

۱ اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر با کدام است؟

$$(2) \quad x^2 - 2x - 1$$

$$(1) \quad x^2 - x + 3$$

$$(4) \quad x^2 - x + 1$$

$$(3) \quad x^2 - 2x + 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1, x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟

$$(2) \quad 4$$

$$(1) \quad 3$$

$$(4) \quad 6$$

$$(3) \quad 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳ در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

$$(2) \quad 2$$

$$(1) \quad 1$$

$$(4) \quad \text{فاقد نقطه مشترک}$$

$$(3) \quad 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

$$(2) \quad \cot x$$

$$(1) \quad \tan x$$

$$(4) \quad \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

$$(3) \quad \frac{|\cos x|}{\sin x}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

$$(2) \quad 4$$

$$(1) \quad 3$$

$$(4) \quad 6$$

$$(3) \quad 4/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) $x^2 - 1$ (۲) $x^2 + 1$
(۳) $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 + 2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

اگر $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ ، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) صفر
(۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -2 (۲) $0/5$
(۳) ۱ (۴) $1/5$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1
(۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

(۱) صفر $4x$

(۳) $2x^2$ $4x^2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

(۱) $\log_2(2-\sqrt{3})$ $\log_2(\sqrt{3}-1)$

(۳) $\log_2(1+\sqrt{3})$ $\log_2(2+\sqrt{3})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 5 - |x - 1|$ و $y = |x|$ کدام است؟

(۱) ۸ 9

(۳) ۱۰ 12

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

(۱) $[0, 2]$ $[0, 3]$

(۳) $[1, 2]$ $[1, 3]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

اگر $x \geq 1$; $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

(۱) ۱۲ 15

(۳) ۱۸ 21

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

اگر عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

(۱) ۱ 2

(۳) ۳ 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

اگر عبارت $x^6 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

(۲) -۵

(۱) -۸

(۴) تعریف نشده

(۳) -۲

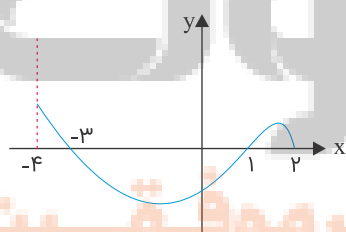
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

اگر عبارت $k + 5x^3 - 2x^{n+1} + 2x^{2n} + x^5$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x^2 + x$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟

(۲) $-2x + 1$ (۱) $-3x - 6$ (۴) $3x - 4$ (۳) $2x + 4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

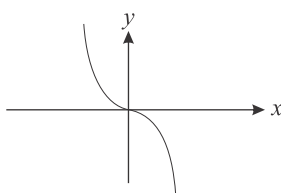
(۱) $[0, 2]$ (۲) $[-3, 2]$ (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ 

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

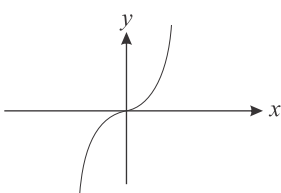
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۷

اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

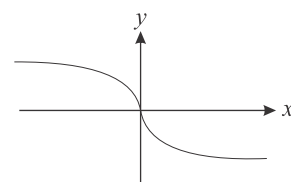
(۲)



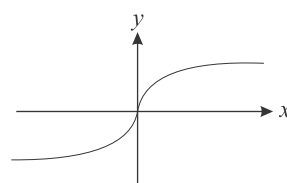
(۴)



(۱)



(۳)



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۳

اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$

(۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ ، آنگاه عدد a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۵

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$

(۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۶

اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $2x^2 - 7x + 3$ (۲) $2x^2 - 3x + 7$

(۳) $4x^2 - 2x + 13$ (۴) $4x^2 - 4x + 11$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۷

رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ ، چند عضو زوج مرتب دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۶

(۳) ۷ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۸

اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

خروجی $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow$ ورودی

(۱) $\frac{11}{9}$ (۲) $\frac{7}{2}$

(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه تابع fog کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$
 (۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$
 (۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$
 (۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع fog، کدام است؟

- (۱) $[-1, 1)$
 (۲) $(-1, 1]$
 (۳) $[1, +\infty)$
 (۴) $(-\infty, 1]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ ، آنگاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $x - 1$
 (۲) $x + 1$
 (۳) $x^2 - 1$
 (۴) $x^2 + 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ ، دامنه تابع fog کدام است؟

- (۱) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
 (۲) $R - \{0, 1\}$
 (۳) $R - \{0\}$
 (۴) $(0, \infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع fog، کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
 (۲) $[0, 3]$
 (۳) $[0, 4]$
 (۴) $[1, 4]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

- (۱) $-x + 7; x > 1$
 (۲) $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$
 (۳) $x + 7; x > -4$
 (۴) $\frac{1}{3}x - 2; -4 < x < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ ، کدام است؟

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$
 (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$
 (۳) 4
 (۴) $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x} & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ ، کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $f + g$
 (۲) $f \circ f$
 (۳) $g \circ f$
 (۴) $f \circ g$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
 (۲) 4
 (۳) $\frac{16}{3}$
 (۴) 6

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آنگاه $f(8)$ کدام است؟

- (۱) 5
 (۲) 3
 (۳) 7
 (۴) 8

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$
 (۲) $(-\infty, 1)$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $(1, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ ، دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) -1
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) 1
 (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱

اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + 1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

(۱) $[0, 1)$

(۲) $[0, 2)$

(۳) $[0, +\infty)$

(۴) $[1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۲

به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، بازه $(k - 2, 3k + 2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}$ است؟

(۱) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(۳) $(-1, \frac{1}{3})$

(۴) $(-1, -\frac{1}{3})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۳

اگر $f(x) = \sqrt{3 - x}$ و $g(x) = \log_v(x^v + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) $[-4, 2]$

(۲) $[-2, 0]$

(۳) $(-4, -1] \cup (1, 2]$

(۴) $(-4, -2) \cup (0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۴

اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

(۱) $(-4, 1)$

(۲) $(-3, 2)$

(۳) $(-2, 1)$

(۴) $(-1, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۵

اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ ، کدام است؟

(۱) $2x$

(۲) $\frac{2}{x}$

(۳) $x^2 - 1$

(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۶

اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟

(۱) ثابت

(۲) همانی

(۳) چندجمله‌ای

(۴) یک به یک

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۷

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$(2) \quad x+1$$

$$(1) \quad x-1$$

$$(4) \quad 2x$$

$$(3) \quad x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۸

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{f}\right)^x$ باشند. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$(2) \quad \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(1) \quad \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(4) \quad \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$(3) \quad (-2, 0)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹

دو تابع f و g به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند، در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

$$(2) \quad f \cap g$$

$$(1) \quad f \cup g$$

$$(4) \quad f \circ g$$

$$(3) \quad f - g$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۰

اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

$$(2) \quad x^2 - 4x + 5$$

$$(1) \quad x^2 - 4x + 3$$

$$(4) \quad x^2 - 2x + 3$$

$$(3) \quad x^2 - 2x + 5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۵۱

اگر $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ آنگاه $f(1 - x)$ کدام است؟

$$(2) \quad x^2 + 3$$

$$(1) \quad x^2 + 1$$

$$(4) \quad x^2 - 4x + 5$$

$$(3) \quad x^2 + 4x + 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۲

اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $g \circ f(x) = \frac{1}{2}x$ ضابطه تابع g برابر کدام است؟

$$(2) \quad \frac{x-1}{x}$$

$$(1) \quad \frac{x}{x+1}$$

$$(4) \quad \frac{x+1}{x}$$

$$(3) \quad \frac{x}{x-1}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۳

اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

$$2x^2 - 2x + 3 \quad (2)$$

$$2x^2 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$2x^2 + x + 3 \quad (4)$$

$$2x^2 - x + 4 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۴

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۵

با فرض $x \geq 2$ ؛ $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$ کدام است؟

