

بناام خدا

# جزوه ریاضی ۱

(دهم تجربی و ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

\* هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمد و آل محمد است \*

التماس دعا

مجموعه: دسته‌ای از اشیاء که کاملاً مشخص را مجموعه می‌نامند.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{\text{علی, رضا}\} \quad C = \{a, b, c, d, e\}$$

مجموعه‌های معروف:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \text{مجموعه اعداد حسابی}$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \text{مجموعه اعداد صحیح}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\} = \text{مجموعه اعداد گویا}$$

$$Q' = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که انتفاقی آنها} \\ \text{را بصورت نسبت} \\ \text{دو عدد صحیح نمی‌توانند} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{اعدادی که جذر کامل} \\ \text{ندارند} \end{array} \right\}$$

$$R = Q \cup Q' = \text{مجموعه اعداد حقیقی}$$

رابطه بین مجموعه‌های معروف:

$$1) N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

$$2) R - Q = Q'$$

$$3) R - Q' = Q$$

$$4) W - N = \{0\}$$

$$5) Z - W = \{-1, -2, \dots\}$$

$$6) Z - N = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$



\* تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با:  $2^n$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه (2n-1) عضوی 14 برابر تعداد

زیر مجموعه‌های یک مجموعه (n-2) عضوی است. مقدار n چقدر است؟

$$2^{2n-1} = 14 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-1} = 2 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow 2n-1 = n-1 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

مثال ۲: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(n+4)$  عضوی از  
تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(n+2)$  عضوی  $1920$  واحد  
بیش‌تر است. مقدار  $n$  چقدر است؟

$$\begin{aligned} 2^{n+4} &= 2^{n+2} + 1920 \Rightarrow 2^{n+4} - 2^{n+2} = 1920 \Rightarrow 2^n (2^2 - 2^0) = 1920 \Rightarrow \\ 2^n (4 - 1) &= 1920 \Rightarrow 2^n \times 3 = 1920 \Rightarrow 2^n = \frac{1920}{3} = 640 = 2^9 \Rightarrow \boxed{n=5} \end{aligned}$$

مثال ۳: سه مجموعه  $(n+3)$  عضوی،  $(n+1)$  عضوی و  $(n-2)$  عضوی  
روی هم  $144$  زیرمجموعه دارند. مقدار  $n$  چقدر است؟

$$\begin{aligned} 2^{n+3} + 2^{n+1} + 2^{n-2} &= 144 \Rightarrow 2^n (2^3 + 2^1 + 2^{-2}) = 144 \Rightarrow 2^n (8 + 2 + \frac{1}{4}) = 144 \\ \Rightarrow 2^n \times \frac{37+1+1}{4} &= 144 \Rightarrow 2^n \times \frac{41}{4} = 144 \Rightarrow 2^n = \frac{4 \times 144}{41} \Rightarrow 2^n = 14 \Rightarrow \boxed{n=4} \end{aligned}$$

\* بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل:

مجموعه  $A$  را نسبت به عمل  $*$  بسته می‌گویند هرگاه به ازای هر  $a$  و  
با عضو  $A$  داشته باشیم:

$$a * b \in A$$

مثال ۱: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع و ضرب بسته است.  
زیرا:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{N} &\Rightarrow a + b = c \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} &\end{aligned}$$

حاصل جمع دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است

حاصل ضرب دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است.

$$\begin{aligned} 4 \in \mathbb{N} &\Rightarrow 4 \times 7 = 28 \in \mathbb{N} \\ 7 \in \mathbb{N} &\end{aligned}$$

مثال ۲: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق و تقسیم بسته  
نیست. زیرا:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{N} &\Rightarrow a - 1 = -1 \notin \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \in \mathbb{N} &\Rightarrow 3 \div 2 = 1.5 \notin \mathbb{N} \\ 2 \in \mathbb{N} &\end{aligned}$$

مثال ۳: آیا مجموعه  $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  نسبت به دو عمل ضرب و جمع بسته  
است؟ چرا؟





حل: نسبت به عمل ضرب بسته است زیرا:  $\left. \begin{matrix} x \in A \\ y \in A \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \cdot y = z \in A \quad (x+y \in \mathbb{Z})$


ولی نسبت به عمل جمع بسته نیست زیرا:  $\left. \begin{matrix} 2 \in A \\ 2 \in A \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2+2=4+1=12 \notin A$


\* بازه (فاصله): هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی را یک بازه (فاصله) می نامند که به صورت


زیر تعریف می شوند:


بازه ی باز  $= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  

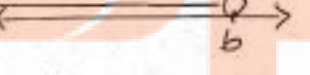
بازه ی بسته  $= [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  

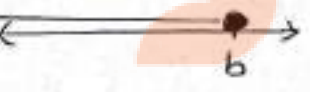
بازه ی نیم باز از راست  $= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  

بازه ی نیم باز از چپ  $= (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  

بازه ی باز بی کران از راست  $= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$  

بازه ی نیم باز بی کران از راست  $= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$  

بازه ی باز بی کران از چپ  $= (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$  

بازه ی نیم باز بی کران از چپ  $= (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  

تذکره:  $+\infty$  (مثبت بی نهایت) و  $-\infty$  (منفی بی نهایت) عدد نیستند بلکه

نماد (علامتهایی) هستند برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ و

خیلی کوچک.

مثال: بازه های زیر را بصورت مجموعه نوشته و آنها را بصورت هندسی نمایش دهید.

- الف)  $(-\infty, 4)$       ب)  $[-2, 3]$       ج)  $(5)$       د)  $[-4, 1)$

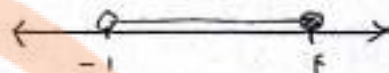
$$(-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$$



$$[-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$



$$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$$



مثال ۲: آنگاه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 < x < 4\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$

باشند. اولاً:  $A$  و  $B$  را بصورت بازه نشان دهید. ثانیاً:  $A \cap B$  و  $A \cup B$

را بصورت بازه مشخص کنید.

$$A = (2, 4)$$

$$B = (-\infty, 3]$$



$$A \cup B = (-\infty, 4)$$

$$A \cap B = (2, 3]$$



مثال ۳: نامعادلات زیر را حل کرده و جواب را بصورت بازه مشخص کنید.

الف)  $-3x + 1 < 7$

$$-3x < 7 - 1$$

$$-3x < 6$$

$$x > -\frac{6}{3}$$

$$x > -2$$

$$x \in (-2, +\infty)$$

ب)  $-1 < \frac{2x+1}{3} < 3$

$$\times 3$$

$$-3 < 2x+1 < 9$$

$$-3 - 1 < 2x + 1 - 1 < 9 - 1$$

$$-4 < 2x < 8$$

$$-\frac{4}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$$

$$-2 < x < 4 \Rightarrow x \in (-2, 4)$$

مثال ۴: درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

الف)  $3 \in [-1, \sqrt{10})$  ✓

ب)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$  ✓

ج)  $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$  ✓

د)  $-139d \in (-\infty, -1394)$  ✗

ه)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in [3, 4]$  ✓

و)  $\emptyset \subseteq (-\frac{3}{5}, 3)$  ✓



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی :

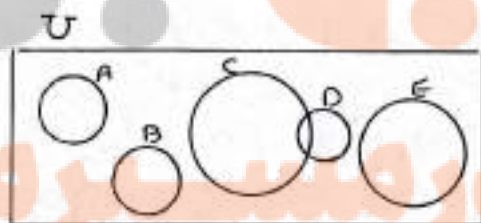
مجموعه  $A$  را یک مجموعه متناهی (با پایان - قابل شمارش) می‌گویند، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد در غیر این صورت آن را مجموعه نامتناهی (بی پایان - غیر قابل شمارش) می‌گویند.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید:

- ۱) مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور (متناهی)
- ۲) تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰ (متناهی)
- ۳) تعداد اعداد اول (نامتناهی)
- ۴) مجموعه اعداد طبیعی فرد (نامتناهی)
- ۵) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بالغ (متناهی حدود  $100,000,000,000$ )
- ۶) مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی (متناهی  $9 \times 10^9$ )
- ۷) مجموعه درختان جنگل آمازون (متناهی  $39,000,000,000$ )
- ۸) مجموعه موکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب (متناهی  $4,072 \times 10^{23}$ )
- ۹) بازه  $(0, 2)$  نامتناهی

\*مجموعه مرجع (جهانی - مادر) :

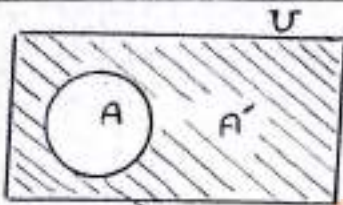
در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع نامیده و با  $U$  نشان می‌دهیم.



مهم‌ترین یک مجموعه :

اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A \subseteq U$  باشد آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم

مجموعه  $A$  نامیده و با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر  $A'$  شامل



عضوهای از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

۱)  $A' = U - A$       ۲)  $A = U - A'$

۳)  $A \cup A' = U$       ۴)  $A \cap A' = \emptyset$

۵)  $\emptyset' = U$       ۶)  $U' = \emptyset$

۷)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$       ۸)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۹)  $(A')' = A$

۱۰)  $A - B = A \cap B'$

مثال) فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  مجموعه مرجع و

$A = \{1, 4, 7, 9\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 10\}$  باشند مطلوب است محاسبه:

- الف)  $A'$       ب)  $(A')'$       ج)  $B'$       د)  $A' \cap B'$       ه)  $A' \cup B'$
- و)  $(A \cup B)'$       ز)  $A \cap B'$       ح)  $A - B$       ط)  $(A \cap B)'$

الف)  $A' = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$

ب)  $(A')' = \{1, 4, 7, 9\} = A$

ج)  $B' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

د)  $A' \cap B' = \{7, 8\}$

ه)  $A' \cup B' = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

و)  $(A \cup B)' = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\})' = \{8\} = A' \cap B'$

ز)  $(A \cap B)' = (\{1\})' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A' \cup B'$

ح)  $A \cap B' = \{5, 6, 7, 9\}$

ط)  $A - B = \{4, 7, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 10\} = \{4, 7, 9\} = A \cap B'$



\* تعداد اعضای یک مجموعه:

اگر  $A$  یک مجموعه ی متناهی باشد، تعداد اعضای  $A$  را با علامت  $n(A)$  نشان می دهیم.  $n(A)$  را عدد اصلی مجموعه  $A$  نیز می نامند و با  $|A|$  نیز نشان می دهند.

$$A = \{2, 5, 7, 11\} \Rightarrow n(A) = 4 \qquad B = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \Rightarrow n(B) = 100$$

\* دو مجموعه هم ارز (معادل):

دو مجموعه  $A$  و  $B$  را با هم هم ارز می نامند هرگاه تعداد عضوهایشان با هم برابر باشند و با علامت  $A \simeq B$  نشان می دهیم:

$$n(A) = n(B) \Leftrightarrow A \simeq B$$

$$A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow n(A) = 4 \qquad B = \{3, 10, 11, 17\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$A \simeq B$$

\* دو مجموعه جدا از هم:

دو مجموعه  $A$  و  $B$  را جدا از هم می نامند هرگاه  $A \cap B = \emptyset$

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \qquad A \cap B = \emptyset$$

(جدا از هم)

\* تعریف قطعاتی از اعداد طبیعی:

فرض کنیم  $k$  یک عدد طبیعی باشد مجموعه  $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  را قطعاتی از اعداد طبیعی می نامند.

$$N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$N_{57} = \{1, 2, 3, \dots, 57\}$$

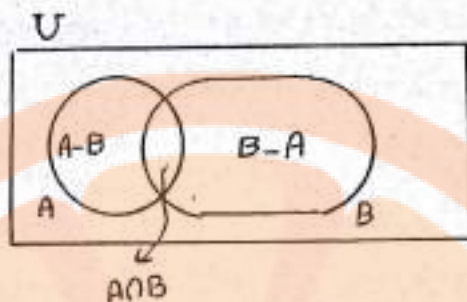
\* تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی و  $n(A)$  برابر تعداد اعضای  $A$  و  $n(B)$  برابر تعداد اعضای  $B$  باشند در این صورت تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$  را با علامت  $n(A \cup B)$  نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



درستی رابطه فوق را می توان از روی نمودار ون (ven) بصورت زیر تحقیق کرد:



- (معادله یکی)
- ۱)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - ۲)  $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
  - ۳)  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$  (مقطع A)
  - ۴)  $n(A) + n(A') = n(U) \Rightarrow \begin{cases} n(A) = n(U) - n(A') \\ n(A') = n(U) - n(A) \end{cases}$
  - ۵)  $n(\text{عضو صافی که فقط در A یا فقط در B باشند}) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A - B) + n(B - A)$

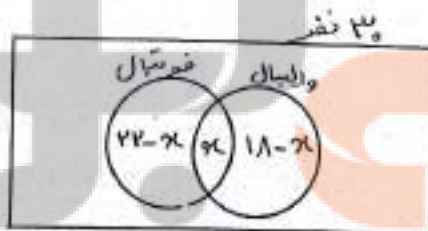
مثال ۱: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می کنند و هم والیبال؟

روش اول:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = 22 + 18 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

فوتبال =  $n(A) = 22$   
والیبال =  $n(B) = 18$   
هر دو =  $n(A \cap B) = ?$



روش دوم:

$$22 - x + x + 18 - x = 30$$

$$40 - x = 30 \Rightarrow x = 10$$

مثال ۲: در یک جمع ۴۰ نفری، ۲۰ نفر به جای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه، چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به جای علاقه ندارند؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 20 + n(B) - 15 \Rightarrow n(B) = 35$$

$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) = 35 - 15 = 20$$

چای =  $n(A) = 20$   
قهوه =  $n(B) = ?$   
هر دو =  $n(A \cap B) = 15$   
کل =  $n(A \cup B) = 40$

تذکره مهم: از آنجا که هر دو وجود دارند که بر A بخشید برید (نسبت) = جواب



مثال ۳: از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که:

الف) بر ۵ یا ۷ بخشیدنی باشد؟

ب) بر ۵ بخشیدنی باشد ولی بر ۷ بخشیدنی نباشد؟

ج) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخشیدنی باشد؟

$$A = \left[ \frac{200}{5} \right] = 40$$

$$B = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28$$

$$A \cap B = \left[ \frac{200}{35} \right] = 5$$

$$A \cup B = ?$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 40 + 28 - 5 = 63$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$= 40 - 5 = 35$$

$$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 200 - 63 = 137$$

مثال ۴: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم

بسکتبال کلاس هستند. اگر که نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ

یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟

$$25 - 5 = 20$$

$$A = 15$$

$$B = 11$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

مثال ۵: یک جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف

در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم طنز وجود دارد.

به طوری که ۳ تا از فیلم‌های کارتونی با مضامین طنز هم باشند. مطلوب است

تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) بویا تعالی یا طنز هستند. ب) غیر بویا تعالی و غیر طنزند.

$$U = 21$$

$$A = 7$$

$$B = 8$$

$$A \cap B = 3$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 7 + 8 - 3 = 12$$

$$\Rightarrow n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 21 - 12 = 9$$



مثال ۶: در یک شهر ۳۵٪ مردم روزنامه ی A و ۴۵٪ مردم روزنامه B و ۱۰٪ مردم هر دو روزنامه را مطالعه می کنند. اگر شخصی یک آلبوم در دو روزنامه A و B چاپ کند، حداکثر چند درصد از کل جمعیت این شهر ممکن است این آلبوم را ببینند؟

$$n(A) = 35\%$$

$$n(B) = 45\%$$

$$n(A \cap B) = 10\%$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 35\% + 45\% - 10\% = 70\%$$

مثال ۷: اگر  $n(A) + n(B) = ۲ \times n(A \cap B)$  باشد حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  کدام است؟ (کنکور)

۳ (د)

۴ (ج)

۱ (ب)

۲ (الف)

گزینه الف

$$n(A) + n(B) = n(A \cap B) + ۲n(A \cap B) \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۲n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = ۲$$

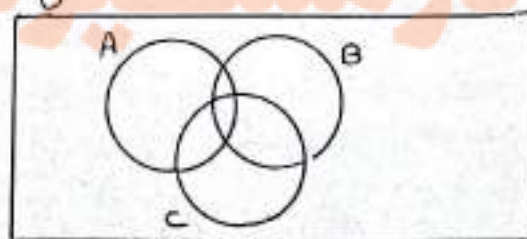
مثال ۸: فرض کنیم A و B زیرمجموعه های از مجموعه مرجع U باشند بطوریکه  $n(U) = ۴۱$  و  $n(A) = ۱۹$  و  $n(B) = ۲۱$  و  $n(A \cap B) = ۸$  مطلوب است همانند:

الف)  $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 19 - 8 = 11$

ب)  $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = 41 - 8 = 33$

\* فرمول تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



مثال: در میان اعداد ۱ تا ۲۱۰ چند عدد یافت می شود که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشند؟ (کنکور)

الف) ۱۴۸      ب) ۱۴۷      ج) ۱۴۴      د) ۱۵۲  
گزینه (ج) صحیح است.

$$۲ = \text{بر ۲ بخش پذیر} = A \Rightarrow n(A) = \left[ \frac{۲۱۰}{۲} \right] = ۱۰۵$$

$$۳ = \text{بر ۳ بخش پذیر} = B \Rightarrow n(B) = \left[ \frac{۲۱۰}{۳} \right] = ۷۰$$

$$۵ = \text{بر ۵ بخش پذیر} = C \Rightarrow n(C) = \left[ \frac{۲۱۰}{۵} \right] = ۴۲$$

$$۳ \text{ و } ۲ = \text{بر ۲ و ۳ بخش پذیر} = A \cap B \Rightarrow n(A \cap B) = \left[ \frac{۲۱۰}{۲ \times ۳} \right] = ۳۵$$

$$۲ \text{ و } ۵ = \text{بر ۲ و ۵ بخش پذیر} = A \cap C \Rightarrow n(A \cap C) = \left[ \frac{۲۱۰}{۲ \times ۵} \right] = ۲۱$$

$$۳ \text{ و } ۵ = \text{بر ۳ و ۵ بخش پذیر} = B \cap C \Rightarrow n(B \cap C) = \left[ \frac{۲۱۰}{۳ \times ۵} \right] = ۱۴$$

$$۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ = \text{بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر} = A \cap B \cap C \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = \left[ \frac{۲۱۰}{۲ \times ۳ \times ۵} \right] = ۷$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= ۱۰۵ + ۷۰ + ۴۲ - ۳۵ - ۲۱ - ۱۴ + ۷ = ۱۴۴$$

آلگوی: ساختار منظم از اشکال یا اعداد، آلویی گویند.

مثال: با تعدادی چوب کبریت مربع های متوالی ساخته ایم. آلویی تعداد مربع ها و تعداد چوب کبریت ها را بیابید.



تعداد چوب کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳
تعداد مربع	۱	۲	۳	۴

$$\text{تعداد چوب کبریت} = (۱۳ \times \text{تعداد مربع}) + ۱$$

$$\text{تعداد مربع} = \frac{\text{تعداد چوب کبریت} - ۱}{۳}$$

مثال: عددهای مقابل با چه آلویی نوشته شده اند؟

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$$

جواب:  $\frac{1}{n(n+1)}$  و  $\frac{1}{d \times 4}$  و  $\frac{1}{۴ \times d}$  و  $\frac{1}{۳ \times ۴}$  و  $\frac{1}{۲ \times ۳}$  و  $\frac{1}{۱ \times ۲}$



هر یک از اعداد الگوریتم را جمله نامند. جمله اول را با  $t_1$  و جمله دوم را با  $t_2$  و ... و جمله  $n$  ام را که جمله عمومی نامیده می شود با  $t_n$  نشان می دهند.

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$$

$t_n = 3n + 2$

$d, 1, 11, 14, \dots, 3n+2, \dots$

$\swarrow$     $\downarrow$     $\downarrow$     $\downarrow$     $\downarrow$   
 $t_1$     $t_2$     $t_3$     $t_4$     $t_n$

مثال ۱) جمله  $n$  ام دنباله ای بصورت  $t_n = (-1)^n + \frac{3}{n}$  است. چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

$a_1 = 2$     $a_2 = \frac{4}{2}$     $a_3 = 0$     $a_4 = \frac{1}{4}$

مثال ۲) جمله  $n$  ام دنباله ای بصورت  $t_n = \frac{3n^2 - 1}{n + 1}$  است. چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

$a_1 = 1$     $a_2 = \frac{11}{2}$     $a_3 = \frac{24}{4}$     $a_4 = \frac{47}{5}$

مثال ۳) جمله عمومی دنباله ای بصورت  $t_n = \frac{(-1)^n (n+1)}{3n-1}$  می باشد

و چندمین جمله این دنباله برابر با  $(-\frac{3}{7})$  می باشد.

$$t_n = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{(-1)^n (n+1)}{3n-1} = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{-(n+1)}{3n-1} = (-\frac{3}{7}) \Rightarrow \frac{n+1}{3n-1} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 9n - 3 = 7n + 7 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

مثال ۴) چندمین جمله دنباله با جمله عمومی  $t_n = \frac{2n-4}{n+2}$  برابر ۴ می باشد؟

$$t_n = 4 \Rightarrow \frac{2n-4}{n+2} = 4 \Rightarrow 2n-4 = 4n+8 \Rightarrow \boxed{n = -12}$$

الگوریتم خطی: الگوریتمی را که جمله عمومی آن را بصورت  $t_n = an + b$  باشد الگوریتم خطی می نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

ویژگی آله‌های خطی :

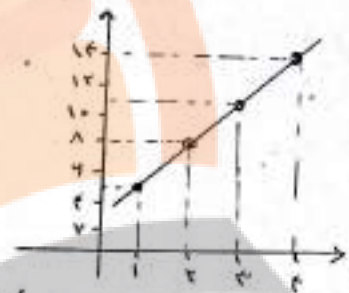
- ۱) فاصله بین جمله‌ها ثابت است و برابر ضریب  $n$  یعنی  $a$  است.
- ۲) نمودار جمله‌ها آله خط راست است.
- ۳) توان  $n$  برابر یک است.

مثال آله‌های زیر را در نظر بگیرید :

$5, 8, 11, 14, \dots$  و  $3n+2, \dots$

$n$	۱	۲	۳	۴
$t_n$	۵	۸	۱۱	۱۴

$$t_n = 3n + 2$$



مثال در یک آله خطی جمله دوم برابر ۷ و جمله ششم برابر (-۹) است  
جمله عمومی آله را بیابید.

$$t_n = an + b$$

$$\begin{aligned} t_2 = 7 &\Rightarrow a(2) + b = 7 \\ t_6 = -9 &\Rightarrow a(6) + b = -9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ 6a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 15 \end{aligned} \quad \boxed{a_n = -4n + 15}$$

آله‌های غیر خطی :

آله‌هایی که در آنها فاصله بین جمله‌ها ثابت نیست و نمودار جمله‌ها آله خط راست نیست. آله‌های غیر خطی نامیده می‌شوند.

مثال ۱ : جمله عمومی آله زیر را بیابید. آیا این آله خطی است؟  
جواب :

$5, 12, 21, 32, \dots$

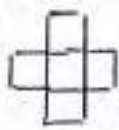
$$\begin{aligned} t_1 = 5 &= (1)^2 + 4(1) \\ t_2 = 12 &= (2)^2 + 4(2) \\ t_3 = 21 &= (3)^2 + 4(3) \end{aligned}$$

$$t_n = n^2 + 4n$$

خطی نیست چون فاصله بین جمله‌ها ثابت نیست.

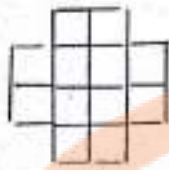


مثال: جمله عمومی را در الگوی زیر بدست آورید. آیا این الگو خطی است؟  
چرا؟



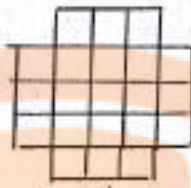
۱

$$t_1 = 1 = (1+1)^2 - 1$$



۴

$$t_2 = 4 = (2+1)^2 - 1$$



۹

$$t_3 = 9 = (3+1)^2 - 1$$

$$t_n = (n+1)^2 - 1$$

دنباله: تعدادی عدد که پشت سر هم نوشته شوند تشکیل دنباله اعداد را می دهند هر عدد دنباله را یک جمله ی آن دنباله می نامند.

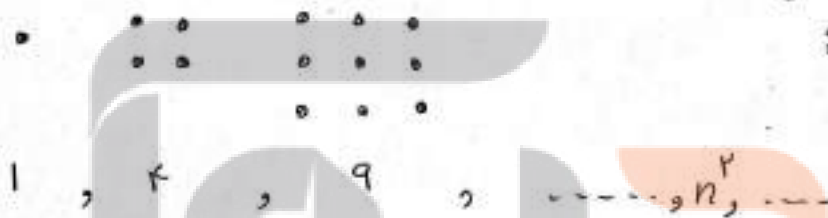
دنباله اعداد طبیعی: ۱، ۲، ۳، ۴، ...

دنباله اعداد اول: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...

دنباله اعداد زوج: ۲، ۴، ۶، ۸، ...

