

۱- اگر $A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{3}}$ باشد، حاصل $(5+A)^{-\frac{1}{5}}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱) ✓

$$A = \sqrt[3]{27 \times (243)^{\frac{1}{3}}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \times (3^5)^{\frac{1}{3}}} \times (3)^{\frac{7}{3}} = (3^{\frac{14}{3}})^{\frac{1}{3}} \times (3)^{\frac{7}{3}}$$

$$\Rightarrow A = 3^{\frac{14}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{21}{3}} = 3^7 = 27 \Rightarrow (5+A)^{-\frac{1}{5}} = (5+27)^{-\frac{1}{5}} = (32)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

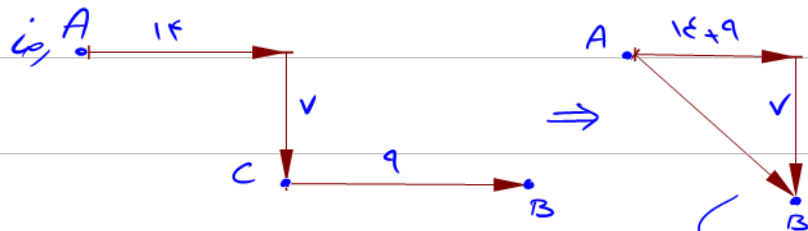
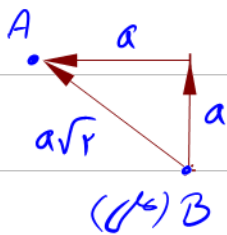
۲- رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهت می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب بپیماید. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند. مقدار a کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۱ (۳)

۱۷ (۲) ✓

۱۵ (۱)



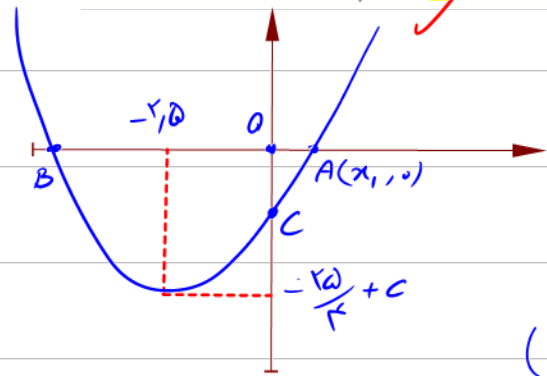
$$AB = \sqrt{(23)^2 + (7)^2} = \sqrt{578}$$

$$\Rightarrow \sqrt{578} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 17\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 17$$

۳- مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

- (۱) $1/75$ (۲) $2/75$ (۳) $-1/75$ (۴) $-2/75$ ✓



$$S = \frac{1}{2} \times x_1 \times c = c^2 \Rightarrow x_1 = 2c$$

$$(2c, 0) \Rightarrow (2c)^2 + 5(2c) + c = 0$$

$$\Rightarrow 4c^2 + 10c + c = 0 \Rightarrow 4c^2 + 11c = 0 \Rightarrow c(4c + 11) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 & \text{غیر قابل قبول} \\ c = -11/4 = -2.75 \end{cases}$$

۴- تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد. اگر $f(2) = 2a - 1$ و $f(1 - a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

- (۱) ۵ ✓ (۲) ۲ (۳) ۱۱ (۴) ۸

زبان ریاضی: دو خط با هم موازی باشند در هیچ نقطه‌ای با هم برخورد ندارند.

$$3x - 2y = b \Rightarrow 2y = 3x - b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = mx + h \Rightarrow m = \frac{3}{2} \quad f(2) = 2a - 1 \Rightarrow (\frac{3}{2}) \times 2 + h = 2a - 1$$

$$\Rightarrow 3 + h = 2a - 1 \Rightarrow a = 2 + \frac{h}{2} \quad f(1 - a) = f(1 - 2 - \frac{h}{2}) = f(-1 - \frac{h}{2}) = 2$$

$$\Rightarrow f(-1 - \frac{h}{2}) = \frac{3}{2}(-1 - \frac{h}{2}) + h = 2 \Rightarrow h = 12 \quad f(-6) = (\frac{3}{2}) \times (-6) + 12 = 0$$

