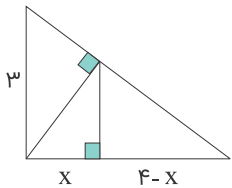


۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه  $x$  کدام است؟



(۱)  $1/96$

(۲)  $1/56$

(۳)  $1/64$

(۴)  $1/44$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۲ در ذوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۲)  $11/6$

(۱)  $11/5$

(۴)  $12/8$

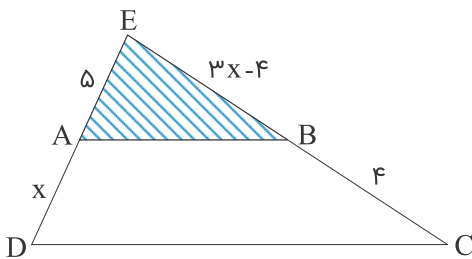
(۳)  $12/2$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در شکل زیر، مساحت ذوزنقه  $ABCD$ ، چندبرابر مساحت مثلث  $EAB$  است؟



(۱)  $\frac{9}{4}$

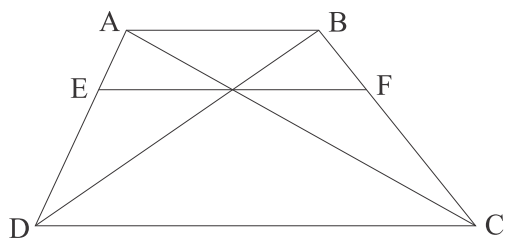
(۲)  $\frac{16}{9}$

(۳)  $\frac{25}{16}$

(۴)  $\frac{36}{25}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر،  $AB \parallel EF \parallel DC$  و اندازه پاره‌های  $AB$  و  $DC$ ، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره خط  $EF$ ، کدام است؟



(۱)  $\frac{۴۵}{۷}$

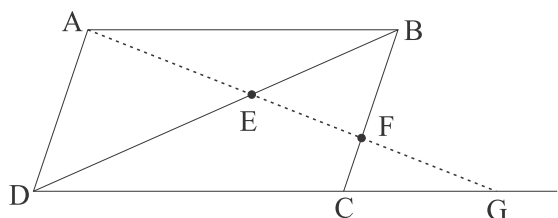
(۲)  $\frac{۴۵}{۶}$

(۳)  $۳\sqrt{۵}$

(۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر، چهار ضلعی  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است. مقدار  $EF \times EG$  کدام است؟



(۱)  $EA^2$

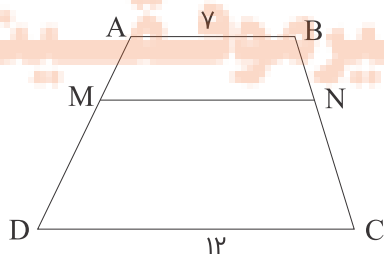
(۲)  $ED^2$

(۳)  $EB \times ED$

(۴)  $FB \times FC$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در دوزنقه  $ABCD$ ، پاره خط  $MN$  موازی قاعده‌ها و  $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$  است. اندازه  $MN$ ، کدام است؟



(۱) ۸

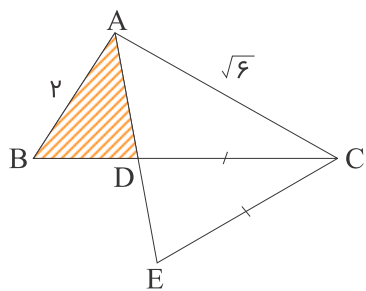
(۲)  $۸/۷۵$

(۳) ۹

(۴)  $۹/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

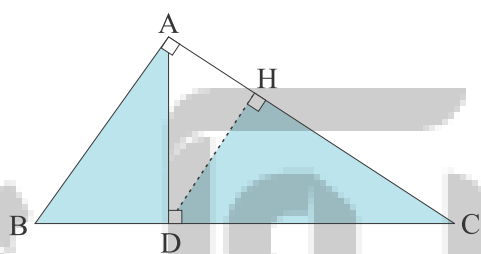
در شکل زیر،  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  و  $CE = CD$  است. نسبت مساحت‌های دو مثلث  $ABD$  و  $ACE$ ، کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3}$
- (۲)  $\frac{2}{3}$
- (۳)  $\frac{3}{4}$
- (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

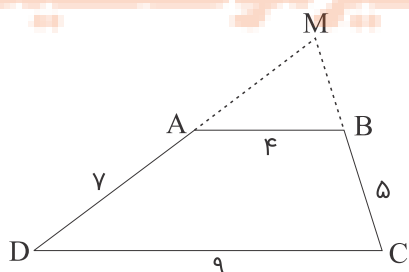
در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، طول اضلاع قائم  $AB = \sqrt{3}$  و  $AC = 2$  است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه  $HCD$  و  $ABD$ ، کدام است؟



- (۱)  $\frac{3}{7}$
- (۲)  $\frac{4}{7}$
- (۳)  $\frac{16}{21}$
- (۴)  $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

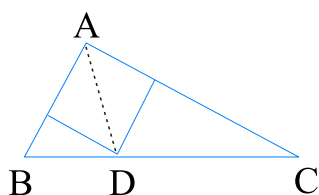
اندازه اضلاع دوزنقه  $ABCD$  مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث  $MAB$ ، کدام است؟



- (۱)  $13/2$
- (۲)  $13/6$
- (۳)  $14/4$
- (۴)  $14/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟



(۱)  $1/4\sqrt{2}$

(۲)  $2/1$

(۳)  $2/8$

(۴)  $2/1\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، اگر از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت  $\frac{OA}{OB}$  چگونه است؟

۱۱

(۲) مساوی ۱

(۱) کوچک‌تر از ۱

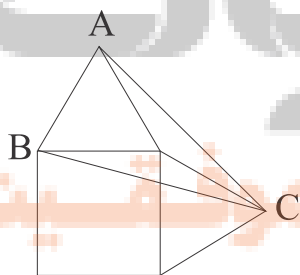
(۴) متغیر نسبت به اضلاع

(۳) بزرگ‌تر از ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱۲



(۱) ۴

(۲)  $2\sqrt{3}$

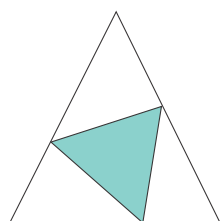
(۳)  $2 + \sqrt{3}$

(۴)  $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟

۱۳



(۱)  $\frac{1}{4}$

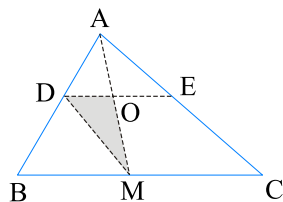
(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{4}{9}$

(۴)  $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

در شکل زیر، نقطه M وسط BC و  $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$  و  $DE \parallel BC$  است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

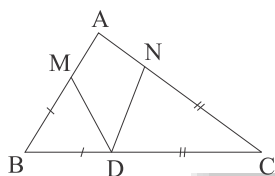
در شکل زیر  $\hat{A} = 58^\circ$ ،  $BM = BD$  و  $CN = CD$ ، زاویه MDN چند درجه است؟

(۱) ۵۸

(۲) ۵۹

(۳) ۶۱

(۴) ۶۲



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در یک دوزنقه متساوی الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه قاعده بزرگتر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه قاعده کوچکتر چند واحد است؟

(۱) ۲/۸

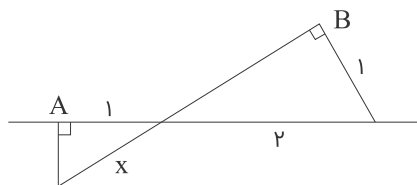
(۲) ۳/۲

(۳) ۳/۶

(۴) ۴/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر دو زاویه  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۲)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (۳)  $\frac{4}{3}$ (۴)  $\frac{3}{2}$ 

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در یک دوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های دوزنقه کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۴} \quad (۱)$$

$$\frac{۲}{۵} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

$$۱ \quad (۲)$$

$$۵/۷۵ \quad (۱)$$

$$۱/۵ \quad (۴)$$

$$۱/۲۵ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

$$۲۴\sqrt{۲} \quad (۲)$$

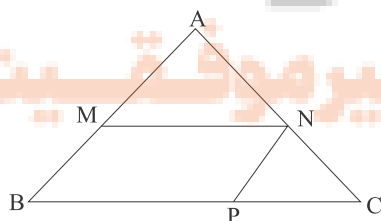
$$۳۲ \quad (۱)$$

$$۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$۲۴ + ۸\sqrt{۲} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

در شکل زیر  $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



$$۴۸ \quad (۱)$$

$$۵۲ \quad (۲)$$

$$۵۴ \quad (۳)$$

$$۵۶ \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

$$\frac{۴۵}{۷} \quad (۲)$$

$$\frac{۳۵}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۳۶}{۷} \quad (۱)$$

$$\frac{۳۶}{۵} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

مثلثی به اضلاع  $b$  و  $a$  و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

(۱)  $7/2$

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴)  $13/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر  $\frac{1}{5}$  مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

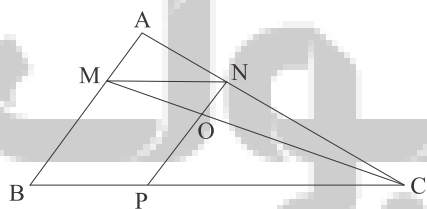
(۳)  $\frac{3}{4}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در شکل زیر  $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$  و چهار ضلعی  $MNPB$  متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث  $OMN$  چند درصد مساحت مثلث  $AMN$  است؟



(۱) ۶۳

(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در مثلث متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$ ،  $AB = AC = 4$  و  $BC = 2\sqrt{7}$  است. ضلع  $AC$  را به اندازه خود تا نقطه  $D$  امتداد می‌دهیم ( $AD = AC$ ). اندازه  $BD$  کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{10}$

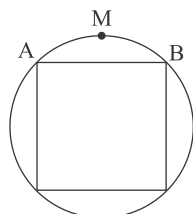
(۲)  $4\sqrt{2}$

(۳) ۶

(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصله وسط کمان  $AB$  از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



(۱)  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

$$4\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۵ \quad (۱)$$

$$۸ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH$  مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی  $۶/۷۶$  برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل  $H$  از دو ضلع قائم کدام است؟

$$\frac{۵}{۱۲} \quad (۲)$$

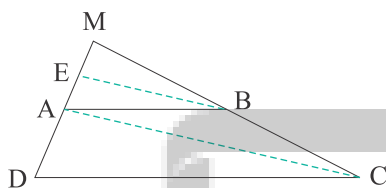
$$\frac{۲}{۸} \quad (۱)$$

$$\frac{۳}{۸} \quad (۴)$$

$$\frac{۷}{۱۲} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در دوزنقه  $ABCD$ ، پاره‌خط  $BE$  موازی قطر  $AC$  است. اگر  $AD = ۷$  و  $AE = ۳$  باشد، فاصله  $MD$  کدام است؟



$$۱۲ \quad (۱)$$

$$۱۲/۲۵ \quad (۲)$$

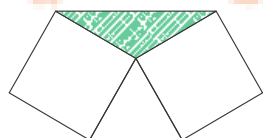
$$۱۲/۵ \quad (۳)$$

$$۱۲/۷۵ \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



$$\frac{\sqrt{3}}{۲} \quad (۱)$$

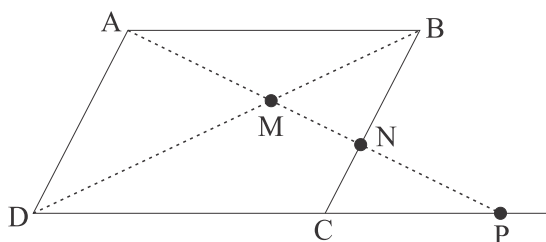
$$\frac{۲\sqrt{3}}{۳} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

در شکل زیر،  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل  $MN \times MP$  برابر کدام است؟



$$AB^۲ \quad (۱)$$

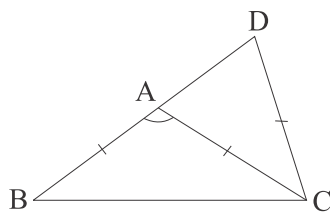
$$AD^۲ \quad (۲)$$

$$MD^۳ \quad (۳)$$

$$MA^۲ \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در مثلث متساوی الساقین  $(AB = AC)ABC$ ، ساق  $BA$  را از نقطه  $B$  به اندازه قاعده  $BC$  تا نقطه  $D$ ، امتداد می‌دهیم. اگر  $CD = CA$  باشد، زاویه  $A$  چند درجه است؟



(۱) ۱۰۲

(۲) ۱۰۵

(۳) ۱۰۸

(۴) ۱۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

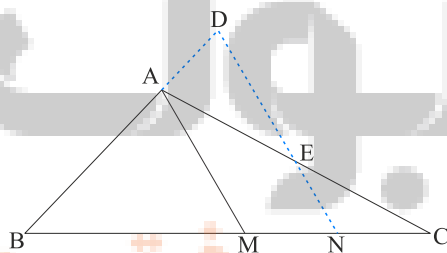
$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در مثلث  $ABC$  که  $AB = \frac{2}{3}AC$ ، پاره خط  $ND$  موازی میانه  $AM$  است. نسبت  $\frac{AD}{AE}$  کدام است؟



$$\frac{4}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۲)$$

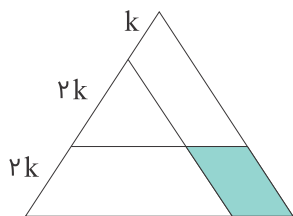
$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



(۱) ۱۶

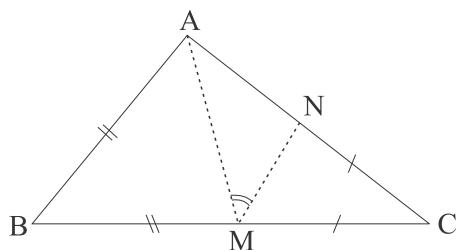
(۲) ۱۸

(۳) ۲۰

(۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی الساقین اند و  $\hat{M} = ۴۳^\circ$ ، اندازه زاویه  $\hat{BAC}$  چند درجه است؟



(۱) ۹۳

(۲) ۹۴

(۳) ۹۶

(۴) ۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در مثلث  $ABC$  داریم  $AB = AC$  و  $\hat{A} = ۸۰^\circ$ ، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده  $BC$  را در  $M$  و  $N$  قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث  $AMN$  چند درجه است؟

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در یک مکعب به طول یال  $۴\sqrt{۲}$ ، فاصله وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

(۲)  $۲\sqrt{۳}$ 

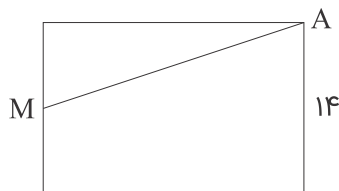
(۱) ۳

(۴)  $۳\sqrt{۲}$ 

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در شکل زیر، پاره خط  $AM$  مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های  $\frac{۵}{۹}$  تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط  $AM$  چند واحد است؟



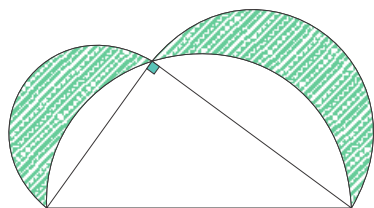
(۱) ۲۱

(۲) ۲۳

(۳)  $۹\sqrt{۷}$ (۴)  $۱۰\sqrt{۶}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در مثلث قائم‌الزاویه زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



(۱)  $2\pi$

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴)  $3\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

در مثلث متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$ ، قاعده  $BC$  را از دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط  $D$  و  $E$  امتداد می‌دهیم. در مثلث  $\triangle ADE$  کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

(۴) ۳

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

در چهار ضلعی محدب  $ABCD$ ، رابطه  $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$ ، چند درجه است؟

(۲) ۶۰

(۱) ۵۰

(۴) ۷۵

(۳) ۷۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در  $M$  قطع کند. فاصله نقطه  $M$  از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

(۲)  $4/5$

(۱) ۴

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

در مثلث  $ABC$ ، اضلاع  $AB = 4$  و  $AC = 6$  و  $BC = 7$  است. از رأس  $C$  خطی موازی میانه  $AM$  رسم شده و امتداد  $BA$  را در نقطه  $D$  قطع کرده است. اندازه  $BD$ ، کدام است؟

(۲) ۸

(۱)  $7/5$

(۴) ۹

(۳)  $8/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

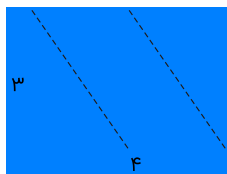
در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع  $\frac{2}{5}$  واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



(۱)  $\frac{5}{25}$   
(۲)  $\frac{5}{75}$   
(۳) ۶  
(۴)  $\frac{7}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

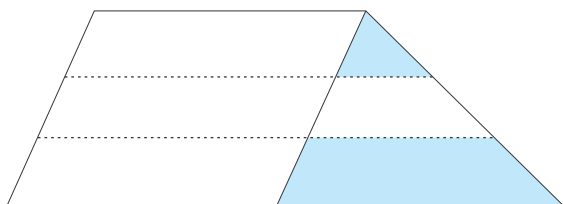
در مستطیلی به طول اضلاع  $2\sqrt{7}$  و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصله این دو خط عمود کدام است؟