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۶

اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$-x \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$

$$x+1 \quad (4)$$

$$-x-1 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۷

اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر (-1) باشد، آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟ $([] : \text{جزء صحیح})$

$$2 \quad \text{صفر} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۸

دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروضاند. تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

$$\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\} \quad (2)$$

$$\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\} \quad (1)$$

$$\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \quad (4)$$

$$\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

$$y = x\sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۲)$$

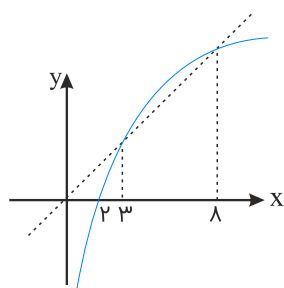
$$y = x\sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$y = x|x| ; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = x|x| ; x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



$$[0, 2] \quad (۱)$$

$$[2, 3] \quad (۲)$$

$$[2, 8] \quad (۳)$$

$$[3, 8] \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

ضابطه وارون تابع $\begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

$$y = -x^2 ; x < 0 \quad (۲)$$

$$y = x|x| ; x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$y = \pm x|x| ; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = \pm x^2 ; x \in \mathbb{R} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶۳ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱/۵ \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲/۵ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) ۴ و -۱

(۱) -۴ و -۱

(۴) ۴ و ۱

(۳) -۴ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، سپس ۹ واحد به طرف y ها منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

(۲) $(-5, 3)$

(۱) $(-5, 2)$

(۴) $(-2, 5)$

(۳) $(-2, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

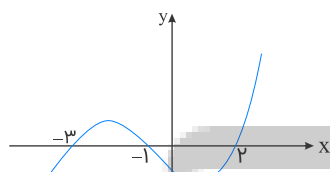
شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟

(۱) $[-3, 2]$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ است، a کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۷

(۴) -۱

(۳) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۰ اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = f(3x - 4)$ آنگاه حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷۱ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۲) $x = 1/5$

(۱) $x = 1$

(۴) $x = 2/5$

(۳) $x = 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۷۲ اگر مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2| < |x + 1| - 1$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۵/۰

(۴) ۲

(۳) ۵/۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۳ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۷۴ تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۲) $(-1, +\infty)$

(۱) $(-\infty, 2)$

(۴) $(2, +\infty)$

(۳) $(-1, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۵ تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(۲) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \leq 4$

(۱) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \geq 4$

(۴) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \leq 4$

(۳) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \geq 4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۶

اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{x}(x - 3)$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار می گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$
(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۷

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f \circ (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

- (۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$
(۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۸

رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۸ (۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۹

اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۰

اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟

خروجی $\rightarrow \sqrt{x} - 2x - 4 \rightarrow 2x + A \rightarrow$ ورودی

- (۱) $-\frac{15}{4}$ (۲) -3
(۳) ۳ (۴) $\frac{15}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۸۱

تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1 + x}; x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1 - x}; x < 1$
(۳) $1 + \sqrt{1 - x}; 0 \leq x \leq 1$ (۴) $1 - \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x < -4$
 (۲) $-x + 5; x > 2$
 (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$
 (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $-x^2$
 (۲) x^2
 (۳) $x|x|$
 (۴) $-x|x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1 + |x|}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x}{1 - |x|}; |x| < 1$
 (۲) $y = \frac{1 - |x|}{|x|}; |x| > 1$
 (۳) $y = \frac{x}{|x| - 1}; |x| > 1$
 (۴) $y = \frac{|x| - 1}{x}; |x| < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

- (۱) -2
 (۲) -1
 (۳) صفر
 (۴) 1

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

- (۱) $(3, 4)$
 (۲) $(2, 5)$
 (۳) $(3, 5)$
 (۴) $(2, 6)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) 1
 (۳) -1
 (۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۲

(۳) ۲ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Z}$

(۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{p}x^2 + 2x + 6$ ، در بازه (a, b) بزرگ تر از $\frac{7}{p}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵

(۳) ۵/۵ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

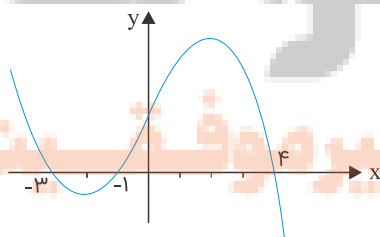
شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

به ازای یک مقدار a ، چندجمله ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ ، بر $2x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

(۱) -۱۰ (۲) -۸

(۳) ۴ (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in fog$ باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(۱) $(3, 4)$ (۲) $(4, 3)$

(۳) $(4, 5)$ (۴) $(5, 4)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$
(۲) $(-1, 3)$
(۳) $(2, 1)$
(۴) $(2, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) x
(۲) $4 - x$
(۳) $f(x)$
(۴) $2 - f(x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه $\mathbb{R}$ چگونه است؟

- (۱) نزولی
(۲) صعودی
(۳) وارون‌ناپذیر
(۴) یک‌به‌یک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$
(۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$
(۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$
(۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{2})$
(۲) $(-1, +\infty)$
(۳) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$
(۴) $(0, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۰ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, 3), (0, 0)\}$ (۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$
(۳) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$ (۴) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰۱ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۱
(۳) ۱۰ (۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۲ اگر $f(x) = x - [x]$ ، آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$
(۳) $\{-1, 0\}$ (۴) $\{0, 1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

- (۱) $-x + 4$ (۲) $x + 3$
(۳) $2x + 6$ (۴) $2x - 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $6\sqrt{2}$
(۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۵ عبارت $x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{8}$ (۲) $-\frac{17}{16}$
(۳) $\frac{17}{16}$ (۴) $\frac{15}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$

(۲) $[-5, 0) \cup (15, 20]$

(۳) $(15, 20]$

(۴) $[-5, 0)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ ، $x \in \mathbb{R}$

(۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$ ، $x \in \mathbb{R}$

(۳) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ ، $x > 0$

(۴) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$ ، $x > 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب ۱ و -۴ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 کدام است؟

(۱) $x-1$

(۲) $x+1$

(۳) $-x+2$

(۴) $2x-1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ ، نگاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{2}, 1]$

(۲) $(\frac{1}{2}, 1)$

(۳) $(1, 2]$

(۴) $[1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۱۲

دو تابع $f = \{(\omega, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x + 9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۳

اگر $f(x) = |x| - x$ ، ضابطه تابع $f \circ f(x)$ برابر کدام است؟

(۲) $|x|$ (۱) x

(۴) صفر

(۳) $x + |x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۱۴

فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۱

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۵

ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ به کدام صورت است؟

(۲) $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$ (۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۱۶

اگر $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

(۲) ۷ و ۱

(۱) ۷ و -۱

(۴) ۷ و ۱

(۳) ۷ و -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱۷

تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) ۱

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \longrightarrow \underline{g} \longrightarrow 2x, \quad g(x) = 3x + 4$$

آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۹ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\sqrt{4n^2 - 3n + 1} - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۲۰ نمودار تابع با ضابطه $y = x - [x]; x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$
(۲) $(4, \sqrt{2})$
(۳) $(5, 1)$
(۴) $(5, \sqrt{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۲۱ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

- (۱) $1/75$
(۲) $2/25$
(۳) $2/5$
(۴) $2/75$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۲۲ به ازای مقداری از a ، چندجمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$
(۲) $1 - \sqrt{5}$
(۳) $-1 - \sqrt{3}$
(۴) $-1 - \sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۲۳ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) -1
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

(۱) $[\frac{2}{3}, 2]$

(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

(۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

(۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ برد تابع $g \circ f$ کدام بازه است؟

(۱) $(0, +\infty)$

(۲) $[0, +\infty)$

(۳) $(1, +\infty)$

(۴) $[1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

دو تابع با ضابطه های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $[0, 1)$

(۲) $\{0\}$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $\frac{7}{2}$

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $x \in (-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۲) ۱، -۱

(۱) ۲، ۰

(۴) ۱، -۲

(۳) ۲، -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۲) $x \geq -1$ (۱) $x \leq -1$ (۴) $x \geq 1$ (۳) $x \leq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) هیچ مقدار m

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ (۱) ۴ و $\frac{1}{9}$

(۴) ۹ و ۴

(۳) $\frac{1}{4}$ و ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

(۴) ۱۴

(۳) ۱۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۴

۱

راه حل اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 \Rightarrow f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینه ۴، $f(-1) = 3$ است.