۵- تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{5} \right]$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ✓ ۳ (۲) ۴ (۱)

$$f(x) = c \text{ ثابت} \Rightarrow f(m) + f(n) = f(m)f(n) \Rightarrow c + c = c^2 \Rightarrow c^2 - 2c = 0$$

$$\Rightarrow c(c - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & \text{غ \bar{0} \bar{0}} \\ c = 2 & \text{0 \bar{0}} \end{cases}$$

$$2n^2 - 7n + 1 = -f(m) = -2 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0 \Rightarrow n = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 & \text{0 \bar{0}} \\ 1 & \text{0 \bar{0} \bar{0}} \end{cases}$$

$$m^2 - 4m + 6 = nf(n) = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & \text{X} \\ m = 4 & \checkmark \end{cases}$$

$$\left[\frac{mn}{5} \right] = \left[\frac{4 \times 2}{5} \right] = 2$$

۶- تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

- ۱ (۶) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (صفر) ✓

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad g(x) = c \text{ ثابت}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{f=0\} = [-3, 3] - 2 \quad \text{نقطه موجود در دامنه} = [-3, 3] - \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

(۳)

تابع $\frac{g}{f}$ در هیچ نقطه‌ای صحیح تعریف نمی‌شود

۷- اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ ، به ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- $-\frac{5}{2}$ (۴)
- $\frac{5}{2}$ (۳)
- $-\frac{3}{2}$ (۲) ✓
- $\frac{3}{2}$ (۱)

خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ $(\alpha, \beta) \Rightarrow \beta = (1-2m)\alpha - \frac{2m+3}{2} = \alpha - 2m\alpha - m - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \beta = -m(2\alpha+1) + \alpha - \frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha - \frac{3}{2} = \beta \Rightarrow \beta = -2$

$\beta - \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

۸- مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 2x + a + 2 = 0$ برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1-2a)x - 3$ کدام است؟

- ۳ (۴)
- ۱/۵ (۳)
- ۳ (۲)
- ۱/۵ (۱) ✓

مجموع ریشه‌های معادله اول = a حاصل ضرب ریشه‌های معادله دوم = $\frac{a+2}{a}$

$\Rightarrow \frac{a+2}{a} = a \Rightarrow a+2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$

$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ } \overline{00} \\ x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ } \overline{00} \end{cases}$

$ax^2 - 2x + a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ } \overline{00} \text{ } \overline{00} \\ -x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ } \overline{00} \end{cases} \Rightarrow a = -1$

$y = x^2 + (1-2a)x - 3 \Rightarrow \text{مختار } x = -\frac{b}{2a} = \frac{1-a}{2} = -\frac{2}{2} = -1, 5$

۹- راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

$\frac{6}{5}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲) ✓

$\frac{3}{2}$ (۱)

$\frac{5}{6}h = 50 \text{ min}$

$x = vt \Rightarrow 200 = (v - 20)(t + \frac{5}{6}) = \frac{v}{2} + \frac{5}{6}v - 20t - \frac{5}{3}$ (۱)

$x = vt \Rightarrow 200 = vt \Rightarrow t = \frac{200}{v}$

(۱) $\Rightarrow \frac{5}{6}v - 20t = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{6}v - 20(\frac{200}{v}) = \frac{5}{3} \xrightarrow{\times 6v} 5v^2 - 24000 = 10v$

$\Rightarrow v^2 - 20v - 4800 = 0 \Rightarrow (v - 80)(v + 60) = 0 \Rightarrow v = 80 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$

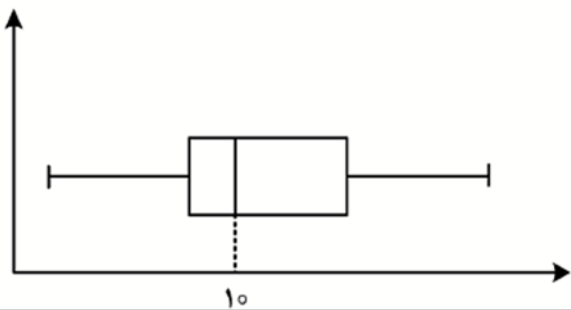
۱۰- داده‌های نمودار زیر، اعداد زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟

۵ (۱)

۷/۵ (۲) ✓

۸/۵ (۳)

۹ (۴)



با بررسی حالت‌های زیر خواهیم داشت،

(حالت اول)



آنگاه سؤال میانگین داده‌ها درزنبک وجود ندارد. \Rightarrow اگر از میان داده‌ها واحد، بنابرین اگر داده‌ای با میانگین برابر است نباید در میانگین گنجانده شود.