(۱) ۱  
(۳)  $\frac{1}{75}$

(۲)  $\frac{1}{5}$   
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

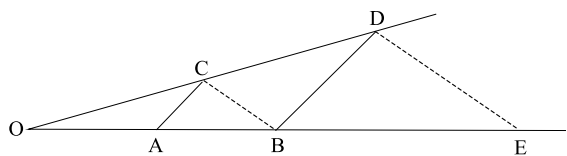
یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه رنگی، کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{6}$   
(۲)  $\frac{1}{5}$   
(۳)  $\frac{2}{9}$   
(۴)  $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

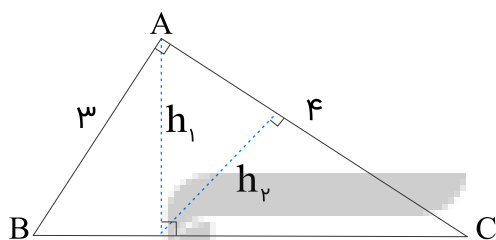
در شکل زیر، دو جفت پاره خط موازی اند.  $OA = ۳$  و  $AB = ۵$ ، اندازه  $BE$ ، کدام است؟



- (۱)  $۱۳\frac{۱}{۳}$   
 (۲)  $۱۲\frac{۲}{۳}$   
 (۳)  $۱۱\frac{۱}{۳}$   
 (۴)  $۱۰\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

در شکل زیر،  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع های دو مثلث قائم الزاویه هستند. نسبت  $\frac{h_2}{h_1}$  کدام است؟



- (۱)  $۳\frac{۳}{۵}$   
 (۲)  $۴\frac{۴}{۵}$   
 (۳)  $۵\frac{۲}{۳}$   
 (۴)  $۳\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در ذوزنقه ای با طول قاعده های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

(۲) ۲۰

(۴) ۲۸

(۱) ۱۸

(۳) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۲)  $۱۱\frac{۱}{۶}$

(۴)  $۱۲\frac{۱}{۸}$

(۱)  $۱۱\frac{۱}{۴}$

(۳)  $۱۲\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

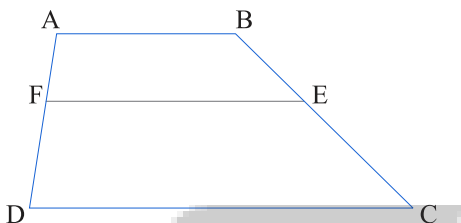
در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه  $\frac{۳}{۵}$  است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



- (۱)  $\frac{۳}{۴}$   
(۲)  $\frac{۷}{۸}$   
(۳)  $\frac{۱۴}{۱۵}$   
(۴)  $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در دوزنقه ABCD، قاعده بزرگ  $\frac{۵}{۲}$  قاعده کوچک است و  $AF = \frac{۱}{۴}AD$  و EF موازی قاعده است. نسبت  $\frac{EF}{CD}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{۱۱}{۲۰}$   
(۲)  $\frac{۷}{۱۵}$   
(۳)  $\frac{۸}{۱۵}$   
(۴)  $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در مثلث ABC، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا E و D امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

- (۱) کمتر از ۱  
(۲) بیشتر از ۱  
(۳) مساوی ۱  
(۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه کدام است؟

- (۱)  $\frac{۱}{۶}$   
(۲)  $\frac{۱}{۵}$   
(۳)  $\frac{۱}{۴}$   
(۴)  $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم  $AB = ۳\sqrt{۵}$  و  $AC = ۶$ ، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

- (۱) ۱۰  
(۲) ۱۲  
(۳) ۱۵  
(۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مستطیل ABCD به طول  $AB = ۱۷$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر  $BH = ۱۵$  باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

$$\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

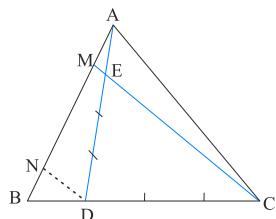
$$\frac{۳}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۱۵} \quad (۱)$$

$$\frac{۷}{۱۵} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در شکل زیر،  $BD = \frac{1}{4}BC$  و  $AE = \frac{1}{4}AD$  و  $DN \parallel CM$ . اندازه AB چندبرابر AM است؟



$$۴ \quad (۱)$$

$$۴/۵ \quad (۲)$$

$$۵ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۴)$$

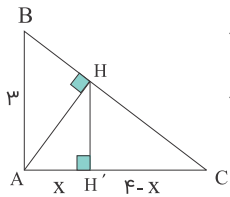
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷



گزینه ۴

۱

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم و داریم:



$$AC = AH' + CH' = 4 - x + x = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

اندازه  $AH$  را با استفاده از رابطه  $AH \times BC = AB \times AC$  به دست می آوریم. سپس اندازه  $AH'$  یا همان  $x$  را با استفاده از رابطه  $AH^2 = AH' \times AC$  در مثل  $AHC$ ، به دست می آوریم.

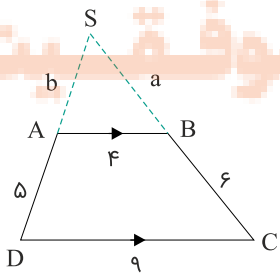
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$AH^2 = AH' \times AC \Rightarrow \frac{144}{25} = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$

گزینه ۴

۲

مطابق شکل، ساق های دوزنقه  $ABCD$  به طول اضلاع  $AB = 4$ ،  $CD = 9$ ،  $AD = 5$  و  $BC = 6$  را امتداد می دهیم تا همدیگر را در  $S$  قطع کنند.

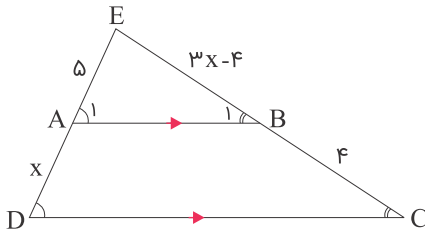


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/8 \end{cases}$$

$$SAB \text{ مثلث محیط} = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0 \xrightarrow{x>0} x = \frac{10}{3} (*)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}, \hat{B}_1 = \hat{C} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EDC$$

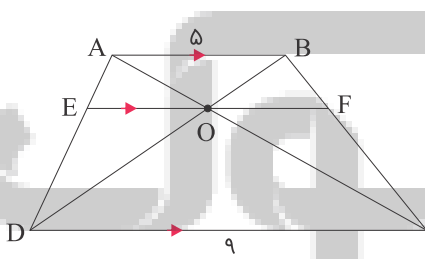
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle EDC}} = \left( \frac{EA}{ED} \right)^2 = \left( \frac{5}{5 + \frac{10}{3}} \right)^2 = \left( \frac{15}{25} \right)^2 = \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle EAB} = 9S, S_{\triangle EDC} = 25S \Rightarrow S_{ABCD} = 25S - 9S = 16S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{16S}{9S} = \frac{16}{9}$$

گزینه ۱

۴



$$\begin{cases} \triangle ADC : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{9} = \frac{AE}{14} \\ \triangle DAB : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{5} = \frac{DE}{14} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{9} + \frac{EO}{5} = \frac{AE + DE}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1 \xrightarrow{\times 45} 5EO + 9EO = 45$$

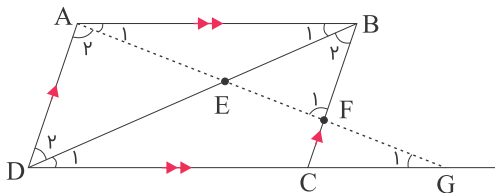
$$\Rightarrow 14EO = 45 \Rightarrow EO = \frac{45}{14}$$

$$\Rightarrow \text{به روش مشابه} \Rightarrow OF = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = \frac{45}{14} + \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و  $EF = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}}$ . (طول EF واسطه توافقی طول قاعده‌ها است)

گزینه ۱

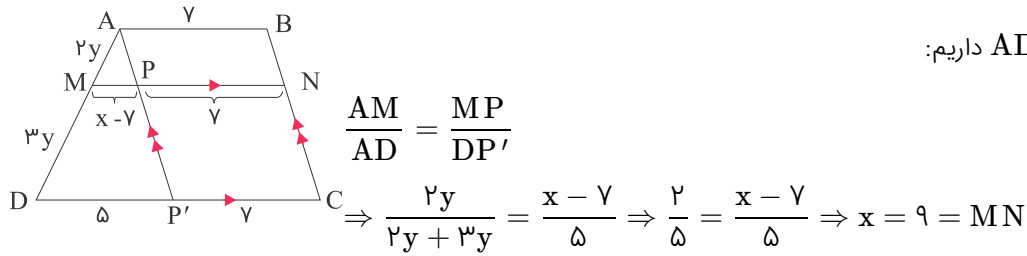
۵

چون  $AB \parallel DG$  و  $BC \parallel AD$ ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{G}_1, \hat{B}_1 = \hat{D}_1 &\Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EGD \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2, \hat{F}_1 = \hat{A}_2 &\Rightarrow \triangle EBF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$$

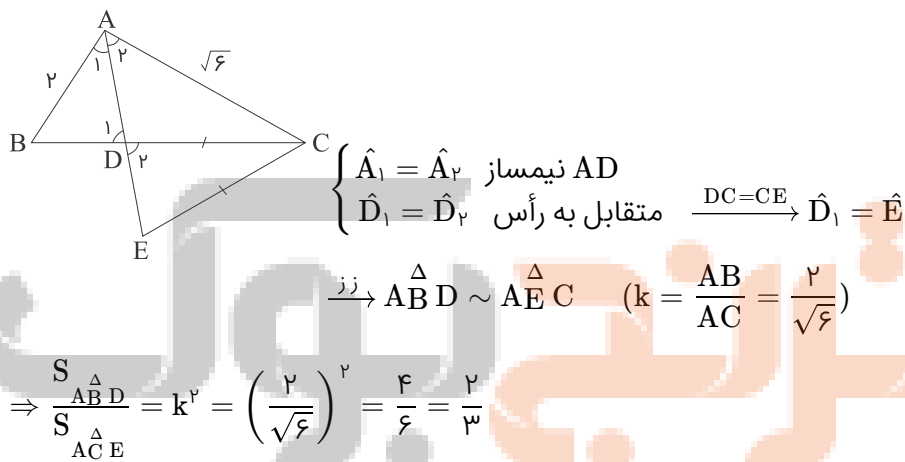
$$\Rightarrow EF \cdot EG = EA^2$$

در ذوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

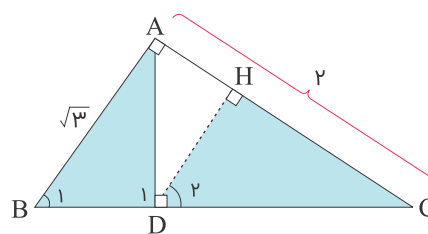


با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

طبق شکل داریم:



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث  $\triangle ABC$  داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 4 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث  $\triangle ABC$  نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{7} \times CD \Rightarrow CD = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

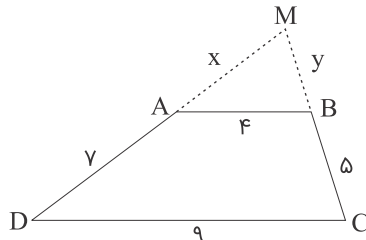
$$K = \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left( \frac{4}{\sqrt{21}} \right)^2 = \frac{16}{21}$$

می‌دانیم در ذوزنقه  $ABCD$ ، دو قاعده  $AB$  و  $DC$  باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث  $AMB$  و  $MDC$  متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\triangle AMB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \triangle AMB = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

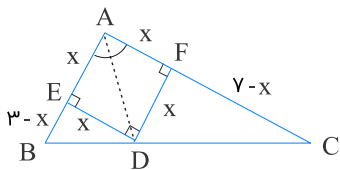
نقطه  $D$  روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس:  $DE = DF$

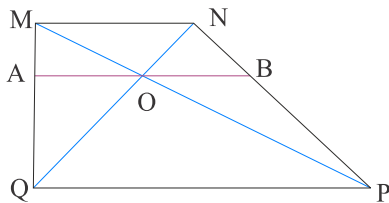
$\hat{A} = 90^\circ$  و  $DE = DF$ ، بنابراین چهار ضلعی  $AEDF$  مربع است. پس:  $AE \parallel FD$

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث  $ABC$ ، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{7-x}{7} \Rightarrow 7x = 21 - 3x \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = \frac{21}{10}\sqrt{2}$$





نکته: طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم  $\frac{AQ}{AM} = \frac{BP}{BN}$ ، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم:  $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$

باتوجه به تعمیم قضیه تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array} \right\} \xrightarrow{\div} \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_1 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

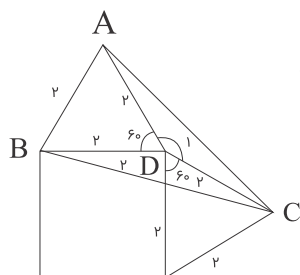


## گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی الاضلاع  $60^\circ$  است.

ب) مثلث  $\triangle ADC$  یک مثلث متساوی الساقین است. اندازه زاویه  $\hat{D}_1$  برابر است با:

$$\hat{D}_1 = 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - 210 = 150^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث  $\triangle ABC$ ، مساحت سه مثلث  $\triangle ABD$ ،  $\triangle BDC$  و  $\triangle ADC$  را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  از رابطه  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  به دست می‌آید.

## گام دوم

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث  $\triangle ADC$  و  $\triangle BDC$  را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مثلث  $\triangle ABD$  متساوی الاضلاع است و داریم:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$$

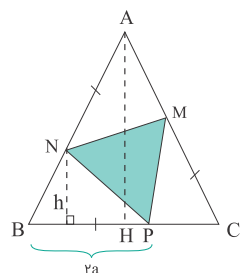
بنابراین مساحت مثلث  $\triangle ABC$  برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

## گام اول

الف) اندازه هر یک از سه قسمت مشخص شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر  $a$  و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر  $3a$  در نظر می‌گیریم. همچنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع‌های با اندازه  $2a$  را  $h$  فرض می‌کنیم.

ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیه تالس اندازه آن برابر  $3h$  به دست می‌آید (چون ارتفاع دو مثلث  $ABC$  و  $NBP$  موازی‌اند پس  $\frac{h}{AH} = \frac{a}{3a}$  در نتیجه  $AH = 3h$ ). پس می‌توان اندازه مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را بر حسب  $a$  و  $h$  تعیین و در نهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.



## گام دوم

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3h \times 3a}{2} = \frac{9ha}{2}$$

$$S_{\triangle BNP} = \frac{1}{2} \times h \times 2a = ha$$

$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle BNP} = \frac{9ha}{2} - 3ha = \frac{3ha}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3ha}{2}}{\frac{9ha}{2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}, \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

چون AM میانه نظیر ضلع BC است، پس:

در دو مثلث ABM و AMD، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

در دو مثلث ADM و ODM، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

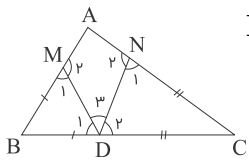
$$\frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}$$

با ضرب کردن سه رابطه فوق داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100}$$

## گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1 = \alpha, \quad CN = CD \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{N}_1 = \beta$$

ب)  $\hat{A} = 58^\circ$  است، بنابراین در مثلث  $\triangle ABC$  داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=58} 58 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} &= 180 - 58 = 122^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 122^\circ \quad (I) \end{aligned}$$

## گام دوم

دو مثلث  $\triangle BMD$  و  $\triangle CND$  را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید  $36^\circ$  باشد. با تعیین  $\alpha + \beta$  اندازه  $\hat{D}_3$  یا همان  $\triangle MDN$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \triangle CND : \hat{C} + 2\beta &= 180^\circ \\ \triangle BMD : \hat{B} + 2\alpha &= 180^\circ \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + 2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} 122^\circ + 2(\alpha + \beta) = 360^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 122^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 238^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{238^\circ}{2} = 119^\circ \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \triangle MDN = 180^\circ \\ \xrightarrow{(II)} 119^\circ + \triangle MDN &= 180^\circ \Rightarrow \triangle MDN = 61^\circ \end{aligned}$$

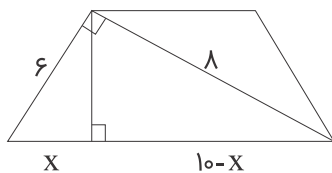
ازطرفی:

## گزینه ۱

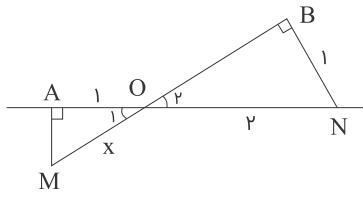
در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$6^2 = 10x \Rightarrow x = 3/5$$

$$\text{طول قاعده کوچک} = 10 - 2x = 10 - 7/5 = 2/5$$



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OBN داریم:

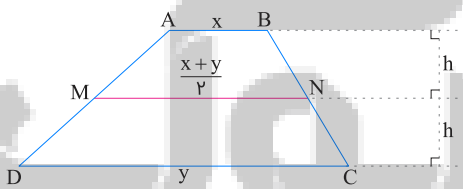


$$OB = \sqrt{ON^2 - BN^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ( $\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ). داریم:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

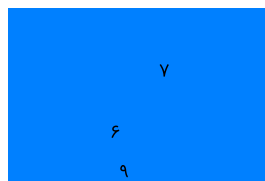
می‌دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.  
باتوجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left( x + \frac{x+y}{2} \right) (h)}{\frac{1}{2} \left( \frac{x+y}{2} + y \right) (h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آنها است؛ بنابراین داریم:

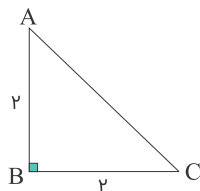
$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1/25$$



ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$  به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



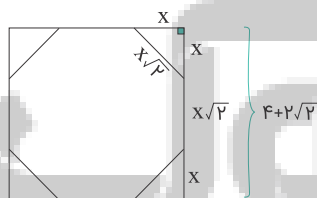
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه ضلع  $AC$  و سپس محیط مثلث  $\triangle ABC$  را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \text{ محیط مثلث} = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر  $4 + 2\sqrt{2}$  است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازه اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را  $x$  در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیه فیثاغورس برابر  $x\sqrt{2}$  می‌شود.



