دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۲۴ شهریور ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی پایه و حسابان ۲	امیرحسین ابومحبوب- کاظم اجلالی- عباس اشرفی- امیرهوشنگ انصاری- میلاد چاشمی- عادل حسینی- آریان حیدری- امیرهوشنگ خمسه وحید راحتی- میلاد سجادی‌لاریجانی- علی شهرابی- محمد صحت‌کار- رضا علی‌نواز- مهرداد ملوندی- میلاد منصوری- سروش موئینی جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب- علی ایمانی- جواد حاتمی- سیدمحمدرضا حسینی‌فرد- افشین خاصه‌خان- فرزانه خاکپاش- محمد خندان- کیوان دارابی رضا عباسی‌اصل- احمدرضا فلاح- سهام مجیدی‌پور- نوید مجیدی- نصیر محبی‌نژاد- مجید محمدی‌نویسی-علیرضا نصرالهی- محمد هجری سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارو احتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب- جواد حاتمی- سیدمحمد حسینی‌فرد- فرزانه خاکپاش- کیوان دارابی- سیدوحید ذوالفقاری- ندا صالح‌پور محمد صحت‌کار- احمدرضا فلاح- مرتضی فهیم‌علوی- نیلوفر مهدوی- محمد هجری- مهدی وقوعی
	فیزیک	معصومه افضلی- احسان ایرانی- زهره آقامحمدی- امیرمهدی جعفری- امیرعلی حاتم‌خانی- بهنام رستمی- محمد ساکی- مهدی سلطانی سعید شرق- مریم شیخ‌ممو- پوریا علاقه‌مند- مسعود قره‌خانی- مصطفی کیانی- غلامرضا محبی- احسان محمدی- امیر محمودی‌انزابی حسین مخدومی- حسام نادری- حسین ناصحی
	شیمی	امیر حاتمیان- ارژنگ خانلری- حمید ذبحی- علی رفیعی- محمدرضا زهره‌وند- آروین شجاعی- امیرحسین طیبی سودکلایی رسول عابدینی‌زواره- حسین ناصری‌ثانی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمارو احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب سوگند روشنی	مصطفی کیانی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	سعید خان‌بابایی مهدی ملارمضانی	عادل حسینی	عادل حسینی	زهره آقامحمدی حمید زرین‌کفش	بهنام قازانچایی محمدحسن محمدزاده مقدم
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	محمد ساکی	امیرحسین مسلمی
مستند سازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروفنگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳، ۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۱»** *(وحید راحتی)*

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{[\sin x]+2}{\cos 2x-1}=\frac{[-\frac{\sqrt{2}}{2}]+2}{0-1}=\frac{-1+2}{-1}=-1$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(سروش موئینی)*

$$\frac{\lim\limits_{x\to n^+}f(x)}{\lim\limits_{x\to n^-}f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to n^+}x[x]}{\lim\limits_{x\to n^-}x[x]}=\frac{n^2}{n(n-1)}\ \frac{n\neq 0}{}\ \frac{n}{n-1}=1/02$$

$$=\frac{n}{n-1}=\frac{51}{50}$$

$$\Rightarrow n=51\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}}6$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد سپاری‌لاریجانی)*

$$g(x)=\sqrt{f(x)}\Rightarrow D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_g=[-4,2]\cup[4,+\infty)$$

از آنجا که برای وجود حد باید دامنهٔ تابع در همسایگی نقطهٔ مورد نظر تعریف شده باشد، با توجه به نمودار برای نقاط صحیح $\{-4,2,4\}$ همسایگی محذوف در دامنهٔ تابع تعریف نشده است و تابع در این نقاط حد ندارد.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحهٔ ۱۱۹)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(میلاد پاشمی)*

از آنجایی که در نزدیکی عدد صفر همواره $x^2>x^3$ است، پس $x^2-x^3>0$ است و داریم:

$$\lim_{x\to 3}g\left(x^2-x^3+3\right)=\lim_{t\to 3^+}g(t)=\lim_{t\to 3^+}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{t}\right)\right]$$

$$=\left[\sin\pi^-\right]=\left[0^+\right]=0$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(آریان حیدری)*

دامنهٔ تابع را بدست می‌آوریم: اولاً $1-x^2\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

ثانیاً: $x-\frac{1}{2}[2x]\neq 0\Rightarrow 2x\neq[2x]\Rightarrow 2x\neq k(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow x\neq\frac{k}{2}$

$$\xrightarrow{-1\leq x\leq 1} x\neq 0 \text{ و } \pm\frac{1}{2} \text{ و } \pm 1$$

پس نهایتاً دامنهٔ تابع برابر است با:

$$D_f=(-1,1)-\{0,\pm\frac{1}{2}\}$$

واضح است که این بازه در نقاط $x=0$ و $\pm\frac{1}{2}$ دارای همسایگی محذوف و در نقاط $x=\pm 1$ دارای همسایگی یک‌طرفه است پس:

$$\begin{cases}m=0 \text{ یا } \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{2}\\ n=1 \text{ یا } -1\end{cases}$$

$$m\times n=0 \text{ یا } \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{-1}{2}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحهٔ ۱۳۶)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

چون حد مخرج صفر و حاصل حد، عددی حقیقی است، پس حد صورت هم صفر است.

$$3-\sqrt{3+b}=0\Rightarrow\sqrt{3+b}=3\Rightarrow 3+b=9\Rightarrow b=6$$

و داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}=a\xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-(x+۶)}{(x-۳)(x+\sqrt{x+۶})} = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-x-۶}{(x-۳)(x+\sqrt{x+۶})}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{x+۲}{x+\sqrt{x+۶}} = a = \frac{۵}{۶}$$

$$\text{پس } a+b = \frac{۵}{۶}+۶ = \frac{۴۱}{۶}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

می‌دانیم روابط زیر برقرار است:

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱ \Rightarrow \sin^۲x=۱-\cos^۲x \Rightarrow |\sin x| = \sqrt{۱-\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{۱-\cos^۲x} & ; \sin x \geq ۰ \\ \sin x = -\sqrt{۱-\cos^۲x} & ; \sin x < ۰ \end{cases}$$

حال برای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sin x}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{۱-\cos^۲x}} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{۱-\cos x}\times\sqrt{۱+\cos x}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{\sqrt{۱-\cos x}}{-\sqrt{۱-\cos^۲x}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{\sqrt{۱-\cos x}}{-\sqrt{۱-\cos x}\times\sqrt{۱+\cos x}} = -\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

چون مقادیر حد چپ و راست برابر نیستند، حاصل حد وجود ندارد.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(علی شهرابی)*

تابع f در بازهٔ $[۱,۲]$ پیوسته است، زیرا:

اولاً در تمام نقاط بازه $(۱,۲)$ پیوسته است.

ثانیاً در $x=۱$، پیوستگی راست دارد.

ثالثاً در $x=۲$، پیوستگی چپ دارد.

دقت کنید گزینهٔ «۳» نادرست است، زیرا f در نقاط $x=۱$ و $x=۲$ ناپیوسته است.

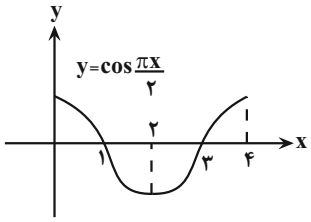
(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(عباس اشرفی)*

اگر f تابعی پیوسته و در همسایگی $x=a$ اکیداً نزولی، به شرط این‌که مقدار $f(a)$ عددی صحیح باشد، تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

تابع $y=x^۳+x$ و $y=-\frac{۱}{x}$ در همسایگی $x=۱$ اکیداً صعودی هستند و تابع $y=x^۲-۲x$ در همسایگی چپ $x=۱$ اکیداً نزولی و در همسایگی راست $x=۱$ اکیداً صعودی است.

با رسم نمودار تابع $y=\cos\frac{\pi x}{۲}$ متوجه می‌شویم که این تابع در همسایگی $x=۱$ اکیداً نزولی است و تابع $h(x)$ در $x=۱$ فقط از چپ پیوسته است.



(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(رضا علی‌نواز)*

باید حد تابع f در $x=۱$ با مقدار تابع در نقطهٔ $x=۱$ برابر باشد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\cos\pi x+\cos ۲\pi x}{\sin^۲\pi x} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cos\pi x+۲\cos^۲\pi x-۱}{۱-\cos^۲\pi x}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۲\cos\pi x-۱)(\cos\pi x+۱)}{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)} = \frac{-۲-۱}{۱-(-۱)} = \frac{-۳}{۲} = f(۱) = a$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

هندسه ۲

۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد هجری)*

طبق نامساوی مثلثی داریم: $(1)\quad 15-8<a<15+8\Rightarrow 7<a<23$

در مثلث حاده‌الزاویه، مربع طول هر ضلع از مجموع مربعات طول‌های اضلاع دیگر کمتر است، پس داریم: $a^2<8^2+15^2=289\Rightarrow a<17$

$$\xrightarrow{a\text{ عدد صحیح است}} a\le 16 \quad (2)$$

$$15^2<a^2+8^2\Rightarrow a^2>15^2-8^2=161$$

$$\xrightarrow{a\text{ عدد صحیح است}} a\ge 13 \quad (3)$$

بدیهی است $8^2<a^2+15^2$

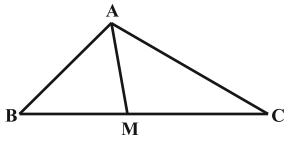
$$(1),(2),(3)\Rightarrow 13\le a\le 16$$

بنابراین چهار مقدار صحیح برای a وجود دارد.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۷۶)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 7^2+9^2=2AM^2+\frac{10^2}{2}$$

$$\Rightarrow 130=2AM^2+50\Rightarrow AM^2=40\Rightarrow AM=2\sqrt{10}$$

(هندسهٔ ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه ۶۹)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر S مساحت و P نصف محیط این مثلث باشد، آنگاه طبق قضیهٔ هرون داریم:

$$P=\frac{12+17+25}{2}=27$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{27\times 15\times 10\times 2}$$

$$=\sqrt{3^3\times(3\times 5)\times(2\times 5)\times 2}=\sqrt{2^2\times 3^4\times 5^2}=2\times 3^2\times 5=90$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(جواد حاتمی)*

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ-\hat{B}$$

$$\Rightarrow \sin(\hat{A}+\hat{C})=\sin(180^\circ-\hat{B})=\sin\hat{B}\Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{1}{3}$$

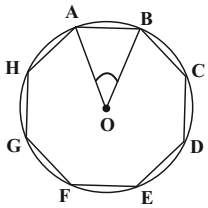
اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را با R نمایش دهیم، آنگاه طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R\Rightarrow \frac{5}{\frac{1}{3}}=2R\Rightarrow 2R=15\Rightarrow R=7/5$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق شکل داریم:



$$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin(A\hat{O}B)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$S_{\text{هشت‌ضلعی}}=8\,S_{AOB}=8\times\frac{1}{2}=4$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^2\times DC+AC^2\times BD=AD^2\times BC+BD\times DC\times BC$$

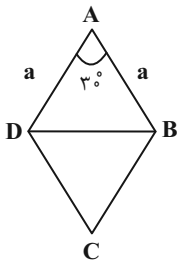
$$\Rightarrow 4^2\times 5+6^2\times 3=AD^2\times 8+3\times 5\times 8$$

$$\Rightarrow 80+108=8AD^2+120\Rightarrow 8AD^2=68\Rightarrow AD^2=\frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۹)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(اخشین خاصه‌خان)*



فرض کنید طول هر ضلع لوزی برابر a باشد. طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB\times AD\times\cos\hat{A}$$
$$\Rightarrow ۹(۲-\sqrt{۳}) = a^۲ + a^۲ - ۲\times a\times a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow ۹(۲-\sqrt{۳}) = a^۲(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow a^۲ = ۹$$

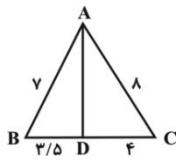
طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}a\times a\times\frac{۱}{۲} = \frac{a^۲}{۴} = \frac{۹}{۴}$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۲\times\frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۲}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹ و ۷۴)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(نوید مهیدی)*

براساس قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۷}{۸} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{۷}{۷+۸}$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{۷/۵} = \frac{۷}{۱۵}$$
$$\Rightarrow BD = ۳/۵ \Rightarrow DC = ۴$$

در مثلث ABC، طول نیمساز زاویهٔ داخلی A برابر است با:

$$AD^۲ = AB.AC - BD.DC = ۷\times۸ - ۳/۵\times۴ = ۵۶ - ۱۴ = ۴۲$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{۴۲}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد هجری)*

مطابق تعریف چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ $\hat{D}$ و $\hat{B}$ مکمل یکدیگرند.