راه حل دوم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

گزینه ۲

۲

گام اول

با توجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

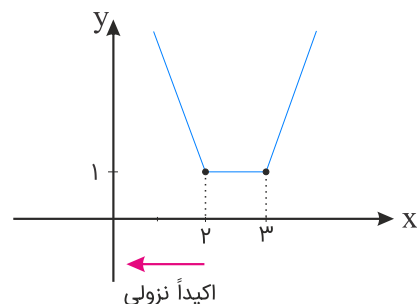
$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) - (x-3) = -2x + 5$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = (x-2) - (x-3) = 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-2 + x-3 = 2x-5$$



بنابراین:

$$x \leq 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \checkmark \\ x = \frac{5}{2} & \times \end{cases}$$

گزینه ۴

۴

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است ابتدا باید ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = x \\ &\xrightarrow{\text{به توان } 2} y^2(1+x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 + y^2x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - y^2x^2 = y^2 \\ &\Rightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{\text{هم علامت } y, x} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \xrightarrow{1-\sin^2 x = \cos^2 x} f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &\Rightarrow f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

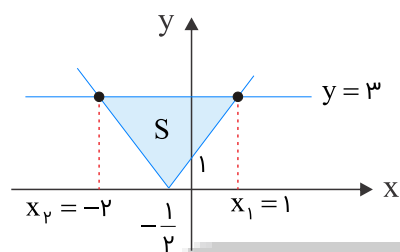
ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (\text{gof})(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|2x + 1|$ و خط $y = 3$ را می‌یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$



$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطه تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, \quad f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطه $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

پس برای ضابطه $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱) \quad g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + ۱$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + ۱ = x^2 - ۱$$

$$۲) \quad g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.

گزینه ۲

۷

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ ، ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطه $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(۶)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{\text{به توان } ۳} y^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$۶ = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow ۴ + ۲ = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow \frac{x^3}{2} = ۴ \Rightarrow x^3 = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

نقطه $(۲, ۶)$ در ضابطه $g(x)$ صدق می کند، پس نقطه $(۶, ۲)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(۶) = ۲$ است.

ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow[2 \text{ واحد به راست}]{y} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

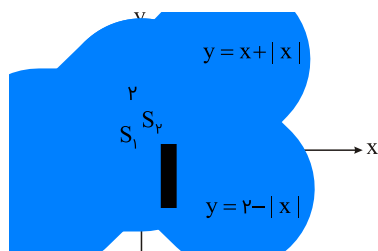
برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله (*) صدق نمی‌کند.

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

ابتدا با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ را تشکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x ، متغیر $(1+x)$ و یک بار متغیر $(1-x)$ را قرار داده و ضابطه هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2 = [(1+x)(1-x)]^2 = (1-x^2)^2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1-x)^2(1+x)^2 = [(1-x)(1+x)]^2 = (1-x^2)^2$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(1+x) - f(1-x) = (1-x^2)^2 - (1-x^2)^2 = 0$$

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \xrightarrow{f^{-1}(2)=?} \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{t=2^x} t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\Rightarrow t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ t = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

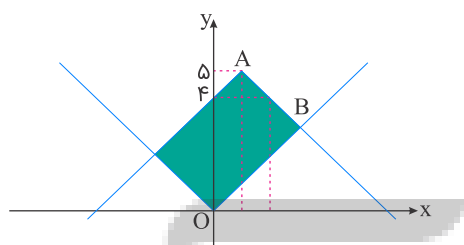
$$t = 2^x \Rightarrow x = \log_2 t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2^{(2+\sqrt{3})} \\ x = \log_2^{(2-\sqrt{3})} < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

جواب $x = \log_2^{(2-\sqrt{3})}$ غیر قابل قبول است، زیرا دامنه $[0, +\infty)$ است.

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - x - ۱ $	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = x $	۱	۰	۱



برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - |x - ۱| = |x| \Rightarrow |x| + |x - ۱| = ۵ \Rightarrow x = \frac{۰ + ۱ \pm ۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳, ۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^2 + (۳ - ۵)^2} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^2 + ۳^2} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه به محدوده قابل قبول برای x ، بازه‌ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس باید داشته باشیم: $0 \leq 3 - x \leq 2$ ، بنابراین:

$$0 \leq 3 - x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{2x - x^2} &\Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} \\ &= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ &\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3] \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y + 4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = y + 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| = \sqrt{y+4}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حال f^{-1} را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x = 21$ در معادله (۱) صدق می‌کند.

گام اول

چون عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر است، باید باقی مانده تقسیم این عبارت بر سه جمله‌ای مورد نظر برابر صفر شود.

گام دوم

$$\begin{array}{r} ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\ - (ax^3 - 2ax^2 + ax) \\ \hline (2a + 4)x^2 + (-a - 14)x + 10 - a \\ - ((2a + 4)x^2 - 2(2a + 4)x + 2a + 4) \\ \hline (3a - 6)x + (6 - 3a) \end{array}$$

باقی مانده را برابر صفر قرار می دهیم:

$$(3a - 6)x + (6 - 3a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - 6 = 0 \\ 6 - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین به ازای $a = 2$ عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر است.

نکته: چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x - a)^2$ بخش پذیر است، هرگاه: $P(a) = P'(a) = 0$

$$P(x) = x^3 + ax^2 - bx + c \Rightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax - b$$

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - b + c = 0 \\ P'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -5 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع f صدق کند، نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(4)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(4)$ برابر α شود، در این صورت $(4, \alpha)$ در ضابطه f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, 4)$ باید در ضابطه تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطه تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادله $f(\alpha) = 4$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-2x} \xrightarrow{f(\alpha)=4} 4 = -\alpha + \sqrt{-2\alpha} \Rightarrow \sqrt{-2\alpha} = \alpha + 4$$

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-2\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0, \quad \alpha + 4 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$$

پس $\alpha \in [-4, 0]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$-2\alpha = (\alpha + 4)^2 \Rightarrow -2\alpha = \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = -8 \end{cases}$$

با توجه به این که $\alpha \in [-4, 0]$ است، فقط $\alpha = -2$ قابل قبول خواهد بود.

گام اول

الف) عبارت $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر دوجمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است (به ازای هر عدد طبیعی n)، بنابراین $P(-2) = 0$ است.

ب) با توجه به گزینه های داده شده باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x^2 - 1$ یک چند جمله ای درجه یک به فرم $ax + b$ است. برای تعیین مقادیر a و b یک بار مقدار $P(1)$ و بار دیگر $P(-1)$ را محاسبه کرده و با حل دو معادله و دو مجهول مقدار a و b حساب می شود.

گام دوم

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$2n + 1$ عددی فرد است. بنابراین $(-2)^{2n+1} = -2^{2n+1}$ است. هم چنین $2n$ یک عدد زوج بوده و داریم:

$$(-2)^{2n} = 2^{2n}$$

$P(-2)$ را بازنویسی می کنیم:

$$P(-2) = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$$

با مشخص شدن مقدار k ، سراغ محاسبه باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ می رویم:

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

$$P(1) = 1^{2n+1} + 2(1)^{2n} + (1)^5 - 5(1)^3 - 8 = a + b$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 1 - 5 - 8 = a + b \Rightarrow a + b = -9 \quad (I)$$

$$P(-1) = (-1)^{2n+1} + 2(-1)^{2n} + (-1)^5 - 5(-1)^3 - 8 = -a + b$$

$$\Rightarrow -1 + 2 - 1 + 5 - 8 = -a + b \Rightarrow -a + b = -3 \quad (II)$$

از دو رابطه (I) و (II) مقدار a و b را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} a + b = -9 \\ -a + b = -3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = -12 \Rightarrow b = -6 \xrightarrow{(I)} a = -3$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ به صورت $-3x - 6$ است.