باتوجه به اینکه طول ضلع مربع برابر  $4 + 2\sqrt{2}$  است، مقدار  $x$  را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2$$

برای محاسبه مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (4 + 2\sqrt{2})^2$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (4 \times S_{\text{مثلث}}) = (4 + 2\sqrt{2})^2 - 8 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 - 8 = 16 + 16\sqrt{2}$$

## گام اول

الف) چهار ضلعی  $MNPB$  متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN \parallel BP \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$NP \parallel MB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle ABC$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

## گام دوم

طبق گام اول،  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$  است. با توجه به اینکه  $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ ، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA + MB} = \frac{1}{\frac{MA + MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{MA}{MB}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

چون  $MN \parallel BC$  است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle NPC \sim \triangle ABC$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN + NC} = \frac{1}{\frac{AN + NC}{NC}} = \frac{1}{\frac{NC}{AN} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle NPC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع  $MNPB$  را بر حسب مساحت مثلث  $\triangle ABC$  می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AMN} + S_{\triangle NPC} + S_{MNPB} \\ \Rightarrow S_{\triangle ABC} &= \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + S_{MNPB} \\ \Rightarrow S_{MNPB} &= \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{48}{100} S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث  $\triangle ABC$  است.

## گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

## گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و  $\frac{5}{9} = \frac{4}{7}$  و  $\frac{4}{7} = \frac{5}{9}$  است، دو ضلع به طول‌های  $a$  و  $b$  از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلع به طول  $a$  از مثلث اول یا با ضلع به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلع به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار  $a$  را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلع به طول  $a$  از مثلث اول با ضلع به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{9} = \frac{4}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{45}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{9} = \frac{4}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{36}{7}$$

حالت دوم: ضلع به طول  $a$  از مثلث اول با ضلع به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{7} = \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{28}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{7} = \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{35}{9}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین مقدار  $a = \frac{45}{9}$  است.

## گام اول

الف) دو مثلث قابل‌انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع  $a$  و  $b$  و ۳ را برابر ۳ در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را ۳ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر  $\frac{3}{3} = 1$  می‌شود و باید مقدار  $a$  و  $b$  برابر ۴ و ۵ باشد که در این صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث  $a$  یا  $b$  است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

## گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$3 + 4 + 5 = 12$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند  $\frac{3}{5}$  یا  $\frac{3}{4}$  باشد. اگر نسبت تشابه برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

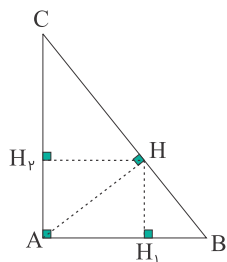
$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{4} = 3 \times 3 = 9$$

و اگر نسبت تشابه برابر  $\frac{3}{5}$  باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های  $ABH$  و  $ACH$  با هم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC) - S(\triangle ABH)} = \frac{1}{5-1} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ACH)} = \frac{1}{4}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه  $\frac{1}{4}$  و نسبت تشابه دو مثلث  $\frac{1}{2}$  است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است.

$$\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{1}{2} \text{ داریم}$$



چهار ضلعی  $MNPB$  متوازی الاضلاع است؛ بنابراین  $MN \parallel PB$  است. با استفاده از قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{7}{10}$$

همچنین  $NO \parallel AM$  است پس دو مثلث  $\triangle NOC$  و  $\triangle AMC$  نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{49}{100} \Rightarrow S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} S_{\triangle AMC} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle AMC$  را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{10} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} \times \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} = \frac{147}{1000} S_{\triangle ABC} \quad (III)$$

از طرفی چون  $MN \parallel BP$  است پس دو مثلث  $\triangle AMN$  و  $\triangle ABC$  متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

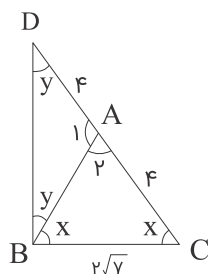
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{100} S_{\triangle ABC} \quad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{9}{100} - \frac{147}{1000}\right) S_{\triangle ABC}}{\frac{9}{100} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{63}{1000}}{\frac{9}{100}} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}$$

پس مساحت مثلث  $\triangle OMN$ ، ۷۰ درصد مساحت مثلث  $\triangle AMN$  است.

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle ABD$  متساوی‌الساقین هستند پس:

$$\hat{A}BC = \hat{A}CB = x, \quad \hat{A}BD = \hat{A}DB = y$$

زاویه  $\hat{A}_1$  زاویه خارجی مثلث  $\triangle ABC$  است و اندازه آن برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = 2x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر  $180^\circ$  است، داریم:

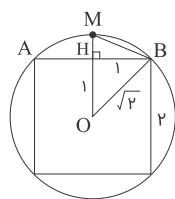
$$\hat{A}_1 + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2(x + y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث  $\triangle DBC$  در رأس  $B$  قائمه است و می‌توان اندازه ضلع  $BD$  را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = 4 + 4 = 8, \quad BC = 2\sqrt{7}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \Rightarrow 8^2 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 64 = BD^2 + 28$$

$$\Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$$



هدف محاسبه اندازه  $MB$  است. در مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle MHB$  داریم:

$$HB = 1, \quad MH = OM - OH$$

برای محاسبه  $MH$ ، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه فیثاغورس شعاع دایره را به دست آوریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM = OB = \sqrt{2} \Rightarrow MH = \sqrt{2} - 1$$

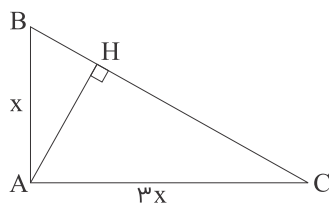
اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه  $MB$  را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 \Rightarrow MB^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

## گام اول

الف) طول اضلاع قائمه مثلث  $\triangle ABC$  را  $x$  و  $3x$  در نظر می‌گیریم.  
 ب) می‌دانیم: "ارتفاع  $\times$  قاعده  $\times \frac{1}{2}$  = مساحت مثلث"



## گام دوم

با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه  $BC$  را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث  $\triangle ABC$  برابر  $60$  واحد مربع است، مقدار  $x$  را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

می‌توان مساحت مثلث  $\triangle ABC$  را با تعریف  $BC$  و  $AH$  به ترتیب به عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 60$$

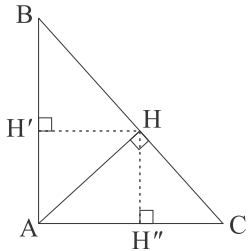
بنابراین:

$$\frac{1}{2} AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

الف) مثلث  $\triangle ABC$  قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض اینکه  $HC < HB$  باشد داریم:  $S_{\triangle ABC} = 6/76 S_{\triangle AHC}$

ج)  $HH' = ?$  و  $HH'' = ?$



سه مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle AHC$ ،  $\triangle AHB$  و  $\triangle ABC$  باهم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHC}} = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH} + S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle AHC}} = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} + 1 = 6/76 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} = 5/76$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث  $\triangle ABH$  و  $\triangle ACH$  باهم متشابه‌اند، داریم:

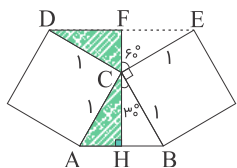
$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{5/76} = 2/4 \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{5}{12}$$

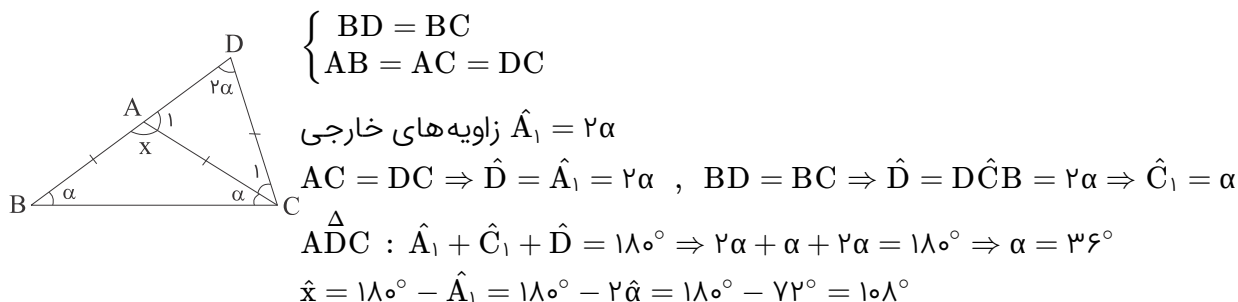
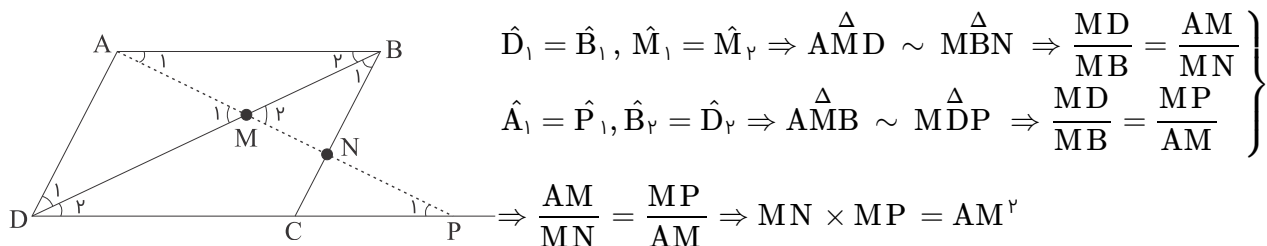
طبق قضیه تالس می‌توان نوشت  $(ME = x)$ :

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow x = 2/25$$

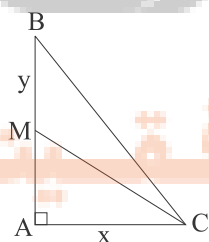
$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$$

باتوجه به شکل واضح است که مثلث‌های  $\triangle ACH$  و  $\triangle CDF$  همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث  $\triangle ABC$  دو برابر مساحت مثلث  $\triangle DCF$  و مساوی با مساحت مثلث  $\triangle DCE$  است.





مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle ABC$  را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش  $x$  و  $y$  ( $x < y$ ) باشد، رسم می‌کنیم.  $AB$  ضلع متوسط این مثلث و  $CM$  میانه وارد بر آن است. هدف محاسبه نسبت  $\frac{CM}{AB}$  است.



مساحت مثلث  $\triangle ABC$  برابر مساحت مربعی به طول ضلع  $x$  است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{2} = x^2 \Rightarrow xy = 2x^2 \xrightarrow{x,y>0} y = 2x \Rightarrow AB = 2x$$

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث  $\triangle AMC$ ، اندازه  $CM$  را به دست می‌آوریم:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 \Rightarrow CM^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}x$$

پس نسبت  $\frac{CM}{AB}$  برابر است با:

$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \\ \triangle ACM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

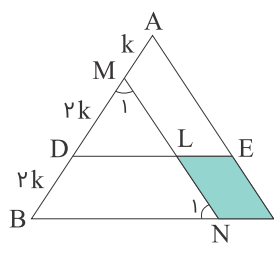
$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم:

مثلث  $\triangle ABC$  متساوی الاضلاع است؛ بنابراین:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

چون  $NLEC$  متوازی الاضلاع است، داریم:



$$MN \parallel AC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} = 60^\circ, \hat{N}_1 = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBN \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow BN = 2k$$

هر دو مثلث  $\triangle MBN$  و  $\triangle ABC$  متساوی الاضلاع هستند در نتیجه با هم متشابه اند. می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2k}{5k}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC}$$

همچنین

$$DL \parallel BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 60^\circ, \hat{L} = \hat{N}_1 = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDL \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow ML = 2k$$

به طریق مشابه ثابت می شود که  $\triangle ADE$  نیز متساوی الاضلاع و  $AE = 3k$  است؛ بنابراین دو مثلث  $\triangle MDL$  و  $\triangle MBN$  و دو مثلث  $\triangle MDL$  و  $\triangle ADE$  با هم متشابه اند و داریم:

$$\triangle MDL \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{2k}{2k}\right)^2 = 1 \Rightarrow S_{\triangle MDL} = \frac{1}{1} S_{\triangle MBN} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle MDL \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{4} S_{\triangle MDL} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با استفاده از نسبت های بالا، نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle MDL} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} - \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{25} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{LECN} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle BMN} + S_{AMLE}) = S_{\triangle ABC} - \left(\frac{4}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{5}{25} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{16}{25} S_{\triangle ABC} = 64\% S_{\triangle ABC}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث  $\triangle ABC$  است.

## گام اول

الف) مثلث  $\triangle MNC$  متساوی الساقین است، پس  $\angle NMC = \angle MCN$ .

ب) مثلث  $\triangle ABM$  متساوی الساقین است، پس  $\angle AMB = \angle BAM$ .

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

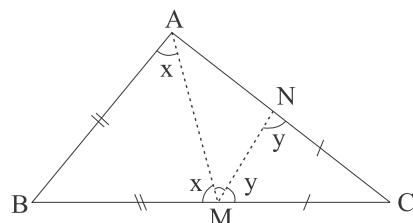
## گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم  $\hat{M}$  یک زاویه نیم‌صفحه است، داریم:

$$\angle AMB + \angle AMN + \angle NMC = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$

از طرفی:

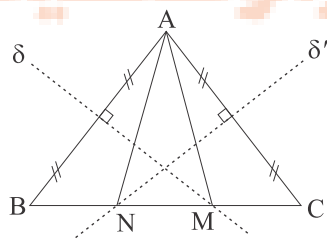


$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \hat{B} + 2x = 180^\circ \\ \triangle CNM : \hat{C} + 2y = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + 2x + \hat{C} + 2y = \hat{B} + \hat{C} + 2(x+y) = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BAC} = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\hat{A} = 10^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 85^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

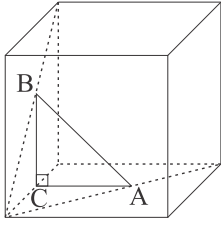
$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 85^\circ \Rightarrow \angle AMB = 10^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 85^\circ \Rightarrow \angle ANC = 10^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle MAN = 180^\circ - (\angle AMB + \angle ANC) = 20^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویه مثلث  $AMN$ ، زاویه  $\angle MAN = 20^\circ$  است.

همچنین در مثلث  $\triangle ABC$  داریم:

مکعبی به طول یال  $4\sqrt{2}$  به صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبه اندازه AB است.



اندازه AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس، اندازه AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 2(2\sqrt{2})^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

گزینه ۲

۴۰

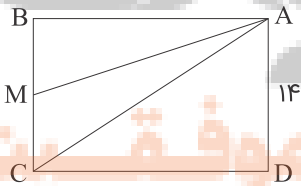
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{5}{9} \quad \text{ب)}$$

$$AM = ? \quad \text{ج)}$$

گام دوم



با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \xrightarrow[\text{AD}=14]{\text{AC}=25} 25^2 = 14^2 + CD^2 \\ \Rightarrow 625 = 196 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 625 - 196 = 429 \Rightarrow AB^2 = 429$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMCD}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

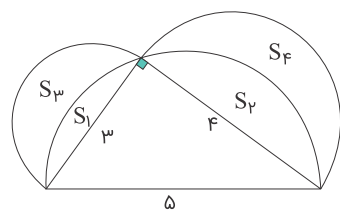
$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{2AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{BM}{28} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

رابطه فیثاغورس را برای مثلث  $\triangle ABM$  نوشته و اندازه AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow 429 + 100 = AM^2 \Rightarrow AM^2 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبه  $S_3 + S_4$  است. با استفاده از قضیه فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



داریم:

مساحت مثلث قائم‌الزاویه - مساحت نیم‌دایره به قطر ۵  $S_1 + S_2 = 5$

$S_3 + S_4 = (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳}) - (S_1 + S_2)$

بنابراین:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{25}{4}\right) - 6 = \frac{25\pi}{8} - 6$$

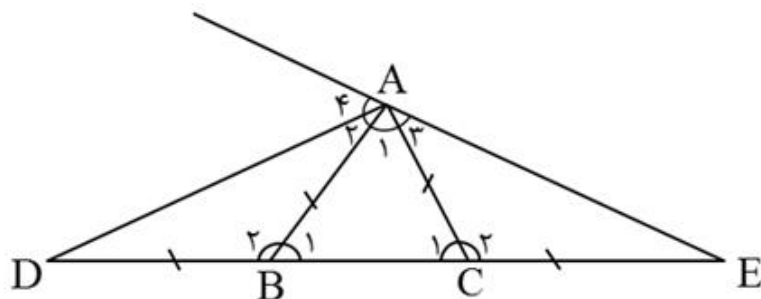
$$S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{25\pi}{8} - 6\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{\pi}{2} (4) - \frac{25\pi}{8} + 6 = \frac{25\pi}{8} - \frac{25\pi}{8} + 6 = 6$$



## گام اول

الف) مثلث  $\triangle ADE$  را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب)  $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویه خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویه داخلی است.

