x+۳$$

حال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}$$

با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت صورت داریم:

$$=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}\right)\left(\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\left(x^۲-۱\right)\left(\sqrt{x+۳}+۲\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)\left(\sqrt{x+۳}+۲\right)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)\left(\sqrt{x+۳}+۲\right)}=\frac{۱}{۸}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تابع f در عدد صحیح $x=n$ حد دارد (که n برابر k است.)، پس باید حدود چپ و راست تابع در $x=n$ برابر باشند:

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to n^-}f(x)=۲(n)(n-۱)-k^۲(-n)$$

$$=۲n^۲+(k^۲-۲)n$$

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to n^+}f(x)=۲n(n)-k^۲(-n-۱)$$

$$=۲n^۲+k^۲n+k^۲$$

با مساوی قرار دادن دو مقدار بالا داریم:

$$۲n^۲+(k^۲-۲)n=۲n^۲+k^۲n+k^۲\Rightarrow k^۲=-۲n$$

حال $n=k$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$k^۲=-۲k\Rightarrow k^۲+۲k=k(k+۲)=۰$$

$$\Rightarrow k=۰\ ,\ k=-۲$$

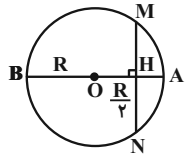
مجموع مقادیر برابر ۲- است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹)

هندسه ۲

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(خرزانه خاکپاش)*

بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه در دایره، قطر دایره و کوتاه‌ترین وتر گذرنده از هر نقطه، وتری است که در آن نقطه بر قطر دایره عمود است.



از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین با فرض $MH = NH = x$ و طبق روابط طولی وترهای متقاطع در دایره داریم:

$$MH \times NH = AH \times BH \Rightarrow x \times x = \frac{R}{۲} \times \frac{۳R}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}R}{۲R} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۸)

۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

اگر R و R' شعاع‌های دو دایره و d طول خط المرکزین آنها باشد، آنگاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲ = \sqrt{d^۲ - (۳ - ۸)^۲} \Rightarrow d^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow d = ۱۳$$

چون $d > R + R'$، پس دو دایره متخارج هستند و در نتیجه داریم:

$$\text{بیشترین فاصلهٔ دو دایره} = d + R + R' = ۱۳ + ۳ + ۸ = ۲۴$$

$$\text{کمترین فاصلهٔ دو دایره} = d - (R + R') = ۱۳ - (۳ + ۸) = ۲$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر $\frac{۲۴}{۲} = ۱۲$ است.

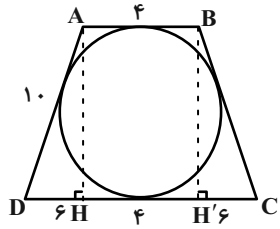
(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(خرزانه خاکپاش)*

در یک چهارضلعی محیطی، مجموع طول‌های هر دو ضلع مقابل برابر مجموع طول‌های دو ضلع مقابل دیگر است، بنابراین داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

$$\xrightarrow{AD=BC} ۴ + ۱۶ = ۲AD \Rightarrow AD = ۱۰$$



مطابق شکل اگر از نقاط A و B، عمودهای AH و BH' را بر ضلع CD رسم کنیم، آنگاه:

$$DH = CH' = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۱۶ - ۴}{۲} = ۶$$

$$\overset{\Delta}{AHD} : AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = AH^۲ + ۶^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times ۸(۴ + ۱۶) = ۸۰$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

روش اول:

اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۶ باشند، آنگاه داریم:

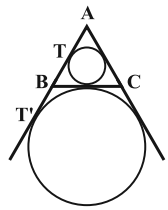
$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۳۶ = ۹\sqrt{۳}$$

$$P = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۶) = ۹$$

شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی این مثلث از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۹} = \sqrt{۳}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۹ - ۶} = ۳\sqrt{۳}$$



مطابق شکل دایره‌های محاطی داخلی و خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مماس خارج هستند، بنابراین طول مماس مشترک خارجی آنها برابر است با:

$$TT' = ۲\sqrt{r \times r_a} = ۲\sqrt{\sqrt{۳} \times ۳\sqrt{۳}} = ۲ \times ۳ = ۶$$

روش دوم:

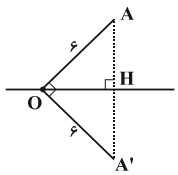
$$AT' = P = ۹ \ , \ AT = P - a = ۹ - ۶ = ۳$$

$$TT' = AT' - AT = ۹ - ۳ = ۶$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرهوشنگ خمسه)*

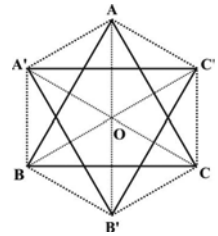
واضح است که زاویهٔ AOH برابر ۴۵° است، در نتیجه زاویهٔ AOA' برابر ۹۰° خواهد بود. همچنین بازتاب تبدیلی طولپا است، بنابراین $OA' = OA = ۶$ است و در نتیجه داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{OAA'}} = \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(رضا عباسی‌اصل)*



فرض کنیم O نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه‌ها برابر یکدیگرند، پس $\frac{۲}{۳}$ طول آنها نیز با هم برابر است. از طرفی دوران تبدیلی طولپا است، بنابراین داریم:

$$OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$$

$$\widehat{AOA'} = \widehat{A'OB} = \widehat{BOB'} = \widehat{B'OC} = \widehat{COC'} = \widehat{C'OA} = ۶۰^\circ$$

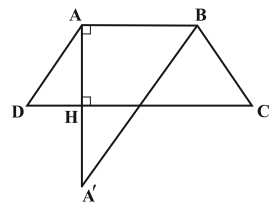
پس شش ضلعی $AA'BB'CC'$ منتظم است و مثلث AOA' متساوی‌الاضلاع است، چون زاویهٔ AOA'، ۶۰ درجه بوده و دو ضلع OA و OA' برابرند، پس $AA' = AO$ می‌باشد. از طرفی طول AO، $\frac{۲}{۳}$ طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. پس داریم:

$$AO = \frac{۲}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶\sqrt{۳}\right) = ۶$$

$$AA' = AO = ۶ \Rightarrow \text{محیط شش‌ضلعی} = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



برای پیدا کردن کمترین مقدار $MA + MB$ به گونه‌ای که M روی قاعدهٔ CD باشد، کافی است بازتاب نقطهٔ A را نسبت به ضلع CD یافته و آن را A' بنامیم و سپس مقدار $A'B$ را به‌دست آوریم (این مقدار دقیقاً برابر با کمترین مقدار $MA + MB$ است.)

با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH(AB + CD) \Rightarrow ۳۹ = \frac{۱}{۲}AH(۵ + ۸) \Rightarrow AH = ۶$$

$$\Rightarrow AA' = ۱۲$$

$$\overset{\Delta}{A'AB} : A'B^۲ = AA'^۲ + AB^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \Rightarrow A'B = ۱۳$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۳)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(جواد حاتمی)*

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{B} + \hat{C}) = \cos(۱۸۰^\circ - \hat{A}) = -\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۱}{۲}$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos\hat{A} = ۳۶ + ۱۶ - ۲ \times ۶ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۲۸$$

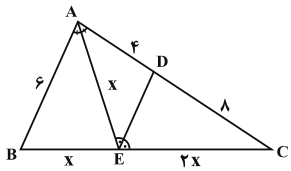
طبق قضیهٔ میانه‌ها در این مثلث داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۳۶ + ۱۶ = ۲m_a^۲ + ۱۴$$

$$\Rightarrow ۲m_a^۲ = ۳۸ \Rightarrow m_a^۲ = ۱۹ \Rightarrow m_a = \sqrt{۱۹}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*



مطابق شکل اگر $AE = x$ فرض شود، آنگاه بنا به قضیهٔ نیمساز زاویه‌های داخلی داریم:

$$\overset{\Delta}{AEC}: \text{نیمساز } DE \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{x}{EC} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow EC = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \text{نیمساز } AE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۲} = \frac{BE}{۲x} \Rightarrow BE = x$$

حال با توجه به رابطهٔ طول نیمساز زاویهٔ داخلی داریم:

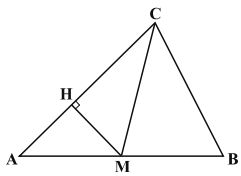
$$AE^۲ = AB.AC - BE.EC \Rightarrow x^۲ = ۶ \times ۱۲ - x \times ۲x \Rightarrow ۳x^۲ = ۷۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۲۴ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۶}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*

فرض کنیم $AB = ۶$، $AC = ۷$ و $BC = ۵$ باشد، با استفاده از قضیهٔ هرون برای مثلث ABC داریم:



$$P = \frac{۵ + ۶ + ۷}{۲} = ۹$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{۹ \times (۹-۵)(۹-۷)(۹-۶)} = ۶\sqrt{۶}$$

میانهٔ CM مساحت مثلث ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند:

$$S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۱}{۲}MH.AC \Rightarrow ۳\sqrt{۶} = \frac{۱}{۲} \times MH \times ۷ \Rightarrow MH = \frac{۶\sqrt{۶}}{۷}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

آمار و احتمال

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$\big[(p\Rightarrow q)\wedge q\big]\vee p\equiv\underbrace{\big[(\sim p\vee q)\wedge q\big]}_{\text{قانون جذب}}\vee p\equiv q\vee p\equiv p\vee q$$

$$\xrightarrow{\text{نقیض}}\sim p\wedge\sim q$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

گزینهٔ «۱»: در معادلهٔ درجهٔ دوم $-2x^2+2x-7=0$، $\Delta=-52<0$ و ضریب x^2 منفی است، پس عبارت موردنظر همواره منفی است.

گزینهٔ «۲»:

$$\left.\begin{matrix}u>0\Rightarrow u+\frac{1}{u}\geq 2\\ u<0\Rightarrow u+\frac{1}{u}\leq -2\end{matrix}\right\}\xrightarrow{u\neq 0}\left|u+\frac{1}{u}\right|\geq 2$$

$$\xrightarrow{u=3x}\left|3x+\frac{1}{3x}\right|\geq 2$$

گزینهٔ «۳»: در معادلهٔ درجهٔ دوم $-5x^2-6x+7=0$، $\Delta=176>0$ است، پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز می‌باشد. چون ضریب x^2 منفی است، پس عبارت موردنظر به ازای مقادیر بزرگتر از هر دو ریشه و مقادیر کوچکتر از هر دو ریشه منفی است.

گزینهٔ «۴»: هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که مجموع آن با تمام اعداد صحیح برابر صفر شود، پس این گزارهٔ سوری نادرست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(خرزانه شاکباش)*

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم: $[(A\cup B')-B]\cup[(B-A)\cup A']$

$$=[((A\cup B')\cap B']\cup[(B\cap A')\cup A']=B'\cup A'$$

حال طبق قانون دمورگان داریم: $(B'\cup A')'=B\cap A=A\cap B$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، آنگاه رابطهٔ $A\times B=B\times A$ تنها در صورتی برقرار است که $A=B$ باشد. همچنین دو مجموعهٔ A و B در صورتی برابر یکدیگرند که اعضای آنها نظیر به نظیر برابر باشند. با توجه به مجموعه‌های A و B، دو حالت زیر امکان‌پذیر است.

حالت اول:
$$\begin{cases}x-2=5\Rightarrow x=7\\ 2y=4\Rightarrow y=2\\ z-1=-2\Rightarrow z=-1\end{cases}\Rightarrow x+y+z=8$$

حالت دوم:
$$\begin{cases}x-2=5\Rightarrow x=7\\ 2y=-2\Rightarrow y=-1\\ z-1=4\Rightarrow z=5\end{cases}\Rightarrow x+y+z=11$$

بنابراین بیشترین مقدار $x+y+z$، برابر ۱۱ است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(رضا پورحسینی)*

فرض کنید پیشامدهای A و B به‌ترتیب به صورت «عدد تاس دوم بزرگ‌تر باشد» و «حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود» تعریف شوند. در این‌صورت داریم:

$$B=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$$

$$A\cap B=\{(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\}$$

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{5}{11}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

$$\left.\begin{matrix}P(1)=P(3)=P(5)=x\\ P(2)=P(4)=P(6)=2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow P(\{2,4,6\})=2P(\{1,3,5\})$$

بنابراین احتمال آمدن اعداد زوج و فرد در پرتاب این تاس به‌ترتیب $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$ است.