میانگین داده‌های $= \frac{8+8+8}{3} = 8 \Rightarrow$ کمتر از میانه

(حالت دوم)



میانگین داده‌های کمتر از میانه $= \frac{6+8+8+8}{4} = 7.5$

(حالت سوم)



میانگین داده‌های کمتر از میانه $= \frac{6+8+8+8}{4} = 7.5$

۱۱- اگر $۱۷, ۲۵ - ۴, ۱۶, ۲a$ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز $۶, ۴, a, ۱۳$ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

۱۱/۵ (۴) ✓

۱۱ (۳)

۹/۵ (۲)

۹ (۱)

$$\bar{x} = \frac{۶+۴+a+۱۳}{۴} = \frac{۲۳+a}{۴} \quad \left(\frac{۲۳+a}{۴} - ۶\right)^2 = \left(\frac{a-۱}{۴}\right)^2$$

$$\left(\frac{۲۳+a}{۴} - ۴\right)^2 = \left(\frac{۷+a}{۴}\right)^2 \quad \left(\frac{۲۳+a}{۴} - a\right)^2 = \left(\frac{۲۳-۳a}{۴}\right)^2$$

$$\left(\frac{۲۳+a}{۴} - ۱۳\right)^2 = \left(\frac{a-۲۹}{۴}\right)^2 \Rightarrow a=۹$$

با توجه به تساوی مربع انحراف از میانگین هر دو آن برابر است!

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{۴} = \frac{۴+۱۶+۱+۲۵}{۴} = ۱۱,۵$$

۱۲- با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

۱) $a = b$

۲) $a^2 = ab$ طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است

۳) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ b^2 را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است

۴) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است

۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$ طرفین تساوی گام ۴ را بر $a - b$ تقسیم کرده است

۶) $b + b = b$ به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است

۷) $\frac{۲b}{b} = \frac{b}{b}$ طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است

۸) $۲ = ۱$

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲) ✓

۳ (۱)

در گام ۵ چون عبارت $a - b$ در دو طرف تساوی قرار گرفته است، رابطه را بر $a - b$ تقسیم کرد.

۱۳- کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره $[((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p]$ است؟

- (۱) $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
 (۲) $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
 (۳) $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ ✓
 (۴) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

۱۴- در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود،

نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۷۵ (۴) ۲۵۰ ✓

$$\text{نرخ بیکاری (A)} = \frac{\text{تعداد افراد بیکار (x)}}{\text{تعداد افراد فعال (y)}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{x}{y} \times 100 \Rightarrow \frac{A}{100} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = 15A$$

$y = 1500$

$$\text{ایجاد n شغل} \Rightarrow \frac{A-5}{100} = \frac{x-12x}{y} \Rightarrow \frac{A-5}{100} = \frac{18x}{1500} \Rightarrow 15(A-5) = 18(15A)$$

$$\Rightarrow 15A - 75 = 12A \Rightarrow 3A = 75 \Rightarrow A = 25, \quad x = 15A = 225$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{25}{100} \right) = \frac{x'}{1200} \Rightarrow x' = 125 \Rightarrow 225 - k = 125 \Rightarrow k = 100$$

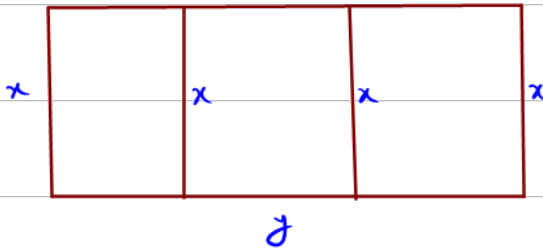
۱۵- سه نفر می خواهند زمین مستطیل شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