## گام دوم

مثلث  $\triangle ABC$  متساوی‌الساقین است؛ بنابراین  $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ ، در نتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی  $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$  است. از طرفی طبق قسمت (ب) از گام اول،  $CE = BD$  و  $AB = AC$  است؛ بنابراین دو مثلث  $\triangle ABD$  و  $\triangle ACE$  به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

در نتیجه زوایای  $\hat{D}$  و  $\hat{E}$  با هم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث  $\triangle ADE$  محسوب می‌شوند.

$$\triangle ABD \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

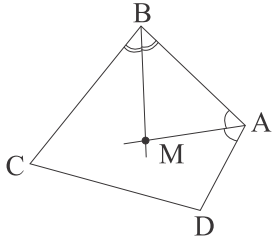
$\hat{A}_4$  کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث  $\triangle ADE$  است پس اندازه آن با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

$$\hat{A}_4 = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است.

$$\hat{A} = \frac{4}{3}\hat{B}, \quad \hat{C} + \hat{D} = \frac{11}{3}\hat{B}, \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\hat{B} + \hat{B} + \frac{11}{3}\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow 6\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$$



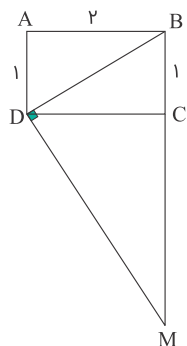
اگر M زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B باشد، داریم:

$$\hat{M} = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زاویه حاده} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$



راه حل اول: باتوجه به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



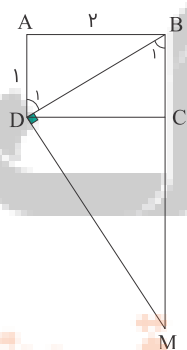
هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^2 = MB^2 \cdot BC^2 \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = MB^2 \times 1 \Rightarrow MB = 5$$

راه حل دوم:



هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

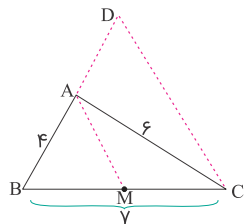
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle BAD$  و  $\triangle BDM$  متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{BDM} = 90^\circ \\ AD \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BDM$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

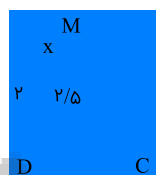
$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{MB} \Rightarrow MB = (\sqrt{5})^2 = 5$$



در مثلث BDC می‌دانیم  $AM \parallel CD$  است. به کمک رابطه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 8$$

مربع ABCD را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع  $2/5$  واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



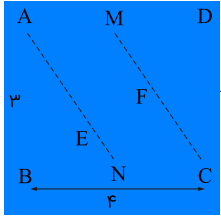
با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle DAM$ ، فاصله نقطه M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^2 + 2^2 = (2/5)^2 \Rightarrow AM^2 + 4 = 4/25 \Rightarrow AM^2 = 2/25$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2/25} = 1/5, \quad MB = 2 - 1/5 = 9/5$$

بنابراین فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر  $1/3 = 0/5$  است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:



$$\begin{aligned} \Delta ABD : BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow BD = 5 \end{aligned}$$

کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا  $DF = EB$ . همچنین قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE \times BD \Rightarrow 9 = BE \times 5 \Rightarrow BE = DF = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow EF &= 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} + \frac{7}{5}} = \frac{BN}{4} \Rightarrow BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

راه حل دوم:

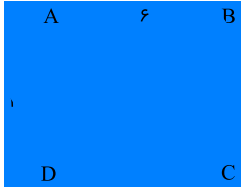
در شکل زیر تمام زوایای مشخص شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را  $\theta$  می‌نامیم.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  و همچنین در مثلث قائم‌الزاویه BCE داریم  $\tan \theta = \frac{x}{3}$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} &= \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = (4 - x) \times 3 = (4 - 2\frac{1}{4}) \times 3 \\ &= 1\frac{1}{4} \times 3 = 5\frac{1}{4} \end{aligned}$$

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 36 + 28 = 64 \Rightarrow BD = 8$$

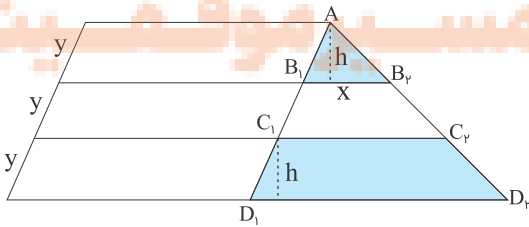
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\triangle ABD : AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow 28 = DE \times 8 \Rightarrow DE = \frac{28}{8} = 3.5$$

به طور مشابه  $BF = 3.5$  است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = 8 - 7 = 1$$

فرض کنید  $B_1B_2 = x$  باشد. در این صورت داریم:

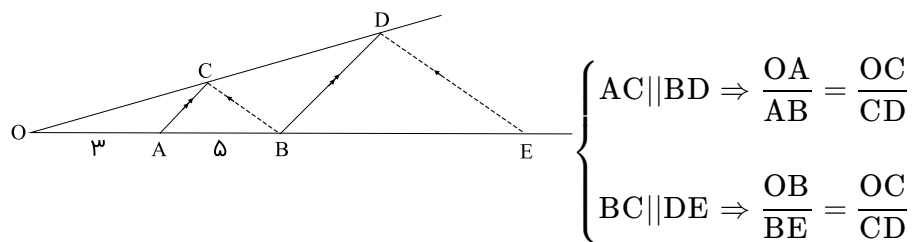


$$\triangle AC_1C_2 : \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow C_1C_2 = 2x$$

$$\triangle AD_1D_2 : \frac{AB_1}{AD_1} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow D_1D_2 = 3x$$

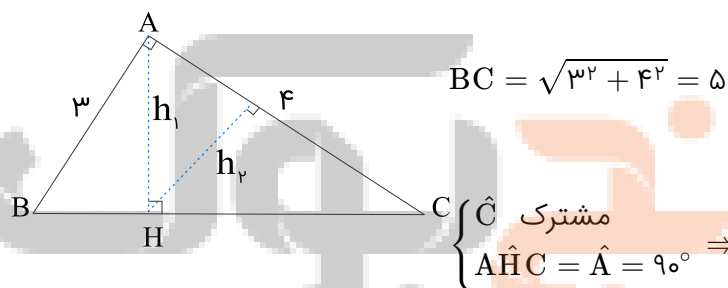
$$\frac{S_{AB_1B_2}}{S_{C_1C_2D_2D_1}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times h}{\frac{1}{2} (2x + 3x)h} = \frac{1}{5}$$

باتوجه به شکل و با کمک قضیه تالس داریم:



طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



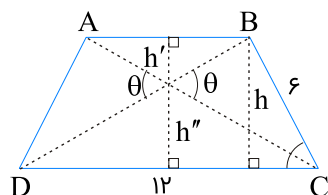
راه حل اول:

راه حل دوم:

$$\triangle ABC : \begin{cases} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5h_1 = 3 \times 4 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 16 = 5HC \Rightarrow HC = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

دو مثلث  $\triangle OAB$  و  $\triangle OCD$  باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow h'' = \frac{3}{2}h'$$

$$h' + h'' = 10 \Rightarrow h' + \frac{3}{2}h' = 10 \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow h'' = 6$$

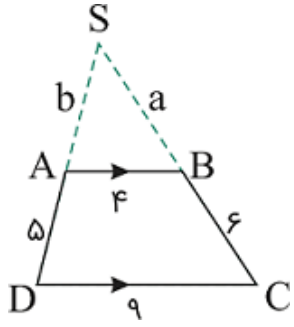
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD (*)$$

مساحت دو مثلث  $\triangle OBC$  و  $\triangle OAD$  باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \theta \\ S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} OA \times OD \times \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ODC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} \\ \Rightarrow \frac{(8 + 12) \times 10}{2} &= \frac{6 \times 12}{2} + \frac{4 \times 8}{2} + 2S_{\triangle OBC} \\ \Rightarrow 100 &= 36 + 16 + 2S_{\triangle OBC} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع  $AB = ۴$ ،  $CD = ۹$ ،  $AD = ۵$  و  $BC = ۶$  را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

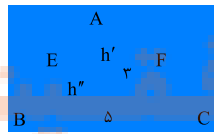


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \frac{a}{a+6} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث SAB} = ۴ + ۴/۵ + ۴ = ۱۲/۵$$



$$\frac{EF}{BC} = \frac{x}{y}$$

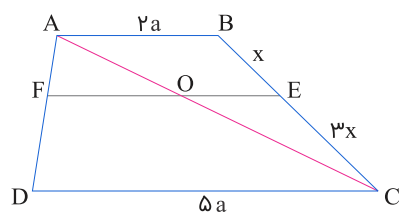
$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times h''}{\frac{1}{2} \times (3+5) \times h''} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{BCFE}} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{نسبت تشابه: } \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{9}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}$$

$$= \frac{S_{\triangle AEF}}{\frac{۲۵}{۹} S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEF}} = \frac{1}{\frac{۲۵}{۹} - 1} = \frac{1}{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{9}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{BCFE}} + \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{BCFE}} = \frac{3}{8} + \frac{9}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

رأس A را به C وصل می‌کنیم:

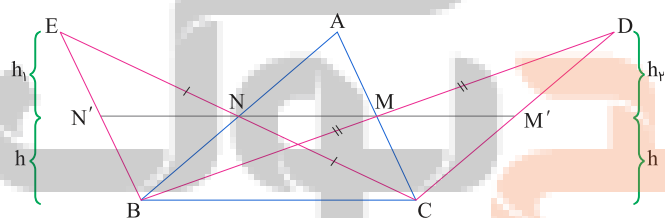


$$\triangle ADC : \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۴}a$$

$$\triangle ACD : \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{۵}{۴}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۱۱}{۴}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a} = \frac{۱۱}{۲۰}$$



مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

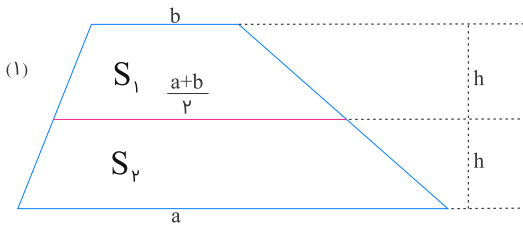
$$\triangle EBC : \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_1}{h + h_1} \Rightarrow ۲h_1 = h + h_1 \Rightarrow h_1 = h$$

$$\triangle DBC : \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_2}{h + h_2} \Rightarrow ۲h_2 = h + h_2 \Rightarrow h_2 = h$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

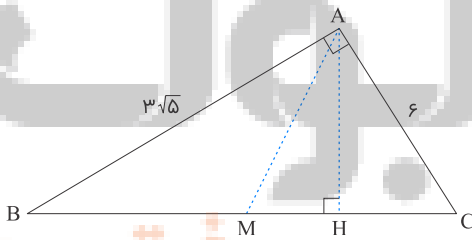
پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر  $\frac{a+b}{۲}$  است.



$$S_2 = ۲S_1 \Rightarrow \frac{1}{۲}h(a + \frac{a+b}{۲}) = ۲ \times \frac{1}{۲}h(b + \frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{۵}$$

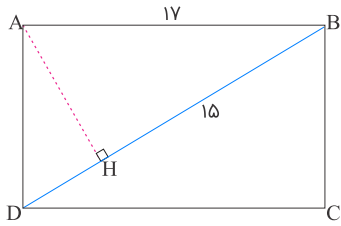


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{۶^2 + (۳\sqrt{۵})^2} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۹/۵$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{AH \times ۹}{AH \times \frac{۹}{۵}} = ۵$$



$$AB^2 = BH \times BD$$

$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

فرض کنیم  $AE = x$ ,  $ED = 3x$ ,  $BD = y$  و  $DC = 3y$ . داریم:

$$\triangle AND : ME \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow AM = z \text{ و } MN = 3z$$

$$\triangle BCM : DN \parallel CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{3z} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = z$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{z + 3z + z}{z} = \frac{5z}{z} = 5$$

۱ به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$  بالای محور  $x$  ها و مماس بر آن است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $-\frac{5}{2}$   
(۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲ در معادله درجه دوم  $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

- (۱)  $3/5$  (۲)  $4$   
(۳)  $4/5$  (۴)  $5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴  
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷  
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

۳ فاصله دو خط به معادلات  $y = \sqrt{3}x + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $2 - \sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3} - 1$   
(۳)  $\sqrt{3} + 1$  (۴)  $2 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴ کوچکترین دایره گذرا بر دو نقطه  $A(2, 5)$  و  $B(-4, 1)$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می کند؟

- (۱)  $1, -3$  (۲)  $0, -3$   
(۳)  $2, -1$  (۴)  $3, -2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، از معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$  دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می شود؟

- (۱)  $m \geq 1$  (۲)  $m < 2$   
(۳)  $1 \leq m < 2$  (۴) هیچ مقدار  $m$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶

نمودارهای دو تابع  $y = x + 7$  و  $y = |x - 2| + |x + 1|$ ، در دو نقطه  $A$  و  $B$  متقاطع هستند. اندازه پاره خط  $AB$ ، کدام است؟

(۱)  $8\sqrt{2}$

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳

(۴)  $10\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷

دایره‌ای به مرکز  $(3, 1)$  بر روی خط راست  $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول  $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور  $x$ ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

(۱)  $2\sqrt{6}$

(۲) ۶

(۳)  $2\sqrt{15}$

(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸

معادله درجه دوم  $2x^2 + mx + m + 6 = 0$  دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر  $m$ ، کدام است؟

(۱)  $(-4, 0)$

(۲)  $(-4, -2)$

(۳)  $(-6, 0)$

(۴)  $(-6, -4)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹

اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات  $y + 2x = 16$ ،  $y - x = 2$  و  $y = 0$  هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{5}$

(۲) ۵

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰

حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با ضلع‌های قائم  $AB$  و  $AC$ ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و  $2\sqrt{6}$  واحد، حول خط گذرا از رأس  $C$  و موازی ضلع  $AB$ ، کدام است؟

(۱)  $60\pi$

(۲)  $70\pi$

(۳)  $75\pi$

(۴)  $80\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۱

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{x} + 2$ ، کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

مثلی با رأس‌های  $A(1, 5)$ ,  $B(7, 3)$  و  $C(2, -2)$  مفروض است. اندازه ارتفاع  $AH$  در مثلث  $ABC$ ، کدام است؟

(۱) ۴ (۲)  $3\sqrt{2}$

(۳) ۵ (۴)  $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

معادله درجه دوم  $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{2}$  (۲) ۳

(۳) -۱ (۴)  $-\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$  از طرف بالا بر محور  $x$  مماس شده است، طول نقطه تماس کدام است؟

(۱) -۲ (۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه عددی بین دو ریشه معادله  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

(۱) ۳ (۲) -۳

(۳) ۴ (۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۴ (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  همواره در زیر محور  $x$ ‌هاست؟

(۱)  $m < -\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2} < m < 1$

(۳)  $1 < m < \frac{3}{2}$  (۴)  $m > \frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ ، محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

$$(1) \quad m > 2 \quad (2) \quad -1 < m < 2$$

$$(3) \quad \text{هر مقدار } m \quad (4) \quad \text{هیچ مقدار } m$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۹

فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$  از خط به معادله  $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1$$

$$(3) \quad \frac{3}{2} \quad (4) \quad 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰

در یک مکعب به طول یال  $a$ ، صفحه قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر  $a^2$  است؟

$$(1) \quad 5 + \sqrt{2} \quad (2) \quad 4 + 2\sqrt{2}$$

$$(3) \quad 5 + 2\sqrt{2} \quad (4) \quad 3 + 4\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام می‌باشد؟

$$(1) \quad 7/2 \quad (2) \quad 9/6$$

$$(3) \quad 11/4 \quad (4) \quad 12/8$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲

به ازای کدام مقدار  $a$  زاویه بین خط مماس بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله  $3x + 2y = a$  در نقطه تلاقی آن‌ها ۹۰ درجه است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3$$

$$(3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۳

نقطه  $(a, 2a)$  مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه  $(2, 1)$  و  $(-1, 4)$  است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 4$$

$$(3) \quad 2\sqrt{2} \quad (4) \quad 3\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۱۵

(۳) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله  $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$  یک دایره است؟

(۲)  $\{3\}$ (۱)  $\{-3\}$ (۴)  $\emptyset$ (۳)  $\{-3, 3\}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

در یک بیضی به اقطار  $2\sqrt{5}$  و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه  $M$  قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل  $M$  از دو کانون بیضی کدام است؟

(۲) ۱۶

(۱) ۱۲

(۴) ۲۰

(۳) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

بهروز یک مجله را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

(۲) ۳۳

(۱) ۳۲

(۴) ۳۶

(۳) ۳۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

منحنی توابع با ضابطه  $f(x) = -x^2 + bx + 3$  بر خط به معادله  $y = 7$  مماس اند، فاصله دو نقطه تماس کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

به ازای کدام مقدار  $a$  دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 3y = 0$  مماس است؟

(۲)  $\frac{5}{2}$ (۱)  $\frac{3}{2}$ 

(۴) ۵

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۰

اگر  $۲ = ۳a + \sqrt{۲a^۲ + ۴a}$  باشد، عدد  $\frac{a+۱}{a}$  کدام است؟

(۲) ۲/۵

(۱) ۱/۵

(۴) ۴/۵

(۳) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱

سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

(۲) ۱۵

(۱) ۱۲

(۴) ۲۵

(۳) ۲۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲

در یک بیضی به کانون‌های  $(۲, -۱)$  و  $(۲, ۷)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۲) ۰/۶۴