اگر تاس زوج بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. در این‌صورت فضای نمونه دارای ۴ حالت بوده و پیشامد آنکه تعداد رو بیشتر باشد، به‌صورت $\{(ر,ر)\}$ و احتمال آن برابر $\frac{۱}{۴}$ است. اگر تاس فرد بیاید، سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. در این‌صورت فضای نمونه دارای ۸ حالت بوده و پیشامد آنکه تعداد رو بیشتر باشد، به‌صورت $\{(ر،ر،پ)$ و $(ر،پ،ر)$ و $(پ،ر،ر)$ و $(ر،ر،ر)\}$ و احتمال آن برابر $\frac{۴}{۸}$ است. اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ و ۵۸ تا ۶۰)

۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمد هجری)*

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، در نتیجه پیشامدهای A و B و پیشامدهای A' و B' نیز مستقل از هم هستند. در نتیجه داریم:

$$P(B\mid A)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(B')=\frac{۲}{۳}$$

$$P(A-B)=P(A\cap B')=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)P(B')=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{۳}P(A)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A')=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A'\mid B')=P(A')=\frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیدرضا فلاح)*

اگر میانگین و انحراف‌معیار داده‌های $x_۱,x_۲,...,x_{۱۰}$ به‌ترتیب برابر $\bar{x}$ و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های $ax_۱+b,ax_۲+b,...,ax_{۱۰}+b$ با فرض $a>۰$ به‌ترتیب برابر $a\bar{x}+b$ و $a\sigma$ است. بنابراین داریم:

$$CV_۱=۵CV_۲\Rightarrow\frac{\sigma}{\bar{x}-۴}=\frac{۵\sigma}{\bar{x}+۴}\Rightarrow\bar{x}+۴=۵\bar{x}-۲۰$$

$$\Rightarrow ۴\bar{x}=۲۴\Rightarrow\bar{x}=۶$$

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+...+x_{۱۰}}{۱۰}=۶\Rightarrow x_۱+x_۲+...+x_{۱۰}=۶۰$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۵ و ۹۳ تا ۹۷)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

ابتدا داده‌ها را مرتب کرده و میانه، چارک اول و چارک سوم داده‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\underset{Q_۱}{\downarrow}\ ۱,۱,۶,۸,۸,\underset{Q_۲}{\downarrow}\ ۹,۱۲,۱۳,\underset{Q_۳}{\downarrow}\ ۱۵,۲۳,۲۵$$

بنابراین داده‌های $۸,۸,۹,۱۲,۱۳$ داخل جعبه قرار دارند و در نتیجه داریم:

$$\bar{x}=\frac{۸+۸+۹+۱۲+۱۳}{۵}=۱۰$$

$$\sigma^۲=\frac{(۸-۱۰)^۲+(۸-۱۰)^۲+(۹-۱۰)^۲+(۱۲-۱۰)^۲+(۱۳-۱۰)^۲}{۵}$$

$$=\frac{۴+۴+۱+۴+۹}{۵}=۴/۴$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۸ و ۹۹)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اختلاف بین شماره‌های اولین و چهارمین دانش‌آموز انتخاب شده، سه برابر تعداد اعضای هر طبقه است. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد اعضای هر طبقه}=\frac{۴۲-۶}{۳}=۱۲$$

$$\text{تعداد طبقات}=\frac{۲۴۰}{۱۲}=۲۰$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

فیزیک ۲

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(شیلا شیرزادی)*

ابتدا با استفاده از قانون کولن اندازهٔ هر یک از بارهای الکتریکی را می‌یابیم. دقت کنید، اگر یکای بار الکتریکی برحسب μC و یکای فاصله برحسب cm باشد، رابطهٔ $F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F = \frac{9\circ|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow{F=\circ/9N\ ,\ r=3\circ cm,\ |q_1|=|q_2|=q} \circ/9 = \frac{9\circ\times q^2}{9\circ\circ} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3\mu C$$

اکنون، اندازهٔ بار الکتریکی را پس از تغییر آن‌ها پیدا می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم بارها مثبت باشند.

$$q_1' = q - 2 \xrightarrow{q=3\mu C} q_1' = 3 - 2 = 1\mu C$$

$$q_2' = q + 2 = 3 + 2 \Rightarrow q_2' = 5\mu C$$

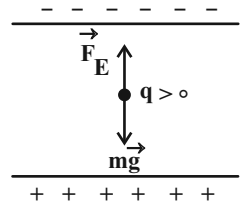
در آخر، نیروی بین دو بار q_1' و q_2' را می‌یابیم:

$$F' = \frac{9\circ|q_1'||q_2'|}{r^2} = \frac{9\circ\times1\times5}{9\circ\circ} = \circ/5N$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۶ و ۷)

۳۲- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

مطابق شکل زیر، برای ذرهٔ باردار در حالت تعادل می‌توان نوشت:



$$F_E = mg \quad (1) \quad ; \quad F_E = |q|E \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} |q|E = mg \qquad (I)$$

با اعمال تغییرات در اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن و فاصلهٔ صفحات خازن و با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{|\Delta V|}{d}$ داریم:

$$\frac{E'}{E} = \frac{|\Delta V'|}{|\Delta V|} \times \frac{d}{d'} \xrightarrow[d'=\frac{3d}{2}]{|\Delta V'|=2|\Delta V|}$$

$$\frac{E'}{E} = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \qquad (II)$$

با توجه به افزایش اندازهٔ میدان الکتریکی و در نتیجه افزایش اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار، می‌توان گفت که ذرهٔ باردار به سمت صفحهٔ بالایی حرکت می‌کند و طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_{E'} + W_{mg} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\xrightarrow{v_1=\circ} E'|q|d - mgd = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad (III)$$

$$\xrightarrow{(I)\text{ و }(II)\text{ در }(III)} \frac{4}{3}mgd - mgd = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2}{3}gd \xrightarrow[d=\circ/6m]{g=1\circ\frac{N}{kg}} v_2^2 = 4 \Rightarrow v_2 = 2\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۱، ۱۲، ۲۵ و ۲۶)

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرعلی حاتم‌خانی)*

ابتدا ظرفیت خازن را محاسبه می‌کنیم:

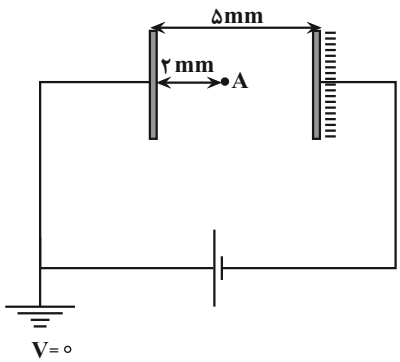
$$C = \kappa\varepsilon_\circ\frac{A}{d} \xrightarrow[d=5mm=5\times10^{-3}m]{\kappa=1,\ A=25\times10^{-4}m^2} C = \frac{1\times9\times10^{-12}\times25\times10^{-4}}{5\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow C = 45\times10^{-13}F$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ انرژی ذخیره شده در خازن، اختلاف پتانسیل بین صفحات آن را می‌یابیم:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow[C=45\times10^{-13}F]{U=36pJ=36\times10^{-12}J}$$

$$36\times10^{-12} = \frac{1}{2}\times45\times10^{-13}\times V^2 \Rightarrow V = 4V$$



در آخر با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{\Delta V}{d}$ و با توجه به ثابت بودن E، به‌صورت زیر V_A را پیدا می‌کنیم. دقت کنید، چون صفحهٔ مثبت خازن به زمین متصل است، پتانسیل آن صفر می‌باشد.

$$E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{\Delta V'}{d'}\xrightarrow[d=۵mm]{\Delta V=۴V,d'=۲mm}\frac{۴}{۵}=\frac{\Delta V'}{۲}\Rightarrow \Delta V'=۱/۶V$$

$$\Delta V'=V_{\text{مثبت}}-V_A\Rightarrow ۱/۶=۰-V_A\Rightarrow V_A=-۱/۶V$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۳)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(مهدی براتی)*

ابتدا نسبت $\frac{R_B}{R_A}$ را می‌یابیم. با توجه به نمودار به ازای اختلاف پتانسیل یکسان V، جریان الکتریکی مقاومت A برابر $I_A=۲A$ و جریان الکتریکی مقاومت B برابر $I_B=۴A$ است. بنابراین، با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$V_A=V_B=V\Rightarrow R_AI_A=R_BI_B\Rightarrow R_A\times ۲=R_B\times ۴$$

$$\Rightarrow\frac{R_B}{R_A}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ و با توجه به این‌که $A=\pi\frac{D^۲}{۴}$ است، می‌توان نوشت:

$$R=\rho\frac{L}{A}=\rho\frac{L}{\pi\frac{D^۲}{۴}}\Rightarrow\frac{R_B}{R_A}=\frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{L_B}{L_A}\times(\frac{D_A}{D_B})^۲\xrightarrow[L_A=۴L_B]{\rho_B=\rho_A}$$

$$\frac{۱}{۲}=۱\times\frac{L_B}{۴L_B}\times(\frac{D_A}{D_B})^۲\Rightarrow(\frac{D_A}{D_B})^۲=۲\Rightarrow\frac{D_A}{D_B}=\sqrt{۲}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(لاله بهادری)*

ابتدا جریان الکتریکی مدار را می‌یابیم. در اینجا چون $\varepsilon_۲>\varepsilon_۱$ است، جریان مدار در جهت جریان باتری $\varepsilon_۱$ و پادساعتگرد می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\frac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{R_{eq}+r_۱+r_۲}\xrightarrow[R_{eq}=۰/۵+۰/۵=۱\Omega\ ,\ r_۱+r_۲=۲+۱=۳\Omega]{\varepsilon_۱=۱۲V\ ,\ \varepsilon_۲=۸V}$$

$$I=\frac{۱۲-۸}{۱+۳}=۱A$$

اکنون اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\varepsilon_۲$ را می‌یابیم. دقت کنید، چون جریان به پایانهٔ مثبت باتری $\varepsilon_۲$ وارد می‌شود، این باتری از مدار انرژی می‌گیرد. یعنی ضدمحرکه است.

$$V_۲=\varepsilon_۲+r_۲I\xrightarrow[r_۲=۱\Omega]{\varepsilon_۲=۸V}V_۲=۸+(۱\times۱)=۹V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی میراب‌زاده)*

وقتی کلید k باز باشد، مقاومت معادل دو مقاومت ۲Ω و ۶Ω اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد. در این حالت مقاومت معادل مدار برابر $R_{eq}=۳\Omega$ می‌شود. بنابراین، با محاسبهٔ جریان مدار، توان مقاومت R_{eq} را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[\varepsilon=۶V]{R_{eq}=۳\Omega,r=۱\Omega}I=\frac{۶}{۳+۱}=\frac{۳}{۲}A$$

$$P=R_{eq}I^۲=۳\times\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۴}W$$

وقتی کلید k بسته شود، هر سه مقاومت در مدار باقی می‌مانند و با هم موازی‌اند. در این حالت داریم:

$$\frac{۱}{R'_{eq}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{۳+۱+۲}{۶}\Rightarrow R'_{eq}=۱\Omega$$

$$I'=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}=\frac{۶}{۱+۱}=۳A$$

$$P'=R'_{eq}I'^۲=۱\times۹=۹W$$

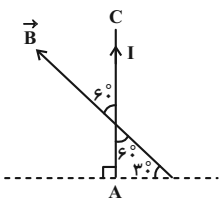
در آخر، نسبت توان در حالت دوم به توان در حالت اول برابر است با:

$$\frac{P'}{P}=\frac{۹}{\frac{۲۷}{۴}}=\frac{۴\times۹}{۲۷}=\frac{۴}{۳}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۷۹)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به شکل زیر، زاویهٔ بین جهت جریان سیم و میدان مغناطیسی برابر ۶۰ درجه است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

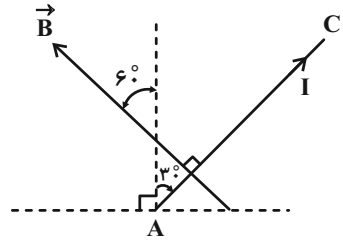


$$F=I\ell B\sin\theta\xrightarrow[B=۴۰۰G=۴۰۰\times۱۰^{-۴}T\ ,\ I=۲A]{\theta=۶۰^\circ\ ,\ \ell=۱۰cm=۰/۱m}$$

$$F = ۲\times ۰/۱\times ۴۰۰\times ۱۰^{-۴}\times \sin ۶۰^\circ \xrightarrow{\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$F = ۲\times ۰/۰۰۴\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰/۰۰۴\sqrt{۳}\,N$$

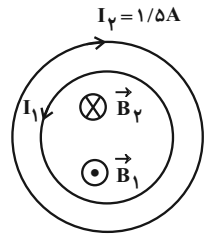
برای آن‌که نیروی وارد بر سیم AC بیشینه گردد، باید راستای سیم بر خطوط میدان مغناطیسی عمود باشد. بنابراین، مطابق شکل زیر، باید سیم را به اندازهٔ ۳۰ درجه در جهت ساعتگرد بچرخانیم.



(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی ناشی از حلقه با جریان $I_۲$ در مرکز حلقه‌ها درونسو است. بنابراین، میدان مغناطیسی حلقه با جریان $I_۱$ باید برونسو و هم‌اندازهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}_۲$ باشد تا میدان خالص صفر شود. بنابراین باید جریان $I_۱$ پادساعتگرد باشد و اندازهٔ آن برابر است با:



$$B_۱ = B_۲ \Rightarrow \frac{\mu_۰ N_۱ I_۱}{R_۱} = \frac{\mu_۰ N_۲ I_۲}{R_۲}$$

$$\xrightarrow{N_۱=N_۲=۱} \frac{I_۱}{R_۱} = \frac{I_۲}{R_۲} \xrightarrow[R_۲=۶۰cm]{R_۱=۴۰cm}$$

$$\frac{I_۱}{۴۰} = \frac{۱/۵}{۶۰} \Rightarrow I_۱ = ۱A$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیاوش فارسی)*

ابتدا شار مغناطیسی عبوری از حلقه را قبل از خروج از میدان مغناطیسی می‌یابیم، دقت کنید چون پیچه بر میدان مغناطیسی عمود است، $\theta = ۰$ می‌باشد.

$$\Phi_۱ = AB_۱\cos\theta \xrightarrow[B_۱=۴۰\times ۱۰^{-۴}T]{A=۱۰\times ۱۰^{-۴}m^۲\ ,\ \theta=۰}$$

$$\Phi_۱ = ۱۰۰\times ۱۰^{-۴}\times ۴۰۰\times ۱۰^{-۴}\times \underbrace{\cos(۰^\circ)}_{۱}$$

$$\Rightarrow \Phi_۱ = ۴\times ۱۰^{-۴}\,Wb$$

در حالت دوم که پیچه از میدان مغناطیسی خارج می‌شود، $B_۲ = ۰$ است، لذا، $\Phi_۲ = AB_۲\cos\theta = ۰$ خواهد شد. بنابراین، در این حالت، نیروی محرکهٔ القایی را پیدا می‌کنیم:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۰/۲s]{N=۵۰} \varepsilon_{av} = -۵۰\times \frac{۰-۴\times ۱۰^{-۴}}{۰/۲} = ۰/۱V$$

در آخر جریان القایی در پیچه را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon_{av}}{R} \xrightarrow{R=۵\Omega} I = \frac{۰/۱}{۵} = ۰/۰۲A$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶ و جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا با قرار دادن $t = \frac{۱}{۱۲۰}s$ و $I = ۲A$ در معادلهٔ جریان متناوب، جریان بیشینه در سیملوله را محاسبه می‌کنیم:

$$I = I_m \sin ۱۰۰\pi t \Rightarrow ۲ = I_m \sin ۱۰۰\pi\times \frac{۱}{۱۲۰}$$

$$\Rightarrow ۲ = I_m \sin\frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}} ۲ = I_m\times\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow I_m = ۴A$$

اکنون جریان عبوری از سیملوله را در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۳۰۰}s$ می‌یابیم:

$$I = ۴\sin ۱۰۰\pi t \xrightarrow{t=\frac{۱}{۳۰۰}s} I = ۴\sin ۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۳۰۰} = ۴\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\xrightarrow{\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}} I = ۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}A$$

در آخر انرژی ذخیره شده در سیملوله را در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۳۰۰}s$، می‌یابیم:

$$U = \frac{۱}{۲}LI^۲ \xrightarrow{L=\text{ثابت}} \frac{U}{U_m} = \left(\frac{I}{I_m}\right)^۲$$

$$\xrightarrow[I_m=۴A\ ,\ I=۲\sqrt{۳}A]{U_m=۰/۱۶J} \frac{U}{۰/۱۶} = \left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{U}{۰/۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow U = ۰/۱۲J$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

شیمی ۲

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله علیزاده)*

همهٔ عبارت‌ها نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر چه فلز فعال‌تر باشد، میل بیشتری به ایجاد ترکیب دارد و ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش است. هر دو فلز سدیم و پتاسیم فعالیت شیمیایی و واکنش‌پذیری قابل توجهی دارند؛ بنابراین ترکیب این فلزها پایدارتر از خود فلز است؛ از طرفی چون پتاسیم فعالیت شیمیایی بیشتری نسبت به سدیم دارد، پایداری ترکیب‌هایش بیشتر از ترکیب‌های سدیم است.