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$

دنباله اعداد مربعی:



دنباله اعداد مثلثی:



دنباله فیبوناچی:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ...

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

دنباله حسابی (عددی):

دنباله ای که به هر جمله آن (غیر از جمله اول) مقدار ثابتی اضافه شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله حسابی (عددی) نامیده و آن مقدار ثابت را قدر نسبت نامیده و با  $d$  نشان می دهند.

$d=7$  ,  $t_1=3$  ..... و  $31$  ,  $24$  ,  $17$  ,  $10$  ,  $3$

دنباله حسابی که قدر نسبت آن مثبت باشد را دنباله صعودی و اگر قدر نسبت آن منفی باشد را دنباله نزولی می نامند.

صعودی  $t_1=1$  ,  $d=2$  ..... و  $7$  ,  $9$  ,  $11$  ,  $13$  ,  $15$  ,  $17$  ,  $19$  ,  $21$  ,  $23$  ,  $25$  ,  $27$  ,  $29$  ,  $31$  ,  $33$  ,  $35$  ,  $37$  ,  $39$  ,  $41$  ,  $43$  ,  $45$  ,  $47$  ,  $49$  ,  $51$  ,  $53$  ,  $55$  ,  $57$  ,  $59$  ,  $61$  ,  $63$  ,  $65$  ,  $67$  ,  $69$  ,  $71$  ,  $73$  ,  $75$  ,  $77$  ,  $79$  ,  $81$  ,  $83$  ,  $85$  ,  $87$  ,  $89$  ,  $91$  ,  $93$  ,  $95$  ,  $97$  ,  $99$  ,  $101$  ,  $103$  ,  $105$  ,  $107$  ,  $109$  ,  $111$  ,  $113$  ,  $115$  ,  $117$  ,  $119$  ,  $121$  ,  $123$  ,  $125$  ,  $127$  ,  $129$  ,  $131$  ,  $133$  ,  $135$  ,  $137$  ,  $139$  ,  $141$  ,  $143$  ,  $145$  ,  $147$  ,  $149$  ,  $151$  ,  $153$  ,  $155$  ,  $157$  ,  $159$  ,  $161$  ,  $163$  ,  $165$  ,  $167$  ,  $169$  ,  $171$  ,  $173$  ,  $175$  ,  $177$  ,  $179$  ,  $181$  ,  $183$  ,  $185$  ,  $187$  ,  $189$  ,  $191$  ,  $193$  ,  $195$  ,  $197$  ,  $199$  ,  $201$  ,  $203$  ,  $205$  ,  $207$  ,  $209$  ,  $211$  ,  $213$  ,  $215$  ,  $217$  ,  $219$  ,  $221$  ,  $223$  ,  $225$  ,  $227$  ,  $229$  ,  $231$  ,  $233$  ,  $235$  ,  $237$  ,  $239$  ,  $241$  ,  $243$  ,  $245$  ,  $247$  ,  $249$  ,  $251$  ,  $253$  ,  $255$  ,  $257$  ,  $259$  ,  $261$  ,  $263$  ,  $265$  ,  $267$  ,  $269$  ,  $271$  ,  $273$  ,  $275$  ,  $277$  ,  $279$  ,  $281$  ,  $283$  ,  $285$  ,  $287$  ,  $289$  ,  $291$  ,  $293$  ,  $295$  ,  $297$  ,  $299$  ,  $301$  ,  $303$  ,  $305$  ,  $307$  ,  $309$  ,  $311$  ,  $313$  ,  $315$  ,  $317$  ,  $319$  ,  $321$  ,  $323$  ,  $325$  ,  $327$  ,  $329$  ,  $331$  ,  $333$  ,  $335$  ,  $337$  ,  $339$  ,  $341$  ,  $343$  ,  $345$  ,  $347$  ,  $349$  ,  $351$  ,  $353$  ,  $355$  ,  $357$  ,  $359$  ,  $361$  ,  $363$  ,  $365$  ,  $367$  ,  $369$  ,  $371$  ,  $373$  ,  $375$  ,  $377$  ,  $379$  ,  $381$  ,  $383$  ,  $385$  ,  $387$  ,  $389$  ,  $391$  ,  $393$  ,  $395$  ,  $397$  ,  $399$  ,  $401$  ,  $403$  ,  $405$  ,  $407$  ,  $409$  ,  $411$  ,  $413$  ,  $415$  ,  $417$  ,  $419$  ,  $421$  ,  $423$  ,  $425$  ,  $427$  ,  $429$  ,  $431$  ,  $433$  ,  $435$  ,  $437$  ,  $439$  ,  $441$  ,  $443$  ,  $445$  ,  $447$  ,  $449$  ,  $451$  ,  $453$  ,  $455$  ,  $457$  ,  $459$  ,  $461$  ,  $463$  ,  $465$  ,  $467$  ,  $469$  ,  $471$  ,  $473$  ,  $475$  ,  $477$  ,  $479$  ,  $481$  ,  $483$  ,  $485$  ,  $487$  ,  $489$  ,  $491$  ,  $493$  ,  $495$  ,  $497$  ,  $499$  ,  $501$  ,  $503$  ,  $505$  ,  $507$  ,  $509$  ,  $511$  ,  $513$  ,  $515$  ,  $517$  ,  $519$  ,  $521$  ,  $523$  ,  $525$  ,  $527$  ,  $529$  ,  $531$  ,  $533$  ,  $535$  ,  $537$  ,  $539$  ,  $541$  ,  $543$  ,  $545$  ,  $547$  ,  $549$  ,  $551$  ,  $553$  ,  $555$  ,  $557$  ,  $559$  ,  $561$  ,  $563$  ,  $565$  ,  $567$  ,  $569$  ,  $571$  ,  $573$  ,  $575$  ,  $577$  ,  $579$  ,  $581$  ,  $583$  ,  $585$  ,  $587$  ,  $589$  ,  $591$  ,  $593$  ,  $595$  ,  $597$  ,  $599$  ,  $601$  ,  $603$  ,  $605$  ,  $607$  ,  $609$  ,  $611$  ,  $613$  ,  $615$  ,  $617$  ,  $619$  ,  $621$  ,  $623$  ,  $625$  ,  $627$  ,  $629$  ,  $631$  ,  $633$  ,  $635$  ,  $637$  ,  $639$  ,  $641$  ,  $643$  ,  $645$  ,  $647$  ,  $649$  ,  $651$  ,  $653$  ,  $655$  ,  $657$  ,  $659$  ,  $661$  ,  $663$  ,  $665$  ,  $667$  ,  $669$  ,  $671$  ,  $673$  ,  $675$  ,  $677$  ,  $679$  ,  $681$  ,  $683$  ,  $685$  ,  $687$  ,  $689$  ,  $691$  ,  $693$  ,  $695$  ,  $697$  ,  $699$  ,  $701$  ,  $703$  ,  $705$  ,  $707$  ,  $709$  ,  $711$  ,  $713$  ,  $715$  ,  $717$  ,  $719$  ,  $721$  ,  $723$  ,  $725$  ,  $727$  ,  $729$  ,  $731$  ,  $733$  ,  $735$  ,  $737$  ,  $739$  ,  $741$  ,  $743$  ,  $745$  ,  $747$  ,  $749$  ,  $751$  ,  $753$  ,  $755$  ,  $757$  ,  $759$  ,  $761$  ,  $763$  ,  $765$  ,  $767$  ,  $769$  ,  $771$  ,  $773$  ,  $775$  ,  $777$  ,  $779$  ,  $781$  ,  $783$  ,  $785$  ,  $787$  ,  $789$  ,  $791$  ,  $793$  ,  $795$  ,  $797$  ,  $799$  ,  $801$  ,  $803$  ,  $805$  ,  $807$  ,  $809$  ,  $811$  ,  $813$  ,  $815$  ,  $817$  ,  $819$  ,  $821$  ,  $823$  ,  $825$  ,  $827$  ,  $829$  ,  $831$  ,  $833$  ,  $835$  ,  $837$  ,  $839$  ,  $841$  ,  $843$  ,  $845$  ,  $847$  ,  $849$  ,  $851$  ,  $853$  ,  $855$  ,  $857$  ,  $859$  ,  $861$  ,  $863$  ,  $865$  ,  $867$  ,  $869$  ,  $871$  ,  $873$  ,  $875$  ,  $877$  ,  $879$  ,  $881$  ,  $883$  ,  $885$  ,  $887$  ,  $889$  ,  $891$  ,  $893$  ,  $895$  ,  $897$  ,  $899$  ,  $901$  ,  $903$  ,  $905$  ,  $907$  ,  $909$  ,  $911$  ,  $913$  ,  $915$  ,  $917$  ,  $919$  ,  $921$  ,  $923$  ,  $925$  ,  $927$  ,  $929$  ,  $931$  ,  $933$  ,  $935$  ,  $937$  ,  $939$  ,  $941$  ,  $943$  ,  $945$  ,  $947$  ,  $949$  ,  $951$  ,  $953$  ,  $955$  ,  $957$  ,  $959$  ,  $961$  ,  $963$  ,  $965$  ,  $967$  ,  $969$  ,  $971$  ,  $973$  ,  $975$  ,  $977$  ,  $979$  ,  $981$  ,  $983$  ,  $985$  ,  $987$  ,  $989$  ,  $991$  ,  $993$  ,  $995$  ,  $997$  ,  $999$  ,  $1001$  ,  $1003$  ,  $1005$  ,  $1007$  ,  $1009$  ,  $1011$  ,  $1013$  ,  $1015$  ,  $1017$  ,  $1019$  ,  $1021$  ,  $1023$  ,  $1025$  ,  $1027$  ,  $1029$  ,  $1031$  ,  $1033$  ,  $1035$  ,  $1037$  ,  $1039$  ,  $1041$  ,  $1043$  ,  $1045$  ,  $1047$  ,  $1049$  ,  $1051$  ,  $1053$  ,  $1055$  ,  $1057$  ,  $1059$  ,  $1061$  ,  $1063$  ,  $1065$  ,  $1067$  ,  $1069$  ,  $1071$  ,  $1073$  ,  $1075$  ,  $1077$  ,  $1079$  ,  $1081$  ,  $1083$  ,  $1085$  ,  $1087$  ,  $1089$  ,  $1091$  ,  $1093$  ,  $1095$  ,  $1097$  ,  $1099$  ,  $1101$  ,  $1103$  ,  $1105$  ,  $1107$  ,  $1109$  ,  $1111$  ,  $1113$  ,  $1115$  ,  $1117$  ,  $1119$  ,  $1121$  ,  $1123$  ,  $1125$  ,  $1127$  ,  $1129$  ,  $1131$  ,  $1133$  ,  $1135$  ,  $1137$  ,  $1139$  ,  $1141$  ,  $1143$  ,  $1145$  ,  $1147$  ,  $1149$  ,  $1151$  ,  $1153$  ,  $1155$  ,  $1157$  ,  $1159$  ,  $1161$  ,  $1163$  ,  $1165$  ,  $1167$  ,  $1169$  ,  $1171$  ,  $1173$  ,  $1175$  ,  $1177$  ,  $1179$  ,  $1181$  ,  $1183$  ,  $1185$  ,  $1187$  ,  $1189$  ,  $1191$  ,  $1193$  ,  $1195$  ,  $1197$  ,  $1199$  ,  $1201$  ,  $1203$  ,  $1205$  ,  $1207$  ,  $1209$  ,  $1211$  ,  $1213$  ,  $1215$  ,  $1217$  ,  $1219$  ,  $1221$  ,  $1223$  ,  $1225$  ,  $1227$  ,  $1229$  ,  $1231$  ,  $1233$  ,  $1235$  ,  $1237$  ,  $1239$  ,  $1241$  ,  $1243$  ,  $1245$  ,  $1247$  ,  $1249$  ,  $1251$  ,  $1253$  ,  $1255$  ,  $1257$  ,  $1259$  ,  $1261$  ,  $1263$  ,  $1265$  ,  $1267$  ,  $1269$  ,  $1271$  ,  $1273$  ,  $1275$  ,  $1277$  ,  $1279$  ,  $1281$  ,  $1283$  ,  $1285$  ,  $1287$  ,  $1289$  ,  $1291$  ,  $1293$  ,  $1295$  ,  $1297$  ,  $1299$  ,  $1301$  ,  $1303$  ,  $1305$  ,  $1307$  ,  $1309$  ,  $1311$  ,  $1313$  ,  $1315$  ,  $1317$  ,  $1319$  ,  $1321$  ,  $1323$  ,  $1325$  ,  $1327$  ,  $1329$  ,  $1331$  ,  $1333$  ,  $1335$  ,  $1337$  ,  $1339$  ,  $1341$  ,  $1343$  ,  $1345$  ,  $1347$  ,  $1349$  ,  $1351$  ,  $1353$  ,  $1355$  ,  $1357$  ,  $1359$  ,  $1361$  ,  $1363$  ,  $1365$  ,  $1367$  ,  $1369$  ,  $1371$  ,  $1373$  ,  $1375$  ,  $1377$  ,  $1379$  ,  $1381$  ,  $1383$  ,  $1385$  ,  $1387$  ,  $1389$  ,  $1391$  ,  $1393$  ,  $1395$  ,  $1397$  ,  $1399$  ,  $1401$  ,  $1403$  ,  $1405$  ,  $1407$  ,  $1409$  ,  $1411$  ,  $1413$  ,  $1415$  ,  $1417$  ,  $1419$  ,  $1421$  ,  $1423$  ,  $1425$  ,  $1427$  ,  $1429$  ,  $1431$  ,  $1433$  ,  $1435$  ,  $1437$  ,  $1439$  ,  $1441$  ,  $1443$  ,  $1445$  ,  $1447$  ,  $1449$  ,  $1451$  ,  $1453$  ,  $1455$  ,  $1457$  ,  $1459$  ,  $1461$  ,  $1463$  ,  $1465$  ,  $1467$  ,  $1469$  ,  $1471$  ,  $1473$  ,  $1475$  ,  $1477$  ,  $1479$  ,  $1481$  ,  $1483$  ,  $1485$  ,  $1487$  ,  $1489$  ,  $1491$  ,  $1493$  ,  $1495$  ,  $1497$  ,  $1499$  ,  $1501$  ,  $1503$  ,  $1505$  ,  $1507$  ,  $1509$  ,  $1511$  ,  $1513$  ,  $1515$  ,  $1517$  ,  $1519$  ,  $1521$  ,  $1523$  ,  $1525$  ,  $1527$  ,  $1529$  ,  $1531$  ,  $1533$  ,  $1535$  ,  $1537$  ,  $1539$  ,  $1541$  ,  $1543$  ,  $1545$  ,  $1547$  ,  $1549$  ,  $1551$  ,  $1553$  ,  $1555$  ,  $1557$  ,  $1559$  ,  $1561$  ,  $1563$  ,  $1565$  ,  $1567$  ,  $1569$  ,  $1571$  ,  $1573$  ,  $1575$  ,  $1577$  ,  $1579$  ,  $1581$  ,  $1583$  ,  $1585$  ,  $1587$  ,  $1589$  ,  $1591$  ,  $1593$  ,  $1595$  ,  $1597$  ,  $1599$  ,  $1601$  ,  $1603$  ,  $1605$  ,  $1607$  ,  $1609$  ,  $1611$  ,  $1613$  ,  $1615$  ,  $1617$  ,  $1619$  ,  $1621$  ,  $1623$  ,  $1625$  ,  $1627$  ,  $1629$  ,  $1631$  ,  $1633$  ,  $1635$  ,  $1637$  ,  $1639$  ,  $1641$  ,  $1643$  ,  $1645$  ,  $1647$  ,  $1649$  ,  $1651$  ,  $1653$  ,  $1655$  ,  $1657$  ,  $1659$  ,  $1661$  ,  $1663$  ,  $1665$  ,  $1667$  ,  $1669$  ,  $1671$  ,  $1673$  ,  $1675$  ,  $1677$  ,  $1679$  ,  $1681$  ,  $1683$  ,  $1685$  ,  $1687$  ,  $1689$  ,  $1691$  ,  $1693$  ,  $1695$  ,  $1697$  ,  $1699$  ,  $1701$  ,  $1703$  ,  $1705$  ,  $1707$  ,  $1709$  ,  $1711$  ,  $1713$  ,  $1715$  ,  $1717$  ,  $1719$  ,  $1721$  ,  $1723$  ,  $1725$  ,  $1727$  ,  $1729$  ,  $1731$  ,  $1733$  ,  $1735$  ,  $1737$  ,  $1739$  ,  $1741$  ,  $1743$  ,  $1745$  ,  $1747$  ,  $1749$  ,  $1751$  ,  $1753$  ,  $1755$  ,  $1757$  ,  $1759$  ,  $1761$  ,  $1763$  ,  $1765$  ,  $1767$  ,  $1769$  ,  $1771$  ,  $1773$  ,  $1775$  ,  $1777$  ,  $1779$  ,  $1781$  ,  $1783$  ,  $1785$  ,  $1787$  ,  $1789$  ,  $1791$  ,  $1793$  ,  $1795$  ,  $1797$  ,  $1799$  ,  $1801$  ,  $1803$  ,  $1805$  ,  $1807$  ,  $1809$  ,  $1811$  ,  $1813$  ,  $1815$  ,  $1817$  ,  $1819$  ,  $1821$  ,  $1823$  ,  $1825$  ,  $1827$  ,  $1829$  ,  $1831$  ,  $1833$  ,  $1835$  ,  $1837$  ,  $1839$  ,  $1841$  ,  $1843$  ,  $1845$  ,  $1847$  ,  $1849$  ,  $1851$  ,  $1853$  ,  $1855$  ,  $1857$  ,  $1859$  ,  $1861$  ,  $1863$  ,  $1865$  ,  $1867$  ,  $1869$  ,  $1871$  ,  $1873$  ,  $1875$  ,  $1877$  ,  $1879$  ,  $1881$  ,  $1883$  ,  $1885$  ,  $1887$  ,  $1889$  ,  $1891$  ,  $1893$  ,  $1895$  ,  $1897$  ,  $1899$  ,  $1901$  ,  $1903$  ,  $1905$  ,  $1907$  ,  $1909$  ,  $1911$  ,  $1913$  ,  $1915$  ,  $1917$  ,  $1919$  ,  $1921$  ,  $1923$  ,  $1925$  ,  $1927$  ,  $1929$  ,  $1931$  ,  $1933$  ,  $1935$  ,  $1937$  ,  $1939$  ,  $1941$  ,  $1943$  ,  $1945$  ,  $1947$  ,  $1949$  ,  $1951$  ,  $1953$  ,  $1955$  ,  $1957$  ,  $1959$  ,  $1961$  ,  $1963$  ,  $1965$  ,  $1967$  ,  $1969$  ,  $1971$  ,  $1973$  ,  $1975$  ,  $1977$  ,  $1979$  ,  $1981$  ,  $1983$  ,  $1985$  ,  $1987$  ,  $1989$  ,  $1991$  ,  $1993$  ,  $1995$  ,  $1997$  ,  $1999$  ,  $2001$  ,  $2003$  ,  $2005$  ,  $2007$  ,  $2009$  ,  $2011$  ,  $2013$  ,  $2015$  ,  $2017$  ,  $2019$  ,  $2021$  ,  $2023$  ,  $2025$  ,  $2027$  ,  $2029$  ,  $2031$  ,  $2033$  ,  $2035$  ,  $2037$  ,  $2039$  ,  $2041$  ,  $2043$  ,  $2045$  ,  $2047$  ,  $2049$  ,  $2051$  ,  $2053$  ,  $2055$  ,  $2057$  ,  $2059$  ,  $2061$  ,  $2063$  ,  $2065$  ,  $2067$  ,  $2069$  ,  $2071$  ,  $2073$  ,  $2075$  ,  $2077$  ,  $2079$  ,  $2081$  ,  $2083$  ,  $2085$  ,  $2087$  ,  $2089$  ,  $2091$  ,  $2093$  ,  $2095$  ,  $2097$  ,  $2099$  ,  $2101$  ,  $2103$  ,  $2105$  ,  $2107$  ,  $2109$  ,  $2111$  ,  $2113$  ,  $2115$  ,  $2117$  ,  $2119$  ,  $2121$  ,  $2123$  ,  $2125$  ,  $2127$  ,  $2129$  ,  $2131$  ,  $2133$  ,  $2135$  ,  $2137$  ,  $2139$  ,  $2141$  ,  $2143$  ,  $2145$  ,  $2147$  ,  $2149$  ,  $2151$  ,  $2153$  ,  $2155$  ,  $2157$  ,  $2159$  ,  $2161$  ,  $2163$  ,  $2165$  ,  $2167$  ,  $2169$  ,  $2171$  ,  $2173$  ,  $2175$  ,  $2177$  ,  $2179$  ,  $2181$  ,  $2183$  ,  $2185$  ,  $2187$  ,  $2189$  ,  $2191$  ,  $2193$  ,  $2195$  ,  $2197$  ,  $2199$  ,  $2201$  ,  $2203$  ,  $2205$  ,  $2207$  ,  $2209$  ,  $2211$  ,  $2213$  ,  $2215$  ,  $2217$  ,  $2219$  ,  $2221$  ,  $2223$  ,  $2225$  ,  $2227$  ,  $2229$  ,  $2231$  ,  $2233$  ,  $2235$  ,  $2237$  ,  $2239$  ,  $2241$  ,  $2243$  ,  $2245$  ,  $2247$  ,  $2249$  ,  $2251$  ,  $2253$  ,  $2255$  ,  $2257$  ,  $2259$  ,  $2261$  ,  $2263$  ,  $2265$  ,  $2267$  ,  $2269$  ,  $2271$  ,  $2273$  ,



مثال ۲: جمله هفدهم یک دنباله عددی ۴۸ و جمله بیستم آن ۹۰ می باشد. این دنباله را مشخص کنید.

$$t_{17} = 48 \Rightarrow t_1 + 16d = 48 \quad t_{20} = 90 \Rightarrow t_1 + 19d = 90$$

$$\begin{cases} t_1 + 16d = 48 \\ t_1 + 19d = 90 \end{cases} \Rightarrow \boxed{d=12} \text{ و } \boxed{t_1=0} \quad 0, 12, 24, 36, 48, \dots$$

مثال ۳: در یک دنباله حسابی  $t_4 + t_{11} = 10d$  و  $t_7 + t_{18} = 10a$  این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_4 + t_{11} = 10d \\ t_7 + t_{18} = 10a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 3d + t_1 + 10d = 10d \\ t_1 + 6d + t_1 + 17d = 10a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 + 13d = 10d \\ 2t_1 + 23d = 10a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ d = 5 \end{cases}$$

$$0, 5, 10, 15, 20, \dots$$

فرمول قدرنسبت در دنباله حسابی:

اگر در یک دنباله حسابی جمله  $n$  ام  $(t_n)$  و جمله  $m$  ام  $(t_m)$  مشخص باشد قدرنسبت این دنباله از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{d = \frac{t_n - t_m}{n - m}}$$

$$\begin{aligned} \text{اثبات: } \frac{t_n - t_m}{n - m} &= \frac{[t_1 + (n-1)d] - [t_1 + (m-1)d]}{n - m} = \frac{t_1 + nd - d - t_1 - md + d}{n - m} \\ &= \frac{nd - md}{n - m} = \frac{(n-m)d}{n - m} = d \end{aligned}$$

مثال: جمله دوازدهم یک دنباله عددی ۱۲۷ و جمله هفتم آن ۹۲ می باشد. قدرنسبت این دنباله را بدست آورید.

روش I

$$d = \frac{t_{12} - t_7}{12 - 7} = \frac{127 - 92}{12 - 7} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\text{روش II} \quad \begin{cases} t_1 + 11d = 127 \\ t_1 + 6d = 92 \end{cases} \Rightarrow d = 7$$

فرمول تعداد جمله در دنباله حسابی :

تعداد جمله در یک دنباله حسابی متناهی که جمله اول آن  $t_1$  و جمله  $n$ ام آن  $t_n$  و قدر نسبت  $d$  باشد از فرمول زیر بدست می آید :

$$n = \left( \frac{t_n - t_1}{d} \right) + 1$$

جمله اول      جمله  $n$ ام

تعداد جمله ←      قدر نسبت

مثال) تعداد جمله در دنباله زیر چندتا است ؟

۴۰، ۴۷، ۵۴، ... و ۲۰۸

$t_1 = 40$

$t_n = 208$

$n = ?$  ,  $d = 7$

$$n = \left( \frac{208 - 40}{7} \right) + 1 = \frac{168}{7} + 1 = 24 + 1 = 25$$

فرمول واسطه حسابی :

اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند طراواوسطه عددی بین  $a$  و  $c$  می نامند که از فرمول زیر بدست می آید :

دنباله حسابی :  $a, b, c, \dots \Rightarrow \boxed{a + c = 2b}$  یا  $\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$

اثبات :  $\begin{cases} b = a + d \\ b = c - d \end{cases} \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$

مثال ۱) مقدار  $x$  را چنان تعیین کنید که سه جمله زیر یک دنباله عددی تشکیل دهند.

$x^2 + 2$  ,  $x^2 + 11$  و  $12x - 4$

$2(x^2 + 11) = (x^2 + 2) + (12x - 4) \Rightarrow 2x^2 + 22 = x^2 + 12x - 4 \Rightarrow x^2 - 12x + 26 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 10 \end{cases}$



مثال ۲: مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که عبارت‌های زیر شکل دنباله حسابی بدهند.