روش دوم:

باقی‌مانده عبارت $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8$ را بر $x^2 - 1$ می خواهیم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

کافی است در عبارت فوق به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم:

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 \Rightarrow P(x) = (x^2)^n x + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^2 x - 8$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (1)^n x + 2(1)^n + (1)^2 x - 5(1)x - 8 = x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

گزینه ۴

۲۱

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می کنیم در چه بازه هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	۰	+	+
f(x)	+	۰	-	۰	+
xf(x)	-	۰	+	-	+

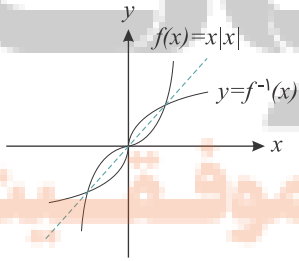
دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[1, 2] \cup [-3, 0]$ درمی آید.

گزینه ۳

۲۲

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم. نمودار f^{-1} قرینه $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



گزینه ۲

۲۳

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم $1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ، در نتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = 5$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطه تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = 5$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهنده تابع g ، زوج مرتب $(5, 6)$ دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = 6$. حال با داشتن ضابطه $f(x)$ ، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ ، معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 & \text{غ ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = 4$ جواب تست می شود.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[12 \text{ واحد در جهت مثبت محور } x]{12} y = \sqrt{x-12} \xrightarrow[2 \text{ واحد در جهت مثبت محور } y]{2} y = \sqrt{x-12} + 2$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x - 12 = x + 4 - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 16$$

$x = 16$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow A(16, 4)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

در صورت مسئله ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع $f \circ g$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t - 3}{2}$$

$$g(t) = 8\left(\frac{t - 3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t - 3}{2}\right) + 20 \Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}\right) + 11(t - 3) + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱) |x| = 2, |y| = 0 \Rightarrow x = \pm 2, y = 0 \Rightarrow (2, 0), (-2, 0) \in \mathbb{R}$$

$$۲) |x| = 0, |y| = 2 \Rightarrow x = 0, y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2) \in \mathbb{R}$$

$$۳) |x| = 1, |y| = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1 \Rightarrow (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) \in \mathbb{R}$$

بنابراین رابطه $\mathbb{R}$ با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$\mathbb{R} = \{(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

پس رابطه $\mathbb{R}$ دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x - 2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x} + 1}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{4}{3}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{4}{3}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x - 2) = 4\sqrt{2x - 2} + 4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 = 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = 3$ به دست آمد.

برای یافتن ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^6 x - \sqrt{\sin^6 x} = \sin^6 x - \sin^3 x \\ &= \sin^3 x(\sin^3 x - 1) = \sin^3 x(-\cos^3 x) = -\sin^3 x \cos^3 x \end{aligned}$$

با توجه به فرمول $\sin^2 x$ ، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

پس ضابطه تابع $f \circ g$ به صورت زیر درمی آید:

$$f \circ g(x) = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^3 = -\frac{1}{8} \sin^3 2x$$

نکته:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 1 \leq \frac{1}{[x] - x + 1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} \xrightarrow{-2} 1 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده و ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را می خواهند. برای این کار ابتدا ضابطه دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم سپس برای تعیین ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ یا همان $g^{-1}(f^{-1}(x))$ در ضابطه $g^{-1}(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را قرار می دهیم:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - 1)^2 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2; x \geq 1$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}; x > 0$$

بنابراین ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ برابر است با:

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

$$\xrightarrow[\substack{x \geq 1 \\ x - 1 \geq 0}]{x \geq 1} g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x - 1$$

طبق تعریف، دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنه تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده $D_{g \circ f}$ را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x - 4)} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حالا دامنه تعریف تابع $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in \mathbb{R} - \{0, 4\}\}$$

$$\sqrt{x + |x|} = 4 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\sqrt{x + |x|} = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

پس دامنه $g \circ f$ برابر است با: $D_{g \circ f} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$

نکته: $0 \leq x - [x] < 1$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 1 < (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$\xrightarrow{+4} 0 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq g \circ f(x) < 3 \Rightarrow R_{g \circ f} = [0, 3)$$

گام اول

الف) ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را باتوجه به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدوده x بر اساس ریشه عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشه عبارت‌های درون قدر مطلق، $x = -1$ و $x = 3$ است. داریم:

$$x < -1 : f(x) = -2x + 6 - (-x - 1) = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

$$-1 \leq x \leq 3 : f(x) = -2x + 6 - (x + 1) = -3x + 5$$

$$x > 3 : f(x) = 2x - 6 - (x + 1) = x - 7$$

در بازه $x > 3$ تابع $f(x) = x - 7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

در تست حاصل مقادیری از دو تابع fog و gof از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطه $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه توابع $\text{fog}(x)$ و $\text{gof}(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = |(x+1)^2| \xrightarrow{(x+1)^2 \geq 0} (\text{fog})(x) = (x+1)^2$$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = (|x| + 1)^2$$

$$(\text{fog})(1 - \sqrt{2}) - (\text{gof})(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 - (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 =$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$



هر یک از توابع $f + g$, $f \circ f$, $g \circ f$ و $f \circ g$ را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x = 0$ بحث می کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - 2x & , x < 0 \\ 1 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 1$$

بنابراین تابع $f + g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{f(x)} & , f(x) < 0 \\ 2f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه سوم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & , f(x) < 0 \\ 1 & , f(x) \geq 0 \end{cases} \\ = \begin{cases} -2(-\frac{1}{x}) & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{x} & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = 1 \rightarrow g \circ f \text{ در } x = 0 \text{ ناپیوسته است}$$

پس تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است.
بررسی گزینه چهارم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{g(x)} & , g(x) < 0 \\ 2g(x) & , g(x) \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است پس تابع $f \circ g$ برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = 0$$

بنابراین تابع $f \circ g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

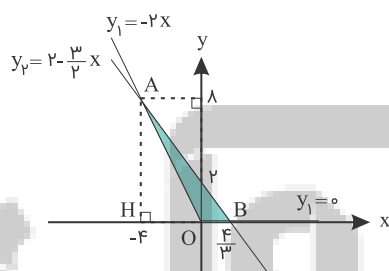
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

گام اول

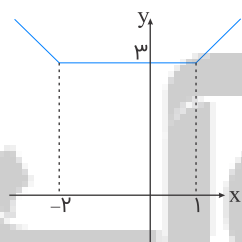
ساده تر از این امکان ندارد. ضابطه $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبه $f(8)$ کافی است در ضابطه داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم.

گام دوم

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \Rightarrow f(8) = 7$$

گزینه ۱

$$f(x) = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 1 \\ 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -2x-1 & ; x < -2 \end{cases}$$



باتوجه به نمودار تابع گلدانی $y = |x+2| + |x-1|$ ، در فاصله $(-\infty, -2)$ تابع نزولی اکید است.

گزینه ۲

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطه fog مشخص شود. سپس معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-3)^2, \quad g(x) = x+2 \Rightarrow \text{fog}(x) = f(g(x)) = (2g(x)-3)^2 \\ &= (2(x+2)-3)^2 = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل می کنیم:

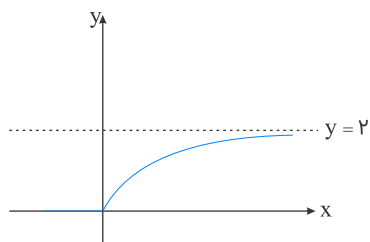
$$f(x) = \text{fog}(x) \Rightarrow (2x-3)^2 = (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه ای به طول $x = \frac{1}{2}$ با هم متقاطع اند.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x+1|+1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x+2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

دامنهٔ تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$\begin{aligned} (1) : (k-2, 3k+2) &\subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3}) \\ (2) : (k-2, 3k+2) &\subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \end{aligned}$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

برای به دست آوردن $D_{f \circ g}$ اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطهٔ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ دامنهٔ تابع $f \circ g$ را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_v^{(x^2+2x)} \Rightarrow x^2+2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین $D_{f \circ g}$ می‌رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_v^{(x^2+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_v^{(x^2+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq v^3 \Rightarrow x^2+2x \leq 8 \Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $g \circ f(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع $g \circ f$ بالای محور x ها قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $g \circ f(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $g \circ f(x)$ و حل نامعادله $g \circ f(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad f(x) = x^2 + 3x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

$$g \circ f(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $g \circ f(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x ها قرار می گیرد.