ب) در فولاد مبارکهٔ اصفهان برای استخراج آهن از واکنش آهن (III) اکسید با کربن استفاده می‌شود:

$$2Fe_2O_3(s)+3C(s)\rightarrow 4Fe(s)+3CO_2(g)$$

پ) مقدار عملی، مقدار فراورده‌ای است که در عمل به دست می‌آید؛ در حالی که کمیتی که کارایی یک واکنش را نشان می‌دهد، بازده درصدی واکنش است.

ت) در واکنش ترمیت که در صنعت جوشکاری استفاده می‌شود، فعالیت شیمیایی و واکنش‌پذیری فلز واسطهٔ حاضر در واکنش (Fe) کمتر از فعالیت شیمیایی واکنش دهندهٔ فلزی (Al) است:

$$2Al(s)+Fe_2O_3(s)\rightarrow Al_2O_3(s)+2Fe(l)$$

توجه: پایداری با واکنش‌پذیری رابطهٔ عکس دارد؛ بنابراین پایداری Fe بیشتر از Al است.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

واکنش‌ها را نوشته و پس از موازنه، ضریب مادهٔ مشترک را در دو واکنش برابر می‌کنیم. در این مسئله، دو واکنش انجام شده که مقدار یک فراورده مشترک در دو واکنش برابر است، در نتیجه از این ماده (کربن دی‌اکسید) به عنوان پل ارتباطی دو واکنش استفاده می‌کنیم.

واکنش استخراج آهن از هماتیت به وسیلهٔ کربن:

$$4Fe_2O_3(s)+6C(s)\rightarrow 8Fe(s)+\boxed{6CO_2(g)}$$

تخمیر بی‌هوازی گلوکز:

$$3C_6H_{12}O_6(aq)\rightarrow 6C_2H_5OH(aq)+\boxed{6CO_2(g)}$$

$$?\,m^3\ \text{محلول}:2\,ton\ Fe_2O_3$$

$$\times\frac{10^6\,g}{1\,ton}\times\frac{70}{100}\times\frac{1\,mol\ Fe_2O_3}{160\,g\ Fe_2O_3}$$

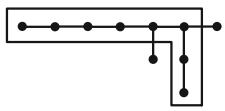
$$\times\frac{6\,mol\ CO_2}{4\,mol\ Fe_2O_3}\times\frac{64}{100}\times\frac{6\,mol\ C_2H_5OH}{6\,mol\ CO_2}$$

$$\times\frac{1\,L\ \text{محلول}}{4/2\,mol\ C_2H_5OH}\times\frac{1\,m^3}{1000\,L}=2\,m^3\ \text{محلول}$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

نام درست آن ۳، ۴- دی‌متیل اوکتان است.



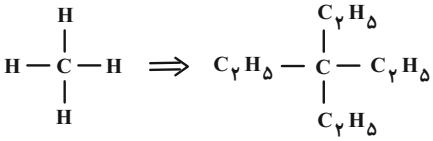
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گاز موجود در فندک بوتان (C_4H_{10}) است.

$$C_4H_{10}=58\,g.mol^{-1}\ \text{و}\ C_2H_6O=46\,g.mol^{-1}$$

بنابراین اختلاف جرم مولی آن‌ها برابر با ۱۲ گرم بر مول است.

۲) ۳، ۳- دی اتیل پنتان



۳) فرمول‌های تقریبی گریس و وازلین به ترتیب $C_{18}H_{38}$ و $C_{25}H_{52}$ می‌باشد؛ بنابراین تفاوت شمار اتم‌های کربن در فرمول تقریبی آن‌ها برابر با ۷ است.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) با توجه به جدول صفحهٔ ۵۸ کتاب درسی شیمی یازدهم، مقایسهٔ درست ظرفیت گرمایی ویژهٔ این سه فلز به صورت « $Al > Ag > Au$ » است.

نکته: ظرفیت گرمایی مولی فلزات تقریباً ثابت است؛ بنابراین هر چه جرم مولی فلزی بیشتر باشد، ظرفیت گرمایی ویژهٔ آن کمتر خواهد بود.

۲) ظرفیت گرمایی مولی از حاصل‌ضرب ظرفیت گرمایی ویژه در جرم مولی به دست می‌آید، پس ممکن است ظرفیت گرمایی ویژهٔ ماده‌ای کمتر باشد ولی به دلیل برخورداری از جرم مولی بیشتر، ظرفیت گرمایی مولی بزرگ‌تری داشته باشد.

۳) جرم مولی گاز هیدروژن (H_2) دو برابر جرم مولی اتم هیدروژن است؛ به همین دلیل ظرفیت گرمایی یک مول هیدروژن دو برابر گرمای ویژه آن است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها، آلکن‌ها، آلکین‌ها و ... اندازهٔ گرمای سوختن افزایش می‌یابد:

آلکین > الکل > آلکن > آلکان : $|\Delta H_{\text{سوختن}}|$

اتین > اتانول > اتن > اتان : $|\Delta H_{\text{سوختن}}|$

ساده‌ترین آلکین، اتین می‌باشد:

$$C_2H_2=26\,g.mol^{-1}$$

$$50\,kJ=1\,g\ C_2H_2\times\frac{1\,mol\ C_2H_2}{26\,g\ C_2H_2}\times\frac{?\,kJ}{1\,mol\ C_2H_2}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}=-1300\,kJ$$ (آنتالپی سوختن عددی منفی است.)

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(ارژنگ شاندی)*

$$\frac{۲}{۳}Fe_۳O_۴(s)+\frac{۲}{۳}CO(g)\rightarrow ۲FeO(s)+\frac{۲}{۳}CO_۲(g)$$

$$\Delta H=\frac{۲}{۳}a\ kJ$$

$$۲FeO(s)+۲CO(g)\rightarrow ۲Fe(s)+۲CO_۲(g)$$

$$\Delta H=-۲b\ kJ$$

$$Fe_۲O_۳(s)+\frac{۱}{۳}CO(s)\rightarrow \frac{۲}{۳}Fe_۳O_۴(s)+\frac{۱}{۲}CO_۲(g)$$

$$\Delta H=\frac{۱}{۳}c\ kJ$$

$$Fe_۲O_۳(s)+۳CO\rightarrow ۲Fe(s)+۳CO_۲(g)$$

$$\Delta H=\frac{۲}{۳}a-۲b+\frac{۱}{۳}c$$

چون در این واکنش ۲ مول آهن تولید شده است، پس برای تولید $\frac{۲}{۳}$ مول آهن داریم:

$$\frac{۱}{۳}\times(\frac{۲}{۳}a-۲b+\frac{۱}{۳}c)=\frac{۲a}{۹}-\frac{۲}{۳}b+\frac{c}{۹}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله علیزاده)*

معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$MnO_۲(s)+۴HCl(aq)\rightarrow MnCl_۲(aq)+Cl_۲(g)+۲H_۲O(l)$$

بنابراین عبارت‌های (الف) و (ث) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در معادلهٔ موازنه شده، ضریب HCl چهار برابر ضریب $Cl_۲$ است؛ بنابراین شیب نمودار مول- زمان و سرعت مصرف HCl، چهار برابر سرعت تولید $Cl_۲$ است.

ب) نمودارهای A و B مربوط به فراورده‌ها و نمودار C مربوط به یک واکنش‌دهنده است.

ضرایب استوکیومتری A، B و C به صورت زیر به دست می‌آید:

اندازهٔ تغییر مول مواد:
$$\begin{cases} A: ۰/۸-۰=۰/۸ \xrightarrow{+۰/۸} ۱ \\ B: ۱/۶-۰=۱/۶ \xrightarrow{+۰/۸} ۲ \\ C: ۴-۰/۸=۳/۲ \xrightarrow{+۰/۸} ۴ \end{cases}$$

بنابراین با توجه به معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش و ضرایب استوکیومتری متناظر با مواد A، B و C، می‌توانند به ترتیب $MnCl_۲$ (یا $Cl_۲$)، $H_۲O$ و HCl باشند.

پ) با گذشت زمان سرعت تولید، سرعت مصرف و سرعت واکنش کاهش می‌یابد؛ بنابراین سرعت تولید یا مصرف مواد در بازهٔ زمانی $\Delta t_۱$ بیشتر از $\Delta t_۲$ است.

ت) سرعت متوسط واکنش را با استفاده از سرعت یکی از مواد موجود در نمودار به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}_{(\text{واکنش})}=\frac{\bar{R}_A}{۱}=\frac{(۰/۸-۰)mol}{۲۰s}\times\frac{۶۰s}{۱min}=۲/۴mol.min^{-۱}$$

ث) می‌دانیم سرعت متوسط هر ماده تقسیم بر ضریب استوکیومتری آن برابر سرعت متوسط واکنش است:

$$\frac{-\Delta n(HCl)}{۴\Delta t}=\frac{\Delta n(Cl_۲)}{\Delta t}=\frac{\Delta n(H_۲O)}{۲\Delta t}\xrightarrow{\times ۴}$$
$$\frac{-\Delta n(HCl)}{\Delta t}=\frac{۴\Delta n(Cl_۲)}{\Delta t}=\frac{۲\Delta n(H_۲O)}{\Delta t}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ فرمول مولکولی این ترکیب $C_۲H_۴O_۲$ است که با فرمول مولکولی استیک اسید $(CH_۳COOH)$ یکسان است، پس با هم ایزومرند.

ب) نادرست؛

$$\left.\begin{matrix} CH_۳OH=۳۲g.mol^{-۱} \\ HCOOH=۴۶g.mol^{-۱} \end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{تفاوت جرم مولی}=۱۴g.mol^{-۱}$$

پ) نادرست؛ الکل سازندهٔ استر موجود در انگور، اتانول ($CH_۳CH_۲OH$) است.

ت) درست؛ از آبکافت آن متانول تولید می‌شود و متانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود. پس نمی‌توان از آن محلول سیرشده در آب تولید کرد.

(شیمی ۲- ترکیبی؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۶ و ۱۱۷)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(ارژنگ شاندی)*

فقط عبارت سوم درست است.

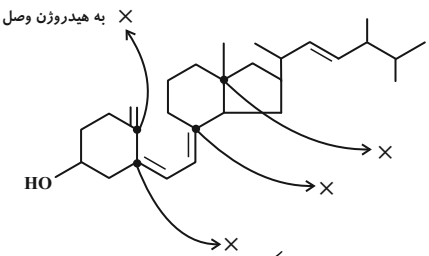
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: هر دو ترکیب ناقطبی و دارای گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ هستند.

عبارت دوم: در ساختار این مولکول، حلقهٔ بنزنی یافت نمی‌شود؛ بنابراین این ترکیب آروماتیک نیست.

عبارت سوم: فرمول مولکولی این ترکیب به صورت «$C_{۲۸}H_{۴۴}O$» است. همچنین از آنجایی که ویتامین D محلول در چربی است، پس مصرف زیاد آن باعث افزایش غلظت آن در بدن شده و برای بدن مضر است.

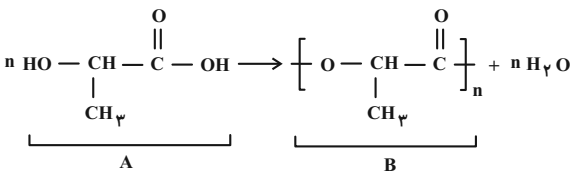
عبارت چهارم:



(شیمی ۲- ترکیبی؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰ ، ۹۴، ۱۱۱ و ۱۱۲)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زیبی)*

جرم مولی لاکتیک اسید $(C_۳H_۶O_۳)$ برابر ۹۰ گرم بر مول و جرم مولی پلی لاکتیک اسید $\left(+C_۳H_۴O_۲+_n\right)$ برابر $۷۲n$ گرم بر مول است.



$$?g\ A=۱۹۲g\ B\times\frac{۱mol\ B}{۷۲n\ g\ B}\times\frac{n\ mol\ A}{۱mol\ B}\times\frac{۹۰g\ A}{۱mol\ A}$$

$$=۲۴۰g\ A$$

$$d_A=\frac{m}{V}=\frac{۲۴۰}{۲۰۰}=۱/۲g.mL^{-۱}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۱۲ تا ۱۱۴ و ۱۱۹)

ریاضی ۱

۵۱- **گزینهٔ «۳»** *(بنیامین یعقوبی)*

دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{۱}{۳}, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, ۹$$

حال با توجه به جملهٔ عمومی داریم:

$$a_n = a_۱ \times q^{n-۱} \Rightarrow a_۷ = \frac{۱}{۳} \times q^۶ = ۹ \Rightarrow q = \sqrt{۳}$$

$$a_۴ = \frac{۱}{۳} q^۳ = \frac{۱}{۳} \times ۳\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

دقت کنید که تعداد جملات برابر ۷ است و چهارمین جمله، جملهٔ وسط است، پس تفاوتی نمی‌کند $\frac{۱}{۳}$ را جملهٔ اول بگیریم یا ۹.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۵۲- **گزینهٔ «۱»** *(طاهر دادستانی)*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^۲ = \frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab} = \frac{۶ab+۲ab}{۶ab-۲ab} = \frac{۸ab}{۴ab} = ۲$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(رضا طاری)*

معادلهٔ خطی که در نمودار رسم شده است، برابر $y = x + a$ است. این خط همان خط $y = bx + ۳$ است. در نتیجه داریم:

$$b = ۱ \ , \ a = ۳ \Rightarrow f(x) = x + ۳ \Rightarrow f(a+b) = f(۴) = ۷$$

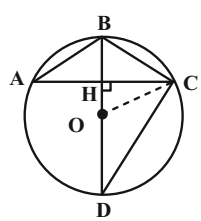
(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۰۳)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

مثلث AOC متساوی‌الاضلاع است. $A\hat{O}C = ۶۰^\circ$ و در نتیجه $B\hat{O}C = ۳۰^\circ$ است. در مثلث COH، $OC = R$ و $HC = \frac{R}{۲}$

$$OH = R\cos ۳۰^\circ = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$ است. پس HB برابر

$$HB = R - R\frac{\sqrt{۳}}{۲} = R(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$$ است.



