

نام و نام خانوادگی: کلاس: پایه: دوازدهم رشته: ریاضی	بسمه تعالی اداره آموزش و پرورش منطقه ۱۸ دبیرستان نمونه دولتی فدک امتحانات نوبت اول دی ماه ۱۴۰۱	آزمون درس: ریاضیات گسسته تعداد صفحه: ۲ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:

۱	ثابت کنید اگر a برابر مجموع مربع های ۲ عدد صحیح باشد. $2a$ نیز برابر مجموع مربع های دو عدد صحیح است.
۲	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
۰.۵	الف مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۰.۵	ب اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.
۱	۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
۱	۴ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید:
۱	$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$
۱	۵ بزرگ ترین مقدار x را بیابید به طوری که x هر دو عدد $7n - 4$ و $5n + 3$ را بشمارد.
۱	۶ اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $4k + 1$ و $16k^2 + 28k + 6$ ثابت کنید:
۱	۷ ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد کسر $\frac{14n+3}{14n+3}$ ساده شدنی نیست.
۱	۸ در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۷ باقیمانده تقسیم ۴ واحد از مربع خارج قسمت کمتر است، بیشترین مقدار ممکن a را بیابید.
۱	۹ اگر باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی مانده تقسیم a را بر ۳۰ بیابید.
۱	۱۰ اگر باقیمانده تقسیم m بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.
۱	۱۱ باقی مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.
۱	۱۲ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟
۱	۱۳ ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b \pmod m$ و $bc \equiv ac \pmod m$.
۱	۱۴ معادله هم نهشتی $3x \equiv 13 \pmod 7$ را حل و جواب عمومی آن را به دست آورید.
۱	۱۵ با تبدیل معادله سیاله خطی $29000x + 5000y = 29000$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.
۱	۱۶ تعداد کل گراف های ساده را روی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف هایی که: الف - دارای ۵ یال باشد. ب - دارای ۷ یال باشد و یال های ed, ab, cd را شامل باشد.
۱	۱۷ هر گاه $E = \{ac, dc, ed, da, bc, ce\}$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $G = (V, E)$ الف - مطلوب است: $p + q + \delta + \Delta$ ب - مطلوب است: $ N_G(a) + N_G[e] $
۱	

۱

۱۸ اگر درجات رؤس گراف G به صورت $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5$ باشد، اندازه گراف G چقدر است؟

۱

۱۹ در گراف K_5 ، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u, v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱

۲۰ گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.



تلاشی در مسیر موفقیت
 بی بگو

پاسخنامه تشریحی

۱ به روش مستقیم ثابت می کنیم: (فرض می کنیم x و y دو عدد صحیح می باشند.)

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow 2a = 2x^2 + 2y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

۲

الف

نادرست

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c \\ \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$$

ب

درست

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$$

۳ از برهان خلف استفاده می کنیم.

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta = n \in \mathbb{Q} \\ \alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \text{ (تناقض با فرض)}$$

۴

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۵

$$x \mid 5n + 3 \rightarrow x \mid 7(5n + 3) \Rightarrow x \mid 7(5n + 3) - 5(7n - 4) \rightarrow x \mid 41$$

بنابراین بیشترین مقدار x , ۴۱ است.

۶

$$5 \mid 4k + 1 \rightarrow 5^2 \mid (4k + 1)^2 \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \quad (I)$$

$$5 \mid 5 \left. \begin{aligned} \rightarrow 25 \mid 20k + 5 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\frac{(I), (II)}{\rightarrow} \left\{ \begin{aligned} 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \\ 25 \mid 20k + 5 \end{aligned} \right. \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$$

۷ باید ثابت کنیم $1 = (21n + 4, 14n + 3)$ می توان نوشت:

$$(21n + 4, 14n + 3) = (21n + 4 - 14n - 3, 14n + 3) = (7n + 1, 14n + 3) = (1, 7n + 1) = d$$

در نتیجه $d \mid 1$ بنابراین $d = 1$ یعنی $21n + 4, 14n + 3$ هیچ مقسوم علیه مشترکی جز ± 1 ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

۸ طبق فرض داریم:

$$a = 27q + q^2 - 4, \quad q^2 - 4 < 27$$

بنابراین $31 < q^2$ و $q \leq 5$ بنابراین بیشترین مقدار a برابر ۱۵۶ بدست می آید.

۹ بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} a = 6q' + 3 \\ \Delta a = 30q' + 15 \end{aligned} \right. \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

$$\Rightarrow a = 30r + 27$$

۱۰

$$\left. \begin{aligned} m = 13q_1 + 2 \xrightarrow{\times 3} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ n = 13q_2 + 9 \xrightarrow{\times 5} 5n = 13(5q_2) + 45 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39 \rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \rightarrow r = 0$$

۱۱

$$1000 \equiv -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2$$

۱۲

ش	ی	د	س	ج	پ	ح
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

$$29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \Rightarrow 131 \equiv 5$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می‌دهد.

۱۳

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc$$

۱۴

نکته: $ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$

$$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

۱۵

معادله سیاله $2x + 5y = 29$ دارای جواب است، زیرا:

$$\{2, 5\} | 29$$

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 \Rightarrow 2x \equiv 4 \Rightarrow x = 5k + 2$$

x را در معادله قرار می‌دهیم:

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 5y = -10k + 25 \Rightarrow y = -2k + 5$$

۱۶

$$\binom{5}{2} = 10 \rightarrow \text{تعداد کل گراف‌ها} = 2^{10} = 1024$$

الف -

$$\text{تعداد گراف‌ها} = \binom{10}{5} = 252$$

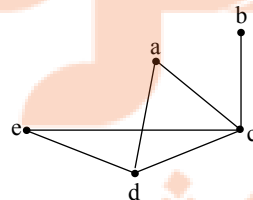
ب -

$$7 - 3 = 4, 10 - 3 = 7 \rightarrow \text{تعداد گراف‌ها} = \binom{7}{4} = 35$$

۱۷

$$p + q + \delta + \Delta = 16$$

$$\left. \begin{aligned} N_G(a) = \{d, c\} \rightarrow |N_G(a)| = 2 \\ N_G[e] = \{e, c, d\} \rightarrow |N_G[e]| = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 + 3 = 5$$



۱۸

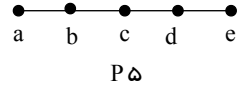
$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$q + \bar{z} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + \bar{z} = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow 12 + \bar{z} = 28 \rightarrow q = 16$$

۱۹

مسیر به طول ۱ $u, v \rightarrow 1$
 مسیر به طول ۲ $u, \boxed{3}, v \rightarrow u \underline{3} v \rightarrow 3$
 مسیر به طول ۳ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} v \rightarrow 6$
 مسیر به طول ۴ $u, \boxed{3}, \boxed{2}, \boxed{1}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} \underline{1} v \rightarrow 6$
 ۱۶

۲۰ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$abcd$, bcd