$a+b$  ,  $2a+b+1$  ,  $3b+2a-2$  ,  $da+b+1$

$$\begin{cases} (a+b) + (3b+2a-2) = 2(2a+b+1) \\ (2a+b+1) + (da+b+1) = 2(3b+2a-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+2b=4 \\ 3a-2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

مثال ۳: بین دو عدد  $(-7)$  و  $23$  پنج واسطه حسابی درج کنید.

$t_1 = -7$   
 $t_n = 23$   
 $d = \frac{t_n - t_1}{n-1} = \frac{23 - (-7)}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$-7, -2, 3, 8, 13, 18, 23$

فرمول مجموع جمله‌ها در دنباله حسابی متناهی:

مجموع  $n$  جمله  
 $S_n = \frac{n}{2} (t_1 + t_n)$

(زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول و جمله آخر و تعداد جمله مشخص باشد.)

مجموع  $n$  جمله  
 $S_n = \frac{n}{2} [2t_1 + (n-1)d]$

(زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول و قدرنسبت و تعداد جمله مشخص باشد.)

مثال ۱: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر  $(-21)$  و قدرنسبت برابر  $d$  می‌باشد مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

$t_1 = -21$   
 $d = d$   
 $S_{20} = ?$   
 $n = 20$   
 $S_n = \frac{n}{2} [2t_1 + (n-1)d] = \frac{20}{2} [2(-21) + (20-1)d]$   
 $\Rightarrow S_{20} = 10(-42 + 19d) = 530$

مثال ۲: مجموع بیست و یک جمله اول یک دنباله عددی برابر  $903$  و جمله هفتم آن  $27$  می‌باشد جمله اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.

$$S_n = 90^3 \Rightarrow \frac{21}{2} [2t_1 + (21-1)d] = 90^3 \Rightarrow |2t_1 + 20d = 14|$$

$$t_1 = 27 \Rightarrow |t_1 + 4d = 27|$$

$$\begin{cases} 2t_1 + 20d = 14 \\ t_1 + 4d = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$a_{10} = 24 \\ a_4 = 20$$

حل چند تقریب ۳۲

تقریب ۱: مجموع ۵ جمله متوالی از یک دنباله حسابی ۱۰، حاصل صند  $t_n = ?$  این جمله ها ۳۲ است. دنباله را مشخص کنید.

$$(x-2d) + (x-d) + x + (x+d) + (x+2d) = 10 \Rightarrow dx = 10 \Rightarrow |x = 2|$$

$$(x-2d)(x-d)(x)(x+d)(x+2d) = 320 \Rightarrow x(x^2-d^2)(x^2-4d^2) = 320$$

$$\Rightarrow 2(4-d^2)(4-4d^2) = 320 \Rightarrow 2(4-d^2)4(1-d^2) = 320 \Rightarrow (4-d^2)(1-d^2) = 40$$

$$\Rightarrow d^4 - 2d^2 + 4 = 40 \Rightarrow d^4 - 2d^2 - 36 = 0 \Rightarrow (d^2-9)(d^2+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \\ d^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3, x = 2 \Rightarrow \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \\ d = -3, x = 2 \Rightarrow \dots, 1, 4, 7, -4, -7, \dots \end{cases}$$

تقریب ۲: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند ۲۱ و مجموع مربعات آنها ۱۴۵ می باشد. آن سه عدد را بنویسید.

$$x-d, x, x+d$$

$$(x-d) + x + (x+d) = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow |x = 7|$$

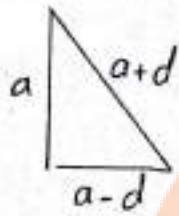
$$(x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 145 \Rightarrow (7-d)^2 + 7^2 + (7+d)^2 = 145 \Rightarrow$$

$$49 - 14d + d^2 + 49 + 49 + 14d + d^2 = 145 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

$$10, 7, 4 \quad \underline{6} \quad 4, 7, 10$$



تقریب ۳: اضلاع یک مثلث قائم الزویه تشکیل یک دنباله حسابی می دهند اگر محیط این مثلث ۳۴ باشد، مساحت آن چقدر است؟



حل: اضلاع مثلث را  $a-d, a, a+d$  در نظر می گیریم

$$\text{محیط} = 34 \Rightarrow (a-d) + a + (a+d) = 34 \Rightarrow 3a = 34 \Rightarrow \boxed{a=12}$$

$$\text{قضیه فیثاغورس: } (a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow (12-d)^2 + 12^2 = (12+d)^2$$

$$\Rightarrow 144 - 24d + d^2 + 144 = 144 + 24d + d^2 \Rightarrow 144 = 48d \Rightarrow \boxed{d=3}$$

اضلاع: 9, 12, 15  $\Rightarrow S = \frac{9 \times 12}{2} = 54$

تقریب ۴: زاویه های داخلی یک ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر اندازه کوچکترین زاویه ۹۲ درجه باشد، اندازه بزرگترین زاویه را بدست آورید.

حل: بی وانی مجموع زاویه های داخلی هر که ضلعی محدب برابر  $180^\circ$  است.

زاویه ها:  $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

$$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 180^\circ \Rightarrow 5a = 180^\circ \Rightarrow \boxed{a=36}$$

$$\text{کوچکترین زاویه} = a-2d = 92^\circ \Rightarrow 36 - 2d = 92^\circ \Rightarrow 2d = 14 \Rightarrow \boxed{d=7}$$

$$\text{بزرگترین زاویه} = a+2d = 36 + 2(7) = 50^\circ$$

تقریب ۵: ۳۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کرده ایم که سهم های دریافت شده تشکیل دنباله حسابی دهند و یک سهم مجموع سه سهم بزرگتر مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد. بیشترین سهم دریافتی نان چند قرص است؟

سهم ها:  $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

$$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 30 \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

$$\frac{1}{3} [(4+2d) + (4+d) + 4] = (4-2d) + (4-d) \Rightarrow \boxed{d=1}$$

بیشترین سهم نان =  $4 + 2(1) = 6$

دنباله هندسی:

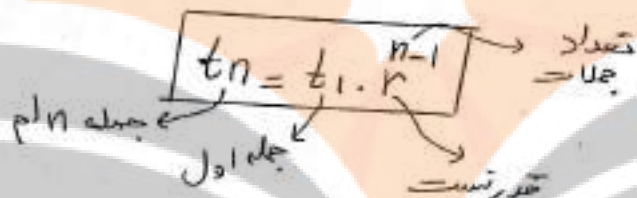
دنباله ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) در مقدار ثابتی ضرب شود تا جمله بعدی بدست آید را دنباله هندسی می نامند و آن مقدار ثابت را قدر نسبت نامیده و با  $r$  (یا  $q$ ) نشان می دهند.

الف)  $r = 3$  ، ..... ،  $4^2$  ،  $18$  ،  $4$  ،  $2$  (اند)

ب)  $r = -2$  ، ..... ،  $-32$  ،  $16$  ،  $-8$  ،  $4$  (ب)

فرمول جمله  $n$  ام در دنباله هندسی بصورت زیر است:

$$t_1, t_1 \cdot r, t_1 \cdot r^2, t_1 \cdot r^3, \dots, t_1 \cdot r^{n-1}$$



مثال ۱: جمله دهم در دنباله هندسی  $1, 2, 4, 8, \dots$  را بیابید.

$t_1 = 1$  ،  $r = 2$  ،  $t_{10} = t_1 \cdot r^9 = 1 \times 2^9 = 1 \times 512 = 512$

مثال ۲: در یک دنباله هندسی جمله هشتم ۱۱ برابر جمله چهارم است. قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

$$t_8 = 11 \times t_4 \Rightarrow t_1 r^7 = 11 \times t_1 r^3 \Rightarrow r^7 = 11 \times r^3 \Rightarrow r^4 = 11 \Rightarrow r = \pm \sqrt[4]{11}$$

فرمول قدر نسبت در دنباله هندسی:

اگر جمله  $n$  ام ( $t_n$ ) و جمله  $m$  ام ( $t_m$ ) در یک دنباله هندسی مشخص باشند قدر نسبت دنباله از فرمول زیر بدست می آید:

$$r = \frac{t_n}{t_m}^{\frac{1}{n-m}}$$

مثال ۱: جمله هشتم یک دنباله هندسی مساوی هشت برابر جمله چهارم آن است. نسبت جمله دوازدهم به جمله هشتم آنرا حساب کنید.

$$t_8 = 8 \times t_4 \Rightarrow t_1 r^7 = 8 \times t_1 r^3 \Rightarrow r^4 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[4]{8}$$

$$\frac{t_{12}}{t_8} = r^4 = 8 \Rightarrow \frac{t_{12}}{t_8} = 8$$



مثال ۲: در یک دنباله هندسی جمله ششم  $d^6$  و جمله هشتم  $477$  می باشد قدر نسبت را بدست آورید.

$$r = \frac{t_1}{t_4} \Rightarrow r = \frac{FVU}{d^3} \Rightarrow r^3 = 9 \Rightarrow \boxed{r = \pm 3}$$

مثال ۳: حاصل ضرب ۱۰۰ جمله از دنباله هندسی  $d, rd, r^2d, \dots$  را بدست آورید.

$$d^1 \times d^2 \times d^3 \times \dots \times d^{100} = d^{1+2+3+\dots+100} = d^{\frac{100 \times 101}{2}} = d^{5050}$$

واسطه هندسی: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه جمله ای متوالی از یک دنباله هندسی باشند طرا واسطه هندسی بین  $a$  و  $c$  می نامند و بین آنها رابطه زیر برقرار است:

$$a, b, c \text{ دنباله هندسی} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot c} \quad \text{یا} \quad \boxed{b = \sqrt{a \cdot c}}$$

مثال ۱: مقدار  $x$  را چنان تعیین کنید که سه عبارت  $x-1$  و  $2x+4$  و  $4x+24$  تشکیل یک دنباله هندسی بدهند.

$$b^2 = ac \Rightarrow (2x+4)^2 = (x-1)(4x+24) \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 4x^2 + 44x - 4x - 24 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

مثال ۲: بین ۱۰ و ۳۲ چهار واسطه هندسی درج کنید

۱۰,  $\bigcirc$ ,  $\bigcirc$ ,  $\bigcirc$ ,  $\bigcirc$ , ۳۲

$$t_1 = 10, t_4 = 32 \Rightarrow \frac{t_4}{t_1} = r^3 \Rightarrow \frac{32}{10} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{32}{10}} \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰ و ۱۶۰, ۳۲۰

فرمول مجموع  $n$  جمله اول در دنباله هندسی: اگر در یک دنباله هندسی جمله اول برابر  $t_1$  و جمله  $n$  ام برابر  $t_n$  و قدر نسبت برابر  $r$  باشد مجموع  $n$  جمله اول را با  $S_n$  نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{t_1(1 - r^n)}{1 - r}}$$

مثال ۱: در یک دنباله هندسی  $t_1=3$  و  $r=2$  و  $n=5$  است.  $S_n$  و  $t_n$  را بدست آورید.

$$t_5 = t_1 \cdot r^4 \Rightarrow t_5 = 3 \times 2^4 = 24$$

$$S_5 = \frac{t_1(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 2^5 - 1 = 31$$

مثال ۲: در یک دنباله هندسی  $r=2$  و  $t_1=4$  است. مجموع جمله اول این دنباله را بدست آورید.

$$S_{10} = \frac{t_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 4(2^{10} - 1) = 4 \times 1023 = 4092$$

مثال ۳: در یک دنباله هندسی  $t_5 - t_1 = 20$  و  $S_5 = 10$  است. قدر نسبت دنباله را بدست آورید.

$$t_5 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1 \cdot r^4 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1(r^4 - 1) = 20$$

$$S_5 = \frac{t_1(r^5 - 1)}{r - 1} \Rightarrow 10 = \frac{20}{r - 1} \Rightarrow r - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

مثال ۴: در یک دنباله هندسی جمله اول ۲ و مجموع ۴ جمله اول ۲۸ برابر مجموع ۳ جمله اول است. قدر نسبت و جمله پنجم را بدست آورید.

$$S_4 = 28 \times S_3 \Rightarrow \frac{t_1(r^4 - 1)}{r - 1} = 28 \times \frac{t_1(r^3 - 1)}{r - 1} \Rightarrow r^4 - 1 = 28(r^3 - 1)$$

$$\Rightarrow (r^4 + 1)(r - 1) = 28(r^3 - 1) \Rightarrow r^4 + 1 = 28r^3 \Rightarrow r^4 = 27r^3 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

$$t_5 = t_1 \times r^4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

مثال ۵: حاصلضرب سه عدد که تشکیل دنباله هندسی می دهند برابر ۲۷۴۴ و مجموع آنها ۴۹ می باشد. آن سه عدد کدامند؟

$$\frac{x}{r} \times x \times xr = 2744 \Rightarrow x^3 = 2744 \Rightarrow \boxed{x = 14}$$

$$\frac{14}{r} + 14 + 14r = 49 \Rightarrow 2r^2 - 4r + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{r = 2} \text{ یا } \boxed{r = \frac{1}{2}} \quad 28, 14, 7$$

فردول در مجموع جمله  $n$  در یک دنباله هندسی: متناهی؟

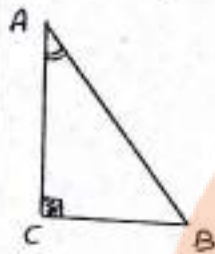
$$S_n = \frac{t_1}{1 - r} \quad |r| < 1$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{t_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$



«مثلثات»

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبتهای مثلثاتی هر یک از زاویه‌های تند مثلث را که عبارتند از: سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

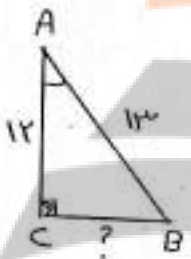


$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل وتر}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور وتر}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل ضلع مجاور}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور ضلع مقابل}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot A = \frac{AC}{BC}$$



مثال ۱: با توجه به شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زاویه  $\hat{A}$  را بیابید

$$BC^2 + 12^2 = 13^2$$

$$BC^2 + 144 = 169$$

$$BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

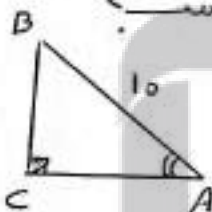
$$\sin A = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{5}{12}$$

$$\cot A = \frac{12}{5}$$

مثال ۲: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتیمتر و سینوس یکی از زاویه‌های آن  $\frac{3}{5}$  است. محیط مثلث چند سانتیمتر است؟



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BC}{10} \Rightarrow BC = 6$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow AC = 8$$

$$\text{محیط} = 4 + 8 + 10 = 22$$

جدول نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$ :

زاویه / نسبت	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال ۱: مقدار عددی عبارتهای زیر را بدست آورید

$$A = \frac{P \sin^2 \alpha - P \cos^2 \alpha}{1 + P \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$B = \frac{P \cos^2 \alpha - P \sin^2 \alpha}{P \tan \alpha + P \cos^2 \alpha} =$$

$$C = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$D = P \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \tan \alpha \tan \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta =$$

$$E = P \cos^2 \alpha - P \sin^2 \alpha =$$

$$F = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$G = P \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + P \sin^2 \alpha \cos^2 \beta =$$

مثال ۲: درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \tan^2 \alpha$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 \alpha + P \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha$$



$$\rightarrow) F \sin 40^\circ \cos 30^\circ - 3 \tan 40^\circ + \tan^2 40^\circ = 3$$

$$\rightarrow) \sin 30^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3} \sin^2 40^\circ$$

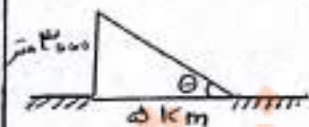
$$\rightarrow) \tan 40^\circ + \sin 30^\circ \cot 40^\circ = \frac{3}{F}$$

$$\rightarrow) 3 \cos 30^\circ - F \cos 30^\circ = 0$$

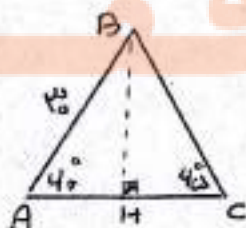
$$\rightarrow) 1 - 3 \sin^2 30^\circ = 3 - 3 \sin^2 40^\circ$$

مثال ۳: هواپیمایی در ارتفاع ۳۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما وقتی به فاصله ۴ کیلومتری باند فرود می‌رسد روی یک خط شروع به پایین آمدن می‌کند. تانژانت زاویه‌ای که مسیر این هواپیما از زمین می‌سازد چقدر است؟

$$3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$$



$$\tan \theta = \frac{3}{4} = 0,75$$

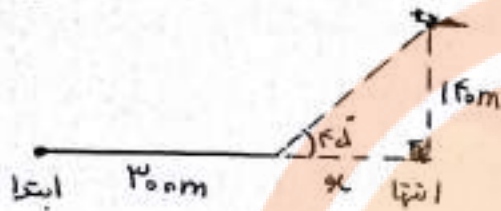


مثال ۴: با توجه به شکل اندازه BC را بدست آورید. حله ارتفاع BH را رسم می‌کنیم:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 40^\circ = \frac{BH}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = 1,5\sqrt{2} \approx 2,12$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow 0,5 = \frac{2,12}{BC} \Rightarrow BC = \frac{2,12}{0,5} = 4,24$$

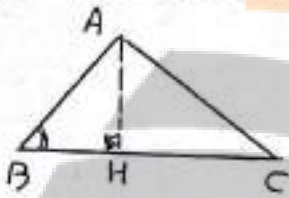
مثال ۱: هواپیمایی می خواهد از باند بلند شود. ابتدا ۳۰ متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم را پیدا کند سپس با زاویه ۴۰° از زمین بلند می شود. وقتی به بالای انتهای باند می رسد ۱۴ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟



$$\tan 40^\circ = \frac{14}{x} \Rightarrow 1 = \frac{14}{x} \Rightarrow x = 14 \text{ m}$$

$$\text{طول باند} = 30 + 14 = 44 \text{ m}$$

فرمول مساحت مثلث: ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع آن در سینوس زاویه بین همان دو ضلع:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} BC \times AH$$

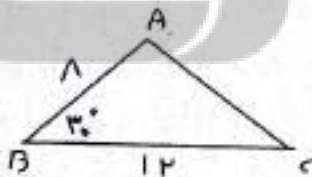
$$\text{از طرفی: } \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin B$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \sin B$$

بطور کلی در مثلث  $\hat{ABC}$ :

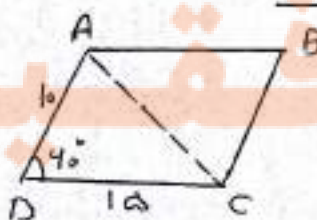
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C$$

مثال ۱: مساحت مثلث  $\hat{ABC}$  را بیابید.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \frac{1}{2} = 36$$

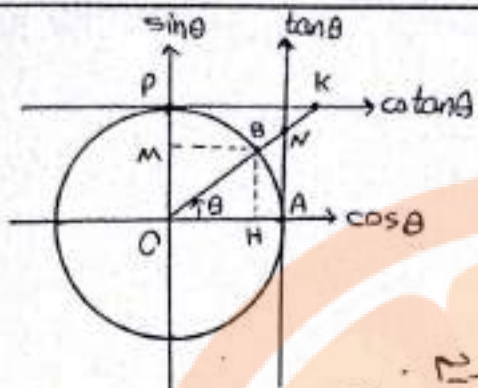
مثال ۲: مساحت متوازی الاضلاع مقابل را بیابید.



$$S_{\Delta ABCD} = 2 \times S_{\Delta ACD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 15 \times 10 \times \sin 40^\circ$$

$$= 15 \times 10 \times \frac{\sqrt{13}}{2} = 75\sqrt{13}$$





دایره مثلثاتی :

دایره‌ای است به شعاع واحد که نقطه

A را به عنوان مبدأ حرکت کمانها روی

آن در نظری گیریم. جهت حرکت عقربه‌ها

ساعت را جهت منق و خلاف جهت حرکت

عقربه‌های ساعت را جهت مثبت در نظری گیریم.

اگر از نقطه A و در جهت مثبت مثلثاتی روی دایره حرکت کنیم و نقطه B

برسیم زاویه theta تشکیل می‌شود. محور xها را محور گسینوسها و محور

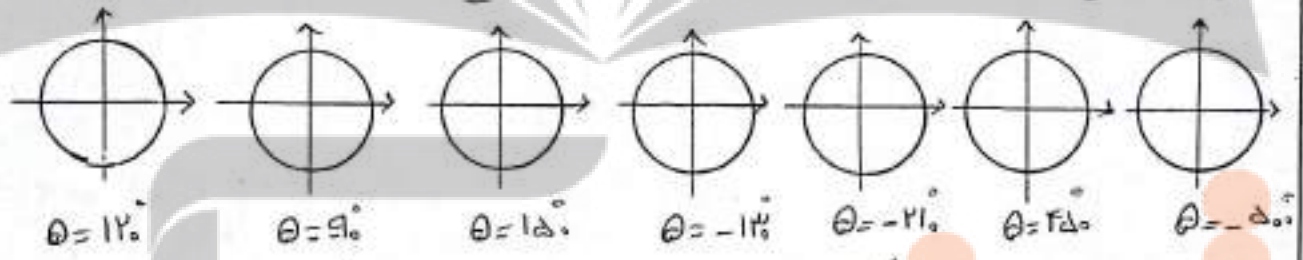
yها را محور سینوسها در نظری گیریم. معادله دایره مثلثاتی و موازی محور

سینوسها را محور تانژانتها و معادله دایره مثلثاتی و موازی محور

گسینوسها را محور کتانژانتها در نظری گیریم مطابق شکل :

$$\sin \theta = OM \quad \cos \theta = OH \quad \tan \theta = AN \quad \cotan \theta = PK$$

مثال) هر یک از زاویه‌های داده شده را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید.

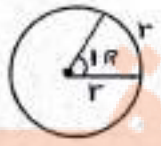


واحدهای اندازه گیری زاویه :

۱) درجه (D) : اگر یک زاویه نیم صفحه را به ۱۸۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک درجه می‌نامند.

۲) گراد (G) : اگر یک زاویه نیم صفحه را به ۲۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک گراد می‌نامند.

۳) رادیان (R) : یک رادیان برابر همانی از دایره است که اندازه آن برابر شعاع دایره باشد.



رابطه بین واحدهای اندازه گیری زاویه :

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال ۴۰ درجه برابر چند گراد و چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{40}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{40 \times 200}{180} = \frac{200}{9} \approx 44,4$$

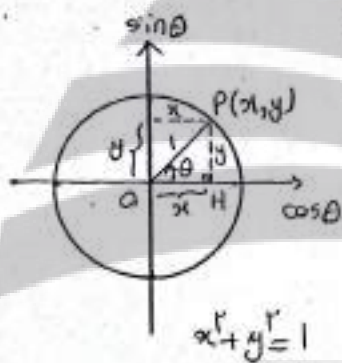
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{40}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{40\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

مثال ۱۵۰ درجه چند گراد چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{150}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{150 \times 200}{180} \approx 144,4$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{150}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{150\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{6}$$

بطور کلی:  $180^\circ$  درجه =  $200^\circ$  گراد =  $\pi$  رادیان



فرض کنید نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی رویه باشد و  $\theta$  زاویه‌ای است که نیم خط  $OP$  با محور  $x$  در جهت مثبت می‌سازد. از نقطه  $P$  عمودهایی بر محور  $x$  و  $y$  می‌کشیم که مطابق شکل در مثلث  $OPH$  داریم:

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

مثال ۱: اگر  $\theta$  زاویه‌ای در جهت مثبت مثلثاتی باشد بطوریکه نقطه انتهای کمان  $\theta$  دایره مثلثاتی را در نقطه  $P\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$  قطع کند نسبتهای مثلثاتی  $\theta$  را بدست آورید.

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \sin \theta = y = -\frac{2}{\sqrt{a}} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{-2\sqrt{a}}{a}$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{a}} \quad \cos \theta = x = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{-\frac{2}{\sqrt{a}}} = -\frac{1}{2}$$

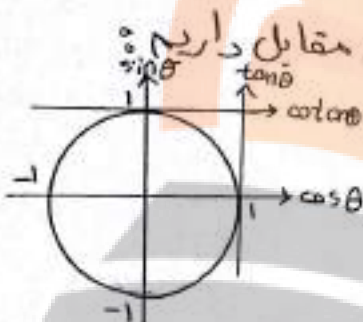


مثال ۲: اگر  $\theta$  زاویه‌ای درجه‌ای حسب مثلثاتی باشد انتهای کمان  $\theta$  دایره مثلثاتی را در نقطه  $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$  قطع کند نسبتای مثلثاتی  $\theta$  را بیابید.