حال نسبت مساحت دو مثلث را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD.CH}{\frac{۱}{۲}BH.AC} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲R)(\frac{۱}{۲}R)}{\frac{۱}{۲}(R(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}))(R)}$$

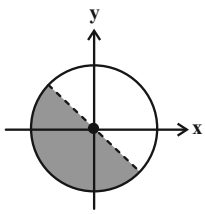
$$= \frac{۱}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{۲-\sqrt{۳}} = ۲(۲+\sqrt{۳}) = ۴+۲\sqrt{۳}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

$$\sin\theta - \tan\theta = \tan\theta(\cos\theta - ۱) > ۰$$

عبارت $\cos\theta - ۱$ همواره نامثبت است. پس برای برقراری نامساوی بالا، لازم است که $\tan\theta$ منفی باشد. به عبارت دیگر انتهای کمان θ باید در ربع‌های دوم یا چهارم قرار بگیرد. از طرفی در محدودهٔ مشخص شده شکل زیر، $\sin\theta + \cos\theta$ منفی است.



در شکل بالا، اگر بخش‌های مربوط به ربع‌های دوم و چهارم را در نظر بگیریم، شکل گزینهٔ «۱» حاصل می‌شود.

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

عرض از مبدأ سهمی برابر $c = -۲$ است، پس معادلهٔ آن را $y = ax^۲ + bx - ۲$ در نظر می‌گیریم. در این سهمی $x = ۱$ ریشه است، پس داریم:

$$۰ = a(۱)^۲ + b(۱) - ۲ \Rightarrow a + b = ۲ \qquad (۱)$$

از طرفی $\frac{۱}{۴}$ عرض رأس سهمی است. حال از رابطهٔ $y_S = -\frac{\Delta}{۴a}$ استفاده می‌کنیم:

$$y_S = -\frac{b^2+8a}{4a} = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2+8a = -a \Rightarrow b^2+9a = 0 \qquad (2)$$

با جای‌گذاری $a = 2-b$ در معادلهٔ (۲) داریم:

$$b^2+9(2-b) = b^2-9b+18 = (b-3)(b-6) = 0$$

$$\Rightarrow b = 3 \quad \text{یا} \quad b = 6$$

به ازای $b = 3$ ، $a = -1$ و به ازای $b = 6$ ، $a = -4$ به دست می‌آید. اما در حالت $(a\ ,\ b) = (-4\ ,\ 6)$ سهمی $y = -4x^2+6x-2$ را داریم که ریشه‌های آن $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ است و این با نمودار صورت سؤال همخوانی ندارد. در نتیجه $b = 3$ قابل قبول است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

با توجه به عبارت $x-1$ داخل قدرمطلق، نامعادله را در دو حالت $x < 1$ و $x \geq 1$ بررسی می‌کنیم.

$x < 1$:

$$1 < \frac{2x-3}{-x-3} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x-3}{x+3} < -1 \Rightarrow -2 < 2-\frac{9}{x+3} < -1$$

$$\Rightarrow -4 < -\frac{9}{x+3} < -3 \Rightarrow 3 < \frac{9}{x+3} < 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x+3}{9} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} < x+3 < 3 \Rightarrow -\frac{3}{4} < x < 0$$

$x \geq 1$:

$$1 < \frac{2x-3}{x-5} < 2 \Rightarrow 1 < 2+\frac{7}{x-5} < 2 \Rightarrow -1 < \frac{7}{x-5} < 0$$

$$\frac{x-5}{7} < -1 \Rightarrow x-5 < -7 \Rightarrow x < -2$$

با توجه به شرط $x \geq 1$ ، این جواب قابل قبول نیست.

در نتیجه مجموعه جواب‌های نامعادله $(-\frac{3}{4}\ ,\ 0)$ خواهد بود. این یعنی $a = -\frac{3}{4}$ و $b = 0$ و در نتیجه $b-a = \frac{3}{4}$ است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۳)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

$$y = |x+1| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} -|x+1|$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت راست}} y = -|x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با نیم‌ساز ناحیهٔ چهارم}} -|x-1| = -x$$

$$\Rightarrow |x-1| = x \Rightarrow x-1 = -x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{y=-x} y = -\frac{1}{2}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مجموع ارقام یک عدد سه رقمی زمانی فرد است که یا هر سه رقم فرد و یا یک رقم فرد و دو رقم دیگر زوج باشند. همچنین با انتخاب هر سه رقم، به تعداد $3!$ عدد سه رقمی متمایز می‌توان نوشت. تعداد کل اعداد سه رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با:

$$\left[\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}\right]\times 3! = (10+5\times 6)\times 6 = 240$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

۶۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

پیشامد تصادفی مورد نظر شامل ۲ حالت است، یکی خروج ۲ مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ سفید و در نتیجه خروج ۳ مهرهٔ قرمز و دیگری خروج ۴ مهرهٔ آبی و دو مهرهٔ سفید. اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، آنگاه احتمال آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\binom{2}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{48+1}{210} = \frac{49}{210} = \frac{7}{30}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

فیزیک ۱

۶۱- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

دقت خط‌کش مدرج و کولیس رقمی را به m و cm تبدیل می‌کنیم.

$$\text{دقت خط‌کش} = ۱mm = ۰/۱cm = ۰/۰۰۱m$$

$$\text{دقت کولیس} = ۰/۱mm = ۰/۰۱cm = ۰/۰۰۰۱m$$

با توجه به نتیجه‌های به‌دست آمده خط‌کش اندازه‌های $۰/۱cm$ و $۰/۰۰۱m$ و کولیس $۰/۰۱cm$ و $۰/۰۰۰۱m$ را می‌تواند اندازه‌گیری کند. بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به این‌که حجم مایع ۲۵ درصد از حجم ظرف کمتر است، می‌توان نوشت:

$$V_{\text{مایع}} = V_{\text{ظرف}} - ۰/۲۵V_{\text{ظرف}} = ۰/۷۵V_{\text{ظرف}}$$

$$\xrightarrow{V_{\text{ظرف}}=۴۰۰cm^۳} V_{\text{مایع}} = ۰/۷۵\times۴۰۰ = ۳۰۰cm^۳$$

با توجه به معلوم بودن چگالی مایع، در این قسمت جرم مایع را به دست می‌آوریم:

$$m_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} \times V_{\text{مایع}} \xrightarrow[V_{\text{مایع}}=۳۰۰cm^۳]{\rho_{\text{مایع}}=۱/۴\frac{g}{cm^۳}}$$

$$m_{\text{مایع}} = ۱/۴\times۳۰۰ = ۴۲۰g$$

از طرف دیگر، با غوطه‌ور کردن جسم درون مایع، ۱۵ درصد از حجم ظرف خالی می‌ماند. در این حالت داریم:

$$V_{\text{مایع}} + V_{\text{جسم}} = V_{\text{ظرف}} - ۰/۱۵V_{\text{ظرف}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{جسم}} = ۰/۱V_{\text{ظرف}} = ۰/۱\times۴۰۰ = ۴۰cm^۳$$

در آخر داریم:

$$\rho_{\text{جسم}} = \frac{m_{\text{جسم}}}{V_{\text{جسم}}} = \frac{۴۲۰}{۴۰} = ۱۰/۵\frac{g}{cm^۳}$$

$$\xrightarrow{\times۱۰۰۰} \rho_{\text{جسم}} = ۱۰۵۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

چون فشار پیمانه‌ای برحسب سانتی‌متر جیوه خواسته شده است، باید فشار ستون مایعات $\rho_۲$ و $\rho_۳$ را برحسب سانتی‌متر جیوه به دست آوریم. بنابراین:

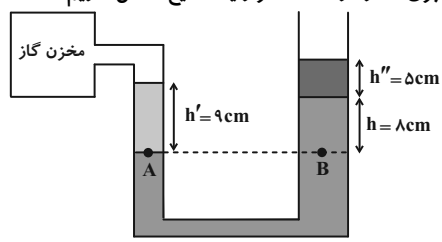
$$\rho_۲h_۲ = \rho_{\text{جیوه}}h'_{\text{جیوه}} \Rightarrow (۱۰/۲)\times(۱۲) = (۱۳/۶)h'_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h'_{\text{جیوه}} = ۹cm$$

$$\rho_۳h_۳ = \rho_{\text{جیوه}}h''_{\text{جیوه}} \Rightarrow (۶/۸)\times(۱۰) = (۱۳/۶)h''_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h''_{\text{جیوه}} = ۵cm$$

فشار پیمانه‌ای، برابر با اختلاف فشار گاز مخزن و فشار هوای محیط است. با توجه به برابری فشار در نقاط همتراز یک مایع ساکن داریم:

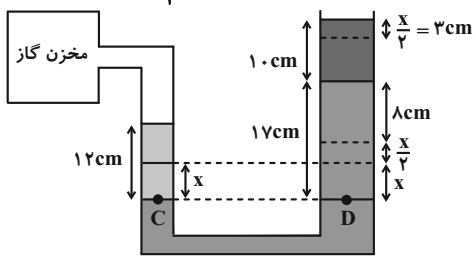


$$P_A = P_B \Rightarrow P'_{\text{جیوه}} + P_{\text{گاز}} = P_{\text{جیوه}} + P''_{\text{گاز}} + P_۰$$

$$\Rightarrow P_{g_۱} = P_{\text{گاز}} - P_۰ = ۸+۵-۹ = ۴cmHg$$

با افزایش فشار گاز درون مخزن، ارتفاع مایع در شاخهٔ سمت چپ کاهش یافته و ارتفاع مایع در شاخهٔ سمت راست افزایش می‌یابد. برای سرریز نشدن مایع $\rho_۳$ از شاخهٔ سمت راست، مایع در این شاخه باید حداکثر $۳cm$ بالا رود.

با توجه به این‌که حجم جیوهٔ جابه‌جا شده در دو طرف لوله با هم برابر است، می‌توان گفت که ارتفاع جیوهٔ پایین آمده در شاخهٔ سمت چپ (x)، دو برابر ارتفاع جیوهٔ بالا آمده در شاخهٔ سمت راست $(\frac{x}{۲})$ است. پس:



$$\frac{x}{۲} = ۳cm \Rightarrow x = ۶cm$$

فشار در نقاط همتراز یک مایع ساکن با هم برابر است. بنابراین داریم:

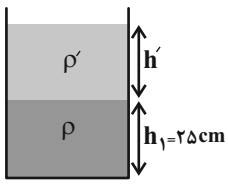
$$P_C = P_D \Rightarrow P'_{\text{جیوه}} + P'_{\text{گاز}} = P_{\text{جیوه}} + P''_{\text{جیوه}} + P_۰$$

$$\Rightarrow P_{g_۲} = P'_{\text{گاز}} - P_۰ = P_{\text{جیوه}} + P''_{\text{جیوه}} - P'_{\text{جیوه}}$$

$$P_{g_۲} = ۱۷+۵-۹ = ۱۳cm\,Hg \Rightarrow P_{g_۲} - P_{g_۱} = ۹cm\,Hg$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*



ابتدا فشار کل وارد بر کف ظرف در حالت اول را می‌یابیم:

$$P_۱ = P_۰ + \rho_۱gh_۱ \xrightarrow[P_۰=۱۰^۵Pa,\,h=۰/۲۵m]{\rho_۱=۴\times۱۰^۳\frac{kg}{m^۳}}$$

$$P_۱ = ۱۰^۵ + ۴\times۱۰^۳\times۱۰\times۰/۲۵ = ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ = ۱۱۰۰۰۰Pa$$

اکنون، ارتفاع مایع اضافه شده را حساب می‌کنیم و فشار ناشی از آن، که در واقع همان افزایش فشار وارد بر کف ظرف می‌باشد را می‌یابیم:

$$V = Ah' \xrightarrow[A=۵cm^۲]{V=۵۵cm^۳} ۵۵ = ۵\times h' \Rightarrow h' = ۱۱cm$$

$$\Delta P = \rho' g h' \xrightarrow[\rho'=۲\frac{g}{cm^۳}=۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳}]{h'=۱۱cm=۰/۱۱m}$$

$$\Delta P = ۲۰۰۰\times۱۰\times۰/۱۱ = ۲۲۰۰Pa$$

در آخر درصد افزایش فشار کل را حساب می‌کنیم.

$$\text{درصد افزایش فشار کل} = \frac{\Delta P}{P_۱}\times۱۰۰ = \frac{۲۲۰۰}{۱۱۰۰۰۰}\times۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{درصد افزایش فشار کل} = ۲\,\%$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

انرژی جنبشی یک جسم از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ به دست می‌آید. بنابراین با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی برای دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times(\frac{v_2}{v_1})^2$$

$$\xrightarrow[v_2=v+5\ ,\ v_1=\frac{2}{3}v]{K_2=16K_1\ ,\ m_2=m_1} \frac{16K_1}{K_1}=\frac{m_1}{m_1}\times(\frac{v+5}{\frac{2}{3}v})^2$$

$$\Rightarrow 16=(\frac{v+5}{\frac{2}{3}v})^2 \Rightarrow \pm 4=\frac{v+5}{\frac{2}{3}v}$$

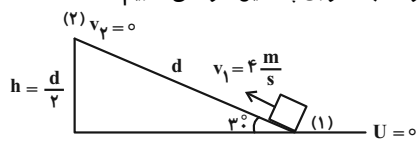
$$\xrightarrow{v>0} 4=\frac{v+5}{\frac{2}{3}v} \Rightarrow v+5=\frac{8}{3}v \Rightarrow \frac{5}{3}v=5 \Rightarrow v=3\frac{m}{s}$$