(۲) $S(x) = 190x - x^2$ و $0 < x < 95$

(۱) $S(x) = 95x - 2x^2$ و $0 < x < 47.5$ ✓

(۴) $S(x) = 190x - x^2$ و $0 < x < 47.5$

(۳) $S(x) = 95x - 2x^2$ و $0 < x < 95$



$\Rightarrow 2x + y = 190 \Rightarrow y = 190 - 2x$

$y > 0 \Rightarrow 190 - 2x > 0 \Rightarrow x < 95$

$x > 0 \Rightarrow 0 < x < 95$

$\Rightarrow S = xy = x(190 - 2x) = 190x - 2x^2$

۱۶- یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

(۴) ۵۴

(۳) ۸۴

(۲) ۱۰۸ ✓

(۱) ۱۶۸

فرضی ورودی $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$ حسن

فرضی خروجی $\Rightarrow 3 \times 3 = 9$ حسن

$6 \times 9 = 108$

حسن برابر وارد شدن به پارکینگ ۲ انتخاب و خروجی ۳ انتخاب دارد. (چون نمی توانند از یک درب وارد شوند)

حسن برابر خارج شدن از پارکینگ ۳ انتخاب و ورودی نیز ۳ انتخاب دارد. (با توجه به اینکه درب ورودی و خروجی هم باید متفاوت باشد)

هر دو برابر خارج شدن ۳ انتخاب دارند.

۱۷- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

$\frac{1}{7}$ (۴)

$\frac{3}{7}$ (۳)

$\frac{10}{21}$ (۲)

$\frac{11}{21}$ (۱) ✓

برای حل سؤال باید حالت‌های زیر را در نظر گرفت:

(۳ دختر و دو والدین) یا (۲ دختر و دو والدین و یک پسر) یا (۳ دختر و یک والدین و یک پسر)

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{3} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{2} \times \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{3}{3}}{\binom{5}{5}} = \frac{2 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 3 + 1 \times 1}{21} = \frac{11}{21}$$

۱۸- جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ ، کدام است؟ []، علامت جزء صحیح است.

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲) ✓

۴ (۱)

$n=2 \Rightarrow a_2 = a_{2-1} + a_{2-0} = a_1 + a_2 = 2$

$n=3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1} + a_{3-1} = a_2 + a_2 = 2$

$n=5 \Rightarrow a_5 = a_{5-2} + a_{5-1} = 2$

$n=6 \Rightarrow a_6 = a_{6-2} + a_{6-1} = 2 + 2 = 4$

$n=7 \Rightarrow a_7 = a_{7-3} + a_{7-2} = 2 + 2 = 4$

$n=7 \Rightarrow a_7 = a_{7-3} + a_{7-2} = 2 + 2 = 4$

$n=8 \Rightarrow a_8 = a_{8-4} + a_{8-2} = 2 + 4 = 6$

۱۹- اگر دنباله‌های هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z} \right]$ کدام است؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴) ✓

حده $x, 3y, 5z \Rightarrow 4y = x + 5z$ حده $x, y, z \Rightarrow y^2 = xz$

$$\Rightarrow 4y^2 = x^2 + 10xz + 25z^2 \Rightarrow x^2 + 10xz + 25z^2 - 4xz = 0 \Rightarrow (x-2z)(x-15z) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2z & \text{حده} \\ x=15z \Rightarrow \frac{x}{z} = 15 \Rightarrow \left[\frac{x}{z} \right] = 15 \end{cases}$$

۲۰- نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار bk کدام است؟

۶ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ✓ ۱ (۴)

$$x=0 \Rightarrow f(0) = k + 4^{-b} \quad y=0 \Rightarrow 0 = k + 4^{ax-b} \Rightarrow k + \frac{4^{ax}}{4^b} = 0 \Rightarrow k + \frac{1}{4^b} = y \quad (1)$$

$$\Rightarrow k = -\frac{4^{ax}}{4^b} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -\frac{4^{ax}}{4^b} + \frac{1}{4^b} = y \Rightarrow 4^{ax} - 1 = -4^b y \Rightarrow 2^{2ax} + 2^{2b} y = 1$$

$$\Rightarrow 2^{2ax} + 2^{2b} y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{4a} + 2^{2b+1} = 1 \\ 2^{2b+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{4a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 2^{2b+1} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow k = -\frac{4^{ax}}{4^b} = -\frac{2^{\frac{1}{2} \times 2}}{2^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{2^{-\frac{1}{2}}} = -2 \quad (bk) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-4) = 2$$