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه $f(-x)$ را تشکیل می دهیم:

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4})$$

حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x)f(-x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \cdot \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4}) = \frac{1}{4}(x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x) = 1$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \alpha &\Rightarrow f^{-1}(\alpha) = x \\ f(-x) = \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\alpha) + f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = x - x = 0$$

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} g(x) &= (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

گام اول

در ضابطه $g(x)$ ، به جای x ضابطه $f(x)$ را جایگذاری می کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} \\ &= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x \end{aligned}$$

دامنه تابع fog از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div -1} x > -\ln 2 \Rightarrow D_{fog} = (-\ln 2, +\infty)$$

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه‌ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی $f \circ g$ نیز تابع است. رابطه $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

$f = \{(2, 3)\}$ تابع است

$g = \{(2, 4)\}$ تابع است

$f \cup g = \{(2, 3), (2, 4)\}$ تابع نیست

دو ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطه $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض می کنیم $g(x)$ برابر t باشد. در این صورت x را بر حسب t به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = 2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{(t+3)^2}{4} - 2(t+3) + 5\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 8(t+3) + 20 = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $t = x - 3$ ، x را بر حسب t به دست آورده و ضابطه $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow[x=t+3]{x-3=t} f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطه $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطه $f(1-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2$$

$$= x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن $f(1-x)$ از روی ضابطه $f(x-3)$ این است که به جای x متغیر $4-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4-x-3) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5$$

$$\Rightarrow f(1-x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

ضابطه $f(x)$ و ضابطه $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ به ما داده شده است و ضابطه $g(x)$ را می‌خواهد. در این حالت برای پاسخ گویی به تست از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می‌کنیم. $f(x)$ را برابر t در نظر گرفته، x را بر حسب t به دست آورده و سپس $g(t)$ را بر حسب t تشکیل می‌دهیم. در نهایت برای تعیین ضابطه $g(x)$ ، x را به جای t جایگزین می‌کنیم.

$$gof(x) = \frac{1}{2}x, \quad f(x) = \frac{x}{2-x} \Rightarrow g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{2}x$$

طبق توضیحات گفته شده $\frac{x}{2-x}$ را برابر t فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{2-x} = t \Rightarrow x = 2t - tx \Rightarrow x + tx = 2t \Rightarrow x(1+t) = 2t \Rightarrow x = \frac{2t}{1+t}$$

پس $g(t)$ برابر است با:

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t}\right) = \frac{t}{1+t} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{1+x}$$

دو تابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $2x+1 = t$ باشد، x را بر حسب t به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$2x+1 = t \Rightarrow 2x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5$$

$$= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + 5$$

$$\Rightarrow f(t) = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4$$

بنابراین ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + 4$ به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ است.

با توجه به اعضای مجموعه A ، ابتدا تابع $f(x)$ را با مشخص کردن زوج مرتب های آن تشکیل می دهیم. برای تشکیل تابع $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ ، مقدار تابع $f \circ f$ را در نقاط دامنه اش حساب می کنیم. دقت کنید که اگر $x \in D_f$ باشد اما $f(x) \notin D_f$ ، آن گاه x در ترکیب شرکت نمی کند. حالا تابع $f(x)$ را با زوج مرتب هایش تشکیل می دهیم:

$$f = \left\{ (x, 2x - 1), x \in A \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ x = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 4 - 1 = 3 \\ x = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 6 - 1 = 5 \\ x = 4 \Rightarrow 2x - 1 = 8 - 1 = 7 \\ x = 5 \Rightarrow 2x - 1 = 10 - 1 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

تابع $f(f(x))$ را با رعایت شرط گفته شده تشکیل می دهیم:

$$x = 1 : f(f(1)) = f(1) = 1, \quad x = 2 : f(f(2)) = f(3) = 5$$

$$x = 3 : f(f(3)) = f(5) = 9, \quad x = 4 : f(f(4)) = f(7) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$x = 5 : f(f(5)) = f(9) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی (زوج مرتب) است.

داریم $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$. ابتدا $g^{-1}(-9)$ را می یابیم. فرض می کنیم $g^{-1}(-9) = a$ باشد، پس $g(a) = -9$ داریم.

$$g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow g(a) = \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

پس کافی است $f^{-1}(21)$ را حساب کنیم. فرض می کنیم $f^{-1}(21) = b$ باشد، پس $f(b) = 21$ است و داریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow f(b) = b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \xrightarrow{b \geq 2} b = 6$$

پس $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = 6$ است.

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-7}{1} \Rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

گام اول

با توجه به صورت سؤال $[x^2 + x] = -1$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدوده قابل قبول برای $x^2 + x$ به صورت $-1 \leq x^2 + x < 0$ است.

گام دوم

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱) \quad x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \text{ضریب } x^2 = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲) \quad x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس $-1 < x < 0$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده دو تابع f و g ، توابع f^{-1} و g^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\}$$

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(3) \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ به صورت $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ درمی‌آید.

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x > 0$ و $x < 0$ ، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می‌کنیم. سپس برای هریک از ضابطه‌های جدید، ضابطه معکوس تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x \in \mathbb{R} : y = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : |x| = x \Rightarrow y = \sqrt{x} ; y > 0 \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow y = -\sqrt{-x} ; y < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[y \text{ به توان } 2]{x, y > 0} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$$

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[y \text{ به توان } 2]{x, y < 0} y^2 = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

همچنین نقطه $(0, 0)$ باید در ضابطه وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطه معکوس تابع به صورت $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ در می‌آید.

روش دوم:

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه $f^{-1}(x)$ صدق می‌کند. نقطه $A(4, 2)$ در ضابطه $f(x)$ صدق می‌کند. پس نقطه $B(2, 4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه‌های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعه اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد. تنها گزینه‌ای که تمام این ویژگی‌ها را دارد، گزینه $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ است.

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند. دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

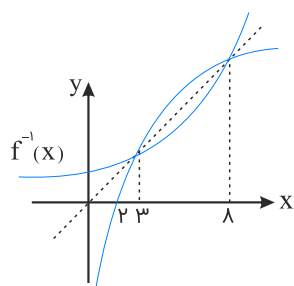
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.

در بازه $[3, 8]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار

$y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت $f(x)$)

صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازه $[3, 8]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.



یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطه (α, β) در ضابطه اصلی صدق کند، نقطه (β, α) در وارون آن صدق می کند، گزینه درست را پیدا کنیم. روش اول:

$$۱) y = \sqrt{x}, x \geq 0, y \geq 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$$

$$۲) y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow y < 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = -x$$

$$\Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطه $(۲, ۴)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینه ۱ است که نقطه $(۲, ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطه وارون در نظر گرفته شود.

داریم: $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$ پس کافی است $f^{-1}(20)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.

فرض کنیم $f^{-1}(20) = a$ باشد، پس $f(a) = 20$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \\ \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ حال فرض می‌کنیم $g^{-1}(16) = b$ پس $g(b) = 16$ است. در نتیجه:

$$g(x) = \frac{9x+6}{1-x} \Rightarrow g(b) = \frac{9b+6}{1-b} = 16 \Rightarrow 9b+6 = 16-16b \\ \Rightarrow 25b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

$$g(x) = x^3 + x, \quad f(x) = \frac{2}{5}x - 4$$

اول $f^{-1}(\lambda)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 30$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه تابع با وارون آن نقطه تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +4 \end{cases}$$

اگر نمودار $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به طرف y های منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - 9$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$(x+1)f(x)$	+	.	-	.	+

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله، دامنه تابع غیرنقطه‌ای به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

وقتی باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-1)$ برابر ۴ است.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 4$$

$$P(-1) = (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a + 3 = 4 \Rightarrow a = 3 - 4 = -1 \Rightarrow a = -1$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$.