دقت کنید، چون تندی همواره مثبت است، بنابراین هنگام جذر گرفتن از عدد ۱۶ جواب ۴- قابل قبول نیست.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

اگر حداکثر مسافتی را که جسم بر روی سطح شیبدار بالا می‌رود، d فرض کنیم، ارتفاع جسم در بالاترین قسمت سطح شیب‌دار به اندازهٔ $\frac{d}{2}$ است (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30°). با توجه به این‌که تغییرات انرژی مکانیکی در طول مسیر حرکت جسم برابر کار نیروی اصطکاک است، با در نظر گرفتن پایین سطح شیبدار به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی داریم:



$$E_2-E_1=W_f$$

$$(U_2+K_2)-(U_1+K_1)=f_k d\cos 180^\circ$$

$$\xrightarrow[m=1/5kg\ ,\ v_1=4\frac{m}{s}]{\cos 180^\circ=-1\ ,\ f_k=15N} mgh_2-\frac{1}{2}mv_1^2=-f_k d$$

$$\Rightarrow 1/5\times 10\times\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\times 1/5\times 16=-15d$$

$$\Rightarrow 7/5d-12=-15d \Rightarrow 22/5d=12$$

$$\Rightarrow d=\frac{12}{22/5}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}m$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۶۷- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا دمای جسم را از درجهٔ فارنهایت به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$F=\frac{9}{5}\theta+32 \xrightarrow{F=50F} 50=\frac{9}{5}\theta+32$$

$$\Rightarrow 18=\frac{9}{5}\theta \Rightarrow \theta=10^\circ C$$

اکنون مقیاس دمای سلسیوس را به کلوین تبدیل می‌کنیم:

$$T=\theta+273 \xrightarrow{\theta=10^\circ C} T=10+273=283K$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیراحمد میرسعید)*

ابتدا مقدار انرژی گرمایی را که گرمکن به یخ $-10^\circ C$ می‌دهد تا به بخارآب $100^\circ C$ تبدیل شود، می‌یابیم:

$$P=\frac{Q}{t} \xrightarrow[t=2min=2\times 60=120s]{P=1011W} 1011=\frac{Q}{120}$$

$$\Rightarrow Q=121320J$$

اکنون با توجه به طرح‌وارهٔ زیر، جرم یخ را پیدا می‌کنیم:

$$\boxed{\text{یخ } -10^\circ C} \xrightarrow{Q_1} \boxed{\text{یخ } 0^\circ C} \xrightarrow{Q_2} \boxed{\text{آب } 0^\circ C}$$

$$\xrightarrow{Q_3} \boxed{\text{آب } 100^\circ C} \xrightarrow{Q_4} \boxed{\text{بخار } 100^\circ C}$$

$$Q_{کل}=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$$

$$\Rightarrow Q_{کل}=mc_{یخ}\Delta\theta+mL_F+mc_{آب}\Delta\theta+mL_V$$

$$\Rightarrow 121320=m\times 2100\times 10+m\times 336000$$

$$+m\times 4200\times 100+m\times 2256000$$

$$\Rightarrow 121320=3033000m \Rightarrow m=0/04kg=40g$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۸)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

چون در هر دو مسیر AC و ABC، گاز منبسط شده است، کار محیط روی گاز منفی است. با توجه به این‌که تغییر انرژی درونی به مسیر فرایند وابسته نیست، تغییر انرژی درونی گاز در هر دو مسیر AC و ABC برابر است. از طرف دیگر، چون مساحت بین نمودار $P-V$ و محور V برابر اندازهٔ کار انجام شده بر روی گاز می‌باشد، داریم:

$$\Delta U_{AC}=\Delta U_{ABC} \xrightarrow{\Delta U=Q+W} \Delta U_{AC}=Q_{ABC}+W_{ABC}$$

$$\xrightarrow{W_{ABC}=-S_{ذوزنقه}} \Delta U_{AC}=Q_{ABC}+S_{ذوزنقه}$$

$$\xrightarrow{\Delta U_{AC}=3600J}$$

$$3600=Q_{ABC}+(-\frac{2\times 10^5+4\times 10^5}{2}\times(8-4)\times 10^{-3})$$

$$\Rightarrow 3600=Q_{ABC}-1200 \Rightarrow Q_{ABC}=4800J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۸ و ۱۴۹)

۷۰- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا کار انجام شده را می‌یابیم:

$$Q_H=|Q_C|+|W| \xrightarrow[|Q_C|=600J]{Q_H=1000J} 1000=600+|W|$$

$$\Rightarrow |W|=400J$$

اکنون توان خروجی ماشین را حساب می‌کنیم:

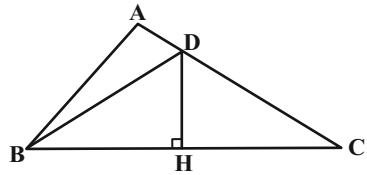
$$P=\frac{|W|}{\Delta t} \xrightarrow[|W|=400J]{\Delta t=0/8s} P=\frac{400}{0/8}=500W$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۷ و کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

هندسه ۱

۷۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل نقطهٔ D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. در نتیجه دو مثلث BHD و CHD هم‌نهشت هستند و در نتیجه داریم:



$$D\hat{B}C = \hat{C} = ۳۰^\circ$$

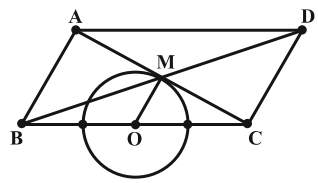
$$\overset{\Delta}{BDC}: A\hat{D}B \Rightarrow A\hat{D}B = D\hat{B}C + \hat{C}$$ زاویهٔ خارجی است

$$\Rightarrow A\hat{D}B = ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

مطابق شکل فرض کنید O نقطهٔ وسط ضلع BC و M محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد. در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند، بنابراین در مثلث CAB، پاره‌خط OM وسط‌های دو ضلع CA و CB را به هم وصل کرده است، پس با ضلع BA موازی و طول آن نصف طول این ضلع است.



$$OM = \frac{BA}{۲} = \frac{a}{۲}$$

چون طول OM ثابت و O نیز نقطهٔ ثابتی است، نقطهٔ M، روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{a}{۲}$ است. نقاط برخورد این دایره با ضلع BC قابل قبول نیست.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶
و قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسماق اسفندیار)*

مثلث ABC، قائم‌الزاویه است. مساحت آن برابر $\frac{۵\times۱۲}{۲} = ۳۰$ است و کوچکترین ارتفاع آن، ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع است.

$$S = \frac{۱}{۲}\times h \times ۱۳ \xrightarrow{S=۳۰} h = \frac{۲\times۳۰}{۱۳} = \frac{۶۰}{۱۳}$$

نسبت تشابه دو مثلث برابر است با:

$$k = \frac{h}{h'} = \frac{\frac{۶۰}{۱۳}}{\frac{۲۰}{۱۳}} = ۳$$

$$\frac{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'}} = k \Rightarrow \frac{۵+۱۲+۱۳}{\text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'}} = ۳ \Rightarrow \text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'} = ۱۰$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

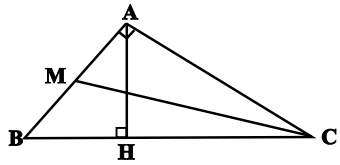
۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(سینا محمدپور)*

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۱۲ = ۲ \times BC \Rightarrow BC = ۶$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow ۳۶ = ۱۲ + AC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۲۴$$

CM میانهٔ وارد بر ضلع AB است، پس $AM = \frac{۱}{۲}AB = \sqrt{۳}$ است و در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMC داریم:



$$CM^۲ = AM^۲ + AC^۲$$
$$= ۳ + ۲۴ = ۲۷$$
$$\Rightarrow CM = ۳\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی اصل)*

فرض کنید $S_{\overset{\Delta}{ADE}} = S$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تناسب اضلاع متناظر آن زاویه}]{\text{تساوی یک زاویه و}} \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{AD}{AB})^۲ \Rightarrow \frac{S}{S+۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴S = S + ۱۲ \Rightarrow ۳S = ۱۲ \Rightarrow S = ۴$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S + ۱۲ = ۴ + ۱۲ = ۱۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد هجری)*

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف طول وتر است، پس $AC = ۶$ می‌باشد. اگر طول هر ضلع لوزی $ADEF$ را برابر x در نظر بگیریم، آنگاه داریم: $DC = AC - AD = ۶ - x$

از طرفی $DE \parallel AB$ است، پس $\widehat{DEC} = ۹۰^\circ$ و در نتیجه مثلث DEC قائم‌الزاویه است. در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:

$$\frac{DE}{DC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۶-x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲$$

در مثلث ADF، $AD = AF = ۲$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است، پس این مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و $DF = ۲$ است، بنابراین طول قطر کوچکتر لوزی برابر ۲ می‌باشد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۴)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

MN و CP میانه‌های نظیر اضلاع BC و BM در مثلث MBC هستند و در نتیجه O نقطهٔ برخورد میانه‌ها در این مثلث است، پس داریم:

$$S_{\Delta ONC} = \frac{۱}{۶} S_{\Delta MBC} \Rightarrow ۳ = \frac{۱}{۶} S_{\Delta MBC} \Rightarrow S_{\Delta MBC} = ۱۸$$

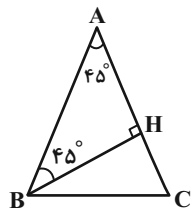
مثلث MBC و متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در قاعدهٔ BC مشترک هستند و طول ارتفاع وارد بر این قاعده در آنها یکسان است، بنابراین داریم:

$$S_{ABCD} = ۲S_{MBC} = ۲ \times ۱۸ = ۳۶$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۷)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(خرزانه خاکپاش)*

مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق مثلث برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است.



اگر ارتفاع وارد بر ساق AC را مطابق شکل رسم کنیم، آنگاه مثلث ABH، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم:

$$\Delta ABH : AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow AB = AC = ۴$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} BH \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times ۴ = ۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدابراهیم کیتی زاده)*

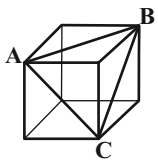
فرض کنید صفحهٔ Q موازی با صفحهٔ P و شامل خط d باشد. می‌دانیم اگر خطی یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند، پس خط d' صفحهٔ Q را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند.

اگر نقطهٔ A روی خط d باشد (d و d' متقاطع باشند)، آنگاه هر خط گذرنده از نقطهٔ A که در صفحهٔ Q واقع باشد، لزوماً موازی با صفحهٔ P بوده و در نتیجه جواب مسئله است.

اگر نقطهٔ A روی خط d نباشد، آنگاه کلیهٔ خطوط واقع در صفحهٔ Q که نقطهٔ A را به یکی از نقاط واقع بر خط d وصل می‌کنند، جواب مسئله هستند. بنابراین در هر صورت بی شمار خط وجود دارند که d و d' را قطع کرده و با صفحهٔ P موازی باشند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** *(خرزانه خاکپاش)*



مطابق شکل پاره‌خط های AB، AC و BC، هر سه قطر وجه‌های مکعب هستند، پس طول آنها برابر یکدیگر است و در نتیجه مثلث ABC (سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ گذرنده از A، B و C با مکعب)، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است که طول هر ضلع آن برابر طول قطر وجه مکعب است. اگر طول هر یال این مکعب را با a، مساحت کل مکعب را با S و مساحت مثلث ABC را با S' نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a\sqrt{۲})^۲}{۶a^۲} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{۶a^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

شیمی ۱

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(امید رضوانی)*

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) یون یدید با یونی که حاوی تکنسیم است اندازه مشابهی دارد.

ب) نماد شیمیایی درست ایزوتوپ تکنسیم به صورت « $^{99}_{43}Tc$ » است.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۱)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(امید رضوانی)*

با توجه به رابطهٔ زیر، جرم اتمی میانگین یک اتم با بیش از یک ایزوتوپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\bar{M} = M_1 + (M_2 - M_1)\times\frac{f_2}{100} + (M_3 - M_1)\times\frac{f_3}{100} + \dots$$

$$\bar{M}(X) = 35 + 0/8\times 2 = 36/6\,amu$$

$$AX_3 = A + 3\times 36/6 = 156/6 \Rightarrow A = 46/8\,amu$$

$$\bar{M}(A) = 45 + 2\times\frac{x}{100} = 46/8 \Rightarrow x = 90\%$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

با توجه به شکل طیف نشری خطی اتم هیدروژن در صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی شیمی دهم، با حرکت از نوار قرمز $(\lambda = 656nm)$ به سمت نوار بنفش $(\lambda = 410nm)$، اختلاف بین طول موج‌ها کاهش می‌یابد:

$n=3 \to n=2 : \lambda = 656\,nm$: نوار قرمز

$n=4 \to n=2 : \lambda = 486\,nm$: نوار آبی

$n=5 \to n=2 : \lambda = 434\,nm$: نوار نیلی

$n=6 \to n=2 : \lambda = 410\,nm$: نوار بنفش

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۳۱)

۸۴- **گزینهٔ «۳»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

به جز عبارت اول، بقیه عبارت‌ها درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: بین پایداری و آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت اتم‌ها رابطه وجود دارد. هر چه اتم عنصری آسان‌تر به آرایش الکترونی گاز نجیب برسد واکنش‌پذیری بیشتری خواهد داشت و رابطهٔ بین واکنش‌پذیری اتم‌ها و تعداد الکترون‌های ظرفیت به تمایل اتم برای از دست دادن یا گرفتن الکترون بستگی دارد. یعنی ممکن است اتمی دارای الکترون ظرفیت بیشتری باشد اما آسان‌تر به آرایش پایدار گاز نجیب برسد؛ بنابراین الزاما با کاهش شمار الکترون‌های ظرفیت، واکنش‌پذیری افزایش نمی‌یابد.

عبارت دوم: با توجه به آرایش الکترونی اتم

$_{24}X: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s^1$

این اتم دارای ۷ الکترون با $l=0$ (s) و ۵ الکترون با $l=2$ (d) می‌باشد، پس نسبت شمار الکترون‌های s به d برابر $(\frac{7}{5}=1/4)$ است.