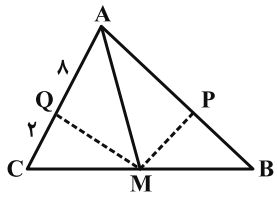
$$\cos\hat{B} = \cos(۱۸۰^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{۱}{۸}$$

حال طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های ADC و ABC داریم:

$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ - ۲AD.DC\cos\alpha \quad (۱)$$
$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ + ۲AB.BC\cos\alpha \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow ۷^۲ + ۲^۲ - ۲\times۷\times۲\times\frac{۱}{۸} = x^۲ + ۶^۲ + ۲\times x\times۶\times\frac{۱}{۸}$$
$$۲x^۲ + ۳x - ۲۷ = ۰ \Rightarrow (۲x+۹)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(نوید مهیدی)*



چون MP و MQ به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های AMB و AMC هستند، بنابر قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AMB}: MP \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB}$$
$$\overset{\Delta}{AMC}: MQ \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC}$$

چون $MC = MB$، پس سمت راست تساوی‌های بالا با هم برابرند و از این‌رو سمت چپ تساوی‌ها نیز برابر خواهند شد، یعنی $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$. در نتیجه:

$$\frac{AP}{\underbrace{AP+PB}_{=AB}} = \frac{AQ}{\underbrace{AQ+QC}_{=AC}} \Rightarrow \frac{AP}{۹} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow AP = ۷/۲$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

آمار و احتمال

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(سیدوحید ذوالفقاری)*

به هر یک از افراد یا اشیا که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود، واحد آماری و به مجموعهٔ کل آنها، جامعهٔ آماری گفته می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۰۴)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(مرتضی خوییم‌علوی)*

در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، پس از طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا، از هر طبقه، یک نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

برای بررسی رضایت مردم تهران از وسایل نقلیهٔ عمومی از روش مصاحبه استفاده می‌کنیم اما گردآوری داده‌ها در سایر گزینه‌ها با روش مشاهده امکان‌پذیر است.

(آمار و احتمال – آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(نرا صالح‌پور)*

با توجه به تعاریف، «الف» و «ت» صحیح می‌باشند.

«ب» فرآیند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه را آمار استنباطی گوییم.

«پ» برای بررسی یک جامعه، نمونه‌گیری نااریب ارزش بالایی دارد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۴، ۱۱۰ و ۱۱۵)

۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

انحراف معیار برآورد میانگین یک نمونه برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه است. بنابراین اگر $n_1 = ۲۵$ و $n_2 = ۲۲۵$ فرض شود، آنگاه داریم:

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}} = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} \Rightarrow \frac{\sigma_{\bar{x}_2}}{۱/۸} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\sqrt{۲۲۵}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}_2} = ۰/۶$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۲۱)

۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(جواد حاتمی)*

با توجه به اینکه از بین ۲۴۰ عدد، ۲۰ عدد انتخاب شده است، پس اعداد به گروه‌های ۱۲ تایی $(\frac{۲۴۰}{۲۰} = ۱۲)$ تقسیم شده‌اند. از طرفی $۹ \times ۱۲ + ۷ = ۱۱۵$ است، بنابراین شماره n امین عدد انتخابی از رابطهٔ $۱۲(n-۱) + ۷$ به دست می‌آید و در نتیجه داریم:

چهارمین عدد انتخابی = ۱۲(۴-۱) + ۷ = ۳۶ + ۷ = ۴۳

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

گزاره (الف) درست است؛ زیرا وسط بازه اطمینان همان برآورد نقطه‌ای یا آمارهٔ حاصل از نمونه‌گیری است.

گزاره (ب) نادرست است؛ زیرا بدون معلوم بودن اندازهٔ نمونه، نمی‌توان انحراف معیار جامعه را مشخص کرد.

گزاره (پ) درست است؛ زیرا طول بازه اطمینان ۴ برابر انحراف معیار میانگین است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهروی)*

برآورد بازه‌ای با اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت $[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ است، حال اگر بازه اطمینان به صورت $[a\ ,\ b]$ باشد، مرکز این بازه به صورت $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$ و طول آن به صورت $b-a=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

$$\bar{x}=\frac{46/8+47/6}{2}=47/2$$

$$47/6-46/8=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow 0/8=\frac{4\times\sqrt{121}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 0/8=\frac{44}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=55\Rightarrow n=55^2$$

$$\sum x_i=n\bar{x}=55^2\times 47/2=1180\times 11^2$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۲۲)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

میانگین جامعه: $\bar{x}=\frac{2+3+4+7+9}{5}=5$

برآورد نقطه‌ای میانگین	نمونهٔ سه‌تایی
۳	۲,۳,۴
۴	۲,۳,۷
۴/۶۷	۲,۳,۹
۴/۳۳	۲,۴,۷
۵	۲,۴,۹
۶	۲,۷,۹
۴/۶۷	۳,۴,۷
۵/۳۳	۳,۴,۹
۶/۳۳	۳,۷,۹
۶/۶۷	۴,۷,۹

بنابراین برآورد نقطه‌ای میانگین ۵ نمونهٔ سه‌تایی از میانگین واقعی کمتر است. اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A)=\frac{5}{10}=0/5$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

میانهٔ اعداد ۰ تا N، همواره برابر $\frac{N}{2}$ است، زیرا در صورتی که N زوج باشد، تعداد اعداد یعنی $N+1$ فرد است و دادهٔ $\frac{N}{2}$ دقیقاً وسط داده‌ها قرار می‌گیرد، پس میانه است و در صورتی که N فرد باشد، تعداد اعداد زوج است و در نتیجه میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط یعنی $\frac{N-1}{2}$ و $\frac{N+1}{2}$ است که برابر $\frac{N}{2}$ می‌باشد. با توجه به این‌که تعداد اعداد انتخابی برابر ۱۲ است، پس میانهٔ داده‌ها برابر میانگین داده‌های ششم و هفتم است و در نتیجه داریم:

$$\text{میانه}=\frac{13+15}{2}=\frac{28}{2}\Rightarrow\frac{N}{2}=\frac{28}{2}\Rightarrow N=28$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲۵)

فیزیک ۲

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسین ناصحی)*

شار مغناطیسی یک کمیت نرده‌ای است. همچنین طبق رابطهٔ شار مغناطیسی داریم:

$$\Phi = AB\cos\theta$$

$$\text{یکای شار} = T.m^2 = Wb$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(غلامرضا محبی)*

برای به دست آوردن شار ابتدا مساحت حلقه را حساب می‌کنیم:

$$A = ۴۰\times۲۰\times۱۰^{-۴}m^2 = ۸\times۱۰^{-۲}m^2$$

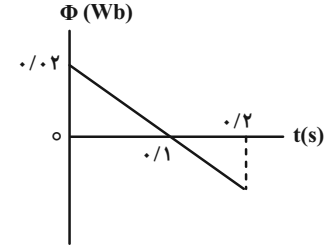
$$\theta = ۶۰^\circ$$

$$\Phi = BA\cos\theta = ۱۰\times۸\times۱۰^{-۲}\times\frac{۱}{۲} = ۰/۴Wb$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

چون نمودار $\Phi - t$ به صورت یک خط راست با شیب منفی است، بنابه رابطهٔ $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، نیروی محرکهٔ القایی در تمام لحظه‌های بازهٔ زمانی صفر ثانیه تا $۰/۲s$ (از جمله لحظهٔ $t = ۰/۰۵s$) عددی ثابت و مثبت می‌باشد. بنابراین کافی است، شیب این خط را که برابر $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ است، بیابیم و ε_{av} را پیدا کنیم:



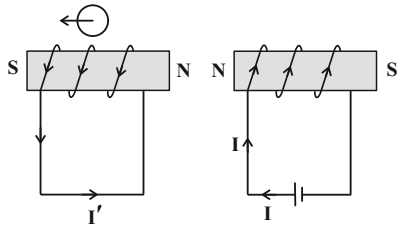
$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[t_1=۰\ ,\ t_2=۰/۱s]{\Phi_1=۰/۰۲Wb\ ,\ \Phi_2=۰\ ,\ N=۱}$$

$$\varepsilon_{av} = -۱\times\frac{۰-۰/۰۲}{۰/۱-۰} = \frac{۰/۰۲}{۰/۱} = ۰/۲V$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌منر)*

وقتی کلید را می‌بندیم طبق قانون لنز در سیملولهٔ سمت چپ، قطب N و S به صورت زیر قرار می‌گیرد و قطب‌نما سمت چپ را نشان می‌دهد.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(بهنام رستمی)*

ابتدا مدت زمانی را که طول می‌کشد تا قاب به‌طور کامل داخل میدان قرار گیرد، می‌یابیم:

$$d = vt \Rightarrow ۰/۵ = ۵t \Rightarrow t = ۰/۱s$$

حال طی این مدت تغییرات شار و نیروی محرکهٔ القایی برابر است با:

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۰/۱s]{N=۱\text{ دور},\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{-۱\times(\Phi_2-\Phi_1)}{۰/۱} \xrightarrow[\Phi_1=۰]{\Phi_2=۰/۵\times۰/۴\times۲۰۰\times۱۰^{-۴}=۴\times۱۰^{-۳}Wb}$$

$$\bar{\varepsilon} = -۱\times\left(\frac{۴\times۱۰^{-۳}-۰}{۰/۱}\right) = -۰/۰۴V$$

به طریق مشابه و به دلیل تقارن، هنگام خارج شدن نیز نیروی محرکهٔ القایی $۰/۰۴V$ در حلقه ایجاد می‌شود.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه افضلی)*

با استفاده از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، داریم:

$$\left.\begin{matrix}|\varepsilon| = B\ell v \\ I = \frac{|\varepsilon|}{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow I = \frac{B\ell v}{R}$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{(۵۰۰۰\times ۱۰^{-۴})\times(۴۰\times ۱۰^{-۲})\times ۴}{R} \Rightarrow R = ۰/۴\Omega$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۵ و جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

در مرحلهٔ (a) حلقه در حال ورود به میدان و شار مغناطیسی عبوری از آن در حال افزایش است. در مرحلهٔ (b) شار ثابت است و در مرحلهٔ (c) شار در حال کاهش است.

در مرحلهٔ (c) چون شار در حال کاهش است پس میدان القایی برون‌سو است و با توجه به قاعدهٔ دست راست جهت جریان القایی در حلقه پادساعتگرد است.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(مریم شیخ‌ممو)*

با توجه به معادلهٔ $I = ۶\sin ۱۰۰\pi t$ ، بیشینهٔ جریان الکتریکی برابر $I_m = ۶A$ است. بنابراین داریم:

$$U_m = \frac{۱}{۲}LI_m^۲ \xrightarrow{L=۰/۲H} U_m = \frac{۱}{۲}\times ۰/۲\times ۳۶ = ۳/۶J$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۴ و ۱۲۵)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمهدی جعفری)*

با توجه به جهت نشان داده شده برای $I_۱$، مولد جریان به مدت $\frac{T}{۲}$ در جهت ساعتگرد در مدار جریان ایجاد می‌کند. سپس به مدت $\frac{T}{۲}$ در جهت پادساعتگرد و دوباره به مدت $\frac{T}{۲}$ در جهت ساعتگرد در مدار جریان ایجاد می‌کند. با توجه به جهتی که دیود در مدار قرار گرفته است، در لحظاتی که مولد در جهت ساعتگرد جریان ایجاد می‌کند، دیود با جریان گذرنده مخالفت کرده و در نتیجه جریانی از R نمی‌گذرد. پس از ۰ تا $\frac{T}{۲}$ و از T تا $\frac{۳T}{۲}$ جریانی نمی‌گذرد و تنها از $\frac{T}{۲}$ تا T جریان از مدار عبور می‌کند. لذا نمودار مربوط به جریان $I_۲$ شبیه نمودار گزینهٔ «۳» صحیح است.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۴ و ۱۲۵)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمد سالکی)*

با توجه به داده‌ها داریم:

$$N_۱ = ۶۰ \qquad N_۲ = ۱۸۰$$

$$V_۱ = ? \qquad V_۲ = ۴/۵V$$

با جای‌گذاری در رابطه داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{N_۲}{N_۱} \Rightarrow \frac{۴/۵V}{V_۱} = \frac{۱۸۰}{۶۰} \Rightarrow V_۱ = ۱/۵V$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

شیمی ۲

۴۱- **گزینهٔ «۳»** (حمید زهبی)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فراوردهٔ به دست آمده سیر شده است ولی هیدروکربن نیست.