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \theta = y = -\frac{1}{2} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \cos \theta = x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

جدول نسبتای مثلثاتی  $0^\circ$  و  $9^\circ$  و  $18^\circ$  و  $27^\circ$  و  $34^\circ$ :



زاویه نسبت	$0^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$34^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0	-1
$\cos \theta$	1	0	-1	0
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0

$0^\circ < \theta < 9^\circ \iff \theta$  در ربع اول  
 $9^\circ < \theta < 18^\circ \iff \theta$  در ربع دوم  
 $18^\circ < \theta < 27^\circ \iff \theta$  در ربع سوم  
 $27^\circ < \theta < 34^\circ \iff \theta$  در ربع چهارم

کتاب ریاضی: به ازای هر زاویه دلخواه  $\theta$  داریم:

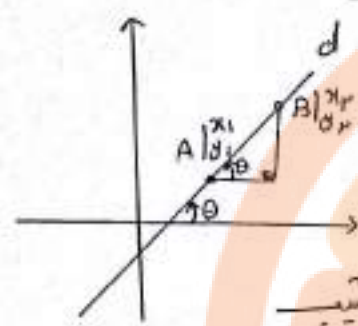
$$-1 < \sin \theta < 1 \quad \text{و} \quad -1 < \cos \theta < 1$$

علامت نسبتای مثلثاتی:

نسبت	ربع اول $x > 0, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$y = \sin \theta$	+	+	-	-
$x = \cos \theta$	+	-	-	+
$\frac{y}{x} = \tan \theta$	+	-	+	-
$\frac{x}{y} = \cot \theta$	+	-	+	-

مثال) حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$A = \frac{2 \sin 90^\circ + 3 \cos 270^\circ - 1 \cdot 3 \cdot 4}{1 + 2 \cos 180^\circ + \sin 270^\circ} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 0}{1 + 2(-1) + (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$



شیب خط و رابطه آن با کتانگانت زاویه:  
از نظر هندسی شیب هر خط برابر است با  
کتانگانت زاویه ای که خط با محور xها در جهت  
مثبت میلناقی می سازد.

$$\left. \begin{aligned} \text{شیب} &= m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \tan \theta &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{شیب} = m = \tan \theta}$$

مثال) خط d با محور xها در جهت مثبت میلناقی زاویه ۳۰ ساخته است  
شیب خط چقدر است؟

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته ریاضی: معادله خطی که از نقطه  $A(x_1, y_1)$  گذشت و شیب آن برابر  
m باشد از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $A(\sqrt{3}, 2)$  گذشت و با محور xها  
زاویه ۴۰ بسازد.

$$m = \tan 40^\circ = \sqrt{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

$$y - 2 = \sqrt{3}x - 3 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}x - 1}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $A(-1, 2)$  گذشت و با محور xها  
زاویه ۴۵ بسازد.

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 1(x - (-1))$$

$$\Rightarrow y - 2 = x + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x + 3}$$



نکته ریاضی؟ اگر معادله خطی بصورت  $ax+by=c$  باشد در اینصورت:

$$\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = m = -\frac{a}{b}$$

مثال) خط  $3x - \sqrt{3}y = 7$  با محور  $x$  ها چه زاویه ای را درجهت مثبت مثلثاتی می سازد؟

$$m = -\frac{3}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$m = \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

مثال) خط  $dx - dy = 1$  با محور  $x$  ها درجهت مثبت مثلثاتی چه زاویه ای می سازد؟

$$m = -\frac{d}{-d} = 1$$

$$m = \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

روابط بین نسبتهای مثلثاتی:

$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$4) \tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \\ \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$5) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$6) 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$7) \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \cos B \\ \cos A = \sin B \\ \tan A = \cot B \\ \cot A = \tan B \end{cases}$$

$$1\hat{a} + 1\hat{b} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 1\hat{a} = \cos 1\hat{b} \\ \cos 1\hat{a} = \sin 1\hat{b} \\ \tan 1\hat{a} = \cot 1\hat{b} \\ \cot 1\hat{a} = \tan 1\hat{b} \end{cases}$$

مثال ۱: اگر یک زاویه حاده و  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\cos \theta$  و  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  را بدست آورید

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\text{حاده}} \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

مثال ۲: اگر  $\theta$  زاویه‌ای در ربع سوم و  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را بدست آورید.

حله: در ربع سوم سینوس و کسینوس هر دو منفی است.

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

مثال ۳: اگر  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  و  $\theta$  یک زاویه حاده باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را بدست آورید.

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{حاده}} \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sin \theta}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

مثال ۴: اگر  $\sin \theta = 2a + b$  و  $\cos \theta = a - 2b$  باشد چه رابطه‌ای بین  $a$  و  $b$  برقرار است؟

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow (2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 + a^2 - 4ab + 4b^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 + 5b^2 = 1$$

$$\Rightarrow 5(a^2 + b^2) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{5}$$



مثال (۳) اگر  $\tan \theta = 2$  باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$A = \frac{3 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{4 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta} = \frac{\frac{3 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{4 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{3 \tan^2 \theta + 2}{4 \tan^2 \theta - 2}$$

$$= \frac{3(2)^2 + 2}{4(2)^2 - 2} = \frac{14}{14} = 1$$

مثال (۴) اگر  $\frac{\tan \theta + 2}{2 \tan \theta + 1} = 3$  حاصل عبارت  $A = \frac{\sin \theta + 3 \cos \theta}{3 \sin \theta - 4 \cos \theta}$  را بدست آورید

$$\frac{\tan \theta + 2}{2 \tan \theta + 1} = 3 \Rightarrow \tan \theta + 2 = 4 \tan \theta + 3 \Rightarrow 3 \tan \theta = -1 \Rightarrow \tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = -3 \sin \theta$$

$$A = \frac{\sin \theta + 3(-3 \sin \theta)}{3 \sin \theta - 4(-3 \sin \theta)} = \frac{14 \sin \theta}{-27 \sin \theta} = -\frac{14}{27}$$

مثال ۵: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید

A)  $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \sin \theta$

$$\frac{\text{سمت چپ}}{\text{سمت راست}} = 1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = 1 - \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} = 1 - \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{1 + \sin \theta} = 1 - (1 - \sin \theta) = \sin \theta$$

B)  $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$

$$\frac{\text{سمت چپ}}{\text{سمت راست}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} = \text{سمت راست}$$

C)  $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$

$$\frac{\text{سمت چپ}}{\text{سمت راست}} = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \tan^2 \theta \cdot \sin^2 \theta = \text{سمت راست}$$

رد

ریاضی دوم

$$D) \frac{\cos \theta}{\tan \theta} + \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \sin \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$E) \frac{r \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = r \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\frac{r \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)}{1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2} = \frac{r \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{r \sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{1} = r \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$F) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - r \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - r \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$G) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = r \sin^2 \theta - 1$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta &= (\sin^2 \theta)^r - (\cos^2 \theta)^r = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = r \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

$$H) (\sin \theta + \cos \theta)^r + (\sin \theta - \cos \theta)^r = r$$

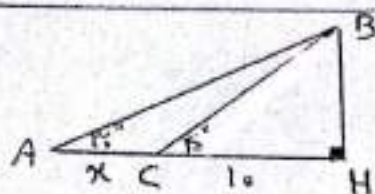
$$\sin^r \theta + r \sin^{r-1} \theta \cos \theta + \cos^r \theta + \sin^r \theta - r \sin^{r-1} \theta \cos \theta + \cos^r \theta = 1 + r$$

با ضرب کردن در  $\frac{r}{\sin \theta} + \frac{r}{\cos \theta} = 0$  در دو طرف

$$\frac{r}{\sin \theta} + \frac{r}{\cos \theta} = 0 \Rightarrow \frac{r}{\sin \theta} = -\frac{r}{\cos \theta} \Rightarrow r \cos \theta = -r \sin \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = -\frac{r}{r} \Rightarrow \cot \theta = -\frac{r}{r} \Rightarrow \tan \theta + \cot \theta = -\frac{r}{r} + \left(-\frac{r}{r}\right) = \frac{-r^2}{r} = -\frac{r^2}{r}$$





مثال ۹) در شکل مقابل مقدار  $x$  را بیابید.

( $\sqrt{3} \approx 1,7$  ,  $\text{tg } 40^\circ \approx 0,83$ )

$$\text{tg } 40^\circ = \frac{BH}{10} \Rightarrow 0,83 = \frac{BH}{10} \Rightarrow BH = 10 \times 0,83 \Rightarrow \underline{BH = 8,3}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{BH}{x+10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8,3}{x+10} \Rightarrow 1,7(x+10) = 3 \times 8,3 \Rightarrow 1,7x + 17 = 24,9$$

$$\Rightarrow 1,7x = 7,9 \Rightarrow \underline{x = 4,6}$$



مثال ۱۰) در مثلث مقابل مقدار  $2 \cos \theta + \sin \theta$  را بیابید.

حله: بی دانی در مثلث مستوی الساقین

ارتفاع  $r$  نسبت به  $r$  و  $2r$  میزند برهم منطبق هستند.  
ارتفاع  $AH$  را رسم می کنیم:

$$\triangle ABH: AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 + r^2 = d^2 \Rightarrow AH^2 = 9 \Rightarrow \underline{AH = 3}$$

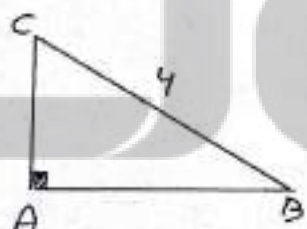
$$\sin \theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{BH}{AB} = \frac{r}{d}$$

$$2 \cos \theta + \sin \theta = \frac{2r}{d} + \frac{3}{d} = \frac{11}{d}$$

مثال ۱۱) در مثلث  $ABC$  ،  $\hat{A} = 90^\circ$  ،  $\text{tg } B = \frac{\sqrt{d}}{3}$  و  $BC = 4$  بیابید مساحت و

جساعت مثلث را بیابید.



$$\text{tg } B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{d}}{3} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{d}}{3} AB$$

$$AB^2 + AC^2 = 4^2 \Rightarrow AB^2 + \left(\frac{\sqrt{d}}{3} AB\right)^2 = 16 \Rightarrow AB^2 + \frac{d}{9} AB^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{9}{9} AB^2 + \frac{d}{9} AB^2 = 16 \Rightarrow AB^2 = \frac{16 \times 9}{9+d} = 14 \Rightarrow \underline{AB = \sqrt{14}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{d}}{3} \times \sqrt{14} \Rightarrow \underline{AC = \frac{\sqrt{14d}}{3}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{14d}}{3} = \frac{7\sqrt{14d}}{3}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{14d}}{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{14} = 7 + \frac{\sqrt{14d}}{3}$$

فصل ۳ : توانهای گویا و عبارتهای جبری :

ریشه n ام :

فرض کنیم  $n > 2$  عددی طبیعی باشد. در اینصورت عدد حقیقی  $a$  را یک ریشه nام

عدد حقیقی  $a$  می گویند هرگاه  $a^n = b$  باشد

- مثال) ریشه سوم ۲۷ برابر ۳ است زیرا:  $3^3 = 27$
- ریشه پنجم (-۳۲) برابر (-۲) است زیرا:  $(-2)^5 = -32$
- ریشه چهارم ۱۶ برابر  $(\pm 2)$  است زیرا:  $(\pm 2)^4 = 16$

اگر  $n$  زوج باشد عدد حقیقی و مثبت  $a$  دارای دو ریشه nام می باشد که قدرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه nام مثبت را ریشه اصلی نامیده و آنرا با رادیکال بصورت  $\sqrt[n]{a}$  نشان می دهند

اعداد منفی دارای ریشه nام زوج نیستند ولی ریشه nام فرد دارند.

وجود ندارد  $\sqrt[4]{-16} =$        $\sqrt[5]{-32} = -2$

تمرین : کامل کنید :

- $\sqrt[3]{4x} =$
- $\sqrt[4]{4x} =$
- $\sqrt[5]{10x^2} =$
- $\sqrt[4]{10x^2} =$
- $\sqrt{\frac{121}{100}} =$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{x^{10}}} =$
- $\sqrt{\frac{324}{25}} =$
- $\sqrt[3]{\frac{216}{27}} =$
- $\sqrt[3]{(12x)^2} =$
- $\sqrt{1} \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{4x} =$

قوانین رادیکالها :

۱)  $\sqrt{a^2} = |a|$

۲)  $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{مقدار } n \text{ فرد} \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$

۳)  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۴)  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

مثال)  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{14} = \sqrt[3]{28} = 2$

مثال)  $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{4} = 2$



بافضل

a)  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۴)  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

۶)  $\sqrt[r]{d^{\frac{1}{n}}} = d^{\frac{1}{r}} = d^{\frac{1}{r}}$

$\sqrt[r]{\sqrt[4]{4r}} = \sqrt[4r]{4r} = r$

۲)  $a > 1 \Rightarrow \dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \dots < a < a^r < a^{\frac{r}{2}} < a^{\frac{r}{3}} < \dots$   
 $\dots < \sqrt[r]{r} < \sqrt[r-1]{r} < r < r^{\frac{1}{2}} < r^{\frac{1}{3}} < r^{\frac{1}{4}} < \dots$

۱)  $0 < a < 1 \Rightarrow \dots < a^{\frac{1}{r}} < a^{\frac{1}{r-1}} < a^{\frac{1}{r-2}} < a < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \sqrt[n-2]{a} < \dots$   
 $(\frac{1}{r})^r < \frac{1}{r} < \sqrt{\frac{1}{r}}$

۹)  $\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$

$\sqrt[3]{4d} = \sqrt[3]{4r+1} = \sqrt[3]{r^3+1} \approx r + \frac{1}{r^2} = r + 0,01 = r,01$

$\sqrt[4]{30} = \sqrt[4]{32-2} = \sqrt[4]{2^5-2} \approx 2 - \frac{2}{4 \times 2^3} = 2 - 0,01 = 1,99$

$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{27+4} = \sqrt[3]{3^3+4} \approx 3 + \frac{4}{9 \times 3^2} = 3 + 0,14 = 3,14$

$\sqrt[5]{12d} = \sqrt[5]{125-13} \approx 5 - \frac{13}{5 \times 5^4} = 5 - 0,01 = 4,99$

$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8-1} = 2 - \frac{1}{3 \times 2^2} = 2 - 0,17 = 1,83$

۱۰)  $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n+m}}$

تعمیرت : کامل کنید :

۱)  $\sqrt[3]{12d} =$

۲)  $\sqrt[4]{-32} =$

۳)  $\sqrt[5]{128} =$

۴)  $\sqrt[3]{256} =$

۵)  $\sqrt[9]{-1} =$

۶)  $\sqrt[4]{(-3)^4} =$

۷)  $\sqrt[3]{-0,001} =$

۸)  $-\sqrt[5]{14} =$

۹)  $\sqrt[4]{14} \times \sqrt[4]{11} =$

۱۰)  $a^2 \cdot a^3 \cdot <a < 1$

۱۱)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot <a < 1$

۱۲)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot <a < 1$

۱۳)  $(\sqrt{-1})^2 =$

۱۴)  $\sqrt{1\Delta} =$

۱۵)  $\sqrt{72} =$

۱۶)  $\sqrt[4]{1} =$

۱۷)  $\sqrt[4]{100} =$

۱۸)  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{\frac{9}{14}} =$

تعمیر: حاصل عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱)  $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}} =$

۲)  $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$

۳)  $\frac{\sqrt{x^3 y^3}}{\sqrt{xy}} =$

۴)  $2\sqrt{27} \times 3\sqrt{12} =$

۵)  $-2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5} =$

۶)  $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} =$

۷)  $\sqrt[4]{4-2\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{4+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(4-2\sqrt{2})^2} \times \sqrt[4]{4+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{14-14\sqrt{2}+11} \times \sqrt[4]{4+2\sqrt{2}}$   
 $= \sqrt[4]{24-14\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{4+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2(12-7\sqrt{2})} \times \sqrt[4]{2(2+\sqrt{2})} = \sqrt[4]{2(12-7\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \sqrt[4]{2(24-14\sqrt{2})} = \sqrt[4]{48-28\sqrt{2}}$

۸)  $\sqrt[4]{4+2\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(2+\sqrt{2})^2} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(2+\sqrt{2})^2} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{2}}$   
 $= \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt[4]{4-2} = \sqrt[4]{2}$



فصول رادیکالهای مرکب:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad , \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

مثال ۱) عبارت  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$  را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4+\sqrt{12}}$$

$$A=4$$

$$B=12$$

$$C = \sqrt{4^2 - 12} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

مثال ۲) عبارت  $\sqrt{5-2\sqrt{4}}$  را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید.

$$\sqrt{5-2\sqrt{4}} = \sqrt{5-\sqrt{16}}$$

$$A=5$$

$$B=16$$

$$C = \sqrt{5^2 - 16} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{5+3}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}} = \sqrt{4} - 1$$

چهار فصل خیلی مهم از رادیکالها:

$$1) \alpha = \sqrt{A \sqrt{A \sqrt{A \dots \sqrt{A^2}}}} = A$$

مثال)  $4 \sqrt{\frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{16} \sqrt{\frac{1}{16} \dots \sqrt{\frac{1}{16}}}}} = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$$2) \alpha = \sqrt{A \sqrt{A \sqrt{A \dots}}} = A$$

مثال)  $\frac{10}{10} \times \sqrt{d \sqrt{d \sqrt{d \dots}}} = \frac{10}{10} \times d = \frac{10}{10}$

$$3) \alpha = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1+4 \times 20}}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$4) \alpha = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

مثال)  $\sqrt{11 - \sqrt{11 - \sqrt{11 - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \times 11}}{2} = \frac{-1+11}{2} = 5$

۱)  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۲)  $a^0 = 1$

۳) توانهای گویا:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

۴)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

۵)  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

۶)  $(a^n)^m = a^{nm}$

تعمیرت: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

۱)  $\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{a^2 \cdot a}} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2]{a}$

۲)  $\sqrt[9]{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \sqrt[9]{\frac{a^{10}}{a^1}} = \sqrt[9]{a^9} = \sqrt[9]{a^9} = a^{\frac{9}{9}} = a^1 = a = \sqrt[10]{a}$

۳)  $\sqrt[3]{3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{9x^2}} = \sqrt[3]{3x} \cdot \frac{1}{3x} = \sqrt[3]{1} = 1$

۴)  $\sqrt[4]{\Lambda} \times \sqrt{\Lambda} = \sqrt[4]{\Lambda^2} \times \sqrt{\Lambda} = \sqrt[4]{\Lambda^2} \times \sqrt[2]{\Lambda} = \sqrt[4]{\Lambda^2} \times \sqrt[4]{\Lambda^2} = \sqrt[4]{\Lambda^4} = \Lambda$

۵)  $\sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$

۶)  $\frac{2-2\sqrt{a}}{3} \times \frac{\sqrt{a}+1}{3} = \frac{2-2\sqrt{a}}{3} \times \frac{\sqrt{a}+1}{3} = \frac{2\sqrt{a}+2-2\sqrt{a}-2a}{9} = \frac{2-2a}{9} = \frac{2(1-a)}{9}$

۷)  $((\sqrt{10})^{1-\sqrt{2}})^{1+\sqrt{2}} = (\sqrt{10})^{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = (\sqrt{10})^{1-2} = (\sqrt{10})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

۸)  $(\sqrt{a}-\sqrt{a-2})^{\sqrt{a}+2} \times (\sqrt{a}+\sqrt{a-2})^{\frac{1}{\sqrt{a}-2}} = ?$   
 $\frac{1}{\sqrt{a}-2} = \frac{1}{\sqrt{a}-2} \times \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+2} = \frac{\sqrt{a}+2}{a-4} = \frac{\sqrt{a}+2}{1} = \sqrt{a}+2$

$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-2})^{\sqrt{a}+2}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-2})^{\sqrt{a}+2}} = \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-2}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}\right)^{\sqrt{a}+2} = 1 = 1$

تعمیرت: مقدار  $x$  را از معادله  $x^{\sqrt{2}} = 2$  بیابید.  
 $x^{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2^{\sqrt{2}}}$



تمرین: اگر  $\sqrt{x} = \sqrt{3}$  و  $\sqrt{y} = \sqrt{3}$  باشد حاصل  $xy$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = \sqrt{3} &\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (\sqrt{xy})^2 = 3 \Rightarrow \sqrt{xy} = \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{xy})^2 = (\sqrt{3})^2 \\ &\Rightarrow xy = 3 \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow xy = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

عبارتهای جبری و اتحادها:

۱)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اتحاد مربع مجموع دو جمله (اتحاد اول)

۲)  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله (اتحاد دوم)

۳)  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(اتحاد مزدوج)

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف)  $99^2 = (100-1)^2 =$

ب)  $101^2 = (100+1)^2 =$

ج)  $98 \times 102 = (100-2)(100+2) =$

د)  $537^2 - 530^2 - 7^2 =$

ه)  $29d^2 - 290^2 - d^2 =$

و)  $150^2 - 7d^2 =$

تمرین: اگر  $a^2 = a + 3$  باشد نشان دهید:  $a^3 = 19a + 21$

$$a^3 = a \times a^2 = a \times (a+3) = a(a^2 + 4a + 9) = a(a^2 + 4a + 9)$$

$$= a(7a + 12) = 7a^2 + 12a = 7(a+3) + 12a = 7a + 21 + 12a = 19a + 21$$

۴) اتحاد جمله مشترک:  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

تمرین: حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک بدست آورید.

$$(x-3)(x+d) =$$

$$(x+7)(x-2) =$$

$$(x-4)(x-2) =$$

$$(x+d)(x+7) =$$

۵) اتحاد مربع مجموع سه جمله:  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

مثال  $(2x+3y-4z)^2 =$

تمرین: اگر  $a+b+c=10$  و  $ab+ac+bc=14$  باشد حاصل  $a^2+b^2+c^2$

چقدر است؟

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow 10^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(14) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 70$$

۶) اتحاد مکعب مجموع دو جمله:  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(2x+1)^3 =$$

$$(3x+2y)^3 =$$

۷) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(3x-1)^3 =$$

$$(x-2)^3 =$$



$$1) (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

انتشار مجموع مکعباً دو جمله‌ای :

(مثال)  $(x+2)(x^2-2x+4) =$

$$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$$

$$2) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

انتشار تفاضل مکعباً دو جمله‌ای :

$$(2a-b)(4a^2+10a+2b) =$$

$$(a^2-2a)(a^2+2a+4a^2) =$$

$$(2a^2-2b^2)(4a^2+4ab+b^2) =$$

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

۱۱) انتشارهای ناقص :

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + 2ab = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$= (a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$$\Rightarrow a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\Rightarrow (a-b)^3 = a^3-3ab(a-b)-b^3$$

$$\Rightarrow a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

تمرین: اگر  $x+y=7$  و  $xy=10$  و  $x>y$  باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید

الف)  $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 7^2 - 2 \times 10 = 29$

ب)  $x-y = ? \quad (x-y)^2 = x^2+y^2 - 2xy = 29 - 20 = 9 \Rightarrow x-y = 3$

ج)  $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 7^3 - 3 \times 10 \times 7 = 343 - 210 = 133$

۸)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ?$   $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 7 + 2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

۹)  $x^2 + y^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 29^2 - 2 \times 100 = 421$

۱۰)  $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 3^3 + 3 \times 10 \times 3 = 27 + 90 = 117$

تمرین: اگر  $a + b + c = 0$  ثابت کنید:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

اثبات:  $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3 \Rightarrow$   
 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2$   
 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = +3ab(-a - b) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

کاربرد تمرین بالا: مقدار عددی عبارت  $a^3 + b^3 + c^3$  را برای  $a = 3 + \sqrt{2}$  و  $b = 3 - \sqrt{2}$  و  $c = -4$  حساب کنید.