(۱) ۰/۶

(۴) ۰/۸

(۳) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳

اگر هر یک از ریشه‌های معادله  $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله  $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۲) -۱۲

(۱) -۱۴

(۴) -۶

(۳) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۴

دایره به مرکز  $(۲, ۰)$  و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله  $y = ۱$  را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۲) ۴ و ۰

(۱) ۳ و ۱

(۴)  $۲ + \sqrt{۲}$  و  $۲ - \sqrt{۲}$ (۳)  $\frac{۵}{۲}$  و  $\frac{۱}{۲}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۵

شعاع دایره‌ای که از دو نقطه  $(۰, ۰)$  و  $(۳, ۱)$  گذشته و مرکز آن روی خط به معادله  $y = ۲x$  باشد، کدام است؟

(۲)  $\sqrt{۵}$ (۱)  $۲\sqrt{۲}$ (۴)  $\sqrt{۱۳}$ (۳)  $\sqrt{۱۰}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$  و  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۲) مماس داخل

(۱) مماس خارج

(۴) متخارج

(۳) متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$  محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

(۲)  $a < -3$

(۱)  $a < -9$

(۴)  $-3 < a < 0$

(۳)  $a > -1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

دایره ای از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط به معادله  $y = 1$  مماس است. شعاع این دایره کدام می باشد؟

(۲)  $\sqrt{5}$

(۱)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۳

(۳)  $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-2, 1)$  می گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام می باشد؟

(۲)  $2\sqrt{2}$

(۱) ۲

(۴)  $3\sqrt{2}$

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

دایره ای از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

(۲) ۲

(۱)  $\sqrt{2}$

(۴) ۳

(۳)  $\sqrt{5}$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

نقطه  $A(7, 6)$  رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

(۲)  $(3, 4)$

(۱)  $(1, 5)$

(۴)  $(4, 3)$

(۳)  $(3, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

دایره‌ای از نقطه  $(۲, -۱)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

(۲) ۱۰

(۱) ۸

(۴) ۱۵

(۳) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانه آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر  $\pi$  است؟

(۲) ۲۱۲

(۱) ۲۰۸

(۴) ۲۱۷

(۳) ۲۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

به ازای کدام مقدار  $m$ ، خط به معادله  $y = mx + ۲$  بر دایره  $x^2 + y^2 - ۲x = ۳$  مماس است؟

(۲)  $\frac{۴}{۳}$  و ۰

(۱)  $-\frac{۴}{۳}$  و ۰

(۴)  $\frac{۲}{۳}$  و ۱

(۳)  $-\frac{۴}{۳}$  و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a - ۳)x^2 + ax - ۱$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۲)  $۰ < a \leq ۲$

(۱)  $a \leq ۲$

(۴)  $۰ < a < ۳$

(۳)  $۲ < a < ۳$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات  $(۲, ۱)$  و  $(-۲, ۴)$  و  $(۰, ۰)$  می‌گذرد، کدام است؟

(۲)  $۲/۵$

(۱) ۲

(۴)  $۳/۵$

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

(۲)  $۵ + ۲\sqrt{۳}$

(۱)  $۲ + \sqrt{۳}$

(۴)  $۷ + ۴\sqrt{۳}$

(۳)  $۵ + ۴\sqrt{۳}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر معادله  $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$  دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $m < -4$  (۲)  $m > 4$   
(۳)  $-4 < m < 4$  (۴)  $4 < m < 9$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$   
(۳)  $\frac{25}{8}$  (۴)  $\frac{25}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 - 3x - 10$  را حداقل چند واحد به طرف  $x$ ‌های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$ ‌ها غیرمنفی باشد؟

- (۱) ۱ (۲)  $1/5$   
(۳) ۲ (۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$ ‌ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

- (۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$  (۲)  $-2 < m < 1$   
(۳) فقط  $m < -2$  (۴) فقط  $m > 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

شعاع دایره به مرکز  $(-2, 2)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲) ۳  
(۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

از داخل یک استوانه قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- (۱)  $10/36\pi$  (۲)  $11/28\pi$   
(۳)  $12/56\pi$  (۴)  $13/44\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه  $(0, 0)$ ،  $(2, 1)$  و  $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

$$(1) \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$(2) \sqrt{3}$$

$$(3) \sqrt{5}$$

$$(4) \frac{\sqrt{13}}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

معادله سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$  و  $x = 1$  و  $y = 2x$  است. معادله خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

$$(1) y = \frac{2}{3}$$

$$(2) x = \frac{2}{3}$$

$$(3) y + x = \frac{2}{3}$$

$$(4) y + x = \frac{1}{3}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

نقطه  $A(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟

$$(1) 40$$

$$(2) 45$$

$$(3) 75$$

$$(4) 80$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$ ، کدام است؟

$$(1) 6$$

$$(2) 6/5$$

$$(3) 7$$

$$(4) 7/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

یک خط از دسته خطوط به معادله  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  بر خط گذرنده از دو نقطه  $A(2, -1)$  و  $B(8, 3)$  عمود است، معادله آن خط کدام است؟

$$(1) 2y + 3x = 4$$

$$(2) 2y + 3x = 1$$

$$(3) 2y - 3x = -5$$

$$(4) 3y - 2x = -5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه  $30^\circ$  درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر  $\pi$  است؟

$$(1) 24$$

$$(2) 32$$

$$(3) 36$$

$$(4) 40$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

(۲)  $38\pi$

(۱)  $36\pi$

(۴)  $40\pi$

(۳)  $39\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۱ سطح محدود به مستطیل  $5 \times 2$  و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط  $\Delta$  دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر  $\pi$  است؟



(۱) ۱۵

(۲)  $15/5$

(۳)  $16/5$

(۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۲ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) -۲

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۳ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

(۲) -۲

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۶۴ دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(۲) ۲

(۱)  $\sqrt{3}$

(۴) ۳

(۳)  $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۵ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر  $9\sqrt{2}$  است، اندازه قطر مکعب کدام است؟

(۲)  $3\sqrt{2}$

(۱)  $2\sqrt{3}$

(۴)  $3\sqrt{3}$

(۳)  $2\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم  $\frac{1}{8}x + (m+1)x - 2x^2 = 0$  برابر با ۲ است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

به ازای کدام مقدار  $a$  معادله درجه دوم  $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$  دارای دو ریشه مثبت است؟

(۲)  $2 < a < 5$

(۱)  $-2 < a < 2$

(۴)  $5 < a < 14$

(۳)  $2 < a < 14$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

دایره‌ای به مرکز  $(-1, 2)$  و مماس بر خط به معادله  $x - y = 1$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) ۱ و ۴

(۱) ۱ و ۳

(۴) ۱/۵ و ۴

(۳) ۲ و ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

دایره گذرا بر نقطه  $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

(۲) ۱ و ۵

(۱) ۱ و ۴

(۴) ۲ و ۵

(۳) ۲ و ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

فاصله نقطه  $M(x, y)$  از نقطه  $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط  $M$  کدام است؟

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۱)  $2\sqrt{3}$

(۴)  $4\sqrt{5}$

(۳)  $4\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

نقطه  $A(-1, 4)$  مرکز یک دایره است که بر روی خط  $2x - 3y + 1 = 0$  وتری به طول  $2\sqrt{7}$  جدا می‌کند. این دایره خط  $y = 2$  را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲)  $2, -4$

(۱)  $3, -5$

(۴)  $-1 \pm \sqrt{3}$

(۳)  $-1 \pm \sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

(۲)  $m < 0$

(۱)  $-1 < m < 0$

(۴)  $m > 8$

(۳)  $2 < m < 8$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

معادله  $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت  $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$  است؟

(۲)  $4x^2 - 3x + 1 = 0$

(۱)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$

(۴)  $4x^2 - 3x - 1 = 0$

(۳)  $4x^2 - 5x - 1 = 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $x(5x + 3) = 2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب های معادله  $4x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$  است؟

(۲) ۲۸

(۱) ۲۷

(۴) ۳۱

(۳) ۲۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

اگر  $2a + \sqrt{3a + 16} = 1$  باشد، عدد  $4a + 9$  کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) ۲۱

(۳) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پرنده ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

(۲) ۱۲/۵

(۱) ۱۲

(۴) ۱۵

(۳) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه های حقیقی معادله  $mx^2 + 3x + m^2 = 2$  معکوس یکدیگرند؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

نقطه  $M(2\sqrt{5}, b)$  مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات  $y = 2x$  و  $x = 2y$  مماس است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۲)  $1/5$

(۱) ۱

(۴)  $2/5$

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه  $A(6, 3)$  گذشته و بر خط به معادله  $y = 2x$  مماس شود، شعاع آن کدام است؟

(۲)  $\sqrt{6}$

(۱)  $\sqrt{5}$

(۴)  $\sqrt{10}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

دایره گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات  $y = 2x$  و  $y = 2x + 10$  مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

(۲)  $(-3, 1)$

(۱)  $(-3, 2)$

(۴)  $(-1, 2)$

(۳)  $(-2, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

دو دایره  $C$  و  $C'$  در نقطه  $(0, 1)$  مماس برون هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره  $C$  همواره از نقطه  $(2, -3)$  بگذرد، مرکز دایره  $C'$  با شعاع  $\sqrt{5}$  کدام است؟

(۲)  $(-1, 2)$

(۱)  $(-1, 3)$

(۴)  $(1, -1)$

(۳)  $(1, -2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

به ازای کدام مقدار  $a$ ، دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  مماس خارج یکدیگرند؟

(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

دایره  $C$  بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$  مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره  $C$  از نقطه  $(8, 7)$  می‌گذرد. شعاع دایره  $C$  کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

دو دایره گذرا بر نقطه  $(-9, 2)$  بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر، کدام است؟

(۲) ۱۵

(۱) ۱۴

(۴) ۱۹

(۳) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک چهارم داخل ۱۳۹۵

در یک مکعب صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{3}$ (۱)  $\frac{1}{4}$ (۴)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

دو نقطه بر خط به معادله  $y = x - 1$  قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله  $2x - 3y = 5$ ، برابر  $\sqrt{13}$  است. طول این دو نقطه، کدام می‌باشد؟

(۲) ۱۱ و ۱۵-

(۱) ۹ و ۱۵-

(۴) ۹- و ۱۱

(۳) ۱۵ و ۱۱-

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹  
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

دایره‌ای بر محور  $x$ ها و خط به معادله  $3x + 4y = 0$  مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور  $x$ ها با کدام طول است؟

(۲)  $\frac{1}{5}$ 

(۱) ۱

(۴)  $\frac{2}{5}$ 

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه  $A(-1, 0)$  و  $B(3, 0)$  و  $C(0, -3)$  می‌گذرد، کدام است؟

(۲) ۲

(۱)  $\sqrt{3}$ 

(۴) ۳

(۳)  $\sqrt{5}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$  و  $x^2 + y^2 + 2x = 1$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۲) مماس خارج

(۱) مماس داخل

(۴) متداخل

(۳) متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

دو دایره به معادله‌های  $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$  و  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$  نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

- (۱) مماس خارجی  
(۲) مماس داخلی  
(۳) متقاطع در دو نقطه  
(۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $m^2x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱)  $m < -6$   
(۲)  $m > 3$   
(۳)  $0 < m < 3$   
(۴)  $3 < m < 6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

- (۱) ۵/۴  
(۲) ۵/۵  
(۳) ۶/۵  
(۴) ۸/۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- (۱)  $x^2 - 3x + 1 = 0$   
(۲)  $x^2 + 3x + 1 = 0$   
(۳)  $x^2 - 5x + 2 = 0$   
(۴)  $x^2 + 5x + 2 = 0$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = (K + 3)x^2 - 4x + K$  برابر صفر باشد، مقدار  $K$  کدام است؟

- (۱) -۴  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

در معادله  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

- (۱) ۹  
(۲) ۱۰  
(۳) ۱۲  
(۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\sqrt{2}$  واسطه هندسی بین ریشه های حقیقی معادله  $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$  است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) ۳  
(۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

به ازای کدام مقدار  $m$ ، هریک از ریشه های معادله درجه دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه های معادله  $x^2 - x - 2 = 0$  است؟

- (۱) ۹  
(۲) ۱۱  
(۳) ۱۳  
(۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $2x^2 - 3x = 1$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب های معادله  $8x^2 + kx - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) ۷  
(۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ است؟

- (۱)  $-\frac{9}{5}$   
(۲) ۱  
(۳)  $1$  و  $-\frac{9}{5}$   
(۴)  $\frac{9}{5}$  و  $-1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

ریشه های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه های معادله  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  یک واحد بیشتر است،  $b$  کدام است؟

- (۱) -۵  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

ریشه های معادله درجه دوم  $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است،  $b$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم  $y = (a - 1)x^2 + x + 3$  نسبت به خط  $x = 2$  متقارن باشد، این منحنی محور  $x$  ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

اگر منحنی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

(۲)  $3 < m < 4$

(۱)  $m > 3$

(۴)  $4 < m < 5$

(۳)  $3 < m < 5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، از معادله  $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$  فقط یک جواب برای  $x$  حاصل می شود؟

(۲)  $0 < m < 2$

(۱)  $\frac{-3}{2} < m < 2$

(۴)  $2 < m < 3$

(۳)  $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸



گزینه ۳

۱

گام اول

الف) نمودار تابع درجه دو در صورتی بر محور  $x$  ها مماس می‌شود که ریشه مضاعف داشته باشد. در این صورت  $\Delta = 0$  خواهد بود.  
 ب) چون نمودار تابع بالای محور  $x$  ها قرار دارد و بر محور  $x$  ها مماس شده است، پس ضریب  $x^2$  مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$$

$$۱) \quad m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

$$۲) \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار  $m = \frac{5}{2}$  را به ما می‌دهد.

## گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادله  $2x^2 + ax + 9 = 0$  را برابر  $\alpha$  در نظر بگیریم، ریشه دیگر برابر  $2\alpha$  می‌شود.

## گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر  $\frac{c}{a} = \frac{9}{2}$  است. هریک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(2\alpha) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر  $\frac{3}{2}$  و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر  $4/5$  می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها  $\alpha$  و دیگری  $2\alpha$  است، پس داریم:

$$2x^2 + ax + 9 = (x - \alpha)(x - 2\alpha) = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{9}{2} = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -3\alpha, 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{3}{2}, 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{3}{2} + 3 = 4/5$$

## گام اول

نکته: فاصله دو خط موازی با معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow m_1 = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

شیب دو خط برابر با  $\sqrt{3}$  است؛ بنابراین دو خط موازی‌اند. اکنون باتوجه به گام اول، معادله دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم. دقت کنید که ضریب  $x$  و  $y$  در دو خط موازی باهم برابر باشند.

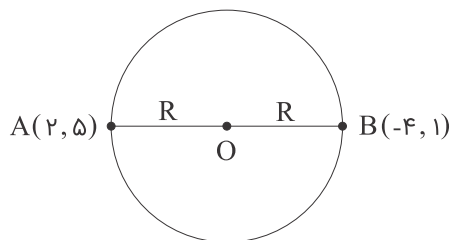
$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\div \sqrt{3}} y - \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$$

فاصله این دو خط موازی برابر است با:

$$d = \frac{|-2 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{|-2(1 + \sqrt{3})|}{\sqrt{4}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

کوچکترین دایره گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O \Rightarrow O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3) \text{ وسط } AB \text{ است.}$$

$$R = |OA| = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \text{دایره: } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور } x \text{ ها}} (x+1)^2 + (0-3)^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

الف) معادله را با تغییر متغیر  $\sqrt{x} = t$  به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

ب) برای این که معادله اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادله جدید دو ریشه مثبت داشته باشد. پس سه شرط  $\Delta > 0$ ،  $t_1 + t_2 > 0$  و  $t_1 t_2 > 0$  را برای معادله جدید بررسی می‌کنیم.

$$x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 4m < 8 \Rightarrow m < 2 \quad (I)$$

$$۲) t_1 t_2 > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (II)$$

$$۳) t_1 + t_2 > 0 \Rightarrow -(-\frac{2}{1}) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای  $m = 1$ ، معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$  به معادله  $x - 2\sqrt{x} = 0$  تبدیل می‌شود که دارای دو جواب  $x = 0$  و  $x = 4$  است. پس  $m = 1$  نیز قابل قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = 1 \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

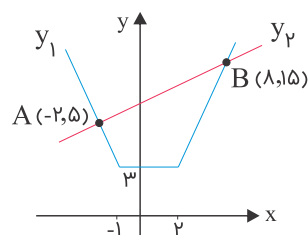
$$y_1 = |x - 2| + |x + 1|, \quad y_2 = x + 7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x + 2 - x - 1 & ; x \leq -1 \\ -x + 2 + x + 1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x - 2 + x + 1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع  $y_1$  و  $y_2$  را رسم می‌کنیم:

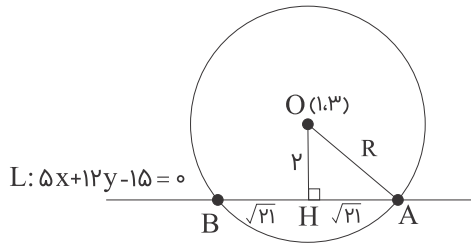
$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