۲) شمار اتم‌های متصل به هر اتم کربن از ۳ به ۴ افزایش می‌یابد.

۴) از بسپار حاصل (پلی وینیل کلرید) در تهیهٔ کیسه نگهداری خون استفاده می‌شود.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۰۴)

۴۲- **گزینهٔ «۱»** (حمید زهبی)

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ درصد جرمی کربن در هر دو برابر است.

مورد دوم: نادرست؛ تعداد اتم‌ها در جرم‌های برابر از دو پلیمر یکسان است.

مورد سوم: نادرست؛ چگالی هر دو کوچک‌تر از $1\,g.cm^{-3}$ است.

مورد چهارم: نادرست؛ شاخه‌ها باعث ایجاد فاصله بین زنجیرها و کاهش سطح تماس می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا زهره‌وند)

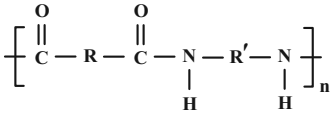
بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ پلی‌اتن شاخه‌دار همان پلی‌اتن سبک و پلی‌اتن بدون شاخه همان پلی‌اتن سنگین می‌باشد که در پلی‌اتن سبک به دلیل وجود فضاهای خالی بین شاخه‌ها و حجم بیشتر، چگالی کمتر بوده و همچنان نیروی بین مولکولی در آن ضعیف‌تر است، از این‌رو نقطهٔ جوش پایین‌تری دارد.

۲) نادرست؛ در واکنش استری شدن، الکل‌ها H و کربوکسیلیک اسیدها OH از دست می‌دهند.

۳) درست؛ مونومر سازندهٔ پلیمر مورد نظر، ( ) می‌باشد که دارای ۱ پیوند دوگانه و ۷ پیوند یگانه است.

۴) نادرست؛ کولار یک پلی‌آمید است و ساختار کلی پلی‌آمیدها به صورت زیر می‌باشد.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۳، ۱۰۶، ۱۰۸ و ۱۱۴)

۴۴- **گزینهٔ «۳»** (حمید زهبی)

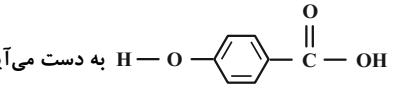
در هر واحد تکرارشونده تفلون ۴ اتم فلوئور وجود دارد، اگر در هر زنجیر پلیمری آن ۳۲۰۰ اتم فلوئور باشد، پس تعداد واحد تکرارشونده برابر ۸۰۰ خواهد بود $(n=\frac{3200}{4})$ و جرم مولی هر زنجیر پلیمری آن برابر $[(C\times2)+(F\times4)]\times800=80000$ خواهد بود.

$$\text{درشت مولکول ؟} = 40\,g \text{ تفلون} \times \frac{1\,mol \text{ تفلون}}{80000\,g \text{ تفلون}}$$

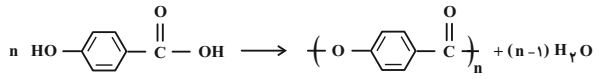
$$\text{درشت مولکول ؟} = 3/01\times10^{20}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** (حمید زهبی)

یک نوع پلی‌استر است که از پلیمری شدن  **به دست می‌آید.**

فرمول مولکولی مونومر آن $C_7H_6O_3$ است و در هر واحد مونومری آن ۲۰ پیوند اشتراکی وجود دارد. همچنین به ازای تشکیل هر واحد تکرارشونده یک مولکول آب تولید می‌شود.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی‌سورکلایی)

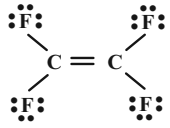
همهٔ موارد درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: هر دو گروه عاملی کربوکسیلیک اسید و آمین در این ترکیب وجود دارد.

مورد دوم: این مولکول هیدروژن متصل به اتم‌های نیتروژن و اکسیژن دارد و می‌تواند با مولکول‌های خودش پیوند هیدروژنی برقرار کند.

مورد سوم: در این مولکول همانند مونومر تفلون (تترافلوئوروواتن)، ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



مورد چهارم: فرمول مولکولی این ترکیب، $C_{۳۴}H_{۳۴}O_۴N_۴$ می‌باشد و نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به کربن در آن با مولکول بنزن $(C_۶H_۶)$ برابر است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

آب + استر ⟶ الکل + کربوکسیلیک‌اسید

$$\frac{\text{جرم استر}}{\text{جرم آب}} = \frac{\text{جرم مولی استر} \times \text{ضریب استر}}{\text{جرم مولی آب} \times \text{ضریب آب}}$$

$$= \frac{۱\times M}{۱\times ۱۸} = ۸ \Rightarrow M = ۱۴۴ \frac{g}{mol}$$

فرمول عمومی استرها، $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

$$۱۴۴ = ۱۲n + ۲n + ۳۲ \Rightarrow ۱۱۲ = ۱۴n \Rightarrow n = ۸$$

در نتیجه استر ۸ کربنه بوده، به این معناست که الکل و اسید اولیه در مجموع ۸ اتم کربن دارند. الکل A و اسید B را به ترتیب $C_aH_{۲a+۲}O$ و $C_bH_{۲b}O_۲$ فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} a+b=۸ \\ b=۲a+۲-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \Rightarrow C_۳H_۸O & \text{پروپانول} \\ b=۵ \Rightarrow C_۵H_{۱۰}O_۲ & \text{پنتانوئیک‌اسید} \end{cases}$$

در نتیجه نام استر حاصل پروپیل پنتانوات خواهد بود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۳)

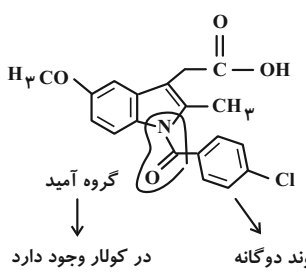
۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(ارژنگ خاندری)*

در ترکیبات آلی

به ازای هر اکسیژن، ۲ جفت ناپیوندی
به ازای هر نیتروژن، ۱ جفت ناپیوندی
به ازای هر کلر، ۳ جفت ناپیوندی
⟸ ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی

داریم.

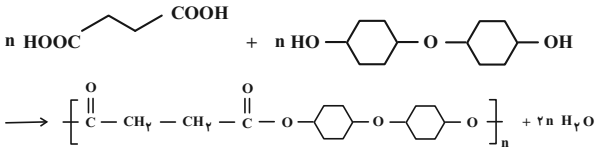
فرمول کلی ترکیب: $C_{۱۹}H_{۱۶}ClNO_۴$



(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

واکنش تشکیل پلی‌استر:



$$\text{پلی‌استر g ؟ : ۲۳۶g A} \times \frac{۱\text{mol A}}{۱۱۸\text{g A}} \times \frac{۱\text{mol پلی‌استر}}{n\text{mol A}}$$

$$\text{پلی‌استر } ۵۹۲\text{g} = \frac{۲۹۶n\text{ g پلی‌استر}}{۱\text{mol پلی‌استر}} \times$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

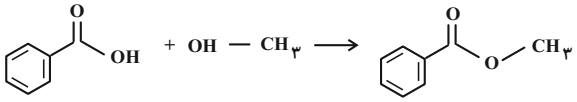
۵۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

همهٔ عبارت‌ها درست هستند.

فرمول مولکولی ترکیب‌های (۱) تا (۶) به ترتیب $C_۸H_{۱۰}$، $C_۸H_{۱۰}$، $C_۸H_۸$، $C_۶H_۵COOH$، $C_۶H_۵CHO$ و $C_۸H_۸O_۲$ است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول:



عبارت دوم: ترکیب (۴) به دلیل داشتن پیوند هیدروژنی نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

عبارت سوم: ترکیب‌های (۱) و (۲) ایزومر یکدیگر هستند و فرمول مولکولی آن‌ها $C_۸H_{۱۰}$ است. فرمول مولکولی ترکیب (۳) نیز به صورت $C_۸H_۸$ است. با توجه به برابری تعداد اتم‌های کربن در هر سه مولکول بدون انجام محاسبه می‌توان گفت که چون جرم مولی ترکیب‌های (۱) و (۲) بیشتر از ترکیب (۳) است؛ پس درصد جرمی اتم کربن در ترکیب (۳) بیشتر از درصد جرمی کربن در ترکیب‌های (۱) و (۲) است.

عبارت چهارم: اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیب‌های (۱) و (۳) همانند ترکیب‌های (۴) و (۶) برابر ۲ است.

عبارت پنجم: ترکیب (۳) همان استیرن است که از پلیمر آن در ساخت ظروف یکبار مصرف استفاده می‌شود و پلیمر نشان داده شده نیز ساختار پلی‌استیرن را نشان می‌دهد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۱۱ تا ۱۱۶)

ریاضی ۱

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

علم آمار مجموعهٔ روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود که اولین مرحلهٔ آن همان جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۴)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد منصوری)*

میزان رضایت از شغل به‌صورت کم، متوسط و زیاد، دسته‌بندی می‌شود و متغیر کیفی ترتیبی است، تعداد فرزندان یک خانواده، متغیر کمی گسسته، جنسیت فرد، متغیر کیفی اسمی و میزان دمای هوا، متغیر کمی پیوسته است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

سرعت حرکت یک خودرو، متغیر کمی پیوسته، گروه خون متغیر کیفی اسمی، مراحل رشد متغیر کیفی ترتیبی و تعداد فرزندان متغیر کمی گسسته است، بنابراین در گزینهٔ «۳» تمام متغیرهای چهارگانه موجود هستند.

در گزینهٔ «۱» هر دو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «سن» کمی پیوسته و متغیر «میزان تحصیلات» کیفی ترتیبی است.

در گزینهٔ «۲» هر دو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «وزن» کمی پیوسته و متغیر «تعداد فرزندان» کمی گسسته است.

در گزینهٔ «۴» هر دو متغیر «رنگ چشم» و «گروه خون» کیفی اسمی، متغیر «تعداد تماس‌ها» کمی گسسته و متغیر «مراحل تحصیل» کیفی ترتیبی است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

برای آنکه مجموع ۳ عدد، عددی زوج باشد یا باید هر ۳ عدد زوج باشند و یا یکی از آنها زوج و دو عدد دیگر فرد باشند. با توجه به اینکه مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی شامل ۴ عدد زوج و ۵ عدد فرد است، داریم:

هر ۳ عدد زوج : $n_1 = \binom{4}{3} = 4$

دو عدد فرد و یک عدد زوج : $n_2 = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$

$$\Rightarrow n = n_1 + n_2 = 4 + 40 = 44$$

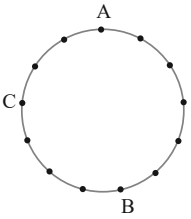
(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

توجه کنید که نمی‌توانیم از رقم صفر استفاده کنیم؛ زیرا در صورت استفاده باید رقم صدگان عدد صفر باشد که امکان‌پذیر نیست. هر بار پس از انتخاب ۳ رقم متمایز از بین ارقام ۱ تا ۹، فقط ۲ عدد مطلوب می‌توانیم بسازیم، مثلاً با ارقام ۹ و ۲ و ۷ می‌توان اعداد ۲۷۹ و ۲۹۷ را ساخت. در نتیجه تعداد اعداد طبیعی مورد نظر برابر است با: $n = \binom{9}{3} \times 2 = 84 \times 2 = 168$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرهوشنگ انصاری)*



چهارضلعی‌های شامل AC + **چهارضلعی‌های شامل AB**

$$\underbrace{\binom{9}{2} + \binom{2}{2}}_{37} \quad \underbrace{\binom{5}{2} + \binom{6}{2}}_{25}$$

چهارضلعی‌های شامل AB, AC –

$$\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{۳}$$

$= ۵۹$ جواب

(ریاضی ۱– شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرهوشنگ خمسه)*

به سه طریق می‌توان خواستهٔ مسئله را برآورده کرد:

«الف»: در هر جامدادی ۲ مداد قرار دهیم:

$$\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}=۹۰$$

«ب»: در یک جامدادی ۴ تا و در دوتای دیگر ۱ مداد می‌گذاریم:

$$\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۴}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۹۰$$

«پ»: در جامدادی‌ها به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ مداد بگذاریم:

$$\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}=۳۶۰$$

$۳۶۰+۹۰+۹۰=۵۴۰$

(ریاضی ۱– شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

برای اینکه حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی، عددی اول باشد، لازم است دو تا از آنها برابر یک و دیگری اول باشد پس مثلاً تاس اول می‌تواند ۲، ۳ یا ۵ بیاید و در دو تاس دیگر عدد یک رو شود و همین طور عدد اول مورد نظر می‌تواند در حالت‌های دیگر در تاس دوم یا سوم قرار گیرد. پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$n(A)=۳\times۳=۹\Rightarrow P(A)=\frac{۹}{۲۱۶}=\frac{۱}{۲۴}$$

(ریاضی ۱– آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

فرض کنید $P(A\cup B)=x$ باشد. در این‌صورت $P(A)=\frac{۱}{۲}x$ و $P(B)=\frac{۲}{۳}x$ هستند و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}x+\frac{۲}{۳}x-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}x$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{۱}{۶}x}{x}=\frac{۱}{۶}$$

(ریاضی ۱– آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$n(S)=۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$$

«الف»: کلمه ۴ حرفی که «ن» جزء حروف انتخابی نباشد.

$$۴\times۳\times۲\times۱=۴!=۲۴$$

«ب»: کلمه ۴ حرفی که «ن» جزء حروف انتخابی باشد و حرف اول و آخر نباشد.