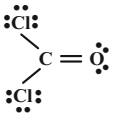
عبارت سوم: آرایش الکترونی اتم‌های A و B به صورت زیر است:

$_{27}A: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2 3p^6\ 3d^7\ 4s^2$

$_{20}B: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$

در نتیجه آرایش الکترونی لایهٔ آخر اتم $_{27}A$ و آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت اتم $_{20}B$، هر دو به صورت $4s^2$ است.

عبارت چهارم: با توجه به ساختار لوویس زیر، این مولکول دارای ۸ جفت الکترون ناپیوندی و ۴ جفت الکترون پیوندی است.



(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۴۱)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

عبارت‌های (آ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، دمای هوا به‌طور پیوسته کاهش نمی‌یابد و همین امر دلیلی بر اثبات لایه‌ای بودن هواکره است.

ب) در دمای $-78^\circ C$ کربن دی‌اکسید به حالت جامد درمی‌آید که این دما برحسب کلوین به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$T(K) = \theta(^\circ C) + 273 = -78 + 273 = 195\,K$ است.

پ) سومین گاز از نظر درصد حجمی در هواکره همان گاز آرگون (Ar) است که به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری و برش فلزات به کار می‌رود.

ت) منابع زمینی هلیم برای تولید هلیم در مقیاس صنعتی، نسبت به هواکره مناسب‌تر است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۱)

۸۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

معادلهٔ موازنه شده واکنش‌ها به صورت زیر است:

a) $4NH_3 + 5O_2 \to 4NO + 6H_2O \Rightarrow$ اختلاف $= 10 - 9 = 1$

b) $4Fe + 3O_2 + 6H_2O \to 4Fe(OH)_3$

$\Rightarrow$ اختلاف $= 13 - 4 = 9$

c) $2CH_4 + 2NH_3 + 3O_2 \to 2HCN + 6H_2O$

$\Rightarrow$ اختلاف $= ۸ - ۷ = ۱$

d) $CaSiO_۳ + ۶HF \rightarrow CaF_۲ + SiF_۴ + ۳H_۲O$

$\Rightarrow$ اختلاف $= ۷ - ۵ = ۲$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$۴KNO_۳(s) \rightarrow ۲K_۲O(s) + ۲N_۲(g) + ۵O_۲(g)$

$۲H_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲H_۲O(l)$

کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گازهای $N_۲$ و $O_۲$ حاصل از این مخلوط می‌باشد. به ازای $۲۱۶g$ (مجموع جرم‌های مولی $۲N_۲$ و $۵O_۲$) کاهش جرم، مقدار ۲ مول $N_۲$ و ۵ مول $O_۲$ تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$?L\ N_۲ = ۴۳/۲g \text{ کاهش جرم} \times \frac{۲mol\ N_۲}{۲۱۶g \text{ کاهش جرم}}$$

$$\times \frac{۲۲/۴L\ N_۲}{۱mol\ N_۲} = ۸/۹۶L\ N_۲$$

$$?mol\ O_۲ = ۴۳/۲g \text{ کاهش جرم} \times \frac{۵mol\ O_۲}{۲۱۶g \text{ کاهش جرم}}$$

$$= ۱mol\ O_۲$$

$$?g\ H_۲O = ۱mol\ O_۲ \times \frac{۲mol\ H_۲O}{۱mol\ O_۲} \times \frac{۱۸g\ H_۲O}{۱mol\ H_۲O}$$

$$= ۳۶g\ H_۲O$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(هدی بهاری‌پور)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت (پ): کلسیم سولفات کم محلول است.

عبارت (ت): باریم سولفات اصلاً در آب نامحلول است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۱)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** *(حمید ذبحی)*

ابتدا معادلهٔ انحلال‌پذیری- دما را برای $NaNO_۳$ به دست می‌آوریم:

$$S = a\theta + b\ ,\quad a = \frac{S_۲ - S_۱}{\theta_۲ - \theta_۱} = \frac{۸۰ - ۷۲}{۱۰ - ۰} = ۰/۸\ ,\ b = ۷۲$$

$$S = ۰/۸\theta + ۷۲ \Rightarrow \begin{cases} \theta_۱ = ۳۵^\circ C \Rightarrow S_۱ = ۰/۸ \times ۳۵ + ۷۲ = ۱۰۰ \\ \theta_۲ = ۱۵^\circ C \Rightarrow S_۲ = ۰/۸ \times ۱۵ + ۷۲ = ۸۴ \end{cases}$$

$$?g \text{ رسوب} = ۴۰۰g \text{ محلول } (۳۵^\circ C) \times \frac{(۱۰۰ - ۸۴)g \text{ رسوب}}{۲۰۰g \text{ محلول } (۳۵^\circ C)}$$

$$= ۳۲g \text{ رسوب}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

با توجه به این‌که گشتاور دوقطبی $XO_۲$ بزرگ‌تر از صفر است، پس مولکول $XO_۲$ از نوع قطبی است؛ همچنین X باید از گروه ۱۶ جدول باشد که می‌توانند S یا Se در نظر گرفته شوند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) مولکول‌های $SO_۲$ و $SeO_۲$، مولکول‌های قطبی هستند (S، Se و O هم‌گروه‌اند.)

ب) عدد اتمی C برابر ۶ است و $CO_۲$ مولکول ناقطبی است.

پ) ساختار $SO_۲$ و $SeO_۲$ به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد } e^- \text{ پیوندی} = ۶e^- \\ \text{تعداد } e^- \text{ ناپیوندی} = ۱۲e^- \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

ت) خصلت نافلزی اکسیژن از گوگرد (S) و سلنیم (Se)، بیشتر است؛ بنابراین سر منفی مولکول را تشکیل داده و سمت صفحه با بار مثبت جهت‌گیری می‌کند.

(شیمی ۱- ترکیبی؛ صفحه‌های ۱۰، ۱۱، ۵۴ تا ۵۶ و ۱۰۳ تا ۱۰۷)

حسابان ۲

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(رضا طاری)*

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به فرم مربع کامل می‌نویسیم:

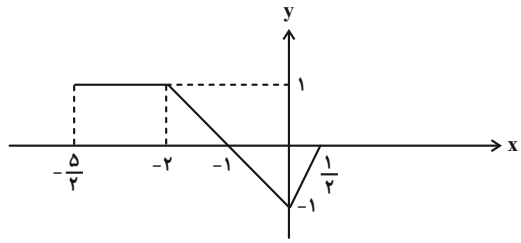
$$f(x)=(x-2)^2+3$$

پس برای این‌که از نمودار تابع f به نمودار تابع g برسیم، لازم است که آن را ۲ واحد به چپ و ۴ واحد به پایین منتقل کنیم.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۲- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

برای رسم نمودار $y=-f(1+x)$ از روی نمودار $y=f(1-\frac{x}{2})$، کافی است عرض نقاط را در ۱- ضرب و طول نقاط را بر (۲-) تقسیم کنیم. در نتیجه نمودار تابع $y=-f(x+1)$ به صورت زیر است:



سطح بین نمودار حاصل و محور xها از یک ذوزنقه و یک مثلث تشکیل شده است که مساحت آن‌ها به ترتیب برابر است با:

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})}{2}\times(1)=1 \quad \text{و} \quad S_{\text{مثلث}}=\frac{\frac{3}{2}\times 1}{2}=\frac{3}{4}$$

در نتیجه مساحت سطح محصور برابر $\frac{7}{4}$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

$$f(x)=|2x|-|x-1|=\begin{cases}-x-1 & ;x<0\\ 3x-1 & ;0\le x<1\\ x+1 & ;x\ge 1\end{cases}$$

تابع f در $[-\infty,0]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$x^3-2x^2-2x+1=-x-1$$
$$\Rightarrow x^3-2x^2-x+2=(x^2-1)(x-2)=0\xrightarrow{x\le 0}x=-1$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

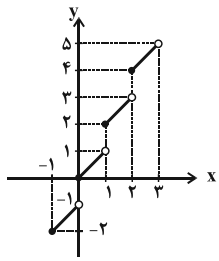
گزینهٔ «۱»: واضح است که این تابع غیریکنواست.

$$y=\begin{cases}0 & ;x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

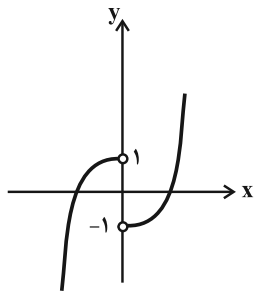
گزینهٔ «۲»: این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

$$y=\begin{cases}1 & ;x<1\\ 2x-1 & ;x\ge 1\end{cases}$$

گزینهٔ «۳»: این تابع اکیداً صعودی است.



گزینهٔ «۴»: این تابع غیریکنواست.



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم چندجمله‌ای x^9-5x^4-1 بر $x+1$ می‌نویسیم:

$$x^9-5x^4-1=(x+1)q(x)+r$$

با جای گذاری $x=-1$، مقدار r به دست می‌آید:

$$r=(-1)^9-5(-1)^4-1=-7$$

پس داریم:

$$x^9-5x^4-1=(x+1)q(x)-7\Rightarrow q(x)=\frac{x^9-5x^4+6}{x+1}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x+1$ برابر $q(-1)$ است. راه ساده‌تر این است که مقدار $q(-1)$ را حد صفر صفرم حساب کنیم.

$$q(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^9-5x^4+6}{x+1}\ \underline{\text{HOP}}\ \lim_{x\to -1}\frac{9x^8-20x^3}{1}=29$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(جهانبخش نیکنام)*

در توابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$، فاصلهٔ افقی دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی‌اش برابر نصف دورهٔ تناوب تابع است. بنابراین در این سؤال $\frac{T}{2}=2\pi$ است.

$$\Rightarrow T=4\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{|b|}=4\pi\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}$$

هم‌چنین داریم:

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\Rightarrow c=\frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)}{2}=-1$$

از طرفی برای به‌دست آوردن a نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{max}=|a|+c=|a|-1\xrightarrow{y_{max}=\frac{1}{2}}|a|=\frac{3}{2}$$

حال با توجه به اینکه در همسایگی $x=0$، تابع f نزولی است، باید ab مقداری منفی داشته باشد. بنابراین ضابطهٔ تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=-\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2}-1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6}-1=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{7}{4}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(علی شهرابی)*

β، اولین جواب مثبت معادلهٔ $\tan 2x=0$ است: $(k\in\mathbb{Z})$

$$2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\xrightarrow{k=1}\beta=\frac{\pi}{2}$$

α، دومین جواب منفی معادلهٔ $\tan 2x=1$ است:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های منفی}}\frac{-3\pi}{8},\frac{-7\pi}{8},\ldots\Rightarrow\alpha=\frac{-7\pi}{8}$$

$$\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{-7\pi}{8}\right)=\frac{11\pi}{8}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲، ۴۱ و ۴۲)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(حبیب شفیعی)*

$$\sin^4x+\cos^4x=\cos\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2-2\sin^2x\cos^2x$$

$$=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^2 2x=1$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2 2x=\cos^2 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد سبزی‌لاریجانی)*

ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}\qquad ;x\neq k\pi$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\tan 2x=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{3x}{2}=k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}$$

با توجه به شرط $x\neq k\pi$، جواب‌های قابل قبول بازهٔ $[0,2\pi]$، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ هستند.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

باید معادلهٔ $\tan x=\sin x+1$ را حل کنیم.

$$\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+1\Rightarrow\sin x=\sin x\cos x+\cos x$$

$$\Rightarrow\sin x-\cos x=\sin x\cos x$$

از اتحادهای $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$ و $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow 2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sin 2x$$

حال $\sin 2x$ را براساس زاویهٔ $x-\frac{\pi}{4}$ بازنویسی می‌کنیم:

$$2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sin[\frac{\pi}{2}+2(x-\frac{\pi}{4})]=\cos 2(x-\frac{\pi}{4})$$

در اینجا از اتحاد $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1-2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$$

با تغییر متغیر $P=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را خواهیم داشت:

$$2\sqrt{2}P=1-2P^2\Rightarrow 2P^2+2\sqrt{2}P-1=0$$

$$\xrightarrow{-1<P<1}P=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin 2x$ برابر $2\sqrt{2}P$ است، در نتیجه داریم:

$$\sin 2x=2\sqrt{2}-2$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

هندسه ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در یک ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر بوده و درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ n+1=0 \Rightarrow n=-1 \\ p+2=2p-1 \Rightarrow p=3 \end{cases}$$

با جای‌گذاری این مقادیر در ماتریس B و با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=(0-3-2)-(0+2+4)=-11$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۲۹)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به تعریف درایه‌های دو ماتریس A و B داریم:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 6 & -6 \\ -10 & 10 & -10 \\ -15 & 15 & -15 \end{bmatrix}$$

با توجه به این‌که درایه‌های دو ستون اول و دوم قرینهٔ یکدیگرند، مجموع درایه‌های ماتریس BA برابر مجموع درایه‌های ستون سوم آن، یعنی برابر (۳۱-) است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۳- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در صورتی بی‌شمار جواب دارد که شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ برقرار باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{m-1}{n+2}=\frac{2}{4}=\frac{n}{m}$$

$$\begin{cases} \frac{m-1}{n+2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2m-2=n+2 \Rightarrow n=2m-4 \\ \frac{n}{m}=\frac{1}{2} \Rightarrow m=2n \Rightarrow m=2(2m-4) \Rightarrow m=\frac{8}{3} \ , \ n=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$m+n=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{12}{3}=4$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحهٔ ۲۶)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

از طرفین رابطهٔ داده شده، دترمینان می‌گیریم:

$$|A|=(-2|A|)(-3|A|)(|A|) \Rightarrow 6|A|^3-|A|=0$$

$$\Rightarrow |A|(6|A|^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=0 \\ |A|^2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

چون ماتریس A وارون‌پذیر است، پس $|A| \neq 0$ و تنها جواب $|A|^2=\frac{1}{6}$ قابل قبول است. در این صورت داریم:

$$||A|A|=|A|^3 \times |A|=|A|^4=(|A|^2)^2=(\frac{1}{6})^2=\frac{1}{36}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

سعی می‌کنیم توانی از ماتریس‌های A و B را پیدا کنیم که برابر ماتریس I یا مضربی از آن باشند.