از مرکز دایره بر خط  $L: 5x + 12y - 15 = 0$  عمود می‌کنیم، پس  $AH = HB = \sqrt{21}$  و داریم:



$$|OH| = \frac{|5(1) + 12(3) - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\triangle OHA: \text{فیتاغورس} \Rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{21})^2 = 25 \\ \Rightarrow \text{دایره: } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور  $x$  ها، مقدار  $y$  را در معادله دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \\ \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, x = 5 \\ \Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ ها: } (-3, 0), (5, 0) \\ \Rightarrow \text{طول پاره خط حاصل} = 5 - (-3) = 8$$

برای اینکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت باشد باید  $\Delta > 0$ ،  $p > 0$  و  $s > 0$  باشد، بنابراین داریم:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 2 \times (m+6) = m^2 - 8m - 48 > 0 \\ \Rightarrow \underbrace{(m-12)(m+4)}_p > 0$$

|      |                    |         |    |           |                    |
|------|--------------------|---------|----|-----------|--------------------|
| x    | $-\infty$          | -4      | 12 | $+\infty$ |                    |
| p(x) | $\frac{+}{\infty}$ | $\circ$ | -  | $\circ$   | $\frac{+}{\infty}$ |

$$\Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12$$

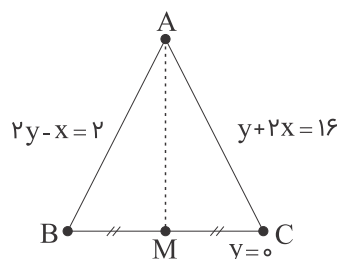
$$2) p > 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$3) s > 0 \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

حال از حدود  $m$  در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$m \in (-6, -4)$$

مثلت را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصله نقطه A از نقطه M را به دست آوریم:  
از تقاطع دو خط  $y + 2x = 16$  و  $2y - x = 2$  مختصات نقطه A به دست می‌آید.

$$2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x = 4 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow B(-2, 0)$$

$$y + 2x = 16 \xrightarrow{y=0} x = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

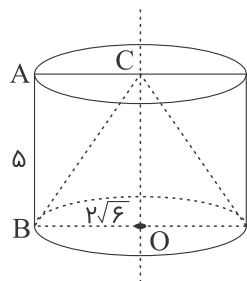
سپس مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

اکنون فاصله دو نقطه M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(3-6)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:

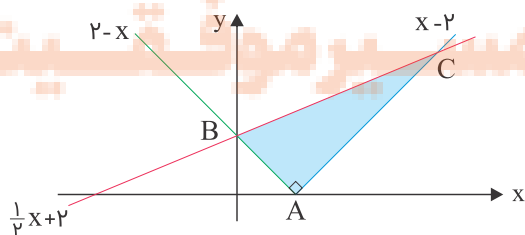


$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) \\ = \frac{2}{3}\pi(24)(5) = 160\pi$$

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$



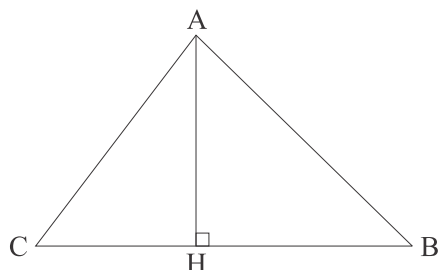
$$\begin{cases} A = (2, 0) \\ x-2 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C = (8, 2) \\ 2-x = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{10}}{2} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$$

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصله رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(7, 3), C(2, -2) \Rightarrow m = \frac{3 + 2}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه A(1, 5) از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$



می‌دانیم اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

طرفین وسطین  $\rightarrow -4m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید  $\Delta > 0$  باشد. حال مقدار  $m$  را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2+1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غ ق ق} \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین  $m = \frac{7}{2}$  است.

## گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور  $x$  ها مماس شده است، ضریب  $x^2$  مثبت است.  
 ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور  $x$  ها مماس است. بنابراین معادله  $f(x) = 0$  ریشه مضاعف داشته و  $\Delta = 0$  است.

## گام دوم

با مشخص شدن مقدار  $a$ ، معادله  $f(x) = 0$  را حل کرده و طول نقطه تماس یا همان ریشه مضاعف تابع را مشخص می کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$$

$$1) a > 0 \quad (I)$$

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow 4^2 - 4(a)(a-3) = 0 \Rightarrow 16 - 4(a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 4(a^2 - 3a) = 16 \Rightarrow a^2 - 3a = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : a = 4$$

با در نظر گرفتن  $a = 4$ ، ضابطه  $f(x)$  را بازنویسی کرده و معادله  $f(x) = 0$  را حل می کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3 \xrightarrow{a=4} f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

## گام اول

ریشه های معادله درجه دو را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می گیریم. چون  $\frac{1}{\lambda}$  واسطه عددی بین  $\alpha$  و  $\beta$  است، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda}$$

## گام دوم

در معادله درجه دو به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله باشند، در این صورت  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  است.

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \alpha + \beta = -\left(-\frac{3}{m^2 - 4}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{m^2 - 4} \text{ و } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

به ازای  $m = 4$  مقدار  $\Delta$  برای معادله منفی شده و در نتیجه معادله فاقد ریشه می شود، پس فقط  $m = -4$  قابل قبول است.

اول عبارت  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  را ساده می‌کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$  حاصل ضرب ریشه‌های معادله است و به راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{12}{4}) = 3 \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

پس حاصل  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$



برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم  $y = ax^2 + bx + c$  همواره پایین محور  $x$  ها باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) a < 0, \quad ۲) \Delta < 0$$

مجموعه جواب های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم.

$$y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

$$۱) a < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (I)$$

$$۲) \Delta < 0 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(m-1)m < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0$$

جدول تعیین علامت عبارت  $4m^2 - 4m - 3$  را تشکیل می دهیم:

$$4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله دوم به صورت زیر درمی آید:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل قبول برای  $m$  برابر است با:

$$(I) \cap (II) : m < -\frac{1}{2}$$

## گام اول

الف) منحنی محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار  $\Delta$  بزرگ‌تر از صفر است.  
 ب) منحنی در دو نقطه منفی محور  $x$  ها را قطع می‌کند بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها ( $S$ ) منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها ( $P$ ) مثبت است.

ج) در هر معادله درجه دو به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

## گام دوم

در معادله درجه دو داده شده داریم:

$$a = (m - 2), \quad b = -2(m + 1), \quad c = 12$$

حال هر سه شرط گفته شده را بررسی می‌کنیم:

$$I) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4(m - 2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m - 5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$II) S < 0 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{m - 2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$III) P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m - 2} > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک بین دو مجموعه جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی مورد نظر به ازای هیچ مقدار  $m$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

در آغاز معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

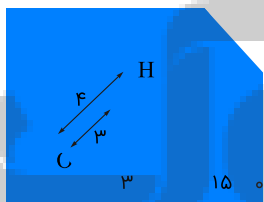
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$\Rightarrow R_{\text{شعاع}} = \sqrt{9} = 3, \quad O_{\text{مرکز}} = (1, -2)$$

فاصله هر نقطه مانند  $(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  که  $a^2 + b^2 \neq 0$  برابر است با  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  پس فاصله مرکز دایره  $O = (1, -2)$  تا خط  $3x + 4y - 15 = 0$  برابر است با:

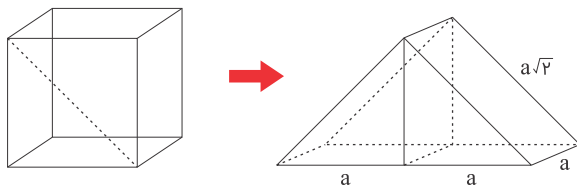
$$d = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

فاصله یک نقطه تا یک خط برابر با اندازه عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصله مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. از آنجاکه هر قطر دایره، در نقطه تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصله نقاط دایره تا خط موردنظر (شکل زیر) برابر می‌شود با  $d_{\min} = 4 - 3 = 1$ .



مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = 2(a \times a\sqrt{2} + a \times a + 2 \times \frac{a^2}{2}) = 2(a^2\sqrt{2} + 2a^2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$



## گام اول

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خطی با معادله استاندارد  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

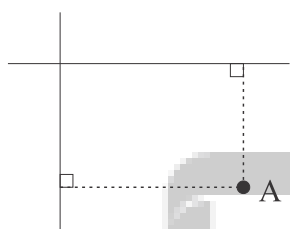
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## گام دوم

مختصات نقطه  $A(8, 5)$  در ضابطه هیچیک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$2(5) + 8 \neq 6, \quad 2(8) - 5 \neq 7$$

بنابراین نقطه  $A$  روی دو خط قرار ندارد و نقطه برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس  $A$  خواهد بود. اکنون با محاسبه فاصله نقطه  $A$  از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



$$2y + x = 6 \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

$$d_1 = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

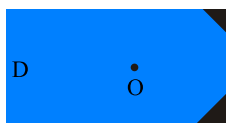
$$2x - y = 7 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$$

$$d_2 = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین  $d_1 = \frac{12}{\sqrt{5}}$  طول مستطیل و  $d_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$  عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}} = d_1 \times d_2 = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

باتوجه به آنکه خط به معادله  $3x + 2y = a$  بر خط مماس بر دایره عمود است، پس این خط قائم بر دایره بوده و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.



پس مختصات مرکز دایره در معادله خط صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -\frac{1}{2})$$

$$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را  $R$  می‌نامیم. با محاسبه فاصله نقطه  $(a, 2a)$  از هریک از نقاط  $(2, 1)$  و  $(-1, 4)$ ، ابتدا مقدار  $a$  و سپس مقدار  $R$  را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} \\ R &= \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 16a + 16$$

$$\Rightarrow -8a + 5 = -14a + 17 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

پس دایره‌ای به مرکز  $(2, 4)$  و شعاع ۳ داریم.

یک ریشه را  $\alpha$  و ریشه دیگر را  $\frac{\alpha}{2} + 5$  در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها مقدار  $\alpha$  و با استفاده از رابطه حاصل ضرب ریشه‌ها  $m$  را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 - 8x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (\frac{\alpha}{2} + 5) \text{ ریشه‌های}} \alpha + \frac{\alpha}{2} + 5 = -(-\frac{8}{1}) = 8 \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} + 5 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

مقدار  $m$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{2} + 5) = \frac{m}{1} = m \Rightarrow 2(1 + 5) = m \Rightarrow m = 2 \times 6 = 12$$

## گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز  $(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$  به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  است.  
 ب) معادله گسترده یک دایره به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است.

## گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب  $x^2$  و  $y^2$  باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر  $a$  را به گونه ای می یابیم که ضریب  $x^2$  و  $y^2$  باهم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

ازطرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار  $a = +2\sqrt{2}$  و  $a = -2\sqrt{2}$  را در معادله دایره جایگذاری می کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = 2\sqrt{2} : 2x^2 + (4 - 4\sqrt{2})y + 4y + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 8 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 6 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -3$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -2\sqrt{2} : 2x^2 + (4 - 4\sqrt{2})y + 4y - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 10 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 10 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

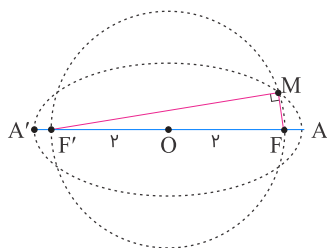
به ازای  $a = -2\sqrt{2}$ ، معادله دایره ای به مرکز  $(0, -1)$  و شعاع  $R = \sqrt{5}$  داریم.

باتوجه به معلومات سؤال، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} c = 2$$

پس  $OF = OF' = 2$  و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط  $F$  و  $F'$  روی دایره‌اند. پس  $FF'$  قطر دایره است و چون زاویه  $FMF'$  محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\Delta MF'F: \text{ فیثاغورس} \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$



اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند  $x$  ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند  $x + 9$  ساعت خواهد بود.

بهروز در یک ساعت  $\frac{1}{x}$  کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت  $\frac{1}{x+9}$  کل کار و هر دو باهم در یک ساعت  $\frac{1}{20}$  کل کار را انجام می‌دهند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} &= \frac{1}{20} \xrightarrow{\times 20x(x+9)} 20(x+9) + 20x = x(x+9) \\ \Rightarrow 20x + 180 + 20x &= x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \\ \Rightarrow (x - 36)(x + 5) &= 0 \xrightarrow{x > 0} x = 36 \end{aligned}$$

روش اول:

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه دو بر یک خط مماس باشد، معادله تلاقی خط و منحنی ریشه مضاعف دارد. پس معادله خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادله درجه دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس  $\Delta$  را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^2 + bx + 3 = 7 \Rightarrow -x^2 + bx - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - bx + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

به ازای هر کدام از مقادیر  $b$ ، نقطه تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=7} A(2, 7)$$

$$b = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{y=7} A(-2, 7)$$

بنابراین فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر است با:

$$AB = |2 - (-2)| = 4$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع  $f(x) = -x^2 + bx + 3$  در نقطه  $x = \frac{b}{2}$  یک ماکزیمم دارد و چون بر خط  $y = 7$  مماس است پس  $f(\frac{b}{2}) = 7$ .

فاصله دو نقطه تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله  $y = -x^2 + bx + 3$  است (دو مقدار برای  $b$  داریم).

$$f(\frac{b}{2}) = 7 \Rightarrow -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + 3 = 7 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

ماکزیمم دو تابع به معادله  $y = -x^2 + 4x + 3$  و  $y = -x^2 - 4x + 3$ ، به ترتیب نقاط  $(2, 7)$  و  $(-2, 7)$  است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|2 - (-2)| = 4$$

## گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادله گسترده دایره‌ای را به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  و شعاع آن برابر با  $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$  است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف خواهد داشت.

## گام دوم

روش اول:

باتوجه به گام اول، مرکز این دایره نقطه  $(1, -2)$  و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2 - a} = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$$

ازطرفی فاصله نقطه  $(1, -2)$  از خط  $x + 3y = 0$  برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{5 - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25 \\ \Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم:

باتوجه به قسمت (ج) از گام اول، باید معادله تلاقی خط و دایره، ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (I)$$

با جایگذاری رابطه I در معادله دایره، به یک معادله درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشه مضاعف دارد.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0 \\ \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a$$

$$\begin{cases} 2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3} \\ 2a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 2a(a+2) \geq 0 \Rightarrow a \in [0, +\infty) \cup (-\infty, -2] \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty, -2] \cup [0, \frac{2}{3}]$$

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان}} 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 7 \times 4 = 16(16 - 7) = 16 \times 9$$

$$a = \frac{16 \pm 12}{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{16 + 12}{14} = 2 \\ a_2 = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

بنابراین  $a = \frac{2}{7}$  قابل قبول است.

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازه سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت  $\frac{1200}{100+v}$  و زمان برگشت  $\frac{1200}{100-v}$  است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \xrightarrow{\div 5} 240 \left( \frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{240 \times 2v}{(100-v)(100+v)} = 1 \Rightarrow 100^2 - v^2 = 480v$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v-20)(v+500) = 0 \xrightarrow{v>0} v = 20$$

فاصلهٔ کانون‌های  $F(2, 7)$  و  $F'(2, -1)$  برابر  $2c$  است.

$$2c = |FF'| = |7 - (-1)| = 8 \Rightarrow c = 4$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

در بیضی رابطهٔ  $a^2 = b^2 + c^2$  برقرار است.

$$a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

## گام اول

الف) اگر ریشه‌های معادلهٔ  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض کنیم، آنگاه ریشه‌های معادلهٔ  $3x^2 + ax + b = 0$ ، برابر با  $\frac{2}{\alpha}$  و  $\frac{2}{\beta}$  است.

ب)  $\alpha + \beta$  و  $\alpha\beta$  را از معادلهٔ  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار  $a$  را در معادلهٔ دوم مشخص می‌کنیم.

## گام دوم

فرض کردیم  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادلهٔ  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  باشند. داریم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{7}{4} \\ \alpha\beta = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار  $a$  باید حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ دوم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} 3x^2 + ax + b = 0 &\xrightarrow{\frac{2}{\alpha} \text{ و } \frac{2}{\beta} \text{ ریشه‌ها}} \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3} \\ \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3} &\xrightarrow{(I)} \frac{2(\frac{7}{4})}{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = -14 \end{aligned}$$

## گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.  
 ب) معادله دایره‌ای به مرکز  $(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$  به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

## گام دوم

طبق قسمت الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصله نقطه  $(2, 0)$  از خط  $y = x$ ، پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0$$

$$R = \frac{|-2 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2$$

اکنون نقطه تلاقی دایره با خط  $y = 1$  را به دست می‌آوریم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط  $y = 1$  را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

## گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادله  $y = 2x$  قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره  $(\alpha, 2\alpha)$  باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را  $R$  می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هریک از نقاط  $(0, 0)$  و  $(1, 3)$  ابتدا مقدار  $\alpha$  و سپس مقدار  $R$  را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5\alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow 5\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز  $(1, 2)$  و شعاع  $\sqrt{5}$  داریم.

## گام اول

در یک دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

## گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار  $R_1 + R_2$  و  $|R_1 - R_2|$  مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = \lambda \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - \lambda = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{6}{1}\right) \Rightarrow O_1(1, -3)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 + \lambda} = \sqrt{1 + 9 + \lambda} = \sqrt{10 + \lambda} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + \lambda x - 4y + 12 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{\lambda}{1}, -\frac{-4}{1}\right) \Rightarrow O_2(-\lambda, 4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1}\right)^2 + \left(\frac{-4}{1}\right)^2 - 12} = \sqrt{16 + 4 - 12} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (4 + 3)^2} = \sqrt{16 + 49} = 5\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

چون  $O_1O_2 = R_1 + R_2$  است پس دو دایره مماس خارج هستند.