$\overline{۴}\quad -\quad -\quad \overline{۳}$

به ۴×۳ طریق حرف اول و آخر پر می‌شود.

۲ جا برای حرف «ن» و ۲ حالت برای یک حرف باقی مانده:

$$۴\times۳\times۲\times۲=۴۸\Rightarrow P=\frac{۲۴+۴۸}{۱۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

(ریاضی ۱– آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

فیزیک ۱

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا دمای سلسیوس را به کلوین تبدیل می‌کنیم و سپس از رابطهٔ $W=-nR\Delta T$ کار انجام شده بر روی گاز را می‌یابیم. دقت کنید، چون $\Delta T=\Delta\theta$ است، می‌توان دمای کلوین را به سلسیوس تبدیل نمود.

$$T_2=\theta_2+273=27+273=300K$$

$$W=-nR(T_2-T_1)\xrightarrow[n=2mol]{T_1=400K}$$

$$W=-2\times8\times(300-400)=1600J$$

می‌بینیم کار انجام شده بر روی گاز $1600J$ است، بنابراین کار انجام شده توسط گاز $W'=-W=-1600J$ خواهد بود.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰ و دما و گرما؛ صفحهٔ ۱۲۲)

۶۲- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

می‌دانیم انرژی درونی گاز، تابع دمای مطلق آن است. از طرف دیگر، بنابه رابطهٔ $PV=nRT$ ، $PV\propto T$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$U\propto T\propto PV\Rightarrow U\alpha PV\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\frac{P_2V_2}{P_1V_1}$$

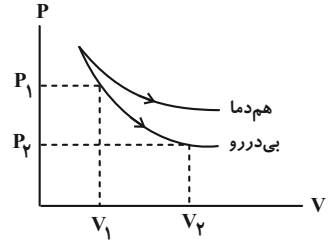
$$\xrightarrow[P_1=6\times10^5Pa\ ,\ V_1=1L]{P_2=2\times10^5Pa\ ,\ V_2=3L}\frac{U_2}{U_1}=\frac{2\times10^5\times3}{6\times10^5\times1}=1$$

$$\Rightarrow U_2=U_1$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحهٔ ۱۲۲ و ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۳۰)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

اگر نمودار $P-V$ فرایند هم‌دما و بی‌دررو را رسم کنیم، به صورت زیر خواهد شد.



همان‌طور که مشخص است در انبساط بی‌دررو فشار کاهش می‌یابد و چون افت فشار در فرایند بی‌دررو بیشتر از هم‌دما است طبق نمودار، دما کاهش می‌یابد لذا انرژی درونی در فرایند بی‌دررو کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۸)

۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

در هر دو فرایند، حالت اولیه و حالت نهایی یکسان است پس:

$$\Delta U_a=\Delta U_b$$

همچنین در هر دو فرایند دما افزایش یافته است: $\Delta U_a=\Delta U_b>0$

از طرفی طبق قانون اول ترمودینامیک: $\Delta U=Q+W$

پس: $Q_a+W_a=Q_b+W_b$

چون فرایندها انبساطی هستند $W_a<0$ و $W_b<0$ و همچنین چون مساحت زیر نمودار b بیشتر از a است پس: $|W_b|>|W_a|$ است. به این ترتیب، $Q_b>Q_a$ و هر دو فرایند با دریافت گرما همراه هستند.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفرومی)*

گزینهٔ «۲» درست است. زیرا (الف) و (ت) صحیح می‌باشند.

بررسی موارد نادرست:

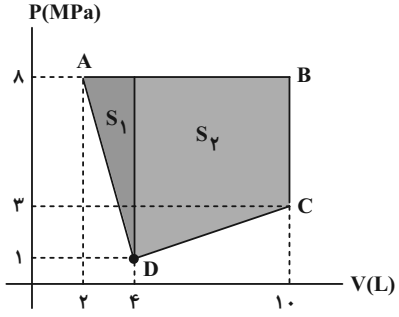
ب) دستگاه روی محیط کار انجام می‌دهد.

پ) از a تا b، انرژی درونی افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۹ و ۱۴۰)

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمودی‌انزابی)*

مساحت محصور در فرایند چرخه‌ای $ABCDA$ همان اندازهٔ کار مبادله شده بین گاز و محیط است. با تبدیل شکل چرخه به یک ذوزنقه و یک مثلث، مساحت را محاسبه می‌کنیم:



$$|W| = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\times(8-1)\times10^{6}\times(4-2)\times10^{-3}$$

$$+\frac{1}{2}\times(10-4)\times10^{-3}\times(5+7)\times10^{6}$$

$$= 7\times10^{3} + 36\times10^{3} = 43\,kJ$$

چون چرخه ساعتگرد است، کار خالصی که گاز روی محیط انجام داده است، مثبت است و داریم:

$$W' = 43\,kJ$$

و لذا گزینهٔ «۴» پاسخ صحیح است.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۹ و ۱۴۰)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

بر اساس معادلهٔ حالت داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

از آنجا که مقادیر n و R ثابت هستند هر چقدر حاصل‌ضرب PV بزرگ‌تر باشد، دما نیز بیشتر است.

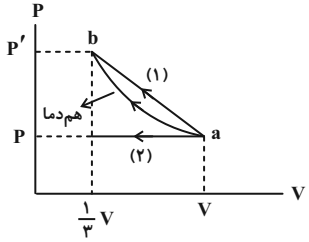
$$\begin{cases} P_C V_C = 2\times2/5 = 5 \\ P_B V_B = 1/5\times3 = 4/5 \\ P_D V_D = 2/5\times1/8 = 4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_C V_C > P_B V_B = P_D V_D \Rightarrow T_C > T_B = T_D$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا نمودار $P-V$ این فرایند را رسم می‌کنیم. در نمودار $P-V$ مساحت زیر نمودار برابر قدرمطلق کار انجام شده است. با توجه به شکل مشخص است که کار فرایند هم‌دما ab از کار فرایند (۱) کوچک‌تر و از کار فرایند (۲) بزرگ‌تر است. پس داریم:



$$W_2 < W_{ab} < W_1 \qquad (1)$$

از طرفی چون فرایند ab هم‌دما است پس داریم:

$$T_a = T_b \xrightarrow{PV=nRT} P_a V_a = P_b V_b \xrightarrow[P_a=P]{V_a=V\,,\,V_b=\frac{1}{3}V}$$

$$PV = \frac{1}{3}P'V \Rightarrow P' = 3P \qquad (2)$$

اکنون از مساحت زیر نمودار داریم:

$$|W_1| = \frac{(P+P')\times\frac{2}{3}V}{2} \xrightarrow{(2)} |W_1| = \frac{4}{3}PV$$

$$|W_2| = P\times\frac{2}{3}V = \frac{2}{3}PV$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{2}{3}PV < W_{ab} < \frac{4}{3}PV$$

توجه داریم که چون فرایند ab و فرایندهای (۱)، (۲) تراکم‌اند، پس W در این فرایندها مثبت است.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۷)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

طبق قانون دوم ترمودینامیک در یک چرخه، تمام گرمای دریافت شده به کار تبدیل نمی‌شود. اما در یک فرایند تمام گرما می‌تواند به کار تبدیل شود، مثلاً در فرایند هم‌دما تمام گرمای دریافت شده به کار تبدیل می‌شود.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵، ۱۳۶ و ۱۴۶)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا با استفاده از تعریف بازدهٔ ماشین گرمایی، کار انجام شده در هر چرخه را می‌یابیم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \xrightarrow{Q_H=|W|+|Q_L|} \eta = \frac{|W|}{|W|+|Q_L|}$$

$$\xrightarrow[|Q_L|=700\,J]{\eta=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}} \frac{3}{10} = \frac{|W|}{|W|+700}$$

$$\Rightarrow 10|W| = 3|W| + 3\times700 \Rightarrow 7|W| = 3\times700$$

$$\Rightarrow |W| = 300\,J$$

می‌بینیم ماشین گرمایی در هر چرخه $300\,J$ کار انجام می‌دهد. بنابراین، $1200\,J$ کار را در طی ۴ چرخه انجام خواهد داد.

کار یک چرخه × تعداد چرخه = کار کل

$$\Rightarrow 1200 = 300\times \text{تعداد چرخه} \Rightarrow \text{تعداد چرخه} = 4$$

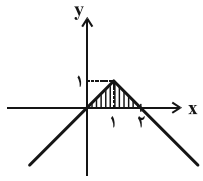
(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۵)

حسابان ۲

۷۱- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

$g(2x)=1-f(2x-1)\Rightarrow g(x)=1-f(x-1)=1-|x-1|$

با انتقال یک واحد نمودار تابع f به سمت راست، قرینه کردن آن نسبت به محور xها و سپس انتقال یک واحد آن به بالا، نمودار تابع $y=g(x)$ حاصل می‌شود و داریم:



$\text{مساحت سطح هاشورخورده}=\frac{2\times1}{2}=1$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

می‌دانیم تابع مورد نظر، از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که شیب آن‌ها مثبت است. بنابراین، با توجه به اینکه $[x]$ در عدد صحیح z ناپیوسته است، برای اکیداً صعودی بودن تابع $y=2x-k[x]$، کافی است حد راست آن در $x=z$، بزرگ‌تر یا مساوی با حد چپ آن در $x=z$ باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to z^+}\big(2x-k[x]\big)=2z-kz\\ \lim\limits_{x\to z^-}\big(2x-k[x]\big)=2z-k(z-1)=2z-kz+k\end{cases}$$

$\Rightarrow$ شرط صعودی بودن: $2z-kz\geq 2z-kz+k\Rightarrow k\leq 0$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

تغییرات گفته شده را به‌ترتیب روی تابع $y=x^3$ انجام می‌دهیم:

$$y=x^3\xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}}y=(x+1)^3$$
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به }x\text{ها}}y=-(x+1)^3$$
$$\xrightarrow[\text{با ضریب }k]{\text{انبساط عمودی}}y=-k(x+1)^3$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}f(x)=-k(x+1)^3+2$$

نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، پس: $f(0)=-k+2=0\Rightarrow k=2$

حال معادلهٔ $f(x)=4$ را حل می‌کنیم:

$$-2(x+1)^3+2=4\Rightarrow(x+1)^3=-1\Rightarrow x+1=-1\Rightarrow x=-2$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر است با $p(1)$:

$$p(1)=2\Rightarrow 1-3+a-1=2\Rightarrow a=5$$
$$\Rightarrow p(x)=x^5-3x^4+5x-1=(x-1)q(x)+2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-2$، $q(2)$ است:

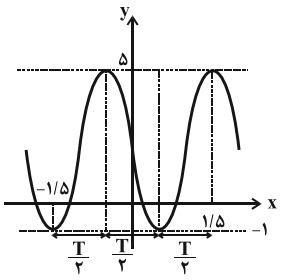
$$x=2: p(2)=-7=q(2)+2$$
$$\Rightarrow q(2)=-9$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد چاشمی)*

با استفاده از اتحاد $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ داریم:

$$f(x)=a+\frac{b}{2}\sin(2cx)$$



با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases}1/5T=3\Rightarrow T=2\\ T=\frac{2\pi}{|2c|}\end{cases}\Rightarrow|c|=\frac{\pi}{2}$$

از طرفی، مقدار a میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع است و داریم:

$$\begin{cases}a=\frac{5+(-1)}{2}=2\\ y_{max}=a+\frac{|b|}{2}\xrightarrow{a=2}2+\frac{|b|}{2}=5\Rightarrow|b|=6\end{cases}$$

با توجه به اینکه نمودار تابع در همسایگی $x=0$ فرم نزولی دارد، حاصل bc و $\frac{c}{b}$ منفی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{ac}{b}=a\times\left(-\frac{|c|}{|b|}\right)=2\times\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

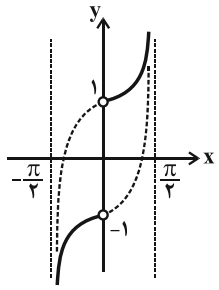
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۷۶- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

می‌توانیم تابع f را به صورت زیر بنویسیم:

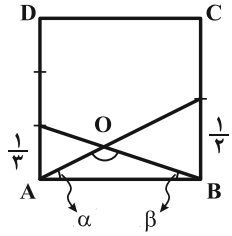
$$f(x)=\begin{cases}\tan x-1 & ;-\frac{\pi}{2}<x<0\\ \tan x+1 & ;0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن به‌صورت $\mathbb{R}-[-1,1]$ است.