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$.

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p(x^2) + 4p(-x) &= p(2^2) + 4p(-2) \\ &= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7 \end{aligned}$$

نیمساز ناحیه دوم: $y = -x$; $x < 0$

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

راه حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow y = f(3x - 4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(3x - 4) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x - 4)) = f^{-1}(y) = 3x - 4 \\ \Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + 4}{3}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

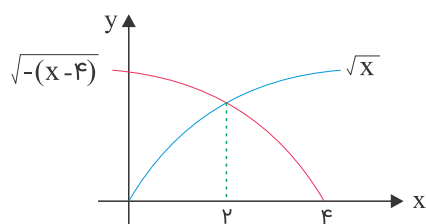
$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20 \\ g^{-1}(16) = \frac{20 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

راه حل دوم: فرض می کنیم $g^{-1}(16) = a$ ، پس داریم: $g(a) = 16$

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow g(a) = f(3a - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3a - 4 \\ f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 = 3a - 4 \Rightarrow a = \frac{24}{3} = 8$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

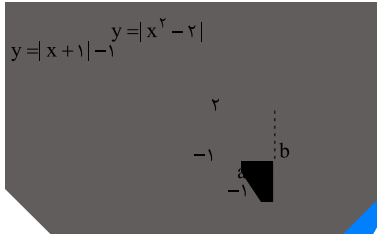
حال دو نمودار را رسم می کنیم:



$$\sqrt{x} = \sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x| = |-(x-4)| = |x-4| \\ \Rightarrow \begin{cases} x = x - 4 \Rightarrow 0 = -4 \quad \times \\ x = -x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x = 2$ محور تقارن دو نمودار است.

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a , $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} a = 1$$

برای یافتن b , $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{b > \sqrt{2}} b = 2$$

$$\text{مجموعه جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبه $f(1)$ از ضابطه پایین و برای محاسبه $f(5)$ از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > 3 : f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$x \leq 3 : f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

پس مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ برابر است با:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 2(2) + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 9$$

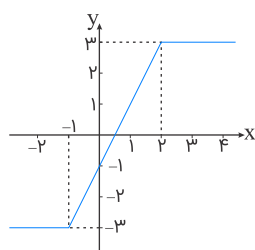
X	-1	۲
X+1	-	+
X-۲	-	+

$$x \leq -1 : f(x) = -x - 1 + x - 2 = -3$$

$$-1 < x \leq 2 : f(x) = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$$

$$x > 2 : f(x) = x + 1 - x + 2 = 3$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصله $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

گزینه ۴

۷۵

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق، ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر بود انتخاب کرده و ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow 4 - 2x < 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = 2x - 2x + 4 = 4 \\ x \leq 2 \Rightarrow 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 2x - 4 + 2x = 4x - 4 \end{cases}$$

ضابطه $f(x) = 4$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازه $(-\infty, 2]$ معکوس‌پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4$$

برد تابع f بازه $(-\infty, 4]$ به دست آمد. پس دامنه f^{-1} نیز بازه $(-\infty, 4]$ خواهد بود.

$$y = 4x - 4 \Rightarrow y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad ; x \leq 4$$

گام اول

الف) ضابطه تابع $\text{fog}(x)$ یعنی $f(g(x))$ با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.
 ب) می خواهیم نمودار تابع $\text{fog}(x)$ زیر محور x ها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned}\text{fog}(x) = f(g(x)) &= \left(\frac{1}{4}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{4}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را تعیین می کنیم:

$$\text{fog}(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

حال $g^{-1} \text{ of } f$ را حساب می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \text{ of } f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

فرض می کنیم که $h = g^{-1} \text{ of } f$ باشد. خواسته مسئله $h - f$ است که باید در دامنه مشترک، عرض ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$

$$h - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می‌شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$1) \quad x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$2) \quad x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in R$$

$$3) \quad x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطه R است.

به ازای مقادیر $x \geq 4$ هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطه R با زوج مرتب‌های تشکیل دهنده آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعه R دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

گام اول

اگر ضابطه اول که بر روی ورودی اعمال می شود را $f(x)$ و ضابطه دوم را $g(x)$ نام گذاری کنیم، شکل داده شده به صورت زیر در می آید:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x + A}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\sqrt{x} - 2x - 4}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

ورودی یا همان x برابر ۲ و خروجی یا همان $g(f(x))$ برابر ۵- است. با توجه به ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ، ضابطه تابع $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم و مقدار A را محاسبه می کنیم.

گام دوم

به ازای $x = 2$ ، معادله $gof(x) = -5$ برقرار است. A را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + A, \quad g(x) = \sqrt{x} - 2x - 4 \\ gof(x) &= g(f(x)) = \sqrt{2x + A} - 2(2x + A) - 4 = -5 \xrightarrow{x=2} \\ \sqrt{4 + A} - 2(4 + A) - 4 &= -5 \xrightarrow{\sqrt{4+A}=t} t - 2t^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2t^2 - t - 1 &= 0 \Rightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

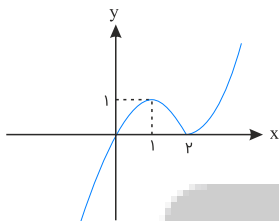
غ ق ق $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4 + A = 1 \Rightarrow A = -3$

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)
 ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.
 ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow y = x(x-2) \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow y = -x(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x - 1)^2 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x} ; 0 \leq x \leq 1$$

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت ساده شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنه تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$$

$$= \begin{cases} x < -4 : -(2x - 6) + (x + 4) + x = 10 \\ -4 \leq x \leq 3 : -(2x - 6) - (x + 4) + x = -2x + 2 \\ x > 3 : (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10 \end{cases}$$

تابع در بازه $[-4, 3]$ اکیداً نزولی است. ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

در ضابطه تابع اصلی وقتی $-4 \leq x \leq 3$ باشد، $-4 \leq y \leq 10$ است. پس دامنه تابع معکوس به صورت $[-4, 10]$ درمی‌آید. پس گزینه ۴ درست است.

گزینه ۳

۸۳

گام اول

می‌دانیم اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع صدق کند، نقطه به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطه وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in f \Rightarrow (-2, -4) \in f^{-1}$$

باتوجه به این دو مثال ضابطه وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x|x|$ خواهد بود.

برای حل این تست از دو روش استفاده می‌کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطه تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست‌ها است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطه مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می‌کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه‌های اول و دوم، نقطه جدید در ضابطه تابع معکوس صدق می‌کند یا خیر.

روش اول:

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \Rightarrow -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ ، $|x| < 1$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می‌کند. از بین گزینه‌ها تنها معادله‌ای که $x = 0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطه $(0, 0)$ هم در ضابطه آن صدق کند، ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

اگر $x^2 + x < 0$ باشد، $-1 < x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

راه حل اول:

اگر تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$ تبدیل می شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت y های منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطه $g(x) = f(x) - 2$ خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2 \\ \Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 3 = -x^2 + 8x - 12$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y = x$ قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 > x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)} < 0 \quad (*)$$

x	$-\infty$	۳	۴	$+\infty$	
h(x)	+	۰	-	۰	+

$$h(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

راه حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم: $x = 4$ ، داریم: $0 < 0$ که غیر قابل قبول است، بنابراین گزینه های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$ ، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس بدون این که ضابطه $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر ۲- در نظر گرفته و مقدار $g(-2)$ را حساب می کنیم.

$$f(x) = 2x^2 + 4, \quad f(g(x)) = 4x^2 + 6x \Rightarrow 2(g(x))^2 + 4 = 4x^2 + 6x$$

$$\xrightarrow{x=-2} 2(g(-2))^2 + 4 = 4(-2)^2 + 6(-2) = 4(4) + 6(-2) = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow 2(g(-2))^2 + 4 = 4 \Rightarrow 2(g(-2))^2 = 0 \Rightarrow (g(-2))^2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(3)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی تر می شود.) ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(3)$ را می خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به دست آمده، مقدار $f(3)$ محاسبه می شود.