$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-4) = 3(9 - 2)(-4) = -114$

تمرین: اگر  $x + \frac{1}{x} = a$  حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  را بیابید.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x)^2 + (\frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x)(\frac{1}{x}) = a^2 - 2 = 23 - 2 = 21$

فرمول:  $x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

تمرین: اگر  $x - \frac{1}{x} = a$  حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  را بیابید.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x)^2 + (\frac{1}{x})^2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 2(x)(\frac{1}{x}) = a^2 + 2 = 49 + 2 = 51$

فرمول:  $x - \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$



تجزیه: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = ?$$

$$\begin{aligned} \text{جـ)} \quad (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) &= (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \\ &= (1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16}) = (1-x^{16})(1+x^{16}) = 1-x^{32} \end{aligned}$$

تجزیه: آید  $x^2+x+1=0$  حاصل عبارت  $x^3+\frac{1}{x^3}$  را بدست آورید

$$x^2+x+1=0 \stackrel{\div x}{\Rightarrow} x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

### تجزیه عبارتهای جبری

۱) تجزیه به کمک فاکتورگیری:

الف)  $2ab+3b = b(2a+3)$

ب)  $d^2a^2b^3+10d^3b^2 = d^2a^2b^2(b+5d)$

ج)  $2(a-b)^2 - (a-b) = (a-b)[2(a-b)-1] = (a-b)(2a-2b-1)$

۲) تجزیه به کمک دسته بندی و فاکتورگیری:

الف)  $ac+bc+ad+bd = (ac+bc)+(ad+bd) = c(a+b)+d(a+b) = (a+b)(c+d)$

ب)  $4ax+9ay-4bx-4by = 3a(2x+3y)-4b(2x+3y) = (2x+3y)(3a-4b)$

ج)  $a^4-a^6+a^8-a^2 = (a^4-a^2)+(a^8-a^2) = a^2(a^2-1)+a^2(a^6-1) = a^2(a-1)(a+1)(a^2+1)$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۱۳xy + ۱۰y^۲ = ۳x^۲ - ۳xy - ۱۰xy + ۱۰y^۲ = ۳x(x-y) - ۱۰y(x-y) = (x-y)(۳x-۱۰y)$$


---

۳) تجزیه به کمک اتحادهای اول و دوم :

الف)  $۲۵a^۲ - ۳۰ab + ۹b^۲ = (۵a - ۳b)^۲$

ب)  $۴x^۲ + ۱۲xy + ۹y^۲ = (۲x + ۳y)^۲$

---

۴) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج :

الف)  $۴a^۲ - ۹b^۲ = (۲a - ۳b)(۲a + ۳b)$

ب)  $x^۲ - ۱۶ = (x^۲ - ۴)(x^۲ + ۴) = (x-۲)(x+۲)(x^۲ + ۴)$

ج)  $۱ - (۲x - ۳)^۲ = [1 - (۲x - ۳)][1 + (۲x - ۳)] = (۴ - ۲x)(۲x - ۲) = ۲(۲ - x)۲(x - ۱)$   
 $= ۴(۲ - x)(x - ۱)$

د)  $(۴x + ۳)^۲ - (۳x - ۱)^۲ = [(۴x + ۳) - (۳x - ۱)][(۴x + ۳) + (۳x - ۱)]$   
 $= (۴x + ۳ - ۳x + ۱)(۴x + ۳ + ۳x - ۱) = (x + ۴)(۷x + ۲)$

---

۵) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک :

الف)  $x^۲ + ۱۰x + ۲۴ = (x + ۴)(x + ۶)$

ب)  $x^۲ - ۷x - ۶۰ = (x - ۱۲)(x + ۵)$

ج)  $(x - ۲y)^۲ - (x - ۲y) - ۲۰ = (x - ۲y - ۵)(x - ۲y + ۴)$

---

۶) تجزیه به روش A : (ضریب  $x^۲$  مجبور کامل نباشد)

$A = ۲x^۲ + ۷x + ۳$

$۲A = (۲x)^۲ + ۷(۲x) + ۶ \Rightarrow ۲A = (۲x + ۱)(۲x + ۶) \Rightarrow ۲A = (۲x + ۱)۲(x + ۳)$

$\Rightarrow A = (۲x + ۱)(x + ۳)$



$$\rightarrow) A = 4x^2 - x - 1$$

$$4A = (4x)^2 - (4x) - 4 \Rightarrow 4A = (4x - 2)(4x + 2) \Rightarrow 4A = 4(2x - 1)2(2x + 1)$$

$$\Rightarrow A = (2x - 1)(2x + 1)$$

$$\text{ج) } A = 2x^2 + 3x + 1$$

$$2A = (2x)^2 + 3(2x) + 2 \Rightarrow 2A = (2x + 1)(2x + 2) \Rightarrow 2A = (2x + 1)2(x + 1)$$

$$\Rightarrow A = (2x + 1)(x + 1)$$

۷) تجزیه به کتک اتحادهای تفاضل مکعبات و مجموع مکعبات دو جمله:

$$\text{الف) } a^3 - 1 = a^3 - 1^3 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$\text{ب) } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{ج) } 27a^3 - 1 = (3a)^3 - 1^3 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

$$\Rightarrow 4a^3 - 27 = (4a)^3 - 3^3 = (4a - 3)(16a^2 + 12a + 9)$$

$$\Rightarrow a^3 + 12d = a^3 + d^3 = (a + d)(a^2 - ad + d^2)$$

تمرین: عبارتهای زیر را تجزیه کنید:

$$\text{الف) } 1x^2 + 1x + 2 = 2(2x^2 + 2x + 1) = 2(2x + 1)^2$$

$$\text{ب) } 20x^2 - 10x + 12d = d(20x^2 - 20x + 2d) = d(2x - d)^2$$

$$\text{ج) } 3x^2 - 27y^2 = 3(x^2 - 9y^2) = 3(x - 3y)(x + 3y)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) = 4(x - 1)(x + 1) = 4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

تعمیر کنید:  $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

تعمیر کنید:  $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

تعمیر کنید:  $a^4 - 2b^4 + 2a^3b^3 = a^4 - 2b^4 + 2a^3b^3 + b^4 - b^4 = (a^4 + 2a^3b^3 + b^4) - 2b^4 = (a^3 + b^3)^2 - (\sqrt{2}b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2}b^3)(a^3 + b^3 + \sqrt{2}b^3)$

تعریف: در اتحاد  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  با قرار دادن  $a = \sqrt[3]{x^2}$  حاصل را باز نویسی کنید.

$$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2})^3 + 1^3 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

تذکره مهم: این عبارت قابل تجزیه به عبارت‌های گویا نیست.

عبارت‌های گویا: عبارت‌هایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشد عبارت‌های گویا نامیده می‌شوند.

$$\frac{x^2 + 1}{x - 3} \quad \text{و} \quad \frac{a + 1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{y}$$

عبارت‌هایی که در آنها حرف انگلیسی داخل رادیکال باشد عبارت‌های گویا نیستند و آن‌ها را عبارت‌های ننگ می‌نامند.

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y}} \quad \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad \frac{\sqrt{x}}{3}$$

تذکره مهم: عبارت‌های گویا به ازای جواب‌های مخرج تعریف نمی‌شوند.

مثال) عبارت  $\frac{x-1}{x^2-4}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

به ازای  $x = \pm 2$  تعریف نشده است  $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

تعمیر: عبارت گویای  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

به ازای  $x = \pm 2$  تعریف نشده است.



تمرین: صورت و مخرج عبارتهای فوقیای زیر را تجزیه کرده و آنهارا ساده کنید

$$الف) \frac{x^4 + 1}{x^2 + 2x^2 + 1} = \frac{(x^2)^2 + 1^2}{(x^2)^2 + 2(x^2) + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\rightarrow \frac{x^3 - 1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

$$\rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^5 - x}{x^2 + x^2 + x} = \frac{x(x^4 - 1)}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{x(x^2 + x + 1)}$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - y^2 - 12y}{1y^2 + 14y} = \frac{y(y^2 - y^2 - 12)}{1y(y+12)} = \frac{y(y^2 - 12)(y^2 + 12)}{1y(y+12)} = \frac{y(y-2)(y+2)(y^2 + 12)}{1y(y+12)}$$

$$= \frac{(y-2)(y^2 + 12)}{1}$$

توجه: یا لردن مخرج های مثلث:

مخرج	عبارت ضربنشونده به صورت و مخرج	حاصل
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$x$
$a + \sqrt{x}$	$a - \sqrt{x}$	$a^2 - x$
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$	$x - y$
$a\sqrt{x} + b$	$a\sqrt{x} - b$	$a^2x - b^2$
$a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$	$a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$	$a^2x - b^2y$
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x^2}$	$x$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + b$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a - b$

(احتیاط: حلقه دلاغر)

تعمیر: مخرج کسرها را گویا کنید.

$$1) \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$2) \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$4) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$5) \frac{1}{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{(ax^2)^2} + \sqrt[3]{ax^2} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{(ax^2)^2} + \sqrt[3]{ax^2} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{ax^4} + \sqrt[3]{ax^2} + \sqrt[3]{a}}{ax^2 - a}$$

$$6) \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1}$$

$$7) \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^2}}{x-a}$$

$$8) \frac{1}{x-\sqrt[3]{9x}} = \frac{1}{x-\sqrt[3]{9x}} \times \frac{x+\sqrt[3]{9x}}{x+\sqrt[3]{9x}} = \frac{x+\sqrt[3]{9x}}{x^2-9x}$$

$$9) \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}+1} = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}+1} \times \frac{(\sqrt[3]{y})^2 - \sqrt[3]{y} + 1}{(\sqrt[3]{y})^2 - \sqrt[3]{y} + 1} = \frac{y(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y}+1)}{y+1} = \frac{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y}+1}{y+1}$$

$$10) \frac{1}{\sqrt[3]{d}+\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{d}+\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{a^2}}{d-a} = \frac{\sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{a^2}}{-a}$$



فصل ۴ :

معادله درجه ۲ :

هر معادله بصورت  $ax^2 + bx + c = 0$  راکه در آن  $a \neq 0$  باشد، معادله درجه دوم می نامند.

روشهای حل معادله درجه دوم :

۱) روش تجزیه :  $A \times B = 0 \Rightarrow A = 0$  یا  $B = 0$

۱)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3} \\ x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

۲)  $x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3} \end{cases}$$

۳)  $3x^2 - x = 0$

$x(3x-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}} \end{cases}$$

۲) روش ریشه گیری :

اگر  $a$  یک عدد حقیقی نامنفی ( $a \geq 0$ ) باشد ریشه های معادله

درجه دوم  $x^2 = a$  عبارتند از :

$$x^2 = a \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

۱)  $(x-3)^2 = 2d$

$x-3 = \sqrt{2d} \Rightarrow x = d+3 = 8$

$x-3 = -\sqrt{2d} \Rightarrow x = -d+3 = -2$

۲)  $x^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

۳)  $dx^2 = 2e$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2e}{d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2e}{d}} = 2 \\ x = -\sqrt{\frac{2e}{d}} = -2 \end{cases}$$

۳) روش مربع کامل کردن :

ابتدا معادله را بصورت  $x^2 + px + q = 0$  می نویسیم سپس جمله  $x^2$  را به سمت چپ و بقیه جمله ها را به سمت راست می بریم، ضریب  $x$  را نصف کرده آنرا به توان ۲ رسانده و به دو طرف اضافه می کنیم سمت چپ اتحاد اول یا دوم است. از دو طرف جذ گرفته و معادله را حل می کنیم

ریاضی دهم

ص ۱۳۰

۱)  $x^2 + 17x + 14 = 0$

$x^2 + 17x = -14$

$14$  و  $17$  یعنی  $2$  نصف  $17$  ضرب  $2$  =  $14$  ضرب  $2$

$x^2 + 17x + 14 = -14 + 14$

$(x + 8.5)^2 = 14 \Rightarrow x + 8.5 = \pm \sqrt{14}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 8.5 = \sqrt{14} \Rightarrow x = -8.5 + \sqrt{14} \\ x + 8.5 = -\sqrt{14} \Rightarrow x = -8.5 - \sqrt{14} \end{cases}$

۲)  $x^2 + dx + 4 = 0$

$x^2 + dx = -4$

$\frac{d}{2}$  یعنی  $\frac{d}{2}$  نصف  $d$  ضرب  $\frac{d}{2}$  =  $4$  ضرب  $\frac{d}{2}$

$x^2 + dx + \frac{d^2}{4} = -4 + \frac{d^2}{4}$

$(x + \frac{d}{2})^2 = \frac{d^2}{4} - 4 \Rightarrow x + \frac{d}{2} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - 4}$

$\begin{cases} x + \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - 4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d^2}{4} - 4} - \frac{d}{2} \\ x + \frac{d}{2} = -\sqrt{\frac{d^2}{4} - 4} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{d^2}{4} - 4} - \frac{d}{2} \end{cases}$

$ax^2 + bx + c = 0$

۴ روش کلی (روش دلتا  $\Delta$ ):

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$  معادله دو ریشه (جواب) متمایز دارد  $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  (فردول ریشه ۲)
- $\Delta = 0 \Rightarrow$  معادله دو ریشه مضاعف (جواب حساب) دارد  $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$  (=)
- $\Delta < 0 \Rightarrow$  معادله جواب ندارد

۱)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1 > 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

۲)  $x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$  (ریشه مضاعف)

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1.5 \\ x_2 = -1.5 \end{cases}$

۳)  $x^2 + 2x + 9 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(9) = 4 - 36 = -32 < 0$

معادله جواب ندارد.

نکته ریاضی:

اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  داشته باشیم:  $a + b + c = 0$  (مجموع ضرایب صفر باشد)

$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

نکته ۲:

اثبات:  $a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + (-a - c)x + c = 0 \Rightarrow ax^2 - ax - cx + c = 0$

$\Rightarrow (ax^2 - ax) - (cx - c) = 0 \Rightarrow ax(x - 1) - c(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(ax - c) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ ax - c = 0 \Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a} \end{cases}$



نکته ریاضی: اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  داشته باشیم؛

$$a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

اثبات:  $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + (a+c)x + c = 0 \Rightarrow ax^2 + ax + cx + c = 0$

$$\Rightarrow ax(x+1) + c(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(ax+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ ax+c=0 \Rightarrow x=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

تقرینات اضافی:

۱) مقدار  $m$  را چنان تعیین کنید که معادلات درجه دوم زیر دارای یک جواب باشند.

الف)  $x^2 - 4x + m + 2 = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(m+2) = 0$$

$$14 - 4(m+2) = 0 \Rightarrow 14 - 4m - 8 = 0$$

$$\Rightarrow -4m = -6 \Rightarrow |m = \frac{3}{2}|$$

ب)  $m x^2 - 2(m-1)x + m = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow [-2(m-1)]^2 - 4(m)(m) = 0$$

$$\Rightarrow 4(m^2 - 2m + 1) - 4m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 = 0$$

$$\Rightarrow -8m + 4 = 0 \Rightarrow |m = +\frac{1}{2}|$$

۲) عددی را بیابید که اگر آن را در عدد بعد از خودش ضرب و حاصل را منهای عدد ما قبل عدد اولی کنیم حاصل برابر ۱ شود.

عدد مورد نظر  $= x$

$$x(x+1) - (x-1) = 1 \Rightarrow x^2 + x - x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

۳) عددی طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب عدد طبیعی قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن ۱۲۰ باشد.

عدد مورد نظر  $= x$

$$(x-1)(x+1) = 120 \Rightarrow x^2 - 1 = 120 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm 11$$

۴) اگر یکی از جوابهای معادله  $2x^2 - mx - 4 = 0$  برابر ۲ باشد جواب دیگری را بیابید.

$$x = 2 \Rightarrow 2(2)^2 - m(2) - 4 = 0 \Rightarrow 8 - 2m - 4 = 0 \Rightarrow -2m = -4 \Rightarrow |m = 2|$$

$$m = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(2)(-4) = 4 + 32 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

۱۵) مجموع دو عدد صحیح ۱۰ و مجموع مربعات آنها ۱۴۸ می باشد. این دو عدد را بیابید.

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = 148 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 148 \Rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 148 \Rightarrow 2x^2 - 20x - 48 = 0$$

$$\div 2 \Rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 12 \\ x = 12 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

آن دو عدد صحیح ۱۲ و -۲ است.

۱۶) مجموع ارقام یک عدد دورقمی ۱۰ و رقم دهگان آن ۲ واحد کمتر از مربع رقم یکان آن می باشد این عدد را تعیین کنید.

دهگان =  $x$

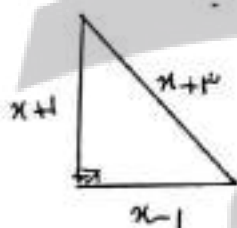
یکان =  $y$

$$x + y = 10$$

$$x = y^2 - 2$$

$$\Rightarrow y^2 - 2 + y = 10 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 3^2 - 2 = 7 \Rightarrow \text{عدد مورد نظر} = 73$$



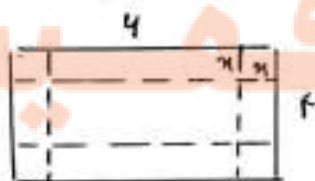
$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = (x+3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2 = x^2 + 4x + 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

۱۸) یک قالی در اتاقی به ابعاد ۴ متر و ۲ متر قرار دارد. به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. آن مساحت قالی ۸ متر مربع باشد. فاصله هر طرف قالی تا دیوار را حساب کنید.



طول قالی =  $4 - 2x$

عرض قالی =  $2 - 2x$

مساحت قالی =  $(4 - 2x)(2 - 2x) = 8 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 14 = 0$

$$\div 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$



سهمی :

نمودار هر معادله به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  را که در آن  $a$  و  $c$  اعداد

حقیقی بوده و  $a \neq 0$  را سهمی می گویند که دارای ویژگی های زیر است :

۱) اگر  $a > 0$  باشد شکل سهمی بصورت  $\cup$  است که در این حالت نمودار دارای پایین ترین نقطه (مینیمم = Min) بوده که همان رأس سهمی است.

۲) اگر  $a < 0$  باشد شکل سهمی بصورت  $\cap$  است که در این حالت نمودار دارای بالاترین نقطه (مآکزیمم = Max) بوده که همان رأس سهمی است.

۳) خط  $x = -\frac{b}{2a}$  را خط تقارن سهمی می نامند که از رأس سهمی می گذرد

۴) رأس سهمی را با  $S$  نشان داده و طول رأس سهمی از رابطه  $x = -\frac{b}{2a}$

بدست می آید که اگر آنرا در معادله قرار دهیم عرض رأس سهمی یعنی  $y$  بدست می آید.  
 $S = (-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{4a})$

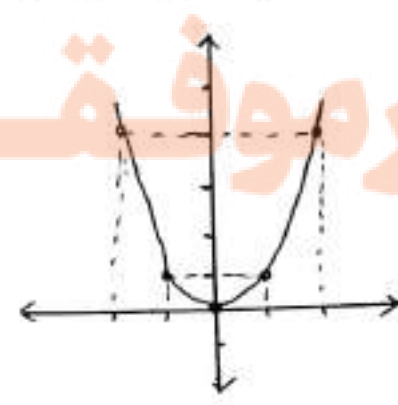
۵) اگر در معادله  $y = ax^2 + bx + c$  را مساری صفر قرار دهیم جوابها

معادله همان طول نقاط برخورد نمودار سهمی با محور  $x$ ها است که در رسم سهمی استفاده می شود.

مثال ۱: با نقطه یابی نمودار سهمی های زیر را رسم کنید.

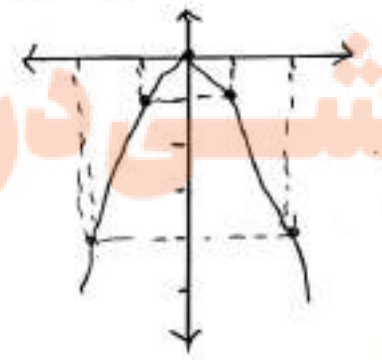
۱)  $y = x^2$

$x$	۲	۱	۰	-۱	-۲
$y$	۴	۱	۰	۱	۴



۲)  $y = -x^2$

$x$	۲	۱	۰	-۱	-۲
$y$	-۴	-۱	۰	-۱	-۴



سهی به معادلات زیر را رسم کنید

۱)  $y = x^2 + dx + 4$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{d}{2}$  طول رأس سهی

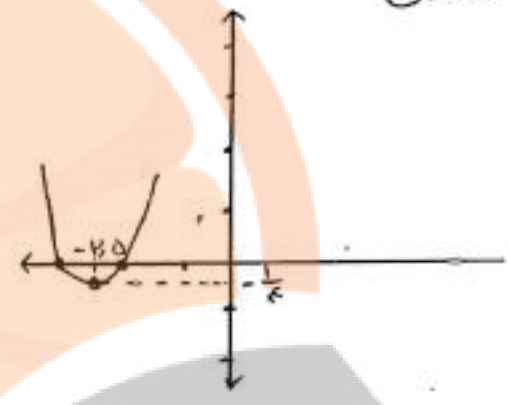
$a = 1 > 0 \Rightarrow$  شکل  $\cup$

$x = -\frac{d}{2} \Rightarrow y = (-\frac{d}{2})^2 + d(\frac{d}{2}) + 4 = \frac{d^2}{4} + \frac{2d^2}{2} + 4 = \frac{d^2 - 2d^2 + 2d^2}{4} = \frac{d^2}{4}$

عرض رأس سهی

$y = 0 \Rightarrow x^2 + dx + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 & \text{طول نقاط} \\ & \text{برخورد} \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 & \text{بانهور ها} \end{cases}$



۲)  $y = x^2 + 4x - 14$

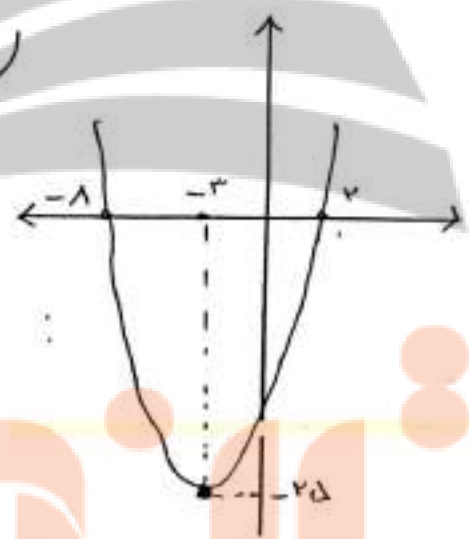
$a = 1 > 0 \Rightarrow$  شکل  $\cup$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$  طول رأس سهی

$y = (-2)^2 + 4(-2) - 14 = 4 - 8 - 14 = -18$   
عرض رأس سهی

$y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 14 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{طول نقاط} \\ & \text{برخورد} \\ x = 2 & \text{بانهور ها} \end{cases}$



۳)  $y = -2x^2 + 3x - 1$

$a = -2 < 0 \Rightarrow$  شکل  $\cap$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$  طول رأس سهی

$y = -2(\frac{3}{4})^2 + 3(\frac{3}{4}) - 1 = -2(\frac{9}{16}) + \frac{9}{4} - 1 = \frac{1}{8}$  عرض رأس سهی

$y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{طول نقاط} \\ & \text{برخورد} \\ x = \frac{1}{2} & \text{بانهور ها} \end{cases}$





صورت دتیر معادله سهمی :

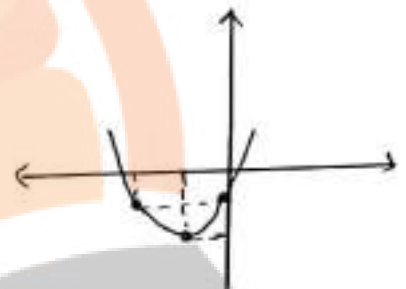
صورت دتیر معادله سهمی بصورت  $y = a(x-h)^2 + k$  که  $a \neq 0$  است که در آن  $(h, k)$  مختصات رأس سهمی و  $x = h$  معادله خط تقارن سهمی و  $a > 0$  شکل بصورت  $\cup$  و  $a < 0$  شکل بصورت  $\cap$  است

مثال) سهمی به معادلات زیر را رسم و مختصات رأس آن را بیست آورید.

۱)  $y = (x+1)^2 - 2$

$y = 1(x - (-1))^2 + (-2)$

x	-2	-1	0
y	-1	-2	-1

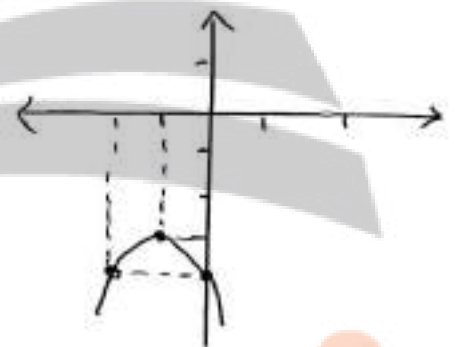


S | -1  
-2

۲)  $y = -(x+1)^2 - 3$

$y = -1(x - (-1))^2 + (-3)$

x	-2	-1	0
y	-4	-3	-4



S | -1  
-3

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول :

$P = ax + b$

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	علامت مخالف a	علامت a	علامت مخالف a

مثال) تعیین علامت کنید.

۱)  $P = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$	-	0	+

۲)  $P = -3x + 12$

$-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x + 12$	+	0	-

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم:

$$P = ax^2 + bx + c$$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  معادله دو ریشه دارد.

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق $a$	مضاد $a$	مضاد $a$	موافق $a$

$\Delta = 0 \Rightarrow$  معادله ریشه مضاعف دارد.

$x$	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق $a$	موافق $a$	موافق $a$

$\Delta < 0 \Rightarrow$  معادله جواب ندارد.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق $a$	موافق $a$

مثال) تعیین علامت کنید.

۱)  $P = x^2 + 4x + 4$

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-2$	$+\infty$
$x^2 + 4x + 4$		+	+	+

۲)  $P = x^2 - 4x + 4$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	+	+

۳)  $P = 2x^2 + 3x + 4$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(4) = -23 < 0$$

جواب ندارد.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 + 3x + 4$	+	+

تمرین: تعیین علامت کنید.

۱)  $P = \frac{(x^2 - 4)(2x + 1)}{(x^2 - 9)}$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$2$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	+	+	-	-	+	+
$2x + 1$	-	-	-	+	+	+	+
$x^2 - 9$	+	+	-	-	-	-	+
$P = \frac{(x^2 - 4)(2x + 1)}{x^2 - 9}$	-	+	+	-	-	+	+



$$۲) P = \frac{x(x-4)^2}{x^2+x-2}$$

$$۳) P = (x^2-14)(2x-1)$$

$$۴) P = \frac{(x+1)(x^2-14)}{x^2+4x+8}$$



نکته ریاضی:   
 شرط اینکه عبارت درجه دوم  $P = ax^2 + bx + c$  همواره مثبت باشد   
 آنستکه:  $\Delta < 0, a > 0$ .