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$B^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{۳}=B^{۲}\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

$$A^{۹۹}+B^{۱۰۰}=(A^{۲})^{۴۹}\times A+(B^{۳})^{۳۳}\times B=I^{۴۹}\times A+(-I)^{۳۳}\times B$$

$$=A-B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم اگر $BA=C$ و B ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $A=B^{-۱}C$ است. بنابراین داریم:

$$B=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۵\times ۳-۲\times ۷}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-۱}C\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷ & ۴\\ ۱۷ & -۹\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های } A=-۷+۴+۱۷-۹=۵$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

ستون سوم $B^{۲}\times$ سطر دوم $A^{۲}=$ درایه سطر دوم ستون سوم $A^{۲}B^{۲}$

از طرفی:

$$\text{سطر دوم } A^{۲}=\text{سطر دوم } A\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۳ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۹ & -۲ & ۹\end{bmatrix}$$

$$\text{ستون سوم } B^{۲}=\text{ستون سوم } B\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷\\ -۵\\ ۳\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{درایهٔ مطلوب}=\begin{bmatrix}۹ & -۲ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۷\\ -۵\\ ۳\end{bmatrix}=-۶۳+۱۰+۲۷=-۲۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

در ماتریس AB سطرها مضرب یکدیگرند (مثلاً سطر اول m برابر سطر دوم است.) پس دترمینان آن صفر است. از طرفی:

$$BA=[-m+m-۱]\Rightarrow |BA|=|[-۱]|=-۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

$$|۲A|=|A^{-۱}|+۳\Rightarrow ۴|A|=\frac{۱}{|A|}+۳$$

$$\xrightarrow{\times|A|} ۴|A|^{۲}-۳|A|-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A^{-۱}|=۱\\ |A^{-۱}|=-۴\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۴}|۴A^{-۱}|=\frac{۱}{۴}\times ۴^{۲}|A^{-۱}|=۴|A^{-۱}|$$

$$\Rightarrow ۴|A^{-۱}|=\begin{cases}۴\\ -۱۶\end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

$$۲(A+B)^{-۱}=A^{-۱}+B^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۲(A+B)^{-۱}(A+B)=(A^{-۱}+B^{-۱})(A+B)$$

$$\Rightarrow ۲I=\underbrace{A^{-۱}A}_{I}+A^{-۱}B+B^{-۱}A+\underbrace{B^{-۱}B}_{I}$$

$$\Rightarrow A^{-۱}B+B^{-۱}A=\overline{O}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

ریاضیات گسسته

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم مربع و مکعب هر عدد فرد، عدد فرد است.

همچنین مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. لذا مجموع مربع و مکعب یک عدد فرد، عددی زوج خواهد بود.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینهٔ «۱»: $۲^۲ + ۳^۲ = ۱۳ \neq ۲k$

گزینهٔ «۲»: عدد ۲ را نمی‌توان به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نوشت.

گزینهٔ «۳»: حاصل‌ضرب عدد گویای صفر در هر عدد گنگ، برابر صفر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق اثبات به روش بازگشتی داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۲x(y - z - \frac{x}{۲})$$

$$\Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۲xy - ۲xz - x^۲$$

$$(x^۲ - ۲xy + y^۲) + (x^۲ + ۲xz + z^۲) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x+z)^۲ \geq ۰$$

رابطهٔ اخیر بدیهی (همواره درست) است و تمام روابط برگشت‌پذیر هستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا فاصلهٔ ۱۲ اردیبهشت تا اول دی را محاسبه می‌کنیم:

$$\underset{\text{دی}}{۱} + \underset{\text{مهر تا آذر}}{۳\times۳۰} + \underset{\text{خرداد تا شهریور}}{۴\times۳۱} + \underset{\text{اردیبهشت}}{۱۹}$$

$$۲۳۴ = ۳۳\times۷ + ۳ \Rightarrow ۲۳۴ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

بنابراین اول دی سه روز در هفته جلوتر از شنبه یعنی روز سه‌شنبه است. با توجه به ۳۰ روزه بودن ماه‌های دی و بهمن، اول بهمن روز پنج‌شنبه و اول اسفند روز شنبه خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۲۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid ۱۵k+۱۷ \\ a \mid ۱۵k+۷ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid (۱۵k+۱۷) - (۱۵k+۷)$$

$$\Rightarrow a \mid ۱۰ \xrightarrow{a \text{ عدد طبیعی}} a = ۱, ۲, ۵, ۱۰$$

از طرفی هیچ کدام از دو عدد $۱۵k+۷$ و $۱۵k+۱۷$ نمی‌توانند مضرب ۵ باشند، پس a نمی‌تواند ۵ یا ۱۰ باشد و در نتیجه تنها مقادیر $a=۱$ و $a=۲$ قابل قبول هستند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۴۰۲ بر ۱۵ را تعیین می‌کنیم:

$$۱۴۰۲ = ۹۳\times۱۵ + ۷ \Rightarrow ۱۴۰۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۷$$

پس کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۷^{۱۴۰۲}$ را بر ۱۵ تعیین کنیم:

$$۷^۲ = ۴۹ = ۳\times۱۵ + ۴ \Rightarrow ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۳۵۰} ۷^{۱۴۰۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲} ۷^{۱۴۰۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

چون دو عدد داده شده رقم‌های یکان برابر دارند، پس به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت هستند.

$$a^2+9 \overset{10}{\equiv} 4a+16 \Rightarrow a^2-4a-7 \overset{10}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow a^2-4a+10a-7 \overset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow a^2+6a-7 \overset{10}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a+7) \overset{10}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1 \overset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow a^4 \overset{10}{\equiv} 1 \\ a+7 \overset{10}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} -7 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a^4 \overset{10}{\equiv} 3^4 \overset{10}{\equiv} 1 \end{cases}$$

پس همواره $a^4 \in [1]_{10}$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

ابتدا معادلهٔ سیاله را به یک معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$(1!+2!+3!+\ldots+1402!)x \overset{21}{\equiv} 15$$

به ازای $n \geq 7$ ، $n! \overset{21}{\equiv} 0$، پس داریم:

$$\underbrace{(1+2+6}_{9}+\underbrace{24}_{3}+\underbrace{120}_{\text{صفر}}+\underbrace{720}_{6}+\underbrace{7!+\ldots+1402!}_{\text{صفر}})x \overset{21}{\equiv} 15$$

$$\Rightarrow 12x \overset{21}{\equiv} 15 \xrightarrow[(3,21)=3]{+3} 4x \overset{7}{\equiv} 5 \overset{7}{\equiv} 12 \xrightarrow[(4,7)=1]{+4} x \overset{7}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow x = 7k+3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بیشترین مقدار سه رقمی x به ازای $k = 142$ حاصل می‌شود:

$$x = 7\times 142+3 = 997 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 25$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

a فرد است $\Rightarrow (a, 1000) = 125 \Rightarrow (a, 2^3\times 5^3) = 5^3$

$$\Rightarrow a^2 = 8k+1 \Rightarrow 8 \mid a^2-1$$

از طرفی:

$$5 \mid a \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \nmid a^2-1$$

بنابراین:

$$(a^2-1, 8\times 5) = (a^2-1, 8) = (8k, 8) = 8$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی سعیدی‌زاد)*

طبق قضیه تقسیم و با توجه به فرض مسئله داریم:

$$r+q = 15 \Rightarrow q = 15-r$$

$$a = 11q+r = 11(15-r)+r, \ 0 \leq r < 11 \quad (r \text{ مقدار برای } 11)$$

$$\Rightarrow a = 165-10r \Rightarrow a-5 = 160-10r \overset{40}{\equiv} 0 \Rightarrow 10r \overset{40}{\equiv} 160$$

$$\xrightarrow[(10,40)=10]{+10} r \overset{4}{\equiv} 16 \Rightarrow r \overset{4}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow r \in \{0, 4, 8\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{11}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\overline{2a3b} \overset{9}{\equiv} 2+a+3+b \overset{9}{\equiv} 4 \Rightarrow a+b+5 \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} -1 \overset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow a+b = 8 \text{ یا } 17$$

$$\overline{4a3b1} \overset{11}{\equiv} 1-b+3-a+4 \overset{11}{\equiv} 8-(a+b)$$

حالت اول: $a+b = 8 \Rightarrow \overline{4a3b1} \overset{11}{\equiv} 8-8 \overset{11}{\equiv} 0$

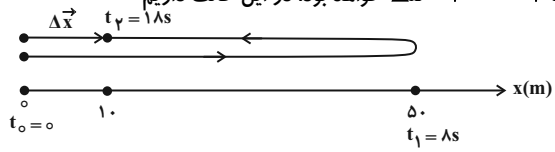
حالت دوم: $a+b = 17 \Rightarrow \overline{4a3b1} \overset{11}{\equiv} 8-17 \overset{11}{\equiv} -9 \overset{11}{\equiv} 2$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

فیزیک ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(شیلا شیرزادی)*

مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان و پس از $۸s$ مسافت $۵۰m$ را طی می‌کند و در مکان $x_۱ = ۵۰m$ قرار می‌گیرد و پس از $۱۰s$ بعد از آن که مسافت $۴۰m$ را در خلاف جهت اولیه طی می‌کند در مکان $x_۲ = ۱۰m$ قرار دارد. بنابراین مسافت طی شده توسط متحرک برابر $\ell = ۵۰ + ۴۰ = ۹۰m$ و جابه‌جایی آن برابر $\Delta x = ۱۰ - ۰ = ۱۰m$ خواهد بود. در این حالت داریم:



$$\begin{cases} s_{av} = \dfrac{\ell}{\Delta t} \\ |v_{av}| = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta t} \end{cases} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان است.}} \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{۹۰}{۱۰} = ۹$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ و ۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین برادران)*

بررسی گزاره‌ها:

آ) درست

ب) درست، با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط، بردار سرعت متوسط و بردار جابه‌جایی با یکدیگر هم‌جهت‌اند. (Δt همواره مثبت است) $\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$

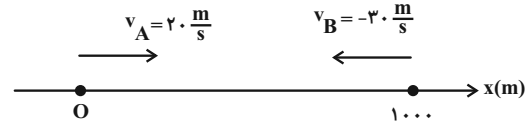
پ) درست، اگر تندی لحظه‌ای متحرک در یک بازهٔ زمانی صفر نشود، در این بازه جهت حرکت متحرک تغییر نکرده و بنابراین بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی شده با یکدیگر برابرند و مطابق رابطهٔ تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط این دو کمیت نیز با یکدیگر برابرند.

ت) نادرست - بردار سرعت لحظه‌ای به جهت حرکت متحرک بستگی دارد و الزاماً هم‌جهت با بردار مکان نیست.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

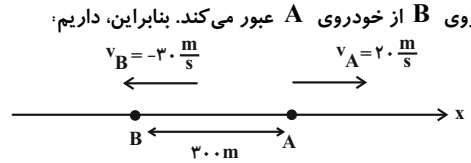
مطابق شکل زیر فرض می‌کنیم که خودروی A در لحظهٔ $t = ۰$ در مبدأ محور (نقطهٔ O) و به طرف راست در حرکت باشد. یعنی سرعت آن مثبت است. بنابراین خودروی B به طرف چپ در حرکت بوده و سرعت آن منفی است. با توجه به این‌که، معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_۰$ است، معادلهٔ مکان- زمان هر یک از دو خودرو را می‌نویسیم:



$$x_A = v_A t + x_{۰_A} \xrightarrow[x_{۰_A}=۰]{v_A = ۲۰\frac{m}{s}} x_A = ۲۰t + ۰ = ۲۰t$$

$$x_B = v_B t + x_{۰_B} \xrightarrow[v_{۰_B}=-۳۰\frac{m}{s}]{x_{۰_B}=۱۰۰۰m} x_B = -۳۰t + ۱۰۰۰$$

برای اولین بار خودروی B به خودروی A نرسیده است، اما، برای دومین بار خودروی B از خودروی A عبور می‌کند. بنابراین، داریم:



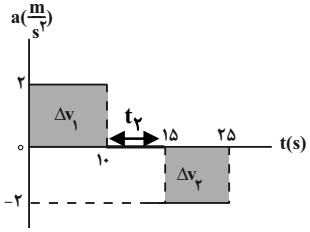
$$x_A - x_B = ۳۰۰ \Rightarrow ۲۰t - (-۳۰t + ۱۰۰۰) = ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۵۰t = ۱۳۰۰ \Rightarrow t = ۲۶s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار $a - t$ و محور t برابر Δv است. بنابراین، با محاسبهٔ Δv در بازه‌های زمانی مختلف، سرعت در لحظه‌های $۱۰s$، $۱۵s$ و $۲۵s$ را می‌یابیم و سپس با رسم نمودار $v - t$ و محاسبهٔ سطح زیر نمودار آن، مسافت طی شده را می‌یابیم:



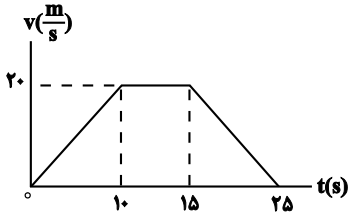
$$\Delta v_۱ = ۲ \times ۱۰ = ۲۰\frac{m}{s}, \Delta v_۲ = -۲ \times ۱۰ = -۲۰\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=۱۰s)} = v_۰ + \Delta v_۱ \xrightarrow[\Delta v_۱ = ۲۰\frac{m}{s}]{v_۰ = ۰} v_{(t=۱۰s)} = ۰ + ۲۰ = ۲۰\frac{m}{s}$$

چون در بازهٔ زمانی $۱۰s$ تا $۱۵s$ شتاب صفر است، داریم:

$$v_{(t=۱۵s)} = v_{(t=۱۰s)} \Rightarrow v_{(t=۱۵s)} = ۲۰\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=۲۵s)} = v_{(t=۱۵s)} + \Delta v_۲ = ۲۰ + (-۲۰) = ۰$$



اکنون مساحت زیر نمودار $v - t$ را که برابر مسافت طی شده است، به‌دست می‌آوریم:

$$\ell = |\text{مساحت ذوزنقه}| = |\frac{(۵+۲۵)}{۲} \times ۲۰| = ۳۰۰m$$

در آخر تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = ۲۵ - ۰ = ۲۵s} s_{av} = \frac{۳۰۰}{۲۵} = ۱۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳، ۴ و ۱۵ تا ۲۱)