گام دوم

$$g(x) = 2x - 1, \quad f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3}$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow[x=2]{f(2x-1) = \frac{x}{x-3}} f(3) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

گزینه ۳

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیر صحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1)$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیر صحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

گام اول

مجموعه جواب نامعادله $f(x) > \frac{7}{2}$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$f(x) > \frac{7}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 4x + 12 > 7$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

بنابراین بازه (a, b) به صورت $(-1, 5)$ در آمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

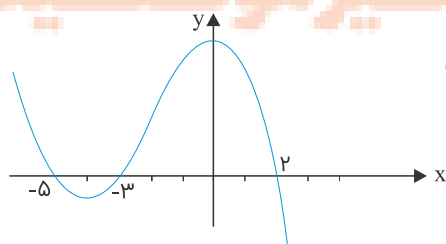
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x - 2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x - 2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x - 2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

طبق صورت سؤال نتیجه می گیریم که $P(\frac{1}{p}) = 0$ ، بنابراین:

$$2\left(\frac{1}{p}\right)^4 + a\left(\frac{1}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{p}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{p}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 1 = 0 \Rightarrow a = 7$$

باقی ماندۀ تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴, ۲) \in fog$ و $(۴, ۱) \in gof$ است. $(۴, ۲) \in fog$ یعنی، $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴, ۱) \in gof$ یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴)) = ۲$ و $g(f(۴)) = ۱$:

$$f(g(۴)) = ۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a, ۳) \in g} a = ۴$$

$$g(f(۴)) = ۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b, ۱) \in g} b = ۵$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(۴, ۵)$ درمی آید.

گزینه ۱

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-۱, ۲), (۴, -۱), (-۲, ۳), (-۳, -۴)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > ۰$ ، مثبت و به ازای مقادیر $x < ۰$ ، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -۲ \Rightarrow \sqrt{-a} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

گزینه ۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب ها نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود. در رابطه داده شده دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهله اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱, ۵) \in f, (-۱, ۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳, ۲) \in f, (b, ۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(۲, ۳)$ درمی آید.

تست ضابطه $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطه $f(f(x))$ ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه به آن، ضابطه $f \circ f(x)$ را تعیین کنیم.

ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 - |x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 = 4 - x \\ x < 2 : x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2 + x - 2 = x \end{cases}$$

ضابطه $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq 2 : f(f(x)) = 2 - |4 - x - 2| = 2 - |2 - x|$$

$$\xrightarrow[2-x < 0]{x \geq 2} f(f(x)) = 2 + 2 - x = 4 - x = f(x)$$

$$x < 2 : f(f(x)) = 2 - |x - 2| \xrightarrow[x-2 < 0]{x < 2} 2 + x - 2 = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطه $f(f(x))$ برابر ضابطه $f(x)$ شد.

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ به سؤال پاسخ می دهیم. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می کنیم.



با توجه به نمودار رسم شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک به یک هم نیست، در نتیجه وارون ناپذیر می شود؛ بنابراین فقط گزینه ۳ می تواند درست باشد.

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (\omega, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (\omega, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} \times \\ \omega \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(\omega, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = \text{gof}^{-1}$ باشد، خواسته مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{\omega, ۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{ \left(\omega, \frac{۶}{۳} \right), \left(۴, \frac{۲}{۱} \right) \right\} = \{(\omega, ۲), (۴, ۲)\}$$

$$f(x) = ۲ - |x + ۱| = \begin{cases} x + ۳ & ; x \leq -۱ \\ -x + ۱ & ; x > -۱ \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} ۰ & ; x \leq ۰ \\ ۲x & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{۲ - |x + ۱|}{x + |x|} = \begin{cases} \text{ت.ن} & ; x \leq ۰ \\ \frac{۱ - x}{۲x} & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} \quad ; x > ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} > -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow R_y = \left(-\frac{۱}{۲}, +\infty \right)$$

گام اول

در تابع f و g به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع $g \circ f^{-1}$ را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f ، جای مؤلفه‌های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس باتوجه به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \\ \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 5, 3, -1\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای $D_{f^{-1}}$ تابع $g \circ f^{-1}$ تعریف می‌شود یا خیر:

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 0 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(0) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 4 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in g \circ f^{-1}$$

بنابراین تابع $g \circ f^{-1}$ به صورت $\{(5, 3), (-1, 1)\}$ درمی‌آید.

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{b} = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(15) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

ضابطه $f(x)$ را داریم. باتوجه به آن حاصل $f(2x - 3)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح، برد آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = x - [x] &\Rightarrow f(2x - 3) = 2x - 3 - [2x - 3] \\ \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k} f(2x - 3) &= 2x - 3 - [2x] + 3 = 2x - [2x] \\ g(x) = f(2x - 3) - 2f(x) &= 2x - [2x] - 2(x - [x]) \\ &= 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x] \end{aligned}$$

از ویژگی‌های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$
بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x) = 2[x] - [x] - [x + \frac{1}{2}] = [x] - [x + \frac{1}{2}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می‌دهیم. باتوجه به مقدار p ، دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می‌افتد:

$$g(x) = [x] - [x + \frac{1}{2}] = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq p < \frac{1}{2} \\ -1 & ; \frac{1}{2} \leq p < 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{0, -1\}$ می‌شود.

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1) = 8$ و $P(-\frac{1}{2}) = 5$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + R(x) = ((x - 1)(2x + 1))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(1) = R(1) = a + b = 8$$

$$P(-\frac{1}{2}) = R(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{2}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2, b = 8 - 2 = 6$$

پس: $R(x) = 2x + 6$

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{\text{واحد انتقال در جهت}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادله جدید را با معادله قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ق.ق} \\ x = -2 & \text{(غ.ق.ق زیرا } x > 1) \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1 + 4)} = 4\sqrt{5}$$



گام اول

فرض می کنیم $P(x) = x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است، پس با فرض اینکه $Q(x)$ خارج قسمت باشد، رابطه زیر را می توان نوشت:

$$P(x) = Q(x)(x^2 - 4)$$

گام دوم

روش اول:

عبارت $P(x)$ بر $(x^2 - 4)$ بخش پذیر است. بنابراین بر $(x - 2)(x + 2)$ بخش پذیر بوده و حاصل $P(x)$ به ازای $x = 2$ و $x = -2$ برابر صفر می شود. $P(2)$ و $P(-2)$ را به دست آورده و برابر صفر قرار می دهیم و مقدار a و b را محاسبه می کنیم:

$$P(2) = 2^2 + 4a(2^2) + 2b(2) + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 4b + 16a = -17 \quad (I)$$

$$P(-2) = (-2)^2 + 4a(-2)^2 + 2b(-2) + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -17 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow 4b + 16a = 16a - 4b \Rightarrow 8b = 0 \Rightarrow b = 0, \quad a = -\frac{17}{16} \Rightarrow a + b = -\frac{17}{16}$$

روش دوم:

عبارت $x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. بنابراین به ازای $x^2 = 4$ برابر صفر است.

$$P(x) = x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1 \Rightarrow P(x) = (x^2)^2 + 4a(x^2) + 2bx + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=4} (4)^2 + 4a(4) + 2bx + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a + 2bx + 1 = 0 \Rightarrow 2bx + 16a + 17 = 0$$

حاصل عبارت فوق صفر شده است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 16a + 17 = 0 \Rightarrow a = -\frac{17}{16} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{17}{16} + 0 = -\frac{17}{16}$$

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x - 15) > 0 \Rightarrow D_g = (\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x | x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty), \log(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log_{10}^{100} \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] \quad (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

دامنه تابع معکوس ($D_{f^{-1}}$) همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$ ، ضابطه تابع معکوس را مشخص می کنیم. برای یافتن ضابطه تابع معکوس از رابطه $y = f(x)$ را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می آید.