مثال: به ازای چه مقدار  $m$  عبارت  $P = x^2 + mx + 1$  همواره مثبت است؟

$$a = 1 > 0 \quad \Delta = m^2 - 4(1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0$$

$m$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$m^2 - 4$		$+$	$-$	$+$

$-2 < m < 2$

$$P = (m-1)x^2 - 3x + 7$$

مثال ۲: به ازای چه مقدار از  $m$  عبارت  $P$  مثبت است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4(m-1)(7) < 0 \Rightarrow m > \frac{37}{21} \end{array} \right.$$

اشترک جواب

$$\Rightarrow m > \frac{37}{21}$$

$$P = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta < 0, a < 0$$

نکته ریاضی:   
 شرط اینکه عبارت درجه دوم  $P = ax^2 + bx + c$  همواره منفی باشد   
 آنستکه:  $\Delta < 0, a < 0$ .

مثال: به ازای چه مقدار  $m$  عبارت  $P = -2x^2 - 3m + (m-2)$  همواره منفی است؟

$$a = -2 < 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(-2)(m-2) < 0 \Rightarrow 9 + 8m - 16 < 0 \Rightarrow 8m - 7 < 0 \Rightarrow m < \frac{7}{8}$$



نامعادله ۴

$$۱) A < B \Rightarrow A \pm C < B \pm C$$

$$۲) \begin{cases} A > B, c > 0 \Rightarrow A < B < C \\ A > B, c < 0 \Rightarrow A < C < B < C \end{cases}$$

مثال) نامعادله  $3x - 7 < dx + d$  را حل و جواب را روی محور نشان بدهید.

$$3x - 7 < dx + d \Rightarrow 3x - dx < d + 7 \Rightarrow -2x < 12 \Rightarrow x > -6$$



تمرین: نامعادلات زیر را حل کنید:

1)  $x^2 + 7x + 12 \geq 0$

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$x^2 + 7x + 12$	+	0	-	+
		ع	ع	

$$\text{مجموعه جواب} = \{x < -4, -3 < x\} = (-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$$

2)  $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x^2 - 9$	+	0	-	0	+
$2x + 1$	-	-	0	+	+
$\frac{x^2 - 9}{2x + 1}$	-	0	+	-	0
		ع	ع	ع	ع

$$\text{مجموعه جواب} = \{-3 < x < -\frac{1}{2}, 3 < x\} = (-3, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$$

3)  $3x^2 - 4x + 1 < 0$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x		$\frac{1}{3}$	1	
$3x^2 - 4x + 1$	+	0	-	0
		ع	ع	

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ \frac{1}{3} < x < 1 \right\} = \left( \frac{1}{3}, 1 \right)$$

4)  $-x^2(x+1) \geq 0$

$$-x^2 > 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-x^2$	-	-	0	-
$x + 1$	-	0	+	+
$-x^2(x+1)$	+	0	-	0
		ع	ع	

$$\text{مجموعه جواب} = \{x = 0\} \cup \{x < -1\} = \{0\} \cup (-\infty, -1)$$



۵)  $\frac{4-x^2}{x} > 1$

۶)  $\frac{x^2-2x}{x} < 0$

۷)  $\frac{3x+1}{x^2-1} < 0$

جواب =  $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$

جواب =  $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$

جواب =  $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$



حل نامعادلات شامل قدر مطلق :  
فرض کنیم  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $u$  یک عبارت جبری باشد  
در این صورت :

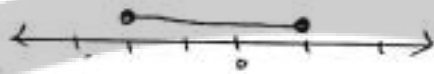
۱)  $|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$

۲)  $|u| > a \Rightarrow \begin{cases} u \geq a \\ u \leq -a \end{cases}$

مقرنین : نامعادلات زیر را حل کنید.

۱)  $|2x+1| \leq 3$

$-3 \leq 2x+1 \leq 3 \Rightarrow -3-1 \leq 2x+1-1 \leq 3-1 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$



مجموع جواب =  $[-2, 1]$

۲)  $|2x-1| > 5$

$\begin{cases} 2x-1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$  مجموع جواب =  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$



۳)  $|-5x-1| < 9$

$-9 < -5x-1 < 9 \Rightarrow -8 < -5x < 10 \Rightarrow \frac{8}{5} > x > -2$  جواب =  $(-2, \frac{8}{5})$



۴)  $|-4x+5| > 13$

$\begin{cases} -4x+5 > 13 \Rightarrow -4x > 8 \Rightarrow x < -2 \\ -4x+5 < -13 \Rightarrow -4x < -18 \Rightarrow x > \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$  جواب =  $(-\infty, -2) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$

فصل ۵ : تابع

تعریف زوج مرتب :

اگر برای دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  ترتیباً مثال شویم و آنها را داخل پرانتز به صورت  $(x, y)$  بنویسیم تسلسل زوج مرتب می دهند.  $a$  را مولفه اول (مختص اول) و  $b$  را مولفه دوم (مختص دوم) می نامند.

شرط تساوی دو زوج مرتب  $(a, b)$  و  $(c, d)$  آنستکه :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

مثال ۱ : مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که :

$$1) (x+y, 4) = (3, 2y)$$

$$\begin{cases} x+y=3 \Rightarrow x=0 \\ 2y=4 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$$2) (x^2+xy, y^2+xy) = (28, -12)$$

$$\begin{cases} x^2+xy=28 \\ y^2+xy=-12 \end{cases} \Rightarrow x^2+2xy+y^2=14 \Rightarrow (x+y)=14 \Rightarrow x+y=14$$

$$\begin{cases} x^2+xy=28 \Rightarrow x=7 \\ x+y=4 \Rightarrow y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+xy=28 \Rightarrow x=-7 \\ x+y=-2 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

مثال ۲ : مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب  $(15, x-y)$

و  $(x^2-y^2, 3)$  با هم برابر باشند.

$$(x^2-y^2, 3) = (15, x-y) \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=15 \Rightarrow (x-y)(x+y)=15 \Rightarrow x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=1$$

حاصل ضرب دکارتی :

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند حاصل ضرب دکارتی مجموعه  $A$  در مجموعه  $B$  را بصورت  $A \times B$  نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

$$B \times A = \{(x, y) \mid x \in B, y \in A\} \text{ واضح است}$$

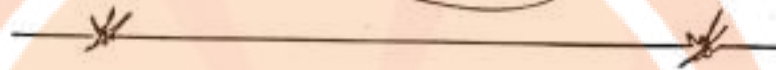


مثال) آند  $A = \{2, 3, -7\}$  و  $B = \{1, 2\}$  حاصل‌مجموعه محاسبه:

الف)  $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (-7, 1), (-7, 2)\}$

ب)  $B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, -7), (2, 2), (2, 3), (2, -7)\}$

نتیجه:  $A \times B \neq B \times A$



تعریف رابطه:

هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی را یک رابطه می‌نامند و

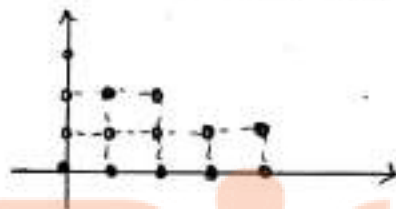
$R \subseteq A \times B$

آنرا با  $R$  نشان می‌دهند:

مثال ۱) آند  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  و  $R = \{(x, y) | x, y \in A, x + 2y \leq 4\}$  باشند، رابطه

$R$  را با نوشتن اعضا مشخص کنید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\}$



مثال ۲) رابطه  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x + y = 7, x < y\}$  مفروض است.  $R$  را بصورت

زوج مرتب نوشته و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

$R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$



تعریف تابع:

تعریف تابع بصورت زوج مرتب:

هر رابطه که در آن هیچ دوزوج مرتب دارای مولفه‌های اول مساوی

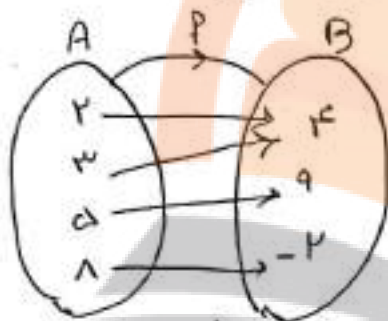
نباشند یک تابع نامیده می‌شود و معمولاً با  $f$  نشان می‌دهیم.

$f = \{(1, 3), (7, 2), (5, 4), (2, 3)\}$  تابع است

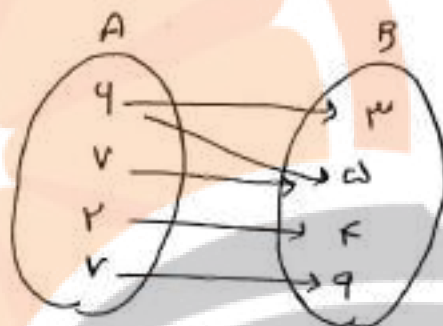
$f = \{(1, 9), (-2, 5), (4, 7), (1, 4)\}$  تابع نیست.

تعریف تابع بصورت مجموعه (نمودار ون - نمودار بیگانه):

یک تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو  $A$  دقیقاً یک عضو از  $B$  نسبت داده شود به عبارت دیگر از هر عضو  $A$  دقیقاً یک بیگانه خارج شده باشد.



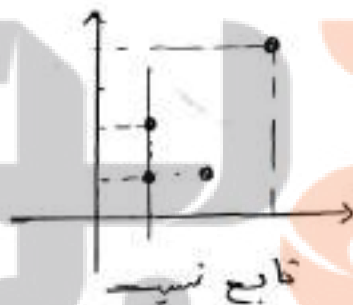
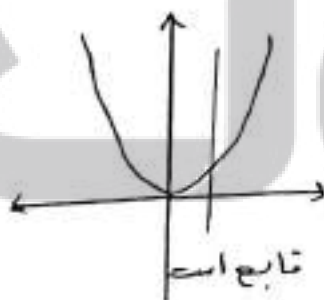
تابع است.



تابع نیست.

تعریف تابع از روی نمودار مختصاتی:

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور  $y$ ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



دامنه و برد توابع:

مجموعه تمام مولفه های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را دامنه و مجموعه همه مولفه های دوم زوج های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را برد تابع می نامند.

اگر  $f$  یک تابع باشد دامنه آن را با  $D_f$  و برد آن را با  $R_f$  نشان می دهیم.



$$f = \{(1, 7), (3, 8), (5, 2), (7, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$R_f = \{7, 8, 2, 4\}$$

$R_f =$  تصویر روی محور  $y$  ها

$D_f =$  تصویر روی محور  $x$  ها  
ضابطه تابع:

رابطه بین مولفه های اول و دوم زوج های مرتب تابع  $f$  را قانون یا ضابطه تابع  $f$  نامیده و با علامت  $y = f(x)$  نشان می دهیم:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$$

مثال ضابطه تابع  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots\}$  را بدست آورید.

عوض = طول + ۱

$$y = x + 1 \Rightarrow y = f(x) = x + 1$$

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	۵	۳	۰	۳	۵

مثال ضابطه تابع مقابل را بدست آورید.

$$\text{عوض} = (\text{طول})^2 + ۱ \Rightarrow y = x^2 + ۱ \Rightarrow y = f(x) = x^2 + ۱$$

مثال آخر  $f(x) = 2x^2 + 3$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  مطلوب است محاسبه:

الف)  $f(2) = 2(2)^2 + 3 = 11$

ب)  $f(-3) = 2(-3)^2 + 3 = 21$

ج)  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$

د)  $g(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

ه)  $f(g(10)) = f(3) = 2(3)^2 + 3 = 21$

تابع خطی:

هر تابع بصورت  $y = f(x) = ax + b$  را یک تابع خطی می نامند و نمودار آن یک خط راست است.

$y = f(x) = dx - 3$

$y = f(x) = -2x + 1$

مثال

تذکر مهم: معادله خطی که از دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  می گذرد از فرمول زیر بدست می آید:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$
  
(فرمول ۱۲۱)

مثال (۱) در تابع خطی  $f$  داریم:  $f(0) = d$  و  $f(1) = 4$  مطلوب است ضابطه تابع  $f$  و رسم نمودار آن:

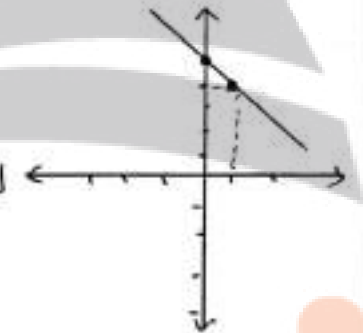
$f(0) = d \Rightarrow (0, d) \in f$

$y = ax + b$

$f(1) = 4 \Rightarrow (1, 4) \in f$

$$\begin{cases} d = a(0) + b \Rightarrow b = d \\ 4 = a(1) + b \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$y = f(x) = -1x + d$$



روش II

$(0, d) \in f$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$(1, 4) \in f$

$$y - d = \frac{4 - d}{1 - 0} (x - 0)$$

$$y - d = -1x \Rightarrow y = -1x + d$$



مثال (۲) در تابع خطی  $f$  داریم:  $f(1) = 1$  و  $f(2) = 4$  مطلوب است ضابطه تابع  $f$  و رسم نمودار آن:

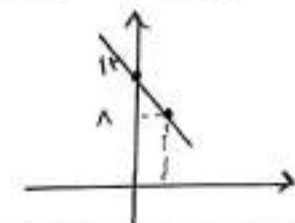
$f(2) = 4 \Rightarrow (2, 4) \in f$

$y = ax + b$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f$

$$\begin{cases} 4 = a(2) + b \Rightarrow 2a + b = 4 & a = 4 \\ 1 = a(1) + b \Rightarrow a + b = 1 & b = 1 \end{cases}$$

$$y = f(x) = -4x + 1$$





(تقریباً تابعی)

تقریباً ۱: اگر بدانیم رابطه زیر یک تابع است مقدار  $a$  و  $b$  را بیابید اگر چه:

$$R = \{(2, 1), (4, 1), (2, a-3), (a, b+2)\}$$

$$(2, 1) = (2, a-3) \Rightarrow a-3=1 \Rightarrow \boxed{a=4} \Rightarrow (a, b+2) = (4, b+2)$$

$$(4, b+2) = (4, 1) \Rightarrow b+2=1 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$$\Rightarrow R = \{(a-1, 2), (d, a-2), (a-2, b+3), (3, d), (d, 3)\}$$

$$(d, a-2) = (d, 3) \Rightarrow a-2=3 \Rightarrow \boxed{a=5} \Rightarrow R = \{(4, 2), (d, 3), (3, b+3), (3, d), (d, 3)\}$$

$$b+3=d \Rightarrow \boxed{b=2}$$

تقریباً ۳: فرض کنید برای تابعی مانند  $f$  داشته باشیم  $f(x-1) = dx$

مطلوبه است محاسبه  $f(v) = ?$

$$x-1=v \Rightarrow x=v+1$$

$$\underline{v} \quad x=v+1 \Rightarrow f(x-1) = f(v) = f(v) = d(v+1) = dv+d$$

$$f(v+1) = f(v) = d(v+1) = dv+d$$

تقریباً ۴: فرض کنید  $f(x) = mx + b$  یک تابع خطی باشد و داشته باشیم

با شیم

$$f(x+2) = f(x) + 2 \quad , \quad f(v) = d \quad \text{مطلوبه است تابع } f$$

رسم نمودار آن:

$$f(v) = d \Rightarrow m(v) + b = d \Rightarrow \boxed{2m + b = d}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x+2) &= m(x+2) + b = mx + 2m + b \\ f(x+2) &= f(x) + 2 = mx + b + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} mx + 2m + b &= mx + b + 2 \\ 2m &= 2 \Rightarrow \boxed{m=1} \end{aligned}$$

$$2(1) + b = d \Rightarrow \boxed{b=3}$$

$$\boxed{f(x) = 1x + 3}$$

تعدیل:  $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$  و  $f(1) = 5$  ,  $f(-2) = -1$   
 مقدار  $3a - 2b$  را بیابید و آورید

$$f(1) = 5 \Rightarrow 1^3 + 2(1)^2 + a(1) + b = 5 \Rightarrow a + b = 2$$

$$f(-2) = -1 \Rightarrow (-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + b = -1 \Rightarrow -2a + b = -1$$

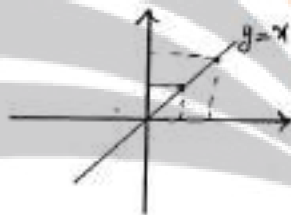
$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a - 2b = 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a = b = 1}$$



انواع تابع:

۱۱ تابع همبانی (واحد):

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود تابع همبانی (واحد) می نامند ضابطه آن بصورت  $y = f(x) = x$  و نمودار آن نیز عبارت از یک خط اول سوم است.



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}$

مثال: اگر تابع  $f = \left\{ (a-1, 5), (b+3, 8), \left(\frac{c}{2}, 10\right) \right\}$

یک تابع همبانی باشد مقادیر  $a, b, c$  را بیابید

$a-1 = 5 \Rightarrow a = 6$

$b+3 = 8 \Rightarrow b = 5$

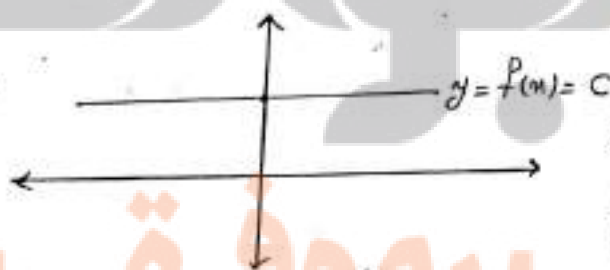
$\frac{c}{2} = 10 \Rightarrow c = 20$



۱۲ تابع ثابت:

تابعی مانند  $f$  که برد آن تنها شامل یک عضو باشد تابع ثابت می نامیم

ضابطه آن بصورت  $y = f(x) = c$  و نمودار آن خط راست موازی محور  $x$  ها است.



مثال: اگر  $f = \left\{ (2, a+1), (3, b-2), (4, 10), (1, 4c) \right\}$

تابعی ثابت باشد محاسبه  $a, b, c$  را

$a+1 = 10 \Rightarrow a = 9$

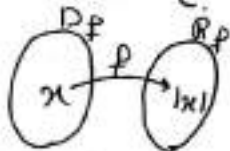
$4c = 10 \Rightarrow c = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$b-2 = 10 \Rightarrow b = 12$



۱۳ تابع قدر مطلق:

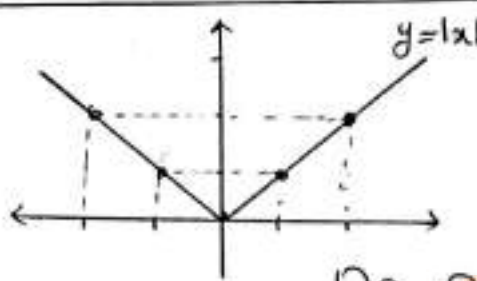
تابعی که هر عدد حقیقی را به قدر مطلق آن نسبت می دهد تابع قدر مطلق نامیده می شود و با بصورت زیر قابل نمایش است:



$f: x \rightarrow |x|$

$y = f(x) = |x|$

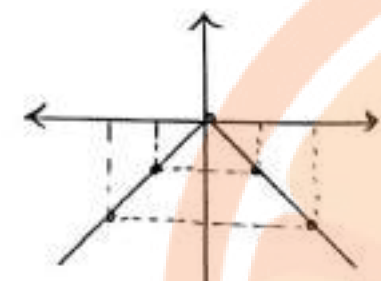




نمودار تابع  $y = f(x) = |x|$  بصورت زیر است:  $y = |x|$

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	۲	۱	۰	۱	۲

$D_f = \mathbb{R}$        $R_f = [0, +\infty)$



تعمیر نمودار تابع  $y = -|x|$  را رسم کنید. دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

$D_f = \mathbb{R}$   
 $R_f = (-\infty, 0]$

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	-۲	-۱	۰	-۱	-۲

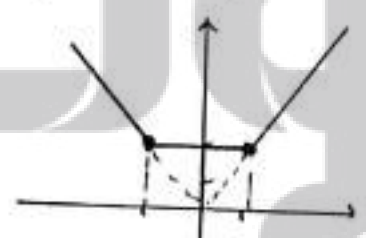
اشاره نمودار  
 $y = \sqrt{x}$   
 $y = \frac{1}{x}$

توابع چند ضابطه‌ای:

توابعی که بخش‌های مختلف دامنه آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

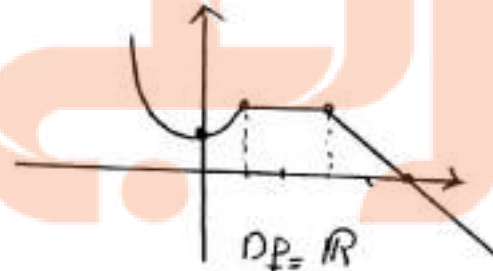
تعمیر نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$$



$D_f = \mathbb{R}$   
 $R_f = [2, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 3 \\ -x + 4 & x > 3 \end{cases}$$



$D_f = \mathbb{R}$   
 $R_f = \mathbb{R}$

تعمیر آن:  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & x \geq -1 \\ 2x + 3 & x < -1 \end{cases}$  باشد مقدار  $f(0)$ ,  $f(\sqrt{2})$ ,  $f(-1)$ ,  $f(-2)$

$f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 4 = -2$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 4 = 1$

$f(0) = 2(0)^2 - 4 = -4$

رایج است آورد

تعمیر: در تابع مقدار  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & x \geq 2 \\ |x| - 4 & x < 2 \end{cases}$  را بدست آورید.

$$f(2) = 2(2)^2 + 4 = 12$$

$$f(2) + f(-2) = 12 + (-2) = 10$$

$$f(-2) = 1 - 2 - 4 = 2 - 4 = -2$$

تعمیر: اگر ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3k & x \geq 1 \\ 4x - k & x < 1 \end{cases}$  یک تابع باشد مقدار  $k$  را بدست آورید.

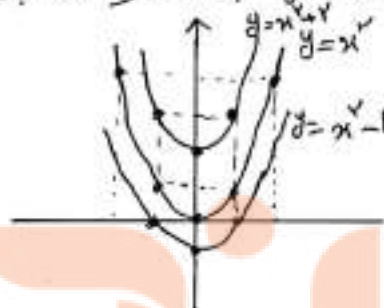
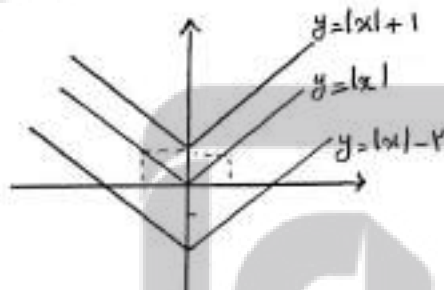
$$f(1) = 2(1) + 3k = 2 + 3k$$

$$f(1) = 4(1) - k = 4 - k \Rightarrow 2 + 3k = 4 - k \Rightarrow 4k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

رسم نمودار توابع به کمک انتقال منحنی ها:

۱) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + a$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  بصورت زیر عمل می کنیم:

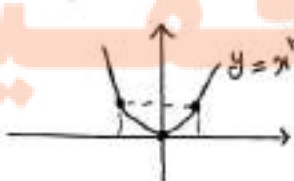
اگر  $a$  مثبت باشد نمودار  $y = f(x)$  به اندازه  $a$  به سمت بالا و اگر  $a$  منفی باشد نمودار  $y = f(x)$  به اندازه  $a$  به سمت پایین منتقل می شود.



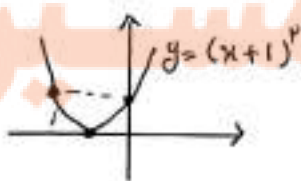
۲) برای رسم نمودار تابع  $y = f(x+a)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  بصورت زیر عمل می کنیم:

اگر  $a$  مثبت باشد نمودار تابع  $y = f(x)$  به اندازه  $a$  به سمت چپ و اگر

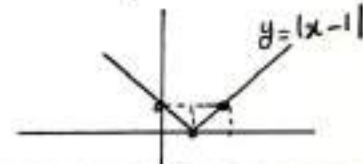
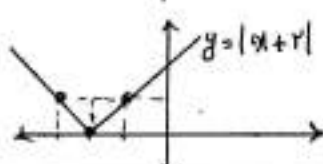
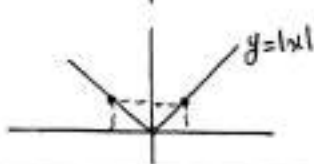
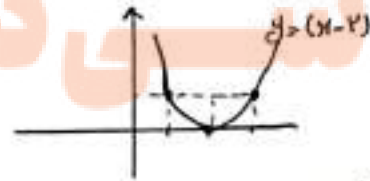
منفی باشد نمودار  $y = f(x)$  به اندازه  $a$  به سمت راست منتقل می شود.