۱۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیراحمد میرسعید)*

ابتدا لحظهٔ برخورد گلوله به زمین را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \xrightarrow{y=-۱۸۰m} -۱۸۰ = -۵t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۳۶ \Rightarrow t = ۶s$$

اکنون لحظه‌ای را که تندی گلوله نصف تندی برخورد آن به زمین می‌شود را می‌یابیم:

$$v_۲ = \frac{۱}{۲}v_۱ \xrightarrow{v=-gt} -gt' = -\frac{۱}{۲}gt \xrightarrow{t=۶s} t' = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳s$$

در آخر مسافتی را که گلوله پس از $۳s$ طی می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt'^۲ \xrightarrow{t'=۳s} y' = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۳^۲ = -۴۵m$$

$$\Rightarrow |y'| = |-۴۵| = ۴۵m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیاوش فارسی)*

ابتدا برایند نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را می‌یابیم و سپس بزرگی برایند نیروها را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2 \xrightarrow{\vec{F}_2=-3\vec{F}_1} \vec{F}_{net}=\vec{F}_1+(-3\vec{F}_1)=-2\vec{F}_1$$

$$\xrightarrow{\vec{F}_1=(1/5N)\vec{i}-(2N)\vec{j}} \vec{F}_{net}=-2((1/5N)\vec{i}-(2N)\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{net}=(-3N)\vec{i}+(4N)\vec{j}$$

$$\Rightarrow F_{net}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{9+16}=5N$$

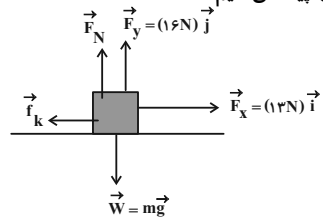
اکنون بزرگی شتاب حرکت جسم را با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌یابیم:

$$F_{net}=ma \xrightarrow[F_{net}=5N]{m=2kg} 5=2a \Rightarrow a=2/5\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

مطابق شکل زیر، مولفهٔ افقی نیروی $\vec{F}$ به جسم شتاب می‌دهد و مولفهٔ عمودی آن در نیروی عمودی تکیه‌گاه تاثیر دارد. بنابراین، ابتدا نیروی عمودی تکیه‌گاه (F_N) را پیدا می‌کنیم:



$$\vec{F}=(12N)\vec{i}+(16N)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} F_x=12N \\ F_y=16N \end{cases}$$

$$F_{net,y}=ma_y \xrightarrow{a_y=0} F_N+F_y-mg=0$$

$$\xrightarrow[F_y=16N]{m=2kg} F_N+16-2\times10=0 \Rightarrow F_N=4N$$

$$F_{net,x}=ma_x \Rightarrow F_x-f_k=ma$$

$$\xrightarrow[a=5\frac{m}{s^2}]{F_x=12N} 12-f_k=2\times5 \Rightarrow f_k=2N$$

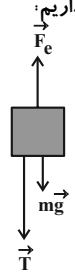
اکنون با داشتن f_k و F_N به صورت زیر، بزرگی نیروی سطح افقی را پیدا می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_k^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25} \Rightarrow R=5N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۱۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

مطابق شکل، نیروهای وزن جسم و کشش نخ رو به پایین و نیروی کشسانی فنر رو به بالا بر جسم وارد می‌شود. چون جسم در حال تعادل است، داریم:



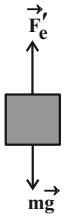
$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_e-mg-T=0$$

$$\xrightarrow{F_e=kx} kx=mg+T$$

$$\xrightarrow[m=0/6kg]{k=200\frac{N}{m},\ T=24N} 200x=0/6\times10+24$$

$$\Rightarrow 200x=30 \Rightarrow x=0/15m=15cm$$

پس از پاره شدن نخ، نیروی وزن جسم رو به پایین و نیروی کشسانی فنر رو به بالا بر جسم وارد می‌شود. پس از تعادل جسم در این حالت داریم:



$$F'_{net,y}=0 \Rightarrow F'_e-mg=0$$

$$\xrightarrow{F'_e=kx'} kx'=mg$$

$$\Rightarrow 200x'=0/6\times10 \Rightarrow x'=0/03m=3cm$$

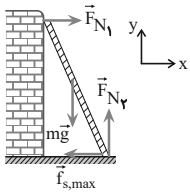
می‌بینیم طول فنر از $x=15cm$ به $x'=3cm$ کاهش یافته است. بنابراین، درصد تغییر طول فنر برابر است با:

$$\text{درصد تغییر طول فنر}=\frac{\Delta x}{x}\times100=\frac{3-15}{15}\times100=-80\%$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ و ۴۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی کنکور ریاضی)*

مطابق شکل نیروهای وارد بر نردبان را رسم کرده‌ایم. چون دستگاه در حال تعادل است، برایند نیروهای وارد بر نردبان در راستای x و y صفر است. بنابراین داریم:



$$F_{N_1}=f_{s,max} \Rightarrow F_{N_1}=\mu_s F_{N_2}$$

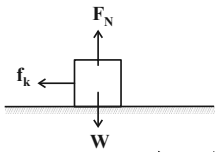
بنابراین:

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}}=\frac{F_{N_2}}{\mu_s F_{N_2}}=\frac{1}{\mu_s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۲)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(احسان ایرانی)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را مشخص می‌کنیم:



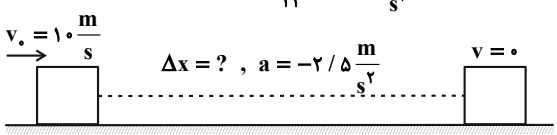
با توجه به شکل مشخص می‌شود که نیروهای $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_k$، مؤلفه‌های نیروی وارد شده از سطح به جسم هستند. یعنی:

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}&=-f_k\vec{i}+F_N\vec{j}\\ \vec{R}&=-30\vec{i}+120\vec{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f_k=30N \\ F_N=120N \end{cases}$$

$$F_N=mg \Rightarrow 120=m\times10 \Rightarrow m=12kg$$

در پرتاب جسم روی سطح افقی، تنها نیروی افقی موثر بر جسم نیروی اصطکاک است:

$$F_{net}=ma \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow a=\frac{-30}{12}=-2/5\frac{m}{s^2}$$



برای به‌دست آوردن مسافت طی شده تا لحظهٔ توقف، از معادلهٔ سرعت-جابه‌جایی (مستقل از زمان) داریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow[a=-2/5\frac{m}{s^2}]{v_0=10\frac{m}{s}} \Delta x=\frac{-v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow \Delta x=\frac{-10^2}{2\times(-2/5)}=\frac{-100}{-5}=20m$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زیبی)*

عبارت‌های (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) هر دو مخلوط، نور را پخش می‌کنند.

ب) آب سخت دارای مقادیر قابل توجهی از یون‌های کلسیم و منیزیم است.

پ) افزودن مادهٔ شیمیایی کلردار نه کلر!

ت) پاک‌کننده‌های خورنده با آلاینده‌ها هم واکنش شیمیایی می‌دهند و هم برهم‌کنش بین ذره‌ای برقرار می‌کنند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۲)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$۲C_{۱۷}H_{۳۵}COONa + Ca^{۲+} \rightarrow (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca + ۲Na^+$$

روش اول (ضرب تبدیل):

$$?\,g\ \text{صابون} = ۱۲۱/۲\,g\ \text{رسوب} \times \frac{۱\,mol\ \text{رسوب}}{۶۰۶\,g\ \text{رسوب}}$$

$$\times \frac{۲\,mol\ \text{صابون}}{۱\,mol\ \text{رسوب}} \times \frac{۳۰۶\,g\ \text{صابون}}{۱\,mol\ \text{صابون}} = ۱۲۲/۴\,g\ \text{صابون}$$

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} \times m = ۱۲۲/۴\,g \Rightarrow m = ۱۵۳\,g \qquad m: \text{جرم صابون اولیه}$$

روش دوم (کسر تناسب):

$$\frac{m \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{۲ \times ۳۰۶} = \frac{۱۲۱/۲}{۱ \times ۶۰۶} \Rightarrow m = ۱۵۳$$

$$\text{صابون واکنش نداده} \quad \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۵۳ = ۳۰/۶\,g$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴ تا ۶ و ۸ تا ۱۰)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

سدیم اکسید و دی‌نیتروژن پنتا اکسید در واکنش با آب، به ترتیب باز قوی و اسید قوی تولید می‌کنند:

$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) ۱۸ مولکول آن یونش یافته؛ بنابراین α برابر ۰/۰۱۸ است. (از ۳۶ یون تولید شده، ۱۸ یون H^+ و ۱۸ یون CN^- است.)

۲) باران اسیدی شامل نیتریک اسید و سولفوریک اسید است.

۳) فلز آلومینیم با محلول هیدروکلریک اسید واکنش داده و با مصرف یون H^+، pH محلول را افزایش می‌دهد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹ و ۲۳ تا ۲۵)

۱۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

$$K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \xrightarrow[\text{از } \alpha \text{ مخرج صرف‌نظر می‌کنیم.}]{K_a < ۱۰^{-۴}} K_a = M\alpha^۲$$

$$K_a = M\alpha^۲ \Rightarrow ۱۸ \times ۱۰^{-۶} = M \times (۳ \times ۱۰^{-۲})^۲$$

$$\Rightarrow M = ۰/۰۲\,mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M\alpha = ۲ \times ۱۰^{-۲} \times ۳ \times ۱۰^{-۲} = ۶ \times ۱۰^{-۴}$$

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = ۴ - \log_{۱۰}^{۲ \times ۳} = ۴ - (\log_{۱۰}^۲ + \log_{۱۰}^۳)$$

$$pH = ۴ - (۰/۳ + ۰/۵) = ۳/۲$$

$$?\,mL\,CH_۳COOH = ۵۰۰\,mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\,L}{۱۰۰۰\,mL}$$

$$\times \frac{۲ \times ۱۰^{-۲}\,mol\ CH_۳COOH}{۱\,L\ \text{محلول}} \times \frac{۶۰\,g\ CH_۳COOH}{۱\,mol\ CH_۳COOH}$$

$$\times \frac{۱\,mL\ CH_۳COOH}{۱/۲۵\,g\ CH_۳COOH} \times \frac{۱۰۰}{۸۰}$$

$$= ۰/۶\,mL\ CH_۳COOH$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زیبی)*

به کمک نظریهٔ آرنیوس فقط می‌توان تشخیص داد که یک ماده اسید است یا باز. براساس این نظریه نمی‌توان در مورد میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول (غلظت یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید تولید شده و pH محلول) اظهارنظر کرد، پس فقط عبارت اول درست است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۸)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ با توجه به بزرگ بودن مقدار عددی ثابت یونش اسیدی برای b می‌توان نتیجه گرفت که b یک اسید قوی است و به‌طور کامل یونیده می‌شود (فرایند یونش یک‌طرفه است.)

ب) درست؛ در محلول a مقدار $[H^+]$ برابر با $۱۰^{-۸}$ مول بر لیتر است:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۸}\,mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۸}} = ۱۰^{-۶}\,mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100$$

پ) درست؛ محلول c یک باز است و در بازها همواره رابطهٔ «$[H^+] < [OH^-]$» برقرار است.

ت) نادرست؛ محلول d یک باز ضعیف است، یعنی نوعی الکترولیت ضعیف می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

طبق صورت سؤال، مقداری باز به یک محلول اسیدی اضافه شده، بخشی از آن را خنثی کرده و مقداری محلول اسیدی باقی مانده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1/7} = 2\times10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+]_{\text{محلول نهایی}} = \frac{M_a.V_a.n_a - M_b.V_b.n_b}{V_a + V_b}$$

$$2\times10^{-2} = \frac{0/1\times V\times1 - 0/02\times400\times1}{(400+V)}$$

$$8 + 0/02V = 0/1V - 8 \Rightarrow 0/08V = 16$$

$$\Rightarrow V = 200\ mL$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۳۱)

۱۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (الف) و (پ) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ چون در اسیدهای ضعیف تعداد کمی از مولکول‌ها یونیده می‌شوند؛ بنابراین مقدار اندک یون‌های حاصل از یونش اسیدهای ضعیف با تعداد زیادی از مولکول‌های یونیده نشده در تعادل هستند.

ب) نادرست؛ ثابت یونش اسیدهای قوی بسیار بزرگ و ثابت یونش اسیدهای ضعیف بسیار کوچک است.

پ) درست؛

$$Na_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2NaOH(aq)$$

$$?\ mol\ NaOH = 0/05\ mol\ Na_2O \times \frac{2\ mol\ NaOH}{1\ mol\ Na_2O}$$

$$= 0/1\ mol\ NaOH$$

$$M = \frac{0/1\ mol}{1\ L} = 0/1\ mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = Mn\alpha = 0/1\times1\times1 = 0/1\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{10^{-1}} = 10^{-13}$$

$$\Rightarrow pH = -\log10^{-13} = 13$$

ت) نادرست؛ نام علمی جوش شیرین، سدیم هیدروژن کربنات است که به تنهایی می‌تواند به عنوان مادهٔ موثر در ضد اسیدها مورد استفاده قرار گیرد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۳۲)

۱۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$HCN \rightleftharpoons H^+ + CN^-$$

$$\alpha = \frac{\text{درصد یونش}}{100} = \frac{0/07}{100} = 7\times10^{-4}$$

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 4/9\times10^{-10} = \frac{M\times(7\times10^{-4})^2}{\underbrace{1-7\times10^{-4}}_{1}}$$

$$\Rightarrow M = 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = M.n.\alpha = 10^{-3}\times1\times7\times10^{-4} = 7\times10^{-7}\ mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{7\times10^{-7}} \simeq 1/4\times10^{-8}\ mol.L^{-1}$$

$$OH^-\ \text{شمار یون‌های} = 0/2L\times1/4\times10^{-8}\ mol.L^{-1}$$

$$= 2/8\times10^{-9}\ mol\ OH^-$$

$$pH = \log[H^+] = -\log(7\times10^{-7}) = 7 - \log 7$$

$$= 7 - 0/85 = 6/15$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(حمید زبی)*

فرمول عمومی پاک‌کنندهٔ صابونی: $C_nH_{2n-1}O_2Na$

تعداد C بدون اتصال به H در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی: ۲

بار سطحی قطرهٔ چربی در هر دو پاک‌کننده: منفی

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۲)