(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۳۲)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** (میلاد سجادی‌لاریجانی)



در مورد مجموع زوایای داخلی مثلث AOB می‌دانیم:

$$\alpha+\beta+\hat{O}=\pi \Rightarrow \hat{O}=\pi-(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \tan\hat{O}=\tan\big(\pi-(\alpha+\beta)\big) \Rightarrow \tan\hat{O}=-\tan(\alpha+\beta) \quad (*)$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}\\ \tan\beta=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱}=\frac{۱}{۳}\end{cases} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۶}}{۱-\frac{۱}{۶}} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=۱$$

$$\xrightarrow{(*)} \tan\hat{O}=-\tan(\alpha+\beta) \Rightarrow \tan\hat{O}=-۱$$

$$\xrightarrow{۰<\hat{O}<\pi} \hat{O}=\frac{۳\pi}{۴}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

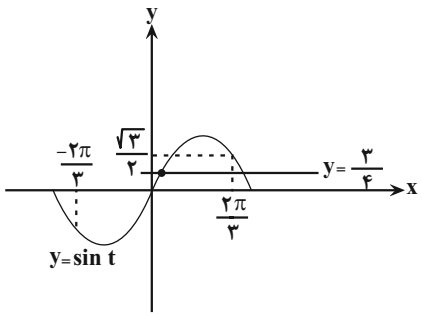
۷۸- **گزینهٔ «۱»** (امیرهوشنگ انصاری)

یادآوری: $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$

$$\sin\frac{x}{۶}\cos\frac{x}{۶}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۳}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow \sin\frac{x}{۳}=\frac{۳}{۴}$$

$$\sin(\frac{x}{۳})=\frac{۳}{۴}, -۲\pi\le x\le ۲\pi \xrightarrow{+۳} \frac{-۲\pi}{۳}\le\frac{x}{۳}\le\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{x}{۳}=t \Rightarrow \sin t=\frac{۳}{۴}\ ,\ \frac{-۲\pi}{۳}\le t\le\frac{۲\pi}{۳}$$



خط $y=\frac{۳}{۴}$ منحنی $\sin t$ را در بازهٔ مربوطه در یک نقطه قطع می‌کند.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۷۹- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

$$\cos۵x=\sin x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۵x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-x \Rightarrow ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۵x=۲k\pi-(\frac{\pi}{۲}-x) \Rightarrow ۴x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}\\ x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

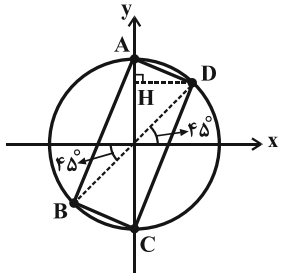
۸۰- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

$$۱-\frac{\sin۲x}{۲}=\sin^۲x \Rightarrow ۱-\sin^۲x=\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \cos^۲x-\sin x\cos x=\cos x\big(\cos x-\sin x\big)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \cos x-\sin x=۰ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

با مشخص کردن انتهای کمان جواب‌های بالا، چهارضلعی ABCD حاصل می‌شود. این چهارضلعی مستطیل است.



حال داریم:

$$S_{ABCD}=۲S_{\triangle ACD}=۲\Big(\frac{۱}{۲}AC.DH\Big)$$

$$\xrightarrow[DH=\cos۴۵^\circ]{AC=۲} S_{ABCD}=۲\left(\frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)=\sqrt{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

هندسه ۳

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

$$\begin{cases} ۳A+۲B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۷ & ۱۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\times ۳} ۹A+۶B=\begin{bmatrix} ۱۵ & ۱۲ \\ ۲۱ & ۴۲ \end{bmatrix} \\ ۲A-۳B=\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\times ۲} ۴A-۶B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱۴ \\ ۱۸ & ۱۰ \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۳A=\begin{bmatrix} ۱۳ & ۲۶ \\ ۳۹ & ۵۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱۳ & ۲۶ \\ ۳۹ & ۵۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{مجموع درایه‌های } A = ۱+۲+۳+۴=۱۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

با توجه به رابطهٔ داده شده، A لزوماً یک ماتریس ۳×۱ است و در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \\ ۲x & ۲y & ۲z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۶ \\ ۶ & ۳ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a+e+f=۴+۳+۹=۱۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

ماتریس AB در صورتی وارون‌پذیر نیست که $|AB|=۰$ باشد. از طرفی $|AB|=|A||B|$ است، پس در صورتی‌که $|A|$ یا $|B|$ برابر صفر باشند، ماتریس AB وارون‌پذیر نیست. داریم:

$$|A|=(a+۲)-۶=۰\Rightarrow a-۴=۰\Rightarrow a=۴$$

$$|B|=۲a-(-۴a)=۰\Rightarrow ۶a=۰\Rightarrow a=۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ و ۲۹)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۲+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲+I|=۲(-۲)-۶(-۲)=۸$$

$$(A^۲+I)^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} -۲ & -۶ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $(A^۲+I)^{-۱}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۸}(-۲-۶+۲+۲)=\frac{-۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۳)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

شرط آنکه یک دستگاه معادلات خطی جواب منحصر به‌فرد داشته باشد آن است که دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} m+5 & m \\ 2(m+1) & 3-m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (m+5)(3-m)-2m(m+1) \neq 0$$

$$\Rightarrow 3m-m^2+15-5m-2m^2-2m \neq 0$$

$$\Rightarrow -3m^2-4m+15 \neq 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحهٔ ۲۶)

۸۶- **گزینهٔ «۱»** (نصیر مهبی‌نژاد)

وارون وارون یک ماتریس برابر خود آن ماتریس است، پس داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{-2+3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=-1, d=2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax+dy = 1+2 = 3$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** (افشین خاصه‌خان)

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A| = (2+0-3b+3)-(2+0+3a) = 0$$

$$\Rightarrow -3a-3b=-3 \Rightarrow a+b=1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۸۸- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

$$|A|=-3 \Rightarrow |A^3| = |A|^3 = -27$$

$$||A^3|A|| = |-27A| = (-27)^3|A| = (-27)^3(-3) = (-3)^{10} = 3^{10}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** (فرزانه شاکپاش)

اگر دترمینان ماتریس را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنیم، داریم:

$$3(x-2)(x+2)-2(x+3)(x-3) = 10$$

$$\Rightarrow 3(x^2-4)-2(x^2-9) = 10$$

$$\Rightarrow 3x^2-12-2x^2+18 = 10 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

می‌دانیم اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آنگاه داریم:

$$|ABC| = |A||B||C|$$

از طرفی اگر k عددی حقیقی و A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد، آنگاه $|kA| = k^n|A|$ است.

دترمینان ماتریس‌های A و B را برحسب ستون دوم آن‌ها محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$|A| = (-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1$$

$$ABC = 2I \Rightarrow |ABC| = |2I|$$

$$\Rightarrow |A|\times|B|\times|C| = 2^3\times|I|$$

$$\Rightarrow 2\times(-1)\times|C| = 8\times 1 \Rightarrow |C| = -4$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

ریاضیات گسسته

۹۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$a^۲+b^۲\geq -۴(a+b+۲)\Leftrightarrow a^۲+b^۲\geq -۴a-۴b-۸$$

$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۴a+۴b+۸\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (a^۲+۴a+۴)+(b^۲+۴b+۴)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (a+۲)^۲+(b+۲)^۲\geq ۰$$

رابطهٔ اخیر همیشه درست است و روابط همگی برگشت‌پذیر هستند، پس اثبات به روش بازگشتی کامل می‌شود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه فاکپاش)*

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن، اگر $a\mid b$، آنگاه a هر مضربی از b را نیز عاد می‌کند و نیز اگر $a\mid b$ و $a\mid c$، آن‌گاه $a\mid b\pm c$. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\mid ۶m+۵\xrightarrow{\times ۵} a\mid ۳۰m+۲۵ \\ a\mid ۵m+۴\xrightarrow{\times ۶} a\mid ۳۰m+۲۴ \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a\mid ۱\Rightarrow a=\pm ۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

$$a=bq+r \qquad (۱)$$
$$a+۱=(b+۱)(q+۱)+(r+۱)\Rightarrow a+۱=bq+b+q+۱+r+۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} bq+r+۱=(bq+r+۱)+(b+q+۱)$$

$$\Rightarrow b+q+۱=۰\Rightarrow q=-b-۱\Rightarrow a=b(-b-۱)+r$$

از طرفی:

$$r=r_{max}=b-۱$$

در نتیجه داریم:

$$a=-b^۲-b+b-۱=-b^۲-۱$$
$$\Rightarrow a+۱=-b^۲$$

پس مقسوم جدید قرینهٔ یک عدد مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{۱۵}{\equiv}۱۴\overset{۱۵}{\equiv}-۱\Rightarrow a^۲\overset{۱۵}{\equiv}۱ \\ b\overset{۱۵}{\equiv}۱۳\overset{۱۵}{\equiv}-۲\Rightarrow b^۳\overset{۱۵}{\equiv}-۸ \\ c\overset{۱۵}{\equiv}۱۲\overset{۱۵}{\equiv}-۳\Rightarrow c^۴\overset{۱۵}{\equiv}۸۱\overset{۱۵}{\equiv}۶ \end{array}\right\}\Rightarrow a^۲b^۳c^۴\overset{۱۵}{\equiv}-۴۸\overset{۱۵}{\equiv}۱۲$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

$$۱۲^n+۱۵\overset{۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۵^n+۱\overset{۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۵^n\overset{۷}{\equiv}-۱$$

یعنی توانی از ۵ را می‌خواهیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۷، برابر ۶ (یا ۱-) باشد.

$$۵^۲\overset{۷}{\equiv}۴\xrightarrow{\times ۵}۵^۳\overset{۷}{\equiv}۲۰\overset{۷}{\equiv}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان }(۲k+۱)}(۵^۳)^{۲k+۱}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲k+۱}=-۱\Rightarrow ۵^{۶k+۳}\overset{۷}{\equiv}-۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} n=۶k+۳$$

یعنی n عددی است که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۶ برابر ۳ باشد و در نتیجه بزرگ‌ترین عدد دورقمی n برابر ۹۹ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد هجری)*

مطابق فرض سؤال داریم:

$$۹a-۷\overset{۱۱}{\equiv}۲a-۳$$

$$\Rightarrow 7a \overset{11}{\equiv} 4 \overset{11}{\equiv} -7 \xrightarrow[(7,11)=1]{+7} a \overset{11}{\equiv} -1 \overset{11}{\equiv} 10$$

$$\Rightarrow a = 11k + 10 \Rightarrow 4a - 5 = 44k + 35 \Rightarrow 4a - 5 \overset{44}{\equiv} 35$$

$$\xrightarrow{22|44} 4a - 5 \overset{22}{\equiv} 35 \overset{22}{\equiv} 13$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

$$46352x \overset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow (4+6+3+5+2)x \overset{9}{\equiv} 8$$

$$\Rightarrow 20x \overset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow 2x \overset{9}{\equiv} 8 \xrightarrow[(2,9)=1]{+2} x \overset{9}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow x = 9k + 4 (k \in \mathbb{Z})$$

در بین اعداد داده‌شده تنها عدد ۱۳ به فرم $9k + 4$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه شاکپاش)*

فرض کنید $d = (12n + 7, 5n - 2)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{matrix} d \mid 12n+7 \xrightarrow{\times 5} d \mid 60n+35 \\ d \mid 5n-2 \xrightarrow{\times 12} d \mid 60n-24 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 59 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 59 \end{cases}$$