⇒

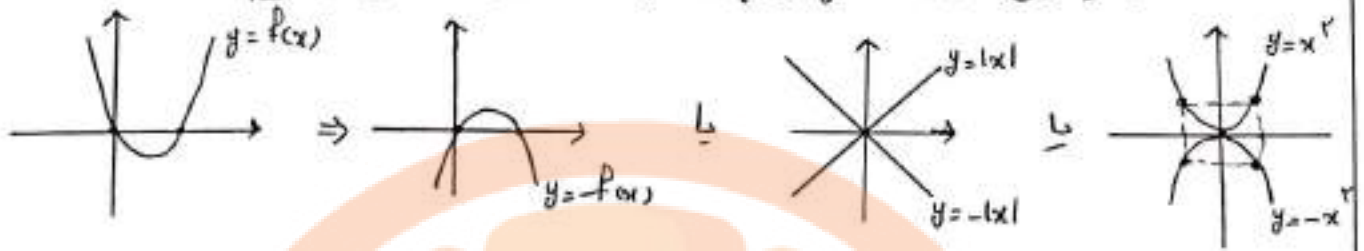


,

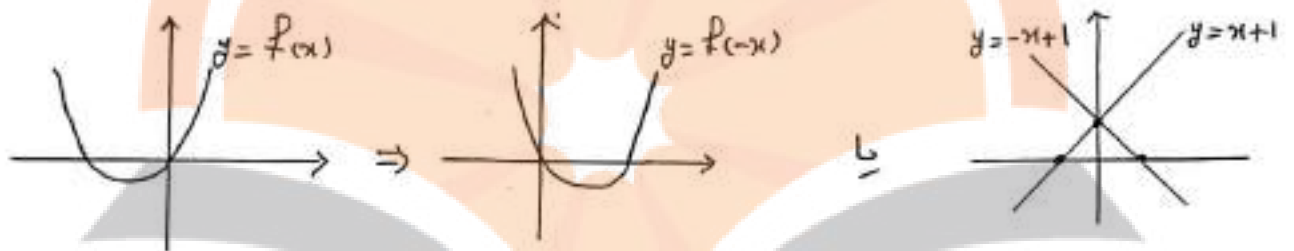




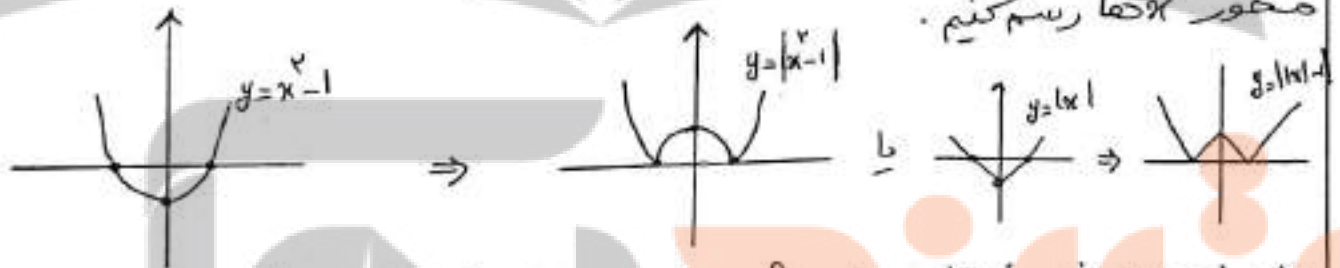
۱۳ برای رسم نمودار تابع  $y = -f(x)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  کافی است  
 قدرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $x$ ها رسم کنیم.



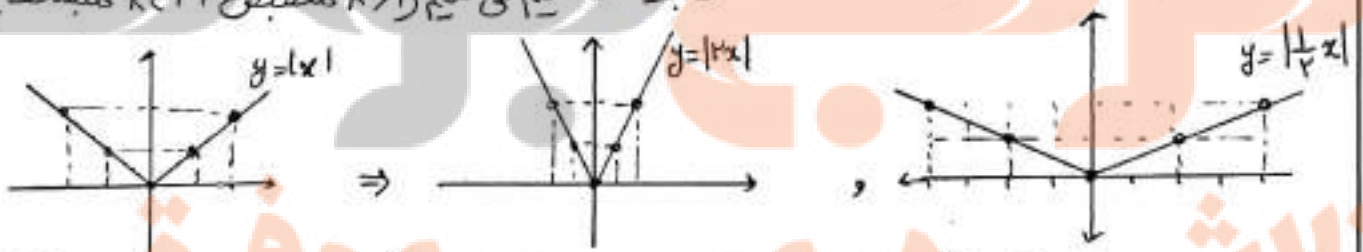
۱۴ برای رسم نمودار تابع  $y = f(-x)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  کافی است  
 قدرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $y$ ها رسم کنیم.



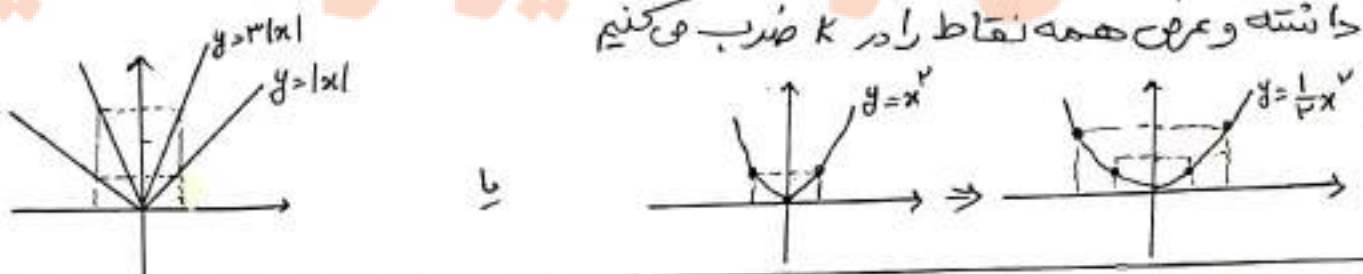
۱۵ برای رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  کافی است  
 قدرینه قسمتی از نمودار تابع  $y = f(x)$  را که زیر محور  $x$ ها است نسبت به  
 محور  $x$ ها رسم کنیم.



۱۶ برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  عرض نقاط را  
 ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را ب  $k$  تقسیم می کنیم (اگر  $k > 1$  منقبض، اگر  $k < 1$  منبسط)



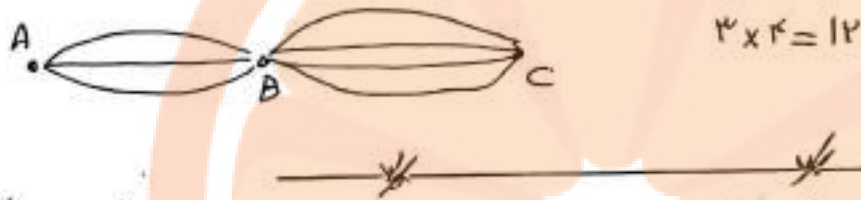
۱۷ برای رسم نمودار  $y = k f(x)$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  طولها را ثابت نگه  
 داشته و عرض همه نقاط را ب  $k$  ضرب می کنیم



فصل ۴ :

اصل ضرب : اگر کاری در مرحله اول به  $m$  روش و در هر مرحله دوم به  $n$  روش و در هر مرحله سوم به  $p$  روش و ... انجام شود کل کار به  $m \times n \times p \times \dots$  روش انجام می شود.

مثال ۱: بین دو شهر  $A$  و  $B$  سه جاده و بین دو شهر  $B$  و  $C$  چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می توان از شهر  $A$  به شهر  $C$  رفت ؟



مثال ۲ : چند عدد ۳ رقمی داریم :

یکان دهگان صدگان

۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲
۴	۵	۶	۴	۵	۶	۷	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۸	۹	۰	۷	۸	۹	۰

۵۹ ۶۰ ۶۱

$9 \times 10 \times 10 = 900$

مثال ۳ : چند عدد ۳ رقمی داریم :

۳	۴	۵		
۴	۷	۸	۹	

۵۹ ۶۰ ۶۱

$9 \times 9 \times 8 = 441$

الف) که رقم حایش تکراری نباشد ؛  
ب) که رقم حایش تکراری باشد ؛

$900 - 441 = 259$

مثال ۴ : مطلوب است تعداد اعداد سه رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ بطوریکه :

الف) تکرار مجاز نباشد .

$4 \times 4 \times 4 = 100$

ب) تکرار مجاز نباشد .

$4 \times 4 \times 3 = 48$

مثال ۵ : تعداد اعداد چهار رقمی را بیابید :

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$



مثال ۴ : به چند طریق می توان به ۱۰ سوال تستی چهارگزینه ای پاسخ داد در صورتی که :

الف) به هر سوال حتماً باید پاسخ داده شود.

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ بار}} = 4^{10}$$

ب) می توان به سوالها پاسخ نداد.

$$4^0 \times 4^1 \times \dots \times 4^9 = 4^{10}$$

مثال ۵ : با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار شروع نوشت در صورتی که :

الف) با حرف T شروع شود.

$$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود.

$$1 \times 4 \times 4 \times 1 = 4^2$$

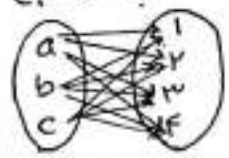
مثال ۸ : ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌ها  $2^n$  مجموعه  $n$  عضوی برابر است با  $2^n$

اثبات : فرض کنید  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد و  $B$  زیرمجموعه‌ای دلخواه از آن باشد.  $a_1$  به  $B$  تعلق دارد یا ندارد پس دو حالت وجود دارد  $a_2$  یا به  $B$  تعلق دارد یا ندارد پس برای  $a_2$  نیز دو حالت وجود دارد به همین ترتیب طبق اصل ضرب

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

حالت خواصیم داشت که تعداد کل زیرمجموعه‌ها است.

مثال ۹ : از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  چند تابع می توان ساخت ؟



حل : برای هر عضو دامنه  $A$  چهار حالت وجود دارد که به عضوی از برد  $B$  برده شود.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

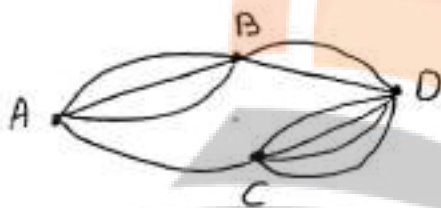
۴ تابع از  $A$  به  $B$  وجود دارد.

تک‌ر‌یاضی؛ تعداد تابع‌هایی که از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $m$  عضوی می‌توان نوشت برابر است با:  $m^n$

اصل جمع:

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه در روش اول  $m$  انتخاب و در روش دوم  $n$  انتخاب وجود داشته باشد برای انجام کار مورد نظر  $m+n$  روش وجود دارد (اصل جمع معادل کلمه "یا" است).

مثال ۱: در شکل زیر که جاده‌ها یک طرفه هستند به چند طریق می‌توان از شهر  $A$  به شهر  $D$  رفت؟



مسیر  $A$  و  $B$  و  $D$  ← حالت  $2 \times 2 = 4$

مسیر  $A$  و  $C$  و  $D$  ← حالت  $1 \times 4 = 4$

کل حالت‌ها  $= 4 + 4 = 8$

مثال ۲: با ارقام  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

تا  $7 =$  عدد یک رقمی

تا  $7 \times 4 = 42 =$  عدد ۲ رقمی

تا  $7 \times 4 \times 3 = 210 =$  عدد ۳ رقمی

حالت کل  $= 7 + 42 + 210 = 259$

مثال ۳: با ارقام  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی فرد بزرگتر از ۱۰۰ می‌توان ساخت؟

یکان دهگان صدگان

۵		۴ یا ۶
---	--	--------

۱ حالت ۳ حالت ۲ حالت

$2 \times 3 \times 1 = 6$

یکان دهگان صدگان

۱		۳ یا ۷
---	--	--------

۱ حالت ۳ حالت ۳ حالت

$3 \times 3 \times 1 = 9$

کل حالت‌ها  $= 6 + 9 = 15$



فاکتوریل: علامتی است برای نشان دادن حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  که با نماد  $n!$  (  $n$  فاکتوریل ) نشان می دهیم:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

تذکره مهم:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$4! = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$$

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

پس:

مثال: حاصل عبارتی زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \frac{12!}{7! \times 5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

$$\text{ب) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$\text{ج) } 1! + 2! + 3! = 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 1 + 2 + 6 = 9$$

مثال ۲: از معادله  $\frac{n!}{(n-3)!} = 24$  مقدار  $n$  را بیابید.

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 24 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 24 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 24 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

مثال ۳: معادله  $(2x-x^2)! = 1$  چند جواب دارد؟

$$(2x-x^2)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow x=0, x=2 \\ \text{یا} \\ 2x-x^2=1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۱ صفر  
۱ ۲  
۲ ۳  
۳ ۴

جایگشت :

تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن  $n$  شی متماثل را جایگشت آن  $n$  شی متماثل  
نامیده و برابر است با :  $n!$

مثال ۱: با ارقام ۱، ۲ و ۳ و ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال ۲: ۷ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

مثال ۳: ۴ مدار رتبی را به چند طریق می‌توان در جعبه کنار هم قرار داد؟

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال ۴: ۴ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند بطوریکه یک نفر معین  
همواره در وسط صف قرار بگیرد؟

حل: چون جای آن یک نفر کاملاً مشخص است پس جایگشت ۳ نفر دیگر  
را در نظر می‌گیریم :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

مثال ۵: ۴ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند بطوریکه یک  
نفر معین همواره اول صف باشد؟

$$3! = 6$$

مثال ۶: ۴ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند طوری که دو نفر  
معین همواره در کنار هم باشند؟

$$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$$

فرض اول:  $n$  نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند بطوریکه  $k$  نفر معین از

آنها همواره در کنار هم باشند؟

$$\text{جواب} = k! \times (n - k + 1)!$$



مثال ۱: به چند طریق هفت نفر می‌توانند در یک ردیف بایستند در صورتی که دو نفرشان که باربرند کنار هم باشند؟

$$(7-2+1)! \times 2! = 4! \times 2! = 720 \times 2 = 1440$$

مثال ۲: ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۶ دانش‌آموز کلاس دوم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به طوری که دانش‌آموزان کلاس اول حتماً کنار هم باشند؟

$$(9-4+1)! \times 4! = 4! \times 4! = 720 \times 24 =$$

جایگشت  $n$  شی غیر متمایز:

هرگاه  $n$  شی داشته باشیم که  $p$  تای آنها از نوع اول،  $q$  تای آنها از نوع دوم و  $r$  تای آنها از نوع سوم و ... باشد در این صورت جایگشت یا تعداد حالتها کنار هم قرار گرفتن این  $n$  شی از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\text{جواب} = \frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \dots}$$

مثال ۱: با حروف کلمه دامداران چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت؟

$$n=8$$

$$ت=۳$$

$$د=۲$$

$$\text{جواب} = \frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3! \times 2!} = 3360$$

مثال ۲: با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ چند عدد هفت رقمی می‌توان ساخت؟

$$\text{جواب} = \frac{7!}{1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 7!$$

مثال ۳: با حروف کلمه "ABADAN" چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

$$\text{جواب} = \frac{4!}{3!} = 4$$

قرمول: تعداد جایگشهای  $n$  شی متغایر که در آن  $k$  شی مشخص کنار هم قرار نداشته باشند از فرمول زیر بدست می آید:

$$\text{جواب} = n! - (n-k+1)! \times k!$$

مثال: با حروف  $a, b, c, d, e, f$  چند کلمه شش حرفی می توان نوشت بطوریکه  $a, b$  کنار هم نباشند.

$$\text{جواب} = 6! - (6-2+1)! \times 2! = 720 - 120 \times 2 = 720 - 240 = 480$$

مثال: به چند طریق می توان  $7$  دانش آموز را در یک صف قرار داد بطوریکه دو نفر از آنها که با هم هستند کنار هم نباشند.

$$\text{جواب} = 7! - (7-2+1)! \times 2! = 5040 - 240 \times 2 = 5040 - 480 = 4560$$

جایگشت  $k$  شی از  $n$  شی متغایر:

اگر  $n$  شی متغایر داشته باشیم، تعداد حالت های کنار هم قرار گرفتن  $k$  شی از  $n$  شی متغایر را با علامت  $P(n, k)$  نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\begin{matrix} \text{مکان اول} & \text{مکان دوم} & \text{مکان سوم} & \dots & \text{مکان } k \\ n & (n-1) & (n-2) & \dots & (n-(k-1)) \end{matrix} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال ۱: ۴ نفر به سیخ های روند و در یک ردیف ۱۰ صندلی خالی وجود دارد. به چند طریق این افراد می توانند روی صندلی ها بنشینند؟

$$P(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$$



مثال ۲: با حروف کلمه "FLOWER" و بدون تکرار حروف چند کلمه می توان نوشت؟

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

الف) سه حرفی می توان نوشت؟

$$P(4, 4) = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

ب) چهار حرفی می توان نوشت؟

مثال ۳: با سه رقم غیر صفر چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم می توان ساخت؟

$$P(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

ساخت؟

مثال ۴: چند کلمه سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می توان نوشت؟

$$P(26, 3) = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 15600$$

مثال ۵: درون بستقابی یک سیب، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده

است. اگر از بین ۲ نفر ۳ نفر به طرف بستقاب رفته و هر کدام یک میوه

بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند؟

$$P(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

مثال ۶: با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی

متشکل حرف M می توان ساخت؟

قرارداد M درستی از چهار مکان به ۴ طریق

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

برگردم سه مکان با میمانده توسط سه حرف با میمانده:

$$\text{طبق اصل ضرب: } 4 \times 24 = 96 = \text{کل حالتها}$$

مثال ۷: در یک مسابقه با ۱۴ شرکت کننده به چند طریق امکان دارد سه مدال

طلا، نقره و برنز به شرکت کنندگان بدهد؟

$$P(14, 3) = \frac{14!}{(14-3)!} = \frac{14!}{11!} = 2184$$

ترکیب:

اگر از بین  $n$  شی متغایر بجواییم  $K$  شی ( $K \leq n$ )، انتخاب کنیم و حالتی کناره هم قرار بدقتن آنها اهریتی نداشته باشد آنرا یک ترکیب  $K$  شی از  $n$  شی می گوئیم و با علامت  $C(n, k)$  یا  $\binom{n}{k}$  نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

تذکره مهم: هر زیر مجموعه  $K$  عضوی از عناصر یک مجموعه  $n$  عضوی یک ترکیب  $K$  تایی از این  $n$  عضو است.

مثال ۱: به چند طریق می توان از بین ۸ نفر، یک تیم سه نفری انتخاب کرد؟

$$C(8, 3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

مثال ۲: هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند؟

الف) از وصل کردن هر دو نقطه به هم چند وتر ایجاد می شود؟

$$C(7, 2) = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

ب) چند بردار عمید صفر می توان ساخت؟  
ابتدا و انتهای بردارها مهم است.

$$2 \times C(7, 2) = 2 \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 2 \times 21 = 42$$

ج) چند مثلث می توان ساخت؟

$$C(7, 3) = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

مثال ۳: از رابطه  $C(n, n-2) = 4$  مقدار  $n$  را بیست آورید.

$$\frac{n!}{(n-2)! \times (n-(n-2))!} = 4 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 4 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 12$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 = 4 \times 3 \Rightarrow \boxed{n=4}$$





مثال ۹) از هر یک از روابط زیر، عدد طبیعی  $n$  را بدست آورید:

الف)  $C(n, 2) + P(n, 1) = 15$

$$\frac{n!}{2! \times (n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = 15 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n = 15 \Rightarrow \frac{n^2 - n + 2n}{2} = 15 \Rightarrow \frac{n^2 + n - 30}{2} = 0 \Rightarrow (n+4)(n-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=6 & \text{قاف} \\ n=-4 & \text{غقف} \end{cases}$$

ب)  $C(n+1, 3) = 3P(n, 2)$

$$\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = 3 \times \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{(n+1) \times n!}{4 \times (n-2)!} = 3 \times \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{n+1}{4} = 3$$

$$\Rightarrow n+1=12 \Rightarrow \boxed{n=11}$$

مثال ۱۰) تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را بدست آورید.

$$C(10, 3) = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{4 \times 7!} = 120$$

مثال ۱۱) به چند طریق می‌توان ۳ تا از حروف کلمه DELAVARAN

۱۴ (د)

۵۲ (ج)

۴۲ (ب)

۳ (الف)

A, A, A, D, E, L, V, R, N

برای انتخاب ۳ حرف از این حروف ۳ حالت وجود دارد:

- حالت اول  $\rightarrow$  ۳ حرف یکسان باشند: حالت اول  $\rightarrow$  AAA
  - حالت دوم  $\rightarrow$  ۲ حرف یکسان باشند: حالت دوم  $\rightarrow$  AA□
  - حالت سوم  $\rightarrow$  ۳ حرف متمایز باشند: حالت سوم  $\rightarrow$   $\binom{7}{3}$
- ۱ + ۶ + ۳۵ = ۴۲



مثال ۱۲: در یک آزمون که ۱۲ سوال دارد، شخصی می‌خواهد به ۴ سوال پاسخ دهد، این کار به چند طریق می‌تواند انجام شود در صورتیکه:

الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

$$C(12, 4) = \frac{12!}{4! \times (12-4)!} = 924$$

ب) حداقل به ۳ سوال از ۳ سوال اول پاسخ دهد.

$$\binom{5}{3} \binom{7}{3} + \binom{5}{4} \binom{7}{2} + \binom{5}{5} \binom{7}{1} = 3d + 10d + 7 = 442$$

مثال ۱۳: با حروف کلمه «computer» چند کلمه که حرف اول آن «c» و حرف آخر آن «r» باشد می‌توان ساخت؟

حله: ابتدا ۳ حرف دیگر را که لازم داریم انتخاب کرده و سپس همه را در یک ردیف قرار می‌دهیم:

$$\text{جواب} = \binom{4}{3} \times d! = \frac{4!}{3! \times 1!} \times d! = 4 \times 120 = 480$$

مثال ۱۴: با حروف کلمه «History» چند کلمه می‌توان ساخت بطوریکه:

الف) حروف صدا دار نداشته باشد؟

حله: حروف صدا دار «h» و «t» و «y» و «i» می‌باشند فقط از ۴ حرف باقیمانده باید ۴ حرف انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{4} \times 4! = 1 \times 24 = 24$$

ب) با حروف صدا دار شروع و با حروف بی صدا ختم شوند؟

i			h, t, y
o			r
u	e	s	d

$$\text{کل حالتها} = 2 + d \times 4 \times d = 20$$

تذکره مهم:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تقریباً ۱۳۱ کتاب درسی:

۱) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(18, 3) = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

$$P(n, 3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow$$

$$n(n-1)(n-2) = 210 = 7 \times 4 \times 3 \Rightarrow \boxed{n=7}$$

۳) کدامیک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$4! = 3! + 3! \quad \times \qquad 8! = 4! \times 4! \quad \times \qquad (3!)^2 = 9! \quad \times$$

$$4! = 4 \times 3! \quad \checkmark \qquad 2 \times 3! = 4! \quad \times \qquad 4! = \frac{8!}{2!} \quad \times$$

۴) یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدامند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشار دکمه هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$P(20, 3) = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 6840$$

$$6840 \times 2 = 13680 \text{ ثانیه} = 228 \text{ دقیقه}$$



(۵) با حروف کلمه « گل پیا » و بدون تکرار حروف :  
 الف) چند کلمه ۲ حرفی می توان نوشت ؟  $4! = 24$  چندتا از آنها با « ل »  
 شروع می شود ؟  $4! = 24$

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت ؟  
 $P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = 24$

ج) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف « پ » و « ر »  
 در کنار هم آمده باشند ؟

$3 \times 4 \times 3 = 12$	خود پ	$\rightarrow 24$	} اصل جمع $\rightarrow 24 + 24 + 24 = 72$
$4 \times 3 = 12$	به ۲ طریق	$\rightarrow 24$	
$4 \times 3 \times 2 = 12$		$\rightarrow 24$	

د) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « پیا »  
 کنار هم آمده باشند ؟

<table border="1"><tr><td>پیا</td><td>گل</td></tr></table>	پیا	گل	$4! \times 2! = 48$	} اصل جمع $\rightarrow 48 + 48 = 96$
پیا	گل			
<table border="1"><tr><td>گل</td><td>پیا</td></tr></table>	گل	پیا	$2! \times 4! = 48$	
گل	پیا			

« تدریبات ص ۱۳۹ کتاب درسی »

۱) یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، بسته، بادام، گردو، پنجه کدو  
 و نَصَه را برای خودش و کَشَمَش دارد. از نظر او در یک آجیلی حداقل پنج  
 نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد، او با تنقلات موجود در فروشگاه  
 چند نوع آجیلی می تواند درست کند ؟

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{7!}{3! \times 4!} = 21 + 7 + 1 = 29$$

۲) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲  
 حسابدار، ۴ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارتنرنگ و ۳ کارشناس امور حقوقی  
 است. این اداره ماهانه باید جلسهای که نفره جهت بررسی و تصویب  
 آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند به چند طریق این گروه که  
 نفره می تواند انتخاب شود هرگاه ؟

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$(1) \times (1^3) \times \binom{3+2+2+3}{3} = (1) \times (1^3) \times \binom{10}{3} = 1 \times 1 \times 120 = 120$$

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$(1) \times (1^3) \times (1^3) \times \binom{2+2+3}{2} = (1) \times (1^3) \times (1^3) \times \binom{7}{2} = 1 \times 1 \times 1 \times 21 = 21$$

ج) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$(1) \times (1^3) \times (1^2) \times (1^3) \times \binom{4+3}{1} = 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 7 = 14$$

۳) در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند و اطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین اطلب انتخاب کند. تعداد اطلبی چند نفر بوده است؟

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7$$

$$\Rightarrow \boxed{n=8}$$

۴) گل فروشی در فروشگاه خود ۵ نوع گل متفاوت دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قدری دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \frac{10!}{3! \times 7!} + \frac{10!}{4! \times 6!} + \frac{10!}{5! \times 5!} = 120 + 210 + 252 = 682$$

۵) یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و سفید دارد. آنرا با ترتیب دوما چند قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد. او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود اما تعداد رنگ های حاصل بیشتر از جواب شماست؟ چون دو رنگ انتخاب شده را می توانیم با نسبت های متفاوتی با هم مخلوط کنیم.