بنابراین داریم:

## گام اول

الف) نمودار تابع محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله  $f(x) = 0$  دارای دو ریشه بوده و  $\Delta > 0$  است.  
 ب) هر دو ریشه معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.  
 ج) مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$ ، اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

## گام دوم

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \quad (II)$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (III)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$  عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -9$$

## گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.  
 ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

## گام دوم

دو نقطه  $A(2, 0)$  و  $B(-2, 0)$  روی دایره قرار دارد بنابراین پاره خط  $AB$  وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط  $x = 0$  عمودمنصف پاره خط  $AB$  است؛ پس فرض می‌کنیم نقطه  $O(0, \alpha)$ ، مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط  $A$  و  $B$  و خط  $y = 1$  برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R = OA = \sqrt{(2-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{4 + \alpha^2}$$

$$y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{1^2}} = |\alpha - 1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + \alpha^2} = |\alpha - 1| \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow 4 + \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow -2\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - 1| = \left| \frac{3}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

## گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

## گام دوم

باتوجه به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطه  $(-2, 1)$  عبور می‌کند و باتوجه به قسمت الف) از گام اول، نقطه  $(-2, 1)$  همان مرکز دایره است. طبق قسمت ب) از گام اول، فاصله نقطه  $(-2, 1)$  از خط  $y = x - 1$  برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

$$R = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله  $x - y = 2$  قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به صورت  $\omega(\beta + 2, \beta)$  در نظر بگیریم. فاصله مرکز دایره از هر نقطه دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطه  $A(0, 1)$  و  $B(3, 0)$  بر این دایره واقع‌اند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + 2 - 0)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\beta + 2 - 3)^2 + (\beta - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\beta + 2)^2 + (\beta - 1)^2 = (\beta - 1)^2 + \beta^2 \Rightarrow (\beta + 2)^2 = \beta^2$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = \beta^2 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5}$$



## گام اول

اگر  $M$ ، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  باشد آنگاه داریم:

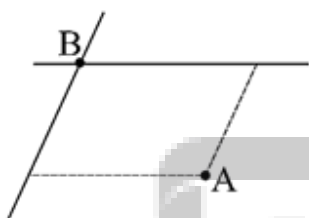
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

## گام دوم

مختصات نقطهٔ  $A(7, 6)$  در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$2(6) - 3(7) \neq 11 \quad , \quad 3(6) + 4(7) \neq 8$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس  $A$  در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

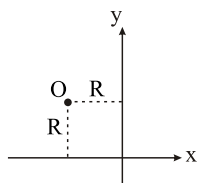
$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = 44 \\ 9y + 12x = 24 \end{cases} \xrightarrow{+} 17y = 68 \Rightarrow y = 4$$

$$2y - 3x = 11 \xrightarrow{y=4} 8 - 3x = 11 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 4)$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر  $AB$  برابر است با:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned} \Rightarrow M(3, 5)$$

باتوجه به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به طور کامل در یکی از چهار ناحیه مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطه  $(-1, 2)$  نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیه دوم قرار دارد، پس دایره موردنظر به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع  $R$  و به مرکز  $(-R, R)$  داریم. معادله این دایره برابر است با:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

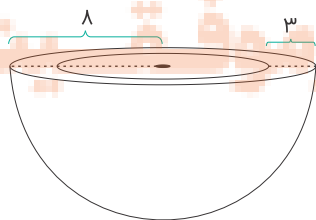
چون دایره از نقطه  $(-1, 2)$  عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=-1, y=2} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 &= R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \\ \Rightarrow R^2 - 6R + 5 &= 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R - 5 = 0 \Rightarrow R = 5 \\ R - 1 = 0 \Rightarrow R = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$2R = 2(5) = 10$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبه سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکره درونی، نیمکره بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایره دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکره بیرونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 64) = 2\pi \times 64 = 128\pi$$

$$S_{\text{نیمکره درونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 25) = 2\pi \times 25 = 50\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(64 - 25) = 39\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکره بیرونی}} + S_{\text{نیمکره درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = 128\pi + 50\pi + 39\pi = 217\pi$$

## گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

## گام دوم

داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2 + (mx + 2)^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4mx + 4 - 2x = 3 \\ \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 12m - 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

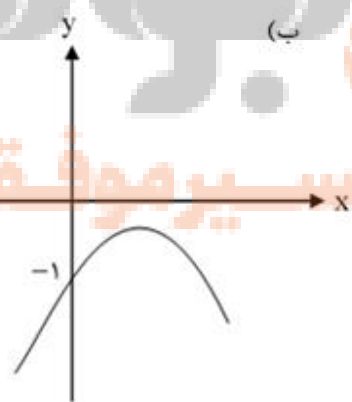
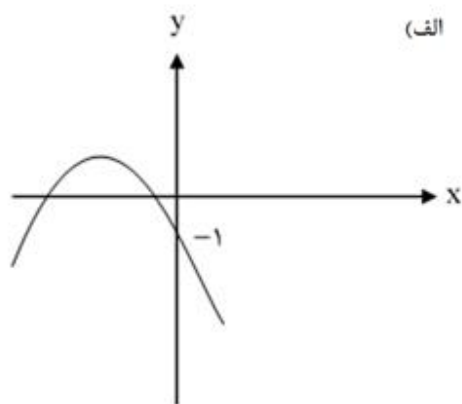


اولین شرط برای اینکه نمودار تابع  $y = ax^2 + bx + c$  از ناحیه اول عبور نکند این است که ضریب  $x^2$  یا همان  $a$  منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0, \quad S < 0, \quad \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که  $\Delta \leq 0$  باشد.

برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a - 3} < 0 \xrightarrow{a - 3 < 0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{II})$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \quad (\text{III})$$

(با توجه به اینکه  $0 < a - 3$ ، همواره برقرار است.)

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow a < -6$$

برای حالت (ب):

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a-3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

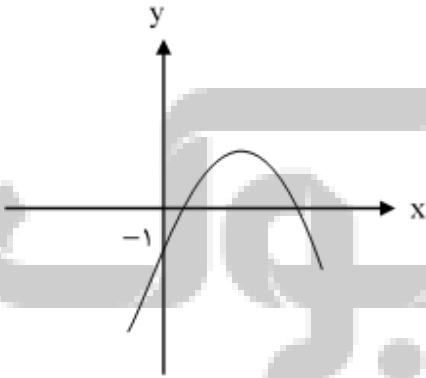
چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی گذرد داریم:

$$(-\infty, -6) \cup [-6, 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

با توجه به اینکه  $a < 3$  است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از  $a < 3$  کم می کنیم.

چون عرض از مبدأ  $-1$  است و  $a < 3$  پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{باید دو ریشه داشته باشد} \quad 1)$$

$$0 < \text{جمع ریشه ها} \quad 2)$$

$$0 < \text{ضرب ریشه ها} \quad 3)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (I)$$

$$0 < \text{جمع ریشه ها} \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (II)$$

$$0 < \text{ضرب ریشه ها} \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازه به دست آمده برای  $a$  تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از  $a < 3$  خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty, -3) - (2, 3) = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

معادله گسترده یک دایره به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

سه نقطه  $(2, 1)$ ،  $(-2, 4)$  و  $(0, 0)$  روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-2,4)} (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b + c = -20 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(0,0)} 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (III)$$

با جایگذاری  $c = 0$  در دو معادله I و II، به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می رسیم و آن را حل می کنیم.

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = -5 \xrightarrow{b=-5} 2a - 5 = -5 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$a_2, 2a_5, a_8$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1q^4 = \frac{a_1q + a_1q^7}{2} \Rightarrow 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگترین جمله است و در نتیجه  $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

گزینه ۲

۴۸

گام اول

الف) معادله درجه چهار را با تغییر متغیر  $x^2 = y$  به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادله درجه چهار داده شده دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، باید برای معادله درجه دو تشکیل شده داشته باشیم  $\Delta > 0$ .

ج) نکته دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل ضرب و هم حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.

گام دوم

$$x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - (m+2)y + m + 5 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (\text{I})$$

حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-\left(-\frac{(m+2)}{1}\right) > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (\text{II})$$

حاصل ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (\text{III})$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) : m > 4$$

## گام اول

فاصله دو خط موازی با معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c'' = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|c - c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## گام دوم

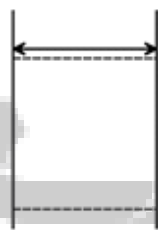
ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$2x - 2y = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{-2} = +1$$

$$y = x + 1 \Rightarrow m_2 = +1$$

دو خط داده‌شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصله این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.

برای محاسبه فاصله میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب  $x$  و  $y$  در دو خط موازی باهم برابر باشند.



$$2x - 2y = 3 \Rightarrow 2x - 2y - 3 = 0 \xrightarrow{\div (-2)} -x + y + \frac{3}{2} = 0$$

$$y = x + 1 \Rightarrow y - x - 1 = 0$$

$$d = \frac{\left| \frac{3}{2} - (-1) \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \frac{3}{2} + 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

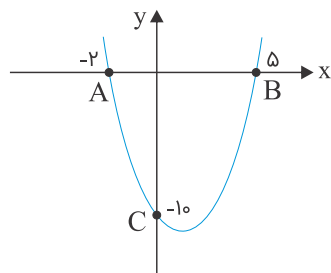
$$S_{\text{مربع}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{25}{4 \times 2} = \frac{25}{8}$$

$$y = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow y = (x - 5)(x + 2)$$

$$\xrightarrow{y=0} x = -2, x = 5$$

باتوجه به صفرهای تابع، نمودار تابع محور  $x$  ها را در نقاط  $A(-2, 0)$  و  $B(5, 0)$  قطع می‌کند. همچنین محور  $y$  ها را در نقطه  $C(0, -10)$  قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب  $x^2$ ، دهانه این سهمی روبه بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور  $x$  ها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به سمت  $x$  های مثبت انتقال دهیم.

این منحنی باید دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$

| $m$ | $-2$ | $1$ |
|-----|------|-----|
| $P$ | $-$  | $+$ |

تعریف نشده

$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد،  $\Delta > 0$  می‌شود.

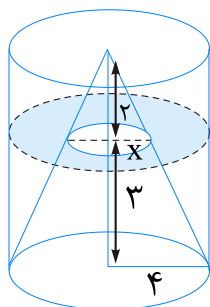
ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow O_1 : (1, -2), R_1 = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصله مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$



نسبت تشابه:  $\frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{16}{25}\pi$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (0,0)}$   $c = 0$

$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (2,1)}$   $4 + 1 + 2a + b = 0$

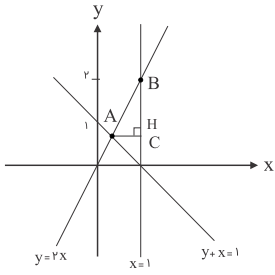
$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (1,-2)}$   $1 + 4 + a - 2b = 0$

اکنون با معلوم بودن مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} &\Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1 \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{r} \sqrt{10}$$

با رسم خطوط در یک دستگاه، مطابق شکل کوچک‌ترین ارتفاع مثلث  $ABC$  پاره خط  $AH$  است.



مختصات نقطه  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ارتفاع مثلث یعنی  $AH$  روی خط  $y = \frac{2}{3}$  قرار دارد.

فاصله نقطه  $A$  را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصله به دست آمده نصف اندازه ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{2 + 3 + 5}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2d = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow s = a^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$$

سه رأس داده شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{3}{2} \\ m_{BC} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC) \times (BC)}{2} \xrightarrow{AC=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}, BC=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}} S = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = 6\frac{1}{2}$$

## گام اول

الف) دو خط با شیب‌های  $m_1$  و  $m_2$  بر هم عمودند، هرگاه داشته باشیم:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ج) شیب خطی با معادله استاندارد  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b}$$

## گام دوم

شیب خط گذرنده از دو نقطه  $A(2, -1)$  و  $B(8, 3)$  برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{3 + 1}{6} = \frac{2}{3}$$

شیب خط انتخاب‌شده از میان دسته خطوط با معادله  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  برابر است با:

$$m' = -\frac{2k}{k+1}$$

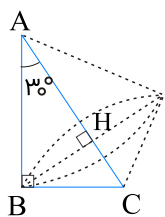
این دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2k}{k+1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{3k+3} = -1 \Rightarrow -4k = -3k - 3 \Rightarrow k = 3$$

به ازای  $k = 3$ ، معادله خط انتخاب‌شده به دست می‌آید.

$$(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0 \xrightarrow{k=3} 4y + 6x - 3 + 1 = 0 \Rightarrow 4y + 6x - 2 = 0 \Rightarrow 2(2y + 3x - 1) = 0 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  حول وتر  $AC$ ، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر  $(BH)$ ، شعاع قاعده این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = 8 \Rightarrow BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$BC^2 = AC \cdot CH \Rightarrow 16 = 8 \times CH$$

$$\Rightarrow CH = 2 \Rightarrow AH = 8 - 2 = 6$$

$$BH^2 = AH \cdot CH = 2 \times 6 = 12$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times CH \\ &= \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 + \frac{\pi}{3} \times 12 \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \end{aligned}$$

## گام اول

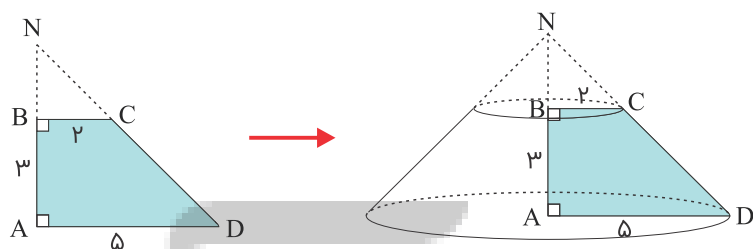
الف) در یک دوزنقه قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطه  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  به دست می‌آید که  $r$  شعاع قاعده و  $h$  ارتفاع آن است.

## گام دوم

دوزنقه  $ABCD$  را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع امتداد دو ضلع  $AB$  و  $CD$  را  $N$  می‌نامیم. دو مثلث  $\triangle NAD$  و  $\triangle NBC$  قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث  $\triangle NBC$  حول ضلع  $NB$  را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث  $\triangle NAD$  حول ضلع  $NA$  کم کنیم.



باتوجه به اینکه  $BC \parallel AD$  است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BN = 2BN + 6 \Rightarrow 3BN = 6 \Rightarrow BN = 2$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \triangle NAD} - V_{\text{دوران مثلث } \triangle NBC}$$

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 2 = \frac{1}{3}\pi(125 - 8) = \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

## گزینه ۲

باتوجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره به همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع  $\frac{3}{2}$  خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{4}\pi = 15\frac{1}{4}\pi$$

برای حل معادله داده شده از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$x^2 + 4x + 3 = t$$

حالا معادله جدید بر حسب  $t$  به صورت زیر درمی آید:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 3 + 2} \Rightarrow t = \sqrt{t + 2}$$

با حل معادله به دست آمده، مقدار  $t$  و در ادامه حاصل ضرب ریشه های معادله اصلی را محاسبه می کنیم.

$$t = \sqrt{t + 2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \\ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

اکنون معادله اصلی را حل می کنیم:

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1$$

$t = -1$  غیر قابل قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد.

برای حل ساده تر معادله، با تغییر متغیر  $x^2 + x = t$ ، معادله داده شده را به یک معادله درجه دو تبدیل می کنیم.

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 12 = 0 \Rightarrow t = 12 \\ t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \end{cases}$$

حال مقادیر  $x$  را محاسبه می کنیم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

مجموع ریشه های حقیقی معادله اولیه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 3 - 3 + 2 = -2$$

## گام اول

الف) دایره محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول  $x = 1$  و  $x = 3$  قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  روی دایره موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط  $y = x$ ) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت  $O(\alpha, \alpha)$  در نظر می‌گیریم.

## گام دوم

چون نقاط  $A$  و  $B$  روی دایره قرار دارند پس فاصله آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه  $O(2, 2)$  می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال  $a$  و صفحه قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع  $a$  و  $a\sqrt{2}$  است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازه  $a$  را محاسبه می‌کنیم.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب به طول یال  $a$  برابر  $a\sqrt{3}$  است (با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

گام اول

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله باشند، باید رابطه  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2$  برقرار باشد.