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x|$$

$$\xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^2 + 1} > -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^2+1}} f(x) > 0$$

$$\Rightarrow R_f = (0, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

دامنه تابع معکوس به صورت $x > 0$ در می آید.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy = 1$$

$$\Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 0$$

باتوجه به اینکه $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، می توان نتیجه گرفت: $g(2a) = f(6)$

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = f(6) = 3$$

$$\Rightarrow 2a = 3(2a-1) \Rightarrow 2a = 6a-3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

اصلاً نیازی به تعیین ضابطه $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطه دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(1)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \text{ fog}(x) = f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1+2}{1+1} \Rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3+2 = 5 \Rightarrow g(1) = 5$$

چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 2x + 3$ و $x^3 + x - 4$ به ترتیب ۱ و -۴ است، در نتیجه:

$$P(2) = 1, P(-3) = -4$$

باقی‌مانده $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را $ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$P(x) = (x^2 + x - 6)q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} P(2) = 2a + b = 1 \\ P(-3) = -3a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1, b = -1$$

پس باقی‌مانده $x - 1$ خواهد بود.

ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع $g \circ f$ را تعیین می‌کنیم.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x ، $0 \leq x - [x] < 1$ است، بنابراین:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

برد تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$-x + [x] = -1 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$-x + [x] = 0 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^0 = 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda \Rightarrow (f^{-1}(a), \lambda) \in g^{-1}$$

$$\Rightarrow (\lambda, f^{-1}(a)) \in g \Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a) \quad (*)$$

$$g(x) = \sqrt{5x+9} \Rightarrow g(\lambda) = \sqrt{49} \Rightarrow g(\lambda) = 7$$

$$\xrightarrow{(*)} f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow (a, 7) \in f^{-1} \Rightarrow (7, a) \in f \Rightarrow a = 3$$

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را برای دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می‌کنیم. برای هر کدام از این دو حالت ضابطهٔ $f \circ f(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = |x| - x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - x = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - x = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$۱) x \geq 0 : f(x) = 0 \Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$$

$$۲) x < 0 : f(x) = -2x \Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = f(-2x)$$

$$\xrightarrow{x < 0 \Rightarrow -2x > 0} f(-2x) = 0 \Rightarrow f \circ f(x) = 0$$

بنابراین تابع $f \circ f(x)$ به ازای تمام مقادیر x برابر صفر می‌شود.



گام اول

معکوس تابع نمایی $y = 2^x$ ، تابع لگاریتمی $y = \log_2^x$ است. نقطه برخورد این دو تابع با محورهای A و B نام گذاری کرده و فاصله دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

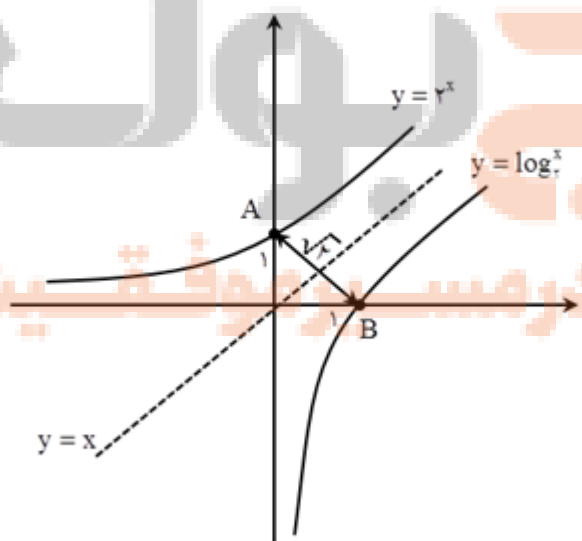
$$y = 2^x \xrightarrow[\text{برخورد با محور } y]{x=0} y = 2^0 = 1$$

پس نقطه برخورد تابع $y = 2^x$ با محور y ها نقطه $A(0, 1)$ است. نقطه برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_2^x$ با محور x ها نقطه $B(1, 0)$ است. فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به دست می آوریم.



ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون از روی ضابطه تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، مثبت است}} x \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

اکنون ضابطه تابع وارون را به دست می آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = 5 - 4y + y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت $y = x^2 - 4x + 5$; $x \leq 2$ است.

توابع $\text{fog}(x)$ و $\text{gof}(x)$ را تشکیل می دهیم و آن ها را برابر می گذاریم:

$$\text{fog}(x) = f(x+4) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$\text{gof}(x) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6)$$

$$2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

$y = -x$; $x > 0$: نیمساز ناحیه چهارم

نمودار f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را قطع می کند، بنابراین:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x>0} x = 1$$

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$x \rightarrow f \xrightarrow{f(x)} g \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطه f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحله دوم $f(x)$ وارد ضابطه g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطه $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطه $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 3x + 4, \quad g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4 \\ \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

بعضی از تست‌های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می‌توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می‌کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می‌گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می‌گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

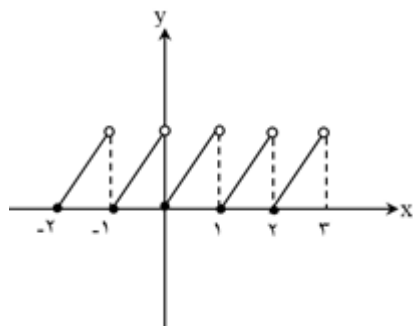
$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1-2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می‌گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] \\ = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{2})$ می شود.

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، پس:

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 \times 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{p}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{p} \times 1 = -0/5$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3})\right) = (-0/5)^2 - 2[-0/5] = 0/25 - 2(-1) = 2/25$$

چون $f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، بنابراین $f(-2) = 0$ است.

$$f(x) = x^6 + ax^3 - \lambda x \Rightarrow f(-2) = 16 - \lambda a + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda a = 32 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = x^6 + 4x^3 - \lambda x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x + 2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^6 + 4x^3 - \lambda x \\ -(x^6 + 2x^3) \\ \hline 2x^3 - \lambda x \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -4x^2 - \lambda x \\ -(-4x^2 - \lambda x) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1 - \sqrt{5}$ است.

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0 \Leftarrow \text{غ.ق.ق} \Leftarrow$ گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = 1 \Leftarrow \text{غ.ق.ق} \Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

ازطرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه ۴ قابل قبول است.

برای به دست آوردن برد تابع $g \circ f$ ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ ، ازطرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) > 0 \Rightarrow R_{g \circ f} = (0, +\infty)$$

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می‌کنیم). سپس معادله $f^{-1}(g(a)) = 6$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y + 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow \frac{g(a)+5}{2} = 6 \Rightarrow g(a)+5 = 12 \Rightarrow g(a) = 7 \xrightarrow{(f,y) \in g} a = 4$$

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، ابتدا $f(-۱۴۴)$ و سپس $f(f(-۱۴۴))$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + 2|x|} \Rightarrow f(-۱۴۴) = \sqrt{-۱۴۴ + 2|-۱۴۴|} \\ &= \sqrt{-۱۴۴ + ۲۸۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow f(-۱۴۴) = ۱۲ \end{aligned}$$

حالا $f(۱۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(f(-۱۴۴)) = f(۱۲) = \sqrt{۱۲ + 2|۱۲|} = \sqrt{۱۲ + ۲۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

گام اول

دامنه تابع gof از رابطه $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} | \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 & (۱) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cap (۲) : x \in \{0\}$$

گام اول

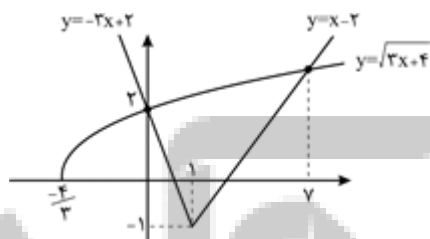
هر عبارت شامل قدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه قدر مطلق و مقادیر کوچکتر از آن به