بنابراین کافی است کوچک‌ترین مقدار n را محاسبه کنیم که به‌ازای آن، $d = 59$ شود.

$$5n - 2 \overset{59}{\equiv} 0 \Rightarrow 5n \overset{59}{\equiv} 2 \overset{59}{\equiv} 2 + 2 \times 59 \overset{59}{\equiv} 120$$

$$\xrightarrow[(5,59)=1]{+5} n \overset{59}{\equiv} 24 \Rightarrow n = 59k + 24 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین به‌ازای $n = 24$، $d = 59$ است، یعنی به‌ازای هر عدد طبیعی $n \leq 23$، دو عدد $12n + 7$ و $5n - 2$ نسبت به هم اول هستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۳ و ۲۵)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی وقوعی)*

$$(3a+2)x + (2a-3)y = 39$$

$$\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب در } Z} (3a+2, 2a-3) \mid 39$$

$$\text{فرض: } (3a+2, 2a-3) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3a+2 \xrightarrow{\times 2} d \mid 6a+4 \\ d \mid 2a-3 \xrightarrow{\times(-3)} d \mid -6a+9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 13$$

چون $39 \mid 13$ و $39 \mid 1$، پس با توجه به شرط وجود جواب در Z، این معادله در Z همواره دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۲۶)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه شاکپاش)*

فرض کنید x کیسهٔ ۴ کیلویی و y کیسهٔ ۵ کیلویی برای بسته‌بندی استفاده شود. در این صورت داریم: $4x + 5y = 123 \Rightarrow 5y \overset{4}{\equiv} 123 \Rightarrow y \overset{4}{\equiv} 3$

$$\Rightarrow y = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$4x + 5(4k+3) = 123 \Rightarrow 4x = -20k + 108 \Rightarrow x = -5k + 27$$

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 27 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{27}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 4k + 3 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

بنابراین به ۶ طریق (به تعداد مقادیر k) می‌توان ۱۲۳ کیلو شکر را در کیسه‌های ۴ و ۵ کیلویی بسته‌بندی کرد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

فیزیک ۳

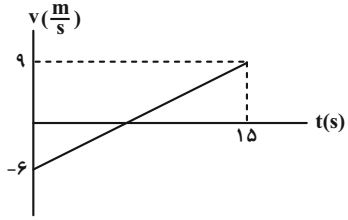
۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** *(حسام نادری)*

موارد (الف)، (ب) و (ت) درست و (پ) نادرست است. زیرا در لحظهٔ $t_۲$ شیب خط مماس صفر شده اما قبل و بعد آن شیب خط مماس مثبت است یعنی سرعت مثبت است و تغییر علامت نداده است، لذا جهت حرکت تغییر نکرده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۸)

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

چون نمودار سرعت- زمان به صورت خط راست می‌باشد، شتاب متحرک ثابت است. بنابراین، ابتدا شتاب متحرک را می‌یابیم و سپس با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت آن را در لحظه‌های $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۵s$ پیدا می‌کنیم و در نهایت سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.



$$a = \frac{v - v_۰}{t - t_۰} \xrightarrow[t_۰=۰\ ,\ t=۱۵s]{v=۹\frac{m}{s}\ ,\ v_۰=-۶\frac{m}{s}} a = \frac{۹-(-۶)}{۱۵-۰} = ۱\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow v_۱ = ۱\times۱ - ۶ = -۵\dfrac{m}{s} \\ t_۲ = ۵s \Rightarrow v_۲ = ۱\times۵ - ۶ = -۱\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} = \frac{-۵-۱}{۲} = -۳\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی سلطانی)*

قبل از آن‌که دو اتومبیل به یکدیگر برسند، اتومبیل A متوقف شده و سپس اتومبیل B به آن می‌رسد.

$$v_A^۲ - v_{۰A}^۲ = ۲a_A\Delta x \Rightarrow ۰ - ۱۰۰ = ۲\times(-۵)\times\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x_A = ۱۰m$$

مسافتی که باید B طی کند تا به A برسد:

$$۱۰۰ - ۱۰ = ۹۰m$$

$$\Delta x_B = v_B\Delta t_B \Rightarrow ۹۰ = ۱۵\times\Delta t_B \Rightarrow \Delta t_B = ۶s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۳ تا ۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

ابتدا زمان سقوط جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$H = \frac{۱}{۲}gT^۲ \Rightarrow ۳۱/۲۵ = ۵T^۲ \Rightarrow T^۲ = ۶/۲۵ \Rightarrow T = ۲/۵s$$

سپس زمان رسیدن صدای شخص به فردی که پای ساختمان قرار دارد:

$$t' = \frac{H}{v_{صوت}} \Rightarrow t' = \frac{۳۱/۲۵}{۳۱۲/۵} = \frac{۱}{۱۰}s$$

و $۰/۱۵s$ زمان واکنش شخص بود که در کل زمان باقیمانده برابر است با:

$$t = T - t' - ۰/۱۵ = ۲/۵ - ۰/۱ - ۰/۱۵ = ۲/۲۵s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

ابتدا باید در نظر داشته باشیم $۷۲\frac{km}{h}$ سرعت اولیهٔ خودرو معادل $۲۰\frac{m}{s}$ است و داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۲۰^۲ = ۲a\times۸۰ \Rightarrow a = -۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

حال برای محاسبهٔ نیروی اصطکاک داریم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow -f_k = ۱۰۰۰\times(-۲/۵) \Rightarrow f_k = ۲۵۰۰N$$

حال می‌توان نوشت:

$$F_N = mg = ۱۰۰۰\times۱۰ = ۱۰۰۰۰N$$

$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow \mu_k = \frac{f_k}{F_N} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۲۵$$

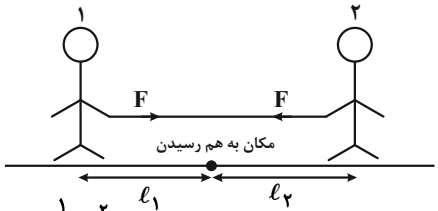
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

و دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲، ۳۳ و ۴۰ تا ۴۲)

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی حاتم‌خانی)*

طبق قانون سوم نیوتون اندازهٔ نیروی وارد بر هر دو شخص با هم برابر است.

اگر دو شخص در لحظهٔ t به‌هم برسند، چون $v_۰$ آن‌ها صفر است، داریم:



$$\ell_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱t^۲ \Rightarrow \frac{\ell_۱}{\ell_۲} = \frac{a_۱}{|a_۲|}\ (۱)$$
$$\ell_۲ = \frac{۱}{۲}|a_۲|t^۲$$

$$\left.\begin{matrix} F = m_۱a_۱ \\ F = m_۲|a_۲| \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_۱a_۱ = m_۲|a_۲| \Rightarrow \frac{a_۱}{|a_۲|} = \frac{m_۲}{m_۱}\ (۲)$$

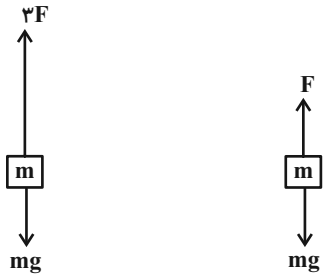
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{\ell_۱}{\ell_۲} = \frac{m_۲}{m_۱}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸

و دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(احسان ایرانی)*

در هر دو حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

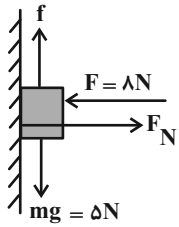


$$\begin{cases} \text{حالت اول}: F = m(g+a_1) \\ \text{حالت دوم}: 3F = m(g+a_2) \Rightarrow 3m(g+a_1) = m(g+a_2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3g + 3a_1 = g + a_2 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 2g \Rightarrow a_2 > 3a_1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(مریم شیخ‌ممو)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و سپس بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی را به‌دست می‌آوریم و با نیروی وزن جسم مقایسه می‌کنیم تا مشخص شود جسم ساکن می‌ماند یا حرکت می‌کند.



$$F_{netx} = 0 \Rightarrow F_N - F = 0 \Rightarrow F_N = F = 8N$$

$$f_{s.max} = \mu_s N \xrightarrow{\mu_s = 0/6} f_{s.max} = 0/6 \times 8 = 4/8N$$

چون $mg > f_{s.max}$ است، جسم حرکت می‌کند، بنابراین در این حالت نیروی اصطکاک جنبشی به جسم وارد می‌شود که اندازهٔ آن برابر است با:

$$f_k = \mu_k N \xrightarrow{\mu_k = 0/5} f_k = 0/5 \times 8 = 4N$$

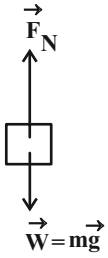
از طرف دیگر می‌دانیم نیرویی که دیوار بر جسم وارد می‌کند برایند دو نیروی عمودی تکیه‌گاه و نیروی اصطکاک است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2} \Rightarrow R = \sqrt{(8)^2 + (4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(احسان ایرانی)*

در شروع حرکت، آسانسور به صورت تندشونده به سمت بالا می‌رود و اگر نیروهای وارد بر شخص را مشخص کنیم، داریم:

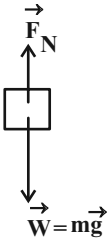


طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = ma + mg = F_{max}$$

توجه: عددی که ترازو نشان می‌دهد، F_N می‌باشد.

در انتهای حرکت، آسانسور به صورت کندشونده به سمت بالا می‌رود و اگر نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنیم داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_N = ma \Rightarrow F_N = mg - ma = F_{min}$$

طبق اطلاعات سؤال داریم:

$$F_{max} + F_{min} = (mg + ma) + (mg - ma) = 2mg = 1400N$$
$$\Rightarrow m = 70kg$$
$$F_{max} - F_{min} = (mg + ma) - (mg - ma) = 2ma = 280$$
$$\Rightarrow a = \frac{280}{2 \times 70} = 2\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(سعید شرق)*

حالت اول: اگر فنر فشرده شود، نیروی وارد شده به جسم از طرف فنر رو به پایین و هم‌جهت با نیروی وزن جسم است. در این حالت، ترازو مجموع این دو نیرو را نشان می‌دهد. بنابراین داریم:

$$mg + kx = F_N \xrightarrow{F_N = 48N} mg + kx = 48 \quad (1)$$

حالت دوم: اگر فنر کشیده شود، نیروی وارد شده به جسم از طرف فنر رو به بالا و در خلاف جهت نیروی وزن جسم است. در این حالت، ترازو تفاضل این دو نیرو را نشان می‌دهد. بنابراین داریم:

$$mg - kx = F'_N \xrightarrow{F'_N = 36N} mg - kx = 36 \quad (2)$$

اکنون، می‌توان با استفاده از معادله‌های (۱) و (۲) به‌صورت زیر، m را به‌دست آورد. دقت کنید، طرفین دو معادله را با هم جمع می کنیم:

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2mg = 48 + 36 \Rightarrow 2m \times 10 = 84 \Rightarrow m = 4/2kg$$

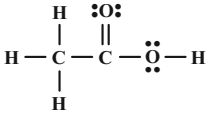
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴، ۳۵، ۴۳ و ۴۴)

شیمی ۳

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

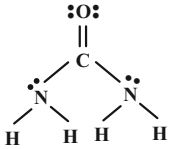
موارد (ب) و (ت) درست است.

بررسی عبارت‌ها:



الف) نادرست

$$\frac{\text{تعداد جفت } e^- \text{ پیوندی}}{\text{تعداد جفت } e^- \text{ ناپیوندی}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$



$$\frac{\text{تعداد جفت } e^- \text{ پیوندی}}{\text{تعداد جفت } e^- \text{ ناپیوندی}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

این نسبت در هر ۲ مولکول با هم برابر است.

ب) درست؛ ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از بیماری که به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شایع می‌شود (وبا)، رعایت بهداشت فردی و همگانی است.