گام دوم

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{1}{16}$$

$$A = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m+1 = 7 \Rightarrow m = 6$$

گام اول

شرط اینکه معادله درجه دو دارای ۲ ریشه مثبت باشد، این است که:

$$۱) \Delta > 0 \quad ۲) S > 0 \quad ۳) P > 0$$

گام دوم

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(1)(14-a) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (a-2)^2 - (14-a) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (۱)$$

$$S > 0 \Rightarrow 2(a-2) > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (۲)$$

$$P > 0 \Rightarrow 14-a > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) : 5 < a < 14$$

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات  $(x_0, y_0)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

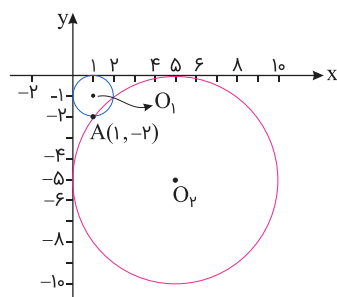
بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$R^2$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$





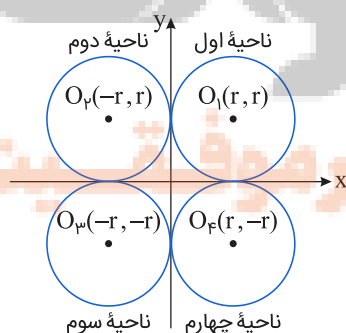
شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲ تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطه  $A(1, -2)$  می‌گذرند. به علاوه مرکز دایره‌ها به صورت  $O(r, -r)$  است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز  $O(r, -r)$  و شعاع  $r$  هستند. معادله آن‌ها به این صورت است:

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)(r - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

همان طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای  $r$  به دست آوردیم. نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به صورت زیر است:

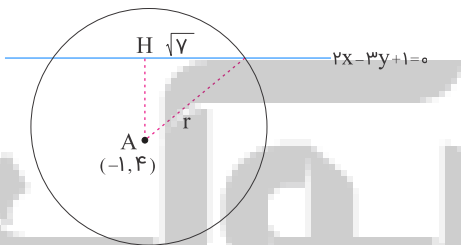


$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 &= 4x^2 + 4y^2 \\ \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 &= 0 \\ \xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 &= 0 \\ \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 &= 20 \Rightarrow O(-1, -2)\end{aligned}$$

معادله فوق، معادله یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2r = 4\sqrt{5}$$

فاصله مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^2 = AH^2 + \sqrt{7}^2 \Rightarrow r^2 = 13 + 7 = 20$$

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-4)^2 &= 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}\end{aligned}$$

شرط آنکه معادله درجه دومی، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد این است که  $\Delta > 0$ ،  $S = \frac{-b}{a} > 0$  و  $P = \frac{c}{a} > 0$  باشند.

$$x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-2)}{1} > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا  $-1 < m < 2$  به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی  $\Delta > 0$  نیست ولی ما شرط  $\Delta > 0$  را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک  $-1 < m < 2$  با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم:  $-1 < m < 0$

با فرض  $x^2 - 2x = t$  داریم:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشه حقیقی دارد.

ابتدا از روی معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، حاصل  $\alpha + \beta$  و  $\alpha\beta$  را به دست می آوریم. سپس حاصل  $\frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1$  و  $(\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1)$  را محاسبه می کنیم. اگر  $P$  و  $S$  مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله درجه دو باشند، آن معادله درجه دو به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  نوشته می شود.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$S$  و  $P$  را برای معادله جدید به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

ابتدا معادله  $x(5x + 3) = 2$  را به فرم استاندارد معادله درجه دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های آن است، مقدار  $\alpha + \beta$  و  $\alpha\beta$  را به دست می آوریم.

برای یافتن  $k$  باید حاصل  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$  را محاسبه کرده و برابر  $\frac{k}{4}$  قرار دهیم.

$$x(5x + 3) = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{5} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

مقدار  $k$  را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - kx + 25 &= 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2}} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{(-\frac{3}{5})^2 - 2(-\frac{2}{5})}{(-\frac{2}{5})^2} &= \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{29}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 29 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان}^2} 3a+16 = 1-4a+4a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \Rightarrow (4a+5)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} 1-2a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} \\ 3a+16 \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{16}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a \in \left[-\frac{16}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

پس  $a = 3$  در معادله اولیه صدق نمی‌کند، بنابراین  $a = -\frac{5}{4}$  است.

$$4a+9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right) + 9 = -5 + 9 = 4$$

گزینه ۴

۷۷

فرض کنید سرعت پرواز پرونده  $v$  باشد. در این صورت سرعت رفت  $v + 5$  و سرعت برگشت  $v - 5$  خواهد بود و داریم:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{v+5}$$

$$t_2 = \frac{x_2}{v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{v-5}$$

$$t_1 + t_2 = 9 \text{ (min)} = \frac{9}{60} \text{ (h)} \Rightarrow \frac{9}{60} = \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5}$$

$$\frac{9}{60} = \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} \xrightarrow{\times 60(v^2-25)} 3(v^2-25) = 20(v-5) + 20(v+5)$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 75 = 20v - 100 + 20v + 100$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v+5)(v-15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 15 & \checkmark \\ v = -\frac{5}{3} & \times \end{cases}$$

## گام اول

وقتی گفته می شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً  $\Delta$  در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

## گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد  $ax^2 + bx + c = 0$  در می آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار  $m$  هر دو شرط بیان شده را بررسی می کنیم.

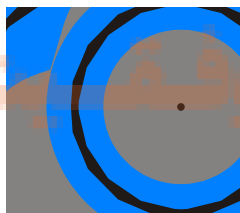
$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه } x_1 \text{ و } x_2} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط  $\Delta > 0$  فقط  $m = -1$  جواب قابل قبول است.

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد. باتوجه به شکل، مرکز دایره کوچکتر روی  $y = x$  و مرکز دایره بزرگتر روی  $y = -x$  قرار دارد.



$$M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط  $2y - x = 0$  است.

$$R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول است، پس مختصات آن به صورت  $(x, x)$  است. فاصله مرکز دایره از نقطه  $A(6, 3)$  و خط  $y = 2x$  یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x-3)^2} = \frac{|2x-x|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow (x-6)^2 + (x-3)^2 = \frac{x^2}{5} \Rightarrow 2x^2 - 18x + 45 = \frac{x^2}{5}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 90x + 225 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{شعاع دایره : } R = \frac{|x|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

چون دایره بر دو خط موازی  $y = 2x$  و  $y = 2x + 10$  مماس است؛ پس مرکز آن روی خط  $y = 2x + 5$  (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصله این دو خط است.

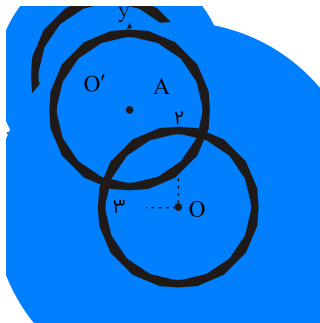
$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|10-0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله مبدأ از مرکز دایره برابر  $R$  است.

$$R = \sqrt{x^2 + (2x+5)^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{5x^2 + 20x + 25}$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) + 5 = 1$$

$$\text{مرکز دایره} = (-2, 1)$$



مطابق شکل، مراکز دو دایره مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره  $C'$  در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض  $O = (2, -3)$  و  $A = (0, 1)$  داریم:

$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

$$OA \text{ خط : معادله } y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه  $(-1, 3)$  در ناحیه دوم دستگاه مختصات است و در معادله خط  $OA$  صدق می‌کند. با فرض  $O' = (-1, 3)$  داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

دو دایره با مرکزهای  $O$  و  $O'$  و شعاع‌های  $R$  و  $R'$  مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم  $|OO'| = R + R'$ . در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O = (-2, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -2) \\ R' = \sqrt{5-a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = 5 \\ R + R' = 2 + \sqrt{5-a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} 5 = 2 + \sqrt{5-a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-a} = 3 \Rightarrow 5-a = 9 \Rightarrow a = -4$$

شعاع و مرکز دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  عبارت‌اند از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

مرکز :  $O'(2, -1)$  ، شعاع :  $R' = 3$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره  $C$  از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس  $O(2, -1)$  مرکز دایره  $C$  است.

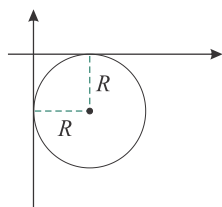
$$d = OO' = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-1)^2} = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 2 = R + 3 \Rightarrow R = -1$$

## گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع  $R$  که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطه  $(2, -9)$  نیز عبور کند به صورت زیر است:



ب) معادله دایره‌ای به مرکز  $(x_0, y_0)$  و به شعاع  $R$  برابر است با:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

## گام دوم

با توجه به شکل رسم شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر  $(R, -R)$  است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادله این دایره برابر است با:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

چون هر دو دایره از نقطه  $(2, -9)$  عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادله آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=2, y=-9} (2 - R)^2 + (-9 + R)^2 = R^2 \Rightarrow 4 - 4R + R^2 + 81 - 18R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 22R + 85 = 0 \Rightarrow (R - 17)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 17 \\ R = 5 \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر برابر ۱۷ است.

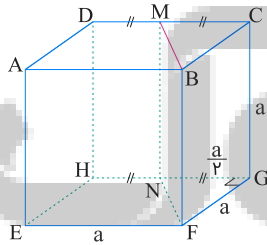
یال  $BF$  از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های  $AE, FG, EF, BC$  و  $CG$  باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از  $BF$  و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط  $DH$  باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از  $AB$  و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ  $M$  وسط یال  $CD$  است. (دقت کنید که برای یال‌های  $AD, EH, GH$  هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ  $M$  را به نقطهٔ  $N$  وسط  $HG$  وصل می‌کنیم. پس  $MN \parallel BF$  و در نتیجه صفحهٔ گذرنده از  $BF$  و  $M$  از نقطهٔ  $N$  هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را  $V_1$ ، حجم بزرگ‌تر را  $V_2$  و حجم مکعب را  $V$  فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\triangle GFN} \times CG = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



فاصلهٔ نقطهٔ  $A(x_0, y_0)$  از خطی با معادلهٔ استاندارد  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نقطهٔ فرضی  $A(\alpha, \alpha - 1)$  را روی خط  $y = x - 1$  در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ  $A$  از خط به معادلهٔ  $2x - 3y = 5$  برابر با  $\sqrt{13}$  باشد؛ بنابراین طبق گام اول داریم:

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow 2x - 3y - 5 = 0$$

$$\sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Rightarrow \sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{13}}$$

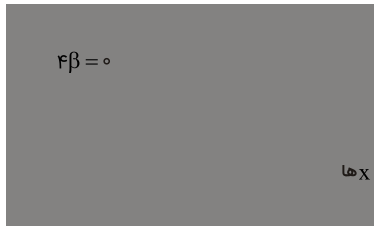
$$\Rightarrow 13 = |-\alpha - 2| \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2 = -13 \Rightarrow \alpha = 11 \\ -\alpha - 2 = 13 \Rightarrow \alpha = -15 \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه روی خط  $y = x - 1$  که فاصلهٔ آن‌ها از خط  $2x - 3y = 5$  برابر با  $\sqrt{13}$  باشد، دارای طول ۱۱ و ۱۵ است.

مرکز دایره را نقطه  $O(\alpha, \beta)$  در نظر می‌گیریم. باید فاصله  $O$  از محور  $x$  ها با فاصله آن از خط  $۳x + ۴y = ۰$  برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha + ۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳\alpha + ۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha + ۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha + ۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز : } O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز : } O(\alpha, -\frac{1}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیه اول است، پس فقط  $O(\alpha, ۳\alpha)$  قابل قبول است؛ بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$



## گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

## گام دوم

سه نقطه A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(3, 0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(0, -3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3a + c = -9 \\ a - c = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری  $c = -3$  در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

## گام اول

در یک دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

## گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار  $|R_1 - R_2|$  و  $R_1 + R_2$  مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{4}{1}\right) \Rightarrow O_1(1, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 + 13} = \sqrt{1 + 4 + 13} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین  $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$  است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

بنابراین داریم:

## گام اول

در یک دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مختصات مرکز دایره  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

## گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار  $R_1 + R_2$  و  $|R_1 - R_2|$  مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(2, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_2(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 19} = \sqrt{4 + 4 - 19} = 1$$

طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

همچنین داریم:

$$|R_1 - R_2| = |3 - 1| = 2$$

بنابراین  $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$  است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

برای اینکه تابع دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m - 6)(-3) > 0$$

$$4m^2 + 4(3m - 18) > 0$$

$$m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m + 6)(m - 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \text{یا} \\ m < -6 \end{cases}$$

$$۲) -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m - 6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6$$

$$۳) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

اشتراک جواب‌ها:  $3 < m < 6$

فرض کنید  $x$ ، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد. ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{کیلوگرم رنگ خالص} = 11 \times 40\% + 4 \times 70\% = 7/2$$

بنابراین در  $11 + 4 = 15$  کیلوگرم رنگ موجود،  $7/2$  کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر  $x$  میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15 - x} = 50\% = \frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow x = 0/6 \text{ کیلوگرم}$$

## گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت  $1 - \frac{1}{\alpha}$  و  $1 - \frac{1}{\beta}$  است.

## گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت  $1 - \frac{1}{\alpha}$  و  $1 - \frac{1}{\beta}$  است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

پس معادله به صورت زیر است:

## گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکسیمم باشد، باید ضریب  $x^2$  منفی شود.

## گام دوم

ضریب  $x^2$  منفی است پس:

$$K + 3 < 0 \Rightarrow K < -3$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکسیمم) برابر صفر است:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} = 0 &\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(K+3)K = 0 \\ \Rightarrow 16 = 4(K+3)K &\Rightarrow K(K+3) = 4 \Rightarrow K^2 + 3K - 4 = 0 \\ \Rightarrow (K+4)(K-1) = 0 &\xrightarrow{K < -3} K = -4 \end{aligned}$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه ها می انداختیم تنها گزینه ای که  $K < -3$  باشد، گزینه ۱ یعنی  $k = -4$  است.

## گزینه ۲

یک ریشه را  $\alpha$  و ریشه دیگر را  $3\alpha + 3$  در نظر می گیریم.  
با استفاده از حاصل جمع ریشه ها مقدار  $\alpha$  را محاسبه می کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه ها مقدار  $m$  را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 17x + m = 0 &\xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (3\alpha+3) \text{ ریشه های}} \alpha + (3\alpha + 3) = -\left(-\frac{17}{3}\right) \\ \Rightarrow 4\alpha + 3 = \frac{17}{3} &\Rightarrow 4\alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \\ 3\alpha + 3 = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

پس حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha \times (3\alpha + 3) = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow m = 10$$

$\alpha$  و  $\beta$  را ریشه های معادله درجه دو فرض می کنیم.  $\sqrt{2}$  واسطه هندسی بین  $\alpha$  و  $\beta$  است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{2})^2 = 2$$

در معادله درجه دو به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha\beta = 2} \alpha\beta = \frac{m^2 - 3}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} 2 = \frac{m^2 - 3}{m} \Rightarrow m^2 - 3 = 2m$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$m = 3: 3x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -1: -x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 8 > 0$$

پس فقط  $m = -1$  قابل قبول است.

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  را ریشه های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  در نظر بگیریم، داریم:

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

بنابراین  $\alpha^3$  و  $\beta^3$  ریشه های معادله درجه دوم  $\lambda x^2 - mx - \lambda = 0$  می شود:

$$\lambda x^2 - mx - \lambda = 0 \Rightarrow S' = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow m = 13$$

اگر فرض کنیم  $x_1 = \alpha\beta^2$  و  $x_2 = \alpha^2\beta$  ریشه‌های معادله  $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$  باشند آنگاه کافی است  $x_1 + x_2$  را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{\lambda} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow k = 6$$

## گام اول

الف) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم  $\alpha^2 + \beta^2 = 6$  است.  $\alpha^2 + \beta^2$  برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که  $\Delta > 0$  باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله فاقد ریشه است.

## گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای  $m = -\frac{9}{5}$  معادله دو ریشه حقیقی دارد.

## گام اول

الف) فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند پس می توانیم نتیجه بگیریم که  $(\alpha + 1)$  و  $(\beta + 1)$  ریشه های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$  هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار  $b$  باید حاصل ضرب ریشه های معادله یا همان  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$  را تعیین کنیم.

## گام دوم

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه ها}} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (I)$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه ها}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3} \xrightarrow{(I)} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$$

## گام اول

الف) ریشه های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض می کنیم. بنابراین ریشه های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  به صورت  $(\alpha + 1)$  و  $(\beta + 1)$  می شود.

ب) برای به دست آوردن  $b$  ، باید حاصل ضرب  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$  را تعیین کنیم.

## گام دوم

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه های معادله}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = b \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{1}{3}} \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1 = b \Rightarrow b = -1$$

در تابع درجه دو به فرم  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور تقارن منحنی، خط  $x = -\frac{b}{2a}$  است. با توجه به این نکته، مقدار  $a$  را به دست می آوریم:

$$y = (a-1)x^2 + x + 3 \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} x = -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a-1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطه تابع درجه دو به صورت  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$  درمی آید. معادله  $y = 0$  را حل می کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

چون در سؤال ذکر شده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط  $x = 6$  قابل قبول است.

## گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می کند، پس معادله  $y = 0$  دارای دو ریشه بوده و  $\Delta > 0$  است.  
ب) هر دو ریشه معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه ها باید مثبت باشد.

## گام دوم

$$y = 2x^2 - 4x + m - 3$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2)(m-3) > 0 \Rightarrow 16 - 8(m-3) > 0$$

$$\Rightarrow 8(m-3) < 16 \Rightarrow m-3 < 2 \Rightarrow m < 5 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (II)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $m$ ، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می توان نوشت:

$$(I) \cap (II) : 3 < m < 5$$

## گام اول

الف) با تغییر متغیر  $\sqrt{x} = t$  معادله داده شده را به معادله درجه دو تبدیل می کنیم.  
 ب) برای این که معادله اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادله جدید باید دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد (چون در این صورت یک بار  $\sqrt{x}$  برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشه مختلف علامه داشته باشد.  
 ج) حالت دیگر این است که معادله اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادله جدید یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

## گام دوم

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

$$\text{حالت اول: } t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 \quad (I)$$

$$\text{حالت دوم: } mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \quad (II)$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه به گزینه ها جواب به صورت  $0 < m < 2$  می شود.