۶) هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

۷) یک آتشیز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آتشیز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

از ۳ نوع ادویه، اگر دو نوع ادویه A و B انتخاب شوند یک نوع ادویه از بین این دو ادویه با میماند انتخاب می‌شود که برابر است با:

$$\binom{1}{1} = 1$$

تعداد حالت‌هایی که A و B با هم استفاده شوند = کل حالتها - تعداد حالت‌هایی که A و B

$$= \binom{10}{3} - \binom{1}{1} = 120 - 1 = 119$$

۸) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

تعداد حالت‌هایی که A و B و C با هم استفاده شوند = کل حالتها - تعداد حالت‌هایی که سه نوع ادویه A و B و C با هم استفاده شوند

$$= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

۹) ادویه‌ها به ۳ دسته ۳ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

$$\binom{3}{3} + \binom{3}{3} = 1 + 1 = 2$$

۱۰) مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف)  $\binom{4}{3} \times \binom{5}{3}$  به چند طریق می‌توان از بین ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۴ دانش‌آموز تجربی یک تیم فوتبال ۵ نفره تشکیل داد بطوریکه ۳ نفر دانش‌آموز ریاضی و ۲ نفر دانش‌آموز تجربی باشند.  
ب)  $\binom{4}{3} + \binom{5}{3}$  به چند طریق می‌توان از بین ۵ فوتبالیست یا ۴ سطرینج باز یک تیم ۳ نفره فوتبال یا تیم ۲ نفره سطرینج باز تشکیل داد.

فصل ۷: آمار واحتمال

پدیده‌های تصادفی:

پدیده‌هایی که نتیجه آزمایش یا مشاهده را در آنها قبل از وقوع، بطور قطع نتوان مشخص کرد پدیده‌های تصادفی می نامند.

پرتاب سکه یا انداختن تاس نمونه‌هایی از پدیده‌های تصادفی هستند.

فضای نمونه:

مجموعه همه نتیجه‌های ممکن هر آزمایش را فضای نمونه‌ای آن آزمایش نامیده و با  $S$  نشان می‌دهیم همچنین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای  $S$  را با  $n(S)$  نشان می‌دهند.

فضای نمونه‌ای در انداختن یک سکه  $S = \{ر، پ\}$   $\Rightarrow n(S) = 2 = 2^1$

فضای نمونه‌ای در انداختن دو سکه  $S = \{(ر، ر)، (ر، پ)، (پ، ر)، (پ، پ)\}$   
 $\Rightarrow n(S) = 4 = 2^2$

فضای نمونه‌ای در انداختن سه سکه  $S = \{$



$\Rightarrow n(S) = 8 = 2^3$

فرمول: فضای نمونه‌ای در انداختن  $n$  سکه را با  $S$  نشان می‌دهیم

$n(S) = 2^n$

تعداد اعضای این فضای نمونه‌ای برابر است با:

تاس  $S = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶\}$   $\Rightarrow n(S) = 6 = 4^1$

تاس  $S = \{(۱، ۱)، \dots، (۱، ۶)، (۲، ۱)، \dots، (۲، ۶)، (۳، ۱)، \dots، (۳، ۶)، (۴، ۱)، \dots، (۴، ۶)، (۵، ۱)، \dots، (۵، ۶)، (۶، ۱)، \dots، (۶، ۶)\}$

$\Rightarrow n(S) = 36 = 4^2$

فرمول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در انداختن  $n$  تاس برابر است با:

$n(S) = 4^n$



فرض کنید: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در انداختن  $n$  سکه و  $m$  مکعب برابر است با:

$$n(\Omega) = 2^n \times 4^m$$

مثلاً فضای نمونه‌ای در انداختن یک سکه و یک مکعب را بنویسید.

$$n(\Omega) = 2^1 \times 4^1 = 12$$

$$S = \left\{ (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (س, ۱), (س, ۲), (س, ۳), (س, ۴), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴) \right\}$$

پیشامد تصادفی:  
 هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای  $S$  مانند  $A$  را یک پیشامد تصادفی در  $S$  می‌نامیم. تعداد اعضای پیشامد تصادفی  $A$  را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فضای نمونه‌ای پرتاب تاس را نوشته و پیشامد آنرا مشخص کنید که تاس زوج ظاهر شود.

$$\Rightarrow n(\Omega) = 4 \quad S = \{ ۱, ۲, ۳, ۴ \} = \text{فضای نمونه}$$

$$\Rightarrow n(A) = 3 \quad A = \{ ۲, ۴, ۶ \} = \text{پیشامد ظاهر شدن زوج}$$

مثال ۲: یک سکه را ۲ بار پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی را بنویسید و پیشامد آنرا مشخص کنید که فقط یک بار «رو» ظاهر شود؟

$$\Rightarrow n(\Omega) = 4 \quad S = \left\{ (ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ) \right\} = \text{فضای نمونه‌ای}$$

$$\Rightarrow n(A) = 2 \quad A = \left\{ (ر, پ), (پ, ر) \right\} = \text{پیشامد یک بار «رو»}$$

تذکره مهم: اگر یک سکه را  $n$  بار پرتاب کنیم یا  $n$  سکه را یک بار پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای هر دو آزمایش با هم برابر است و  $n(\Omega) = 2^n$

مثال ۳: خانوادگی صاحب ۴ فرزند است مطلوب است:  
 الف) پیشامد  $A$  که در آن دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

$$A = \left\{ (پ, پ, پ, د), (پ, پ, د, پ), (پ, د, پ, پ), (د, پ, پ, پ) \right\}$$

ب) پیشامد B که در آن حداقل یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

$$B = \{ (د، د، پ، پ)، (د، د، پ، د)، (د، د، د، پ)، (د، د، د، د) \}$$

$$n(B) = 4 \Rightarrow \{ (د، د، پ، پ) \}$$

ج) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند.

$$C = \{ (د، پ، د، د)، (د، پ، د، پ)، (د، پ، پ، د)، (د، پ، پ، پ) \}$$

$$n(C) = 4 \Rightarrow \{ (د، پ، د، د)، (د، پ، د، پ) \}$$

د) پیشامد D که در آن تعداد فرزندان پسر بیشتر از دختر باشد.

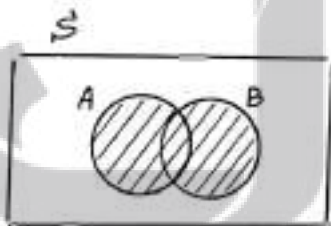
$$D = \{ (د، پ، پ، پ)، (د، پ، د، پ)، (د، پ، پ، د)، (د، پ، د، د) \}$$

$$n(D) = 4 \Rightarrow \{ (د، پ، پ، پ) \}$$

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها:

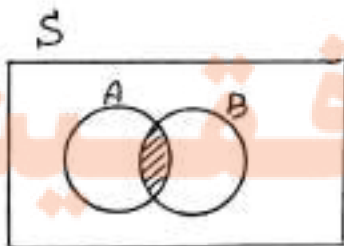
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

الف) اجتماع دو پیشامد:



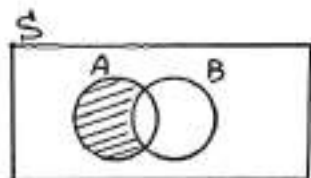
پیشامد  $(A \cup B)$  زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد (یا A رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دو رخ دهد)

ب) اشتراک دو پیشامد:



پیشامد  $(A \cap B)$  زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد با هم رخ دهند (هم پیشامد A رخ دهد و هم پیشامد B رخ دهد)

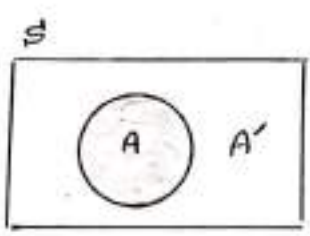
ج) تفاضل دو پیشامد:



پیشامد  $(A - B)$  زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.



۱) متمم یک پیشامد؟



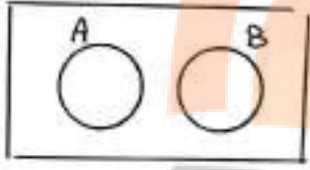
اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد متمم پیشامد A را با علامت A' نشان داده و زمانی رخ می‌دهد

که پیشامد A رخ ندهد:

- ۱)  $A \cup A' = S$     ۲)  $A \cap A' = \emptyset$     ۳)  $S - A = A'$     ۴)  $S - A' = A$

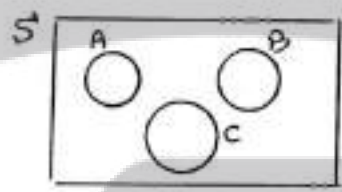
تعریف دو پیشامد ناسازگار:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند آنها را ناسازگار می‌گویند



هرگاه  $A \cap B = \emptyset$  در واقع دو پیشامد ناسازگار باهم رخ نمی‌دهند واضح است که A و A' ناسازگارند.

اگر A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند این سه پیشامد را دوه دو ناسازگار می‌نامند هرگاه  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$ ,  $B \cap C = \emptyset$



به عبارت دیگر اشتراک دوه دوی آنها نهی باشد.

مثال ۱) یک تاس را پرتاب می‌کنیم مطلوب است:

$A = \{2, 4, 6\}$

الف) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده تاس زوج باشد

$B = \{1, 3, 5\}$

ب) پیشامد B که در آن عدد ظاهر شده تاس فرد باشد.

ج) آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟  $A \cap B = \emptyset$

تعریف ۱: چهار سکه را باهم پرتاب می‌کنیم مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی

$n(S) = 2^4 = 16$

ب) پیشامد A که در آن حداقل سه بار «رو» بیاید.

$A = \{(ر,ر,ر,ر), (ر,ر,ر,ع), (ر,ر,ع,ر), (ر,ع,ر,ر)\} \Rightarrow n(A) = 4$

ج) پیشامد B که در آن فقط یک بار بیست بیاید.

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, r \right), \left( \frac{1}{5}, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\} \Rightarrow n(B) = 4$$

د) پیشامد A-B را بیابید.

$$A-B = \left\{ (r, r, r) \right\} \Rightarrow n(A-B) = 1$$

تقریب ۲: تاس سه‌گانه را دو بار می‌اندازیم، مطلوبیت:

$$n(S) = 4^2 = 16$$

ب) پیشامد A که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب مساوی باشند.

$$A = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (d, d), (4, 4) \right\} \Rightarrow n(A) = 4$$

ج) پیشامد B که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشند.

$$B = \left\{ (2, 3), (3, 2), (2, d), (d, 2), (3, d), (d, 3), (2, 2), (3, 3), (d, d) \right\} \Rightarrow n(B) = 9$$

د) پیشامد C که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

$$C = A - B = \left\{ (1, 1), (4, 4), (4, 4) \right\} \Rightarrow n(C) = n(A - B) = 3$$

تقریب ۳: یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم. مطلوبیت:

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, r \right), \left( \frac{1}{5}, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, r, r \right), \left( r, \frac{1}{5}, r \right), \left( r, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, r, r \right) \right\} \Rightarrow n(S) = 8$$

ب) پیشامد A که در آن تا اول ۲ بار، رو بیاید.

$$A = \left\{ (r, r, r), (r, r, \frac{1}{5}), (r, \frac{1}{5}, r), (\frac{1}{5}, r, r) \right\}$$

$$A' = S - A = \left\{ \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, r \right), \left( \frac{1}{5}, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, r, r \right), \left( r, \frac{1}{5}, r \right), \left( r, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, r, r \right) \right\} \Rightarrow n(A') = 7$$

د) پیشامد C که در آن هر سه بار سکه به یک طرفه ظاهر شود.

$$C = \left\{ \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right), \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, r \right), \left( \frac{1}{5}, r, \frac{1}{5} \right), \left( r, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\} \Rightarrow n(C) = 4$$



احتمال وقوع یک پیشامد:

اگر  $S$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و  $A \subseteq S$  یک پیشامد در فضای  $S$  باشد. احتمال وقوع پیشامد  $A$  را با علامت  $P(A)$  نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$0 < P(A) < 1$$

مثال ۱: در یک تاس یک تاس سالم، احتمال آمدن عدد زوج چقدر است؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$$

مثال ۲: سه سکه را باهم پرتاب می‌کنیم احتمال وقوع پیشامدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) هر سه سکه رو بیایند.

ب) احتمال آنکه فقط یکی از سکه‌ها رو بیاید.

ج) احتمال آنکه حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید.

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, س), (ر, س, ر), (ر, س, س), (س, ر, ر), (س, ر, س), (س, س, ر), (س, س, س)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 8$$

الف)  $A = \{(ر, ر, ر)\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

ب)  $B = \{(ر, ر, س), (ر, س, ر), (س, ر, ر)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

ج)  $C = \{(ر, ر, س), (ر, س, ر), (س, ر, ر), (ر, ر, ر), (ر, ر, س), (ر, س, س), (س, ر, س), (س, س, ر), (س, س, س)\}$

$$\Rightarrow n(C) = 7 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

مثال ۳: فرض کنیم هر یک از اعداد ۲ رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بیرون تکرار رقم می توانیم بسازیم، روی یک کارت می نویسیم و آنهارا در کیسه قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه عدد خارج شده زوج باشد.  
 ب) احتمال آنکه عدد خارج شده فرد باشد.

$$S = \{23, 24, 32, 34, 42, 43\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$\text{الف) } A = \{24, 32, 34, 42\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } B = \{23, 43\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال ۴: در کیسه ای سه مهره سفید و دو مهره سیاه وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه بیرون آورده می شود مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره سفید باشد.

$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

$$n(A) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

مثال ۵: می خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش آموز رشته تجربی و ۴ دانش آموز رشته ریاضی انتخاب کنیم مطلوب است:

الف) احتمال آنکه هر سه نفر رشته ریاضی باشند.  
 ب) احتمال آنکه دو نفر رشته تجربی و یک نفر رشته ریاضی باشند.

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!} = 364$$

$$\text{الف) } n(A) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{364} = \frac{1}{91}$$

$$n(B) = \binom{10}{2} \times \binom{4}{1} = 45 \times 4 = 180$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{180}{364} = \frac{45}{91}$$



مثال ۶: در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه هر سه مهره آبی باشند.

ب) احتمال آنکه هر سه مهره صورتی باشند.

ج) احتمال آنکه دقیقاً ۲ مهره صورتی باشند.

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

الف)  $n(A) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{35}$

ب)  $n(B) = \binom{3}{3} = 1$  یا هر سه مهره قرمز یا هر سه مهره آبی  $= \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1 = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

ج)  $n(C) = \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 3 + 3 \times 4 = 18 + 12 = 30$   
 دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو مهره آبی و یک مهره قرمز  
 $\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$

مثال ۷) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای متناهی و ناخالی باشند ثابت کنید:

الف)  $0 < P(A) < 1$       ب)  $P(\emptyset) = 0$       ج)  $P(S) = 1$

اثبات الف)  $A \subseteq S \Rightarrow 0 < n(A) < n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} < \frac{n(A)}{n(S)} < \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 < P(A) < 1$

اثبات ب)  $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$

اثبات ج)  $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

قانون جمع احتمالات:  
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند در اینصورت رابطه زیر که به قانون جمع احتمالات معروف است بین آنها برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اثبات:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند رابطه فوق بصورت زیر خواصر بوده:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال ۱: احتمال اینکه دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۰٫۳۴ و در درس هندسه قبول شود ۰٫۲۳ است. احتمال اینکه حداقل در یکی از این دو درس قبول شود ۰٫۳۸ است. احتمال اینکه دانش آموز در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

احتمال قبولی در ریاضی  $P(A) = ۰٫۳۴$

احتمال قبولی در هندسه  $P(B) = ۰٫۲۳$

احتمال قبولی در حداقل یکی  $P(A \cup B) = ۰٫۳۸$

احتمال قبولی در هر دو  $P(A \cap B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۰٫۳۸ = ۰٫۳۴ + ۰٫۲۳ - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰٫۱۹$$

مثال ۲: احتمال اینکه فردی دارای بیماری قلبی باشد ۰٫۴۱ و احتمال اینکه مشکل بینایی داشته باشد ۰٫۱۵ و احتمال اینکه هر دو بیماری را داشته باشد ۰٫۳۲ است. احتمال آنرا حساب کنید که حداقل یکی از دو نوع بیماری را داشته باشد؟

احتمال بیماری قلبی  $P(A) = ۰٫۴۱$

احتمال بینایی  $P(B) = ۰٫۱۵$

احتمال هر دو بیماری  $P(A \cap B) = ۰٫۳۲$

احتمال داشتن حداقل یک بیماری  $P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= ۰٫۴۱ + ۰٫۱۵ - ۰٫۳۲ = ۰٫۲۴$$



مثال ۳: اگر  $A'$  متمم پیشامد  $A$  در فضای نمونه‌ای  $S$  باشد ثابت کنید:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

اثبات: چون  $A$  و  $A'$  ناسازگارند پس:

$$\left. \begin{aligned} P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \\ P(A \cup A') &= P(S) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

مثال ۴: دو تاس را با هم می‌اندازیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر دو تاس زوج بیاید.  $n(S) = 4^2 = 16$

بیشامد زوج تاس  $A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$$\Rightarrow n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{16} = \frac{1}{4}$$

ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد بیایند.

بیشامد مجموع دو تاس  $B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \Rightarrow n(B) = 5$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

بیشامد هر دو تاس فرد  $C = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

$$\Rightarrow n(C) = 9 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{16}$$

$B \cap C = \{(3,5), (5,3)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{16}$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{16} + \frac{9}{16} - \frac{2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

ج) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟  $A = \text{هر دو زوج} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$  (طبق الف)

مجموع دو تاس  $D = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \Rightarrow P(D) = \frac{6}{16}$

$A \cap D = \emptyset \Rightarrow$  ناسازگار  $P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{1}{4} + \frac{6}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

(۷) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

از بین نامده متمم استفاده می‌کنیم  
 $A =$  بینامده مجموع دو تاس کمتر از ۱۱

بینامده مجموع دو تاس  
 نبرتهای مساوی ۱۱  
 $A' = \{(4,4), (4,5), (5,4)\} \Rightarrow P(A') = \frac{3}{36}$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

(۸) حاصلضرب دو عدد روشده ۱۲ باشد؟

$A = \{(2,4), (4,2), (3,4), (4,3)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

مثال (۹) می‌خواهیم از بین ۴ مهندس و ۵ حقوق‌دان، ۳ نفر را بصورت تصادفی انتخاب کنیم؟

الف) احتمال آنکه فقط یک حقوق‌دان انتخاب شود چقدر است؟

$n(S) = \binom{9}{3} = 84$   
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \times 6}{84} = \frac{5}{14}$

ب) احتمال آنکه حداقل یک مهندس انتخاب شود چقدر است؟

$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{6 + 10}{84} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$

ج) احتمال آنکه تعداد حقوق‌دان‌ها بیشتر باشد چقدر است؟

$P(C) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{6 + 10}{84} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$

د) احتمال آنکه از هر دو شغل انتخاب شده باشد چقدر است؟

$P(D) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 + 6}{84} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$

مثال (۱۰) اگر  $P(A) = 0.3$  و  $P(B') = 0.4$  و  $A$  و  $B$  دو رویداد ناسازگار باشند،

$P(A \cup B)$  را بیابید.

$P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0.4 = 0.6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.6 = 0.9$

فرمول  $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



مثال ۷: اگر  $P(A) = 2P(B') = 0.4$  و  $P(A \cap B) = 0.3$  باشد  $P(A \cup B)$  و  $P(A' \cap B')$  را بیابید.

$$2P(B') = 0.4 \Rightarrow P(B') = 0.2 \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.8 - 0.3 = 0.9$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - 0.4 + 0.8 - [0.8 - 0.3] = 0.9$$

فازانج بوک

تلاشی در مسیر موفقیت

فصل ۷: درس دوم: علم آمار و جامعه و نمونه

تعریف آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات را آماری گویند.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

تقریب: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع آوری داده‌هاست (درست)

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از علم آمار است (درست)

ج) «علم آمار» همان اعداد و ارقام است (نادرست)

سرشماری:

آدر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم می‌گوئیم سرشماری کرده‌ایم.

تعریف جامعه یا جمعیت:

مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیا که در باره‌ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد جامعه یا جمعیت نامیده می‌شوند و هر یک از افراد یا اشیا، راعضو جامعه می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه:

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه می‌گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه:

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود نمونه می‌گویند و هر یک از افراد یا اشیا انتخاب شده را عضو نمونه می‌گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه:

تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه می‌گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.



تمرین: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

- الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است. (نادرست)
- ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند. (نادرست)
- پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است. (درست)

تعریف متغیر و مقدار متغیر:

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند، عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود مقدار متغیر می‌گویند.

مقدار متغیر	متغیر
۲۰۰ گرم	وزن هلو
درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳	کیفیت هلو
۱۲۰ کیلومتر	حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده
۸ لیتر	میزان بنزین مصرفی یک خودرو برای هر ۱۰۰ کیلومتر
سفید	رنگ خودرو
۱۵ سال	سن دانش آموز
۲۰	نرخ ریاضی
۵	گروه خونی

انواع متغیرها:

۱) متغیرهای کمی

۲) متغیرهای کیفی

تعریف متغیرهای کمی:

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری و شمارش هستند، متغیرهای کمی نامیده می‌شوند.

مثال: قد، وزن، طول، جمعیت، تعداد تصادفات رانندگی در یک روز، درجه حرارت، شدت زلزله، درآمد، تعداد کلمات به کار رفته در هر بیت یک غزل، تعداد افراد خانواده، تعداد زنجیرهای یک کت و ...

متغیرهای کیفی :  
متغیرهایی که قابل اندازه گیری و شمارش نباشند را متغیرهای کیفی می نامند  
مثال) رنگ چشم ، گروه خونی ، مراحل زندگی فرد ، مراحل تحصیل

متغیرهای کمی به دو دسته تقسیم می شوند :  
(۱) متغیر کمی پیوسته  
(۲) متغیر کمی گسسته

تعریف متغیر کمی پیوسته :  
متغیری است که آن دو مقدار  $a$  و  $b$  را بتواند اختیار کند هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند مثل : وزن ، قد

تعریف متغیر کمی گسسته :  
متغیری است که آن دو مقدار  $a$  و  $b$  را بتواند اختیار کند آنگاه مقداری بین آنها وجود دارد که نمی تواند اختیار کند. مثال) تعداد غائبین کلاس

متغیرهای کیفی به دو دسته تقسیم می شوند :  
(۱) متغیرهای کیفی ترتیبی  
(۲) متغیرهای کیفی اسمی

تعریف متغیرهای کیفی ترتیبی :  
متغیرهایی هستند که در آنها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد.  
مثال) مراحل زندگی فرد ، مراحل تحصیل ...

تعریف متغیرهای کیفی اسمی :  
متغیرهای کیفی که بدون ترتیب طبیعی باشند.  
مثال) گروه خونی ، RH خون ، جنسیت (زن ، مرد) ...

نمونه : نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید :  
(۱) وزن کشتی آیراک استان تهران (کمی پیوسته)

(۲) قد بانوان شرکت کننده در المپیک (کمی پیوسته)

(۳) تعداد مسافران هواپیما (کمی گسسته)

(۴) گروه خونی (کیفی اسمی)

(۵) درجه قطرها (درجه ۱ ، درجه ۲ ، ... ) (کیفی ترتیبی)

(۶) انواع هواپیما (جتی ، مسافری ، ... ) (کیفی اسمی)



۷) کارخانه سازنده خودرو (کیفی اسمی)

۸) مراحل تحصیلی (کیفی ترتیبی)

۹) زمان کارکرد یک باتری (کیفی پیوسته)

۱۰) کیفیت میوه‌های تولیدی (خوب، متوسط، ...) (کیفی ترتیبی)

۱۱) میزان علاقه هنرمندان به فوتبال (کم، متوسط، زیاد) (کیفی ترتیبی)

۱۲) ساختار توده بدنی (کیفی پیوسته)

فاز پنجم بزرگ

تلاشی در مسیر موفقیت