پ) نادرست؛ فرمول شیمیایی روغن زیتون و چربی ذخیره شده در کوهان شتر به ترتیب به صورت $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ و $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ و اختلاف جرم مولی آن‌ها به دلیل اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن در آن‌ها است که برابر ۶ گرم بر مول است ولی در این مورد اختلاف جرم دو مول را گفته است. لذا داریم:

اختلاف جرم دارند. $۲\times۶=۱۲\,g \Rightarrow$

ت) درست؛ عسل حاوی قندهایی با مولکول‌های بسیار قطبی است که در ساختار خود شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل $(-OH)$ دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱ تا ۵)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سورکلایی)*

صابون مایع فاقد اتم فلزی به این معناست که کاتیون آن $NH_۴^+$ است. فرمول عمومی آن $RCOONH_۴$ است. واکنش صابون با آب سخت حاوی منیزیم کلرید:

$$۲RCOONH_۴(aq)+MgCl_۲(aq) \rightarrow \underbrace{(RCOO)_۲Mg(s)}_{\text{رسوب سفیدرنگ}}+۲NH_۴Cl(aq)$$

$$?\,g\,(RCOO)_۲Mg : ۱\,mol\,RCOONH_۴ \times \frac{۱\,mol\,(RCOO)_۲Mg}{۲\,mol\,RCOONH_۴} \times \frac{m\,g(RCOO)_۲Mg}{۱\,mol\,(RCOO)_۲Mg}$$

$$= ۲۶۷\,g\,(RCOO)_۲Mg \Rightarrow m = ۵۳۴\,g.mol^{-۱}$$

R را با گروه آلکیل سیرشده بازنویسی می‌کنیم و شمار اتم‌های کربن آن را می‌یابیم:

$$(C_nH_{۲n+۱}COO)_۲Mg : ۲۴n+۴n+۲+۲۴+۶۴+۲۴=۵۳۴$$

$$=۲۸n+۱۱۴=۵۳۴ \Rightarrow ۲۸n=۴۲۰ \Rightarrow n=۱۵$$

از آنجایی که گروه آلکیل ۱۵ اتم کربن دارد فرمول صابون $C_{۱۵}H_{۳۱}COONH_۴$ خواهد بود.

$$\frac{\text{عنصرها}}{\text{اتم‌ها}} = \frac{۴}{۵۴} = \frac{۲}{۲۷}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶، ۸ و ۹)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی براساس برهم کنش میان ذره‌ها عمل می‌کنند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) بخش قطبی در پاک‌کننده‌های غیرصابونی گروه $SO_۳^-$ و در صابون گروه COO^- است.

۲) پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب‌های سخت، خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند زیرا با یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ موجود در این آب‌ها واکنش نمی‌دهند.

۳) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی علاوه بر عنصرهای C و H عنصرهای S، O و Na نیز وجود دارند. بنابراین نمی‌توان آن‌ها را جزو هیدروکربن‌ها طبقه‌بندی کرد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶، ۱۰ و ۱۱)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ سدیم هیدروکسید جامد یک باز آرنیوس به شمار می‌رود زیرا در آب سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید می‌شود.

ب) نادرست؛ در دمای یکسان مانند دمای اتاق برای مقایسهٔ pH دو محلول، به غلظت محلول هم نیاز است.

پ) نادرست؛ مقدار درجهٔ یونش اسیدها محدوده‌ای به صورت $۰<\alpha\leq۱$ دارد.

ت) درست؛ برای باز کردن لوله‌ای که با نوعی اسید چرب مسدود شده باشد می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد.

ث) درست؛ مطابق متن کتاب درسی درست است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۳۲)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

آمونیاک باز ضعیفی بوده و به‌طور عمده به شکل مولکولی در آب حل می‌شود و تک ظرفیتی می‌باشد.

$$NH_۳(g)+H_۲O(l) \rightleftharpoons NH_۴^+(aq)+OH^-(aq)$$

و سدیم هیدروکسید (سود سوزآور) باز قوی و تک ظرفیتی می‌باشد و در آب کامل یونیده می‌شود.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۲) در غلظت و دمای یکسان رسانایی الکتریکی محلول لوله بازکن بیشتر از محلول شیشه پاک‌کن است. چون محلول لوله بازکن حاوی باز قوی بوده و به میزان بیشتری یونیده می‌شود.

۳) صابون نمک سدیم اسیدهای چرب است که در اثر واکنش یک اسید چرب ضعیف با بازی قوی مانند سدیم هیدروکسید به دست می‌آید و صابون در محلول نهایی خاصیت بازی دارد.

$$RCOOH + NaOH \rightarrow RCOONa + H_2O$$

و رنگ کاغذ pH مرطوب را به رنگ آبی درمی‌آورد.

۴) در محلول آبی با تغییر غلظت یون هیدرونیوم، غلظت یون هیدروکسید نیز تغییر می‌کند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ تا ۳۱)

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

در تمام مدت زمان انجام واکنش، از شروع تا پایان قانون پایستگی جرم در یک واکنش برقرار است. در حین تعادل مجموع جرم CO_2، CaO و $CaCO_3$ برابر ۰/۲ گرم است. بنابراین:

$$m_{CaCO_3} + m_{CaO} + m_{CO_2} = 0/2\,g$$

$$\rightarrow m_{CO_2} = 0/2\,g - 0/156\,g = 44\times10^{-3}\,g$$

اکنون از جرم CO_2 مول CaO و غلظت $Ca(OH)_2$ را به دست می‌آوریم:

$$CaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq)$$

$$?\,mol\,Ca(OH)_2 = 44\times10^{-3}\,g\,CO_2 \times \frac{1\,mol\,CO_2}{44\,g\,CO_2}$$

$$\times \frac{1\,mol\,CaO}{1\,mol\,CO_2} \times \frac{1\,mol\,Ca(OH)_2}{1\,mol\,CaO} = 10^{-3}\,mol\,Ca(OH)_2$$

$$Ca(OH)_2 \text{ غلظت } M = \frac{10^{-3}}{0/25} = 4\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = \underbrace{M}_{\text{غلظت مولار}} \times n \times \alpha = 4\times10^{-3}\times2\times1$$

$$= 8\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{8\times10^{-3}} = 0/125\times10^{-11} = 125\times10^{-14}$$

$$= 5^3\times10^{-14}\,mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log_{10}^{5^3\times10^{-14}} = 14 - 3\log_{10}^{5} = 11/9$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۱ و ۲۸)

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی‌سودکلایی)

همهٔ موارد درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) از واکنش اسید با فلزات گاز هیدروژن آزاد می‌شود.

$$2HX + Mg \rightarrow MgX_2 + H_2$$

ب) اسید قوی‌تر هنگام واکنش با فلز با سرعت بیشتری گاز هیدروژن آزاد می‌کند؛ در نتیجه محلول (آ) اسید قوی‌تر و دارای ثابت یونش بزرگ‌تر است.

پ) چون محلول (آ) اسید قوی‌تری دارد و غلظت اولیه و دمای آن‌ها یکسان است می‌توان نتیجه گرفت pH محلول (آ) پیش از آغاز واکنش کوچک‌تر از محلول (ب) می‌باشد.

ت) هر چه اسید قوی‌تر باشد هنگام یونش یون‌های بیشتری تولید کرده و باعث افزایش رسانایی محلول می‌شود.

ث) فورمیک اسید نسبت به نیتریک اسید ضعیف‌تری است.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۲۴)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** (آروین شجاعی)

$$\underbrace{K_2O}_{1/88\,g} + H_2O \rightarrow 2KOH \rightarrow 2K^+ + \underbrace{2OH^-}_{mol\ ?}$$

$$1/88\,g\,K_2O \times \frac{1\,mol\,K_2O}{94\,g\,K_2O} \times \frac{2\,mol\,OH^-}{1\,mol\,K_2O}$$

$$= 0/04\,mol\,OH^-$$

$$HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$$

$$pH = 2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$mol_{H^+} = 10^{-2}\times5 = 0/05\,mol$$

$$H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$$

$$mol_{H^+_{\text{باقی‌مانده}}} = 0/05 - 0/04 = 0/01$$

$$[H^+]_{\text{باقی‌مانده}} = \frac{0/01}{5} = 0/002\,mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow pH = 3 - \log 2 = 2/7$$

$$\Delta pH = 2/7 - 2 = 0/7$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

اسیدها را بر مبنای میزان یونشی که به هنگام حل شدن در آب دارند به اسیدهای قوی و ضعیف دسته‌بندی می‌کنند.

سایر گزینه‌ها مطابق متن کتاب درسی درست هستند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴، ۱۹، ۳۱ و ۳۲)

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی‌سودکلایی)

ابتدا مول باز MOH را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,MOH : 4/8\,g\,MOH \times \frac{1\,mol\,MOH}{80\,g\,MOH}$$

$$= 6\times10^{-2}\,mol\,MOH$$

سپس مولاریته این باز را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{n}{V} = \frac{6\times10^{-2}\,mol}{2\,L} = 3\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$K_b = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 1/5\times10^{-3} = \frac{3\times10^{-2}\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow 20\alpha^2 = 1-\alpha \Rightarrow 20\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(20) = 81 \Rightarrow \alpha = \frac{-1\pm9}{40} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{غ ق ق} \\ \frac{8}{40} = \frac{1}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه درجهٔ یونش این باز ۰/۲ خواهد بود.

$$[OH^-] = 3\times10^{-2}\times\frac{1}{5} = 6\times10^{-3}$$

$$[OH^-][H^+] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{6\times10^{-3}} = \frac{10^{-11}}{6}$$

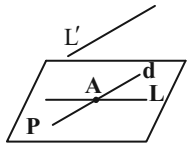
$$pH = -\log[H^+] = -\log\frac{10^{-11}}{6} = \log6 + 11 = 11/8$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

هندسه ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(مجید محمدی نویسی)*

فرض کنید L و L' دو خط متنافر باشند. از یک نقطهٔ واقع بر خط L، خط d را موازی با L' رسم می‌کنیم. صفحهٔ شامل دو خط L و d، تنها صفحهٔ شامل خط L است که با خط L' نیز موازی است.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

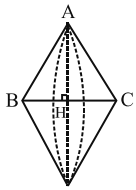
۱۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا نصرالهی)*

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد، بنابراین گزینهٔ «۴» نادرست است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۱۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

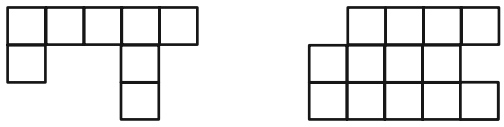
اگر مثلث متساوی‌الساقینی را حول قاعدهٔ آن دوران دهیم، آنگاه مطابق شکل دو مخروط با قاعدهٔ یکسان ایجاد می‌شود که شعاع قاعدهٔ هر کدام برابر طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث و ارتفاع هر کدام برابر نصف طول قاعده مثلث است.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ مشابه تمرین ۲ (ت) صفحهٔ ۹۶)

۱۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

تصویر نمای بالا و رو به روی این سازه به صورت شکل زیر است:



نمای بالا | نمای روبه‌رو

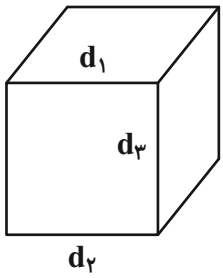
اگر مساحت هر مربع را با S نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\frac{\text{مساحت تصویر نمای بالا}}{\text{مساحت تصویر نمای روبه‌رو}} = \frac{8S}{13S} = \frac{8}{13}$$

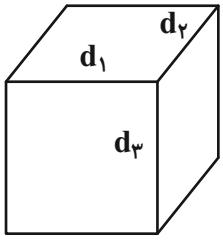
(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۱۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(سهام مجیری‌پور)*

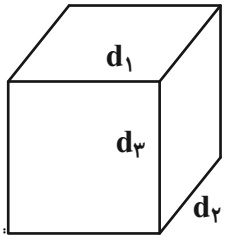
الف) در شکل زیر d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده وموازی یکدیگرند.



ب) در شکل زیر d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده و با یکدیگر متقاطع‌اند.

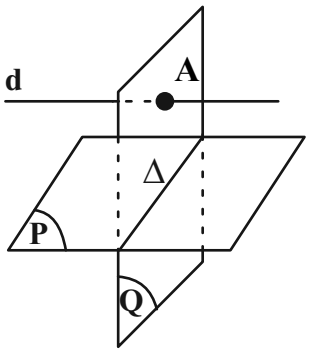


پ) در شکل زیر d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده و با یکدیگر متنافرند.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



فرض کنید خط Δ فصل مشترک دو صفحه P وQ باشد. اگر خط d درون صفحه Q و موازی خط Δ باشد، آنگاه خط d موازی صفحه P است.اگر خط d خطی خارج از صفحه Q ولی موازی خط Δ باشد، آن گاه خط d با هر دو صفحه P و Q موازی است. همچنین مطابق شکل خط d می‌تواند صفحه Q را قطع کند و موازی صفحه P باشد، پس هر سه حالت گزینه‌های «۱» ، «۲» و «۳» امکان پذیر است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی اصل)*

گزینه «۱»: در یک صفحه، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند ولی این موضوع در فضا الزاماً برقرار نیست.

گزینه «۲» از هر نقطهٔ خارج یک صفحه، می‌توان خطی بر آن صفحه عمود رسم کرد. هر صفحهٔ شامل این خط بر صفحه مفروض عمود است، پس این گزاره همواره درست است.

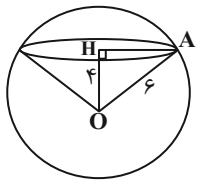
گزینه «۳» اگر خطی با یکی ازدو خط متنافر، موازی باشد، می‌تواند با دیگری متقاطع یا متنافر باشد.

گزینه «۴» از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، بی شمار خط متنافر با آن خط می‌گذرد.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر مرکز دایرهٔ سطح مقطع را با H نمایش دهیم، آنگاه داریم:

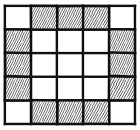


$$\overset{\Delta}{OHA}: AH^2 = OA^2 - OH^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$V_{(\text{مخروط})} = \frac{1}{3}\pi(AH)^2 OH = \frac{1}{3}\pi \times 20 \times 4 = \frac{80\pi}{3}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



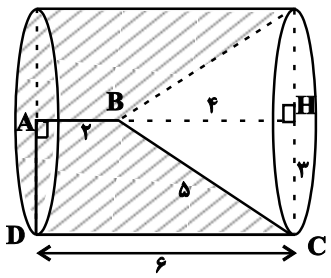
در هر کدام از وجوه این مکعب، مکعب‌های کوچکی که در شکل بالا هاشور خورده اند، دارای دو وجه رنگ شده‌اند. از طرفی هر کدام از این مکعب‌های کوچک به دو وجه مکعب بزرگ تعلق دارند. با توجه به اینکه مکعب دارای ۶ وجه است، پس تعداد این مکعب‌های کوچک برابر است با:

$$\frac{12 \times 6}{2} = 36$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحهٔ ۹۰)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

در مثلث قائم الزاویه BHC داریم:



$$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow BH = 4$$

حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ قائم الزاویه ABCD حول ضلع AB مطابق شکل برابر تفاضل حجم یک استوانه و یک مخروط است:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi(AD)^2 \times DC = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi(CH)^2 \times BH = \frac{\pi}{3} \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

$$V_{\text{(سایه زده)}} = 54\pi - 12\pi = 42\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبی)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نادرست؛ هر اتم اکسیژن با دو اتم هیدروژن پیوند اشتراکی دارد و با دو اتم هیدروژن از مولکول‌های مجاور پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

عبارت دوم: نادرست؛ در حلقه‌های شش‌ضلعی یخ، اتم‌های اکسیژن در رأس‌ها قرار دارند.

عبارت سوم: نادرست؛ آب اغلب مواد یونی و مولکولی را در خود حل می‌کند.

عبارت چهارم: درست؛ چگالی یخ از آب کمتر است ولی نظم مولکول‌ها در یخ از آب بیشتر است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۸ و ۱۰۹)

۱۳۲- **گزینهٔ «۱»** *(ارژنگ خانلری)*

$$\text{محلول HCl}\begin{cases}C_M(HCl)=2M \quad \text{(مولار)}\\ V_{(L)}=500mL=0/5L\end{cases}$$

$4/8g = $ جرم منیزیم (Mg) در واکنش

تمام منیزیم در واکنش شرکت کرده است. از روی جرم منیزیم مصرفی، تعداد مول‌های HCl مصرف شده را حساب می‌کنیم. $mol\ HCl$ مصرف شده را از $mol\ HCl$ اولیه کم می‌کنیم تا $mol\ HCl$ باقی‌مانده به دست آید. از رابطهٔ $C_M=\frac{n}{V_{(l)}}$، برای تبدیل غلظت مولار HCl به مول آن و برعکس استفاده می‌کنیم.

$$C_M=\frac{n}{V_{(l)}}\Rightarrow n=C_M\times V_{(l)}$$

$$\Rightarrow n=2M\times 0/5L=1mol\ HCl$$

محاسبهٔ HCl مصرف شده به ازای مصرف ۴/۸ گرم منیزیم (Mg)

$$Mg(s)+2HCl(aq)\rightarrow MgCl_2(aq)+H_2(g)$$

$$4/8g\ Mg\times\frac{1mol\ Mg}{24g\ Mg}\times\frac{2mol\ HCl}{1mol\ Mg}$$

$$=0/4mol\ HCl$$ مصرف می‌شود

محاسبهٔ $mol\ HCl$ باقی‌مانده پس از انجام واکنش

$$1-0/4=0/6mol\ HCl$$ باقی‌مانده

محاسبهٔ غلظت مولار HCl باقی‌مانده

$$C_M=\frac{n}{V_{(l)}}=\frac{0/6mol\ HCl}{0/5\ L\ محلول}=1/2M$$ (مولار)

(شیمی ۱- صفحهٔ ۹۸)

۱۳۳- **گزینهٔ «۳»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

با توجه به جدول، انحلال‌پذیری سدیم نیترات برابر ۹۲ است، یعنی در ۱۰۰ گرم آب حداکثر ۹۲ گرم سدیم نیترات را می‌توان حل کرد. بنابراین می‌توان گفت که ۱۹۲ گرم محلول سیرشدهٔ آن دارای $92g$ سدیم نیترات است. در نتیجه:

جرم سدیم نیترات در ۴۸ گرم محلول سیرشدهٔ آن

$$=48g\times\frac{92g}{192g}=23g$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها در آب بین ۰/۰۱ تا ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد، مواد کم محلول محسوب می‌شوند، بنابراین کلسیم سولفات جزو مواد کم محلول در آب است.

۲) از آنجا که انحلال‌پذیری کلسیم فسفات در آب بسیار کم است، بنابراین جرم محلول آن را می‌توان به تقریب با جرم حلال (آب) برابر در نظر گرفت، بنابراین:

$$\text{غلظت کلسیم فسفات} = \frac{۵\times۱۰^{-۴}\,g}{۱۰۰\,g}\times۱۰^{۶} = ۵\,ppm$$

۴) $$\text{درصد جرمی سدیم کلرید} = \frac{۳۶\,g}{(۱۰۰+۳۶)g}\times۱۰۰ \simeq ۲۶/۴۷$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۱۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی رفیعی)*

$$ppm\,B^- = \frac{g\ B^-}{g\ \text{محلول}}\times۱۰^{۶} \Rightarrow ۴\times۱۰^{۵} = \frac{g\ B^-}{۶۰۰}\times۱۰^{۶}$$

$$\Rightarrow g\ B^- = ۲۴۰$$

$$g\ AB_۲ = ۲۴۰g\ B^-\times\frac{۱mol\ B^-}{۸۰g\ B^-}\times\frac{۱mol\ AB_۲}{۲mol\ B^-}$$

$$\times\frac{۲۰۰g\ AB_۲}{۱mol\ AB_۲} = ۳۰۰g\ AB_۲$$

$$۲۹۸K = ۲۵^\circ C$$

$۳۰۰g\ AB_۲$	$۳۰۰g\ H_۲O$
x	$۱۰۰g\ H_۲O$

$$\text{در دمای } ۲۵^\circ C \text{ انحلال‌پذیری } AB_۲ = ۱۰۰g$$

$$\xrightarrow[S=۱۰۰g]{\theta=۲۵^\circ C} S = a\theta + ۵۰ \Rightarrow ۱۰۰ = ۲۵a + ۵۰ \Rightarrow a = ۲$$

$$\text{معادلهٔ کلی انحلال‌پذیری} \Rightarrow S = ۲\theta + ۵۰ \xrightarrow{\theta=۳۱/۵^\circ C} S = ۱۱۳$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۱۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) پیوند هیدروژنی آب- اتانول از پیوند هیدروژنی آب- آب قوی‌تر است. از این‌رو اتانول به خوبی در آب حل می‌شود.

۲) $BaSO_۴$ مادهٔ نامحلول در آب می‌باشد و نیروی جاذبهٔ آن با آب در مقایسهٔ انجام شده کمتر از میانگین پیوند یونی در $BaSO_۴$ و پیوند هیدروژنی در آب است.

۳) جاذبهٔ یون- دوقطبی در محلول $AgNO_۳$ در آب بیشتر از پیوند هیدروژنی می‌باشد.

۴) چون $MgSO_۴$ در آب محلول است مقایسهٔ انجام شده باید برعکس انجام می‌شد و نیروی جاذبهٔ $MgSO_۴$ با آب باید بیشتر از میانگین پیوند یونی در $MgSO_۴$ و پیوند هیدروژنی در آب باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۳)

۱۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی‌سورکلایی)*

مطابق قانون هنری با n برابر شدن فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب نیز n برابر می‌شود. در صورت سوال فشار از ۴/۵ اتمسفر به مقدار ۲ برابر اولیه $(۹atm)$ رسیده است در نتیجه انحلال‌پذیری گاز $O_۲$ در فشار ۹ اتمسفر برابر با ۰/۰۴ گرم در ۱۰۰ گرم آب خواهد بود. در محلول‌های بسیار رقیق که جرم حل‌شونده در مقابل جرم حلال ناچیز است برای تبدیل انحلال‌پذیری به مولاریته می‌توان از رابطهٔ زیر بهره برد.

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{انحلال‌پذیری}\times۱۰}{\text{جرم مولی}}$$

$$\Rightarrow C_M = \frac{۱۰\times۰/۰۴}{۳۲} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

۱۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) نادرست هستند.

هر چه گشتاور دوقطبی یک ترکیب از صفر بیشتر باشد مولکول قطبی‌تر است و نیروی جاذبهٔ بین مولکولی قوی‌تر و نقطهٔ جوش بالاتر است و مواد ناقطبی در هگزان ناقطبی و مواد قطبی در استون قطبی حل می‌شوند. پس مولکول B که ناقطبی است انحلال‌پذیری بیشتری در هگزان دارد و C و A با قطبیت بیشتر، مولکول قطبی هستند و انحلال‌پذیری آن‌ها در استون بیشتر است.

بررسی موارد:

قدرت جاذبه بین مولکولی: $C > A > B$

انحلال‌پذیری در آب: $C > A > B$

انحلال‌پذیری در هگزان: $B > A > C$

نقطهٔ جوش: $C > A > B$

جهت‌گیری در میدان الکتریکی: $C > A > B$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی عبارت‌ها:

آ) درست. گازهای گلخانه‌ای CO_2، CH_4 و بخار آب می‌باشند که از بین آنها CH_4 می‌سوزد. از سوختن کامل CH_4 گاز CO_2 و آب تولید می‌شود که به ترتیب ناقطبی و قطبی می‌باشند.

ب) درست. در مولکول‌های قطبی H_2O و HCl اتم هیدروژن قطب مثبت است که به سمت صفحه با بار منفی جهت‌گیری می‌کند.

پ) نادرست. از سوختن ناقص C_2H_6 گاز CO و بخار آب تولید می‌شود که هر دو مولکول قطبی دارند.

ت) نادرست. مثلاً مولکول H_2S قطبی است که از مولکول H_2O که آن هم قطبی است نقطهٔ جوش کمتری دارد. (یعنی مولکول با جرم مولی کمتر نقطهٔ جوش بالاتری دارد.)

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۶)

۱۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت (ب) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر چه نیروی بین مولکولی گازی بیشتر باشد، آسان تر متراکم و مایع می‌شود. گازهای CO و N_2 چون جرم‌های مولی مشابه یکدیگر دارند، عامل قطبیت تعیین کننده است و مولکولی که دارای $\mu \neq 0$ است، دمای جوش بالاتری نسبت به مولکولی که دارای $\mu = 0$ است، دارد.

ب) در میان مواد، مولکول‌هایی با جرم مولی مشابه از نظر قطبیت سنجیده می‌شوند و هر کدام قطبی‌تر باشد نقطهٔ جوش، بیشتر است.

پ) اتانول و استون از جمله حلال‌های آلی به شمار می‌روند که به دلیل قطبی بودن و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی می‌توانند به هر نسبتی در آب حل شوند و محلول سیرشده در آن‌ها معنا ندارد.

ت) مولکول‌های N_2 و O_2 به دلیل ناقطبی بودن در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵ و ۱۰۹)

۱۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

اسمز فرایندی خودبه‌خودی و طبیعی است در آن آب از محلول رقیق به محلول غلیظ‌تر رفته و روش مناسبی برای تصفیهٔ آب نمی‌باشد. در اسمز معکوس با اعمال فشار خارجی به تدریج آب از محلول غلیظ‌تر به محلول رقیق‌تر رفته حجم محلول غلیظ‌تر کاهش و غلظت آن افزایش می‌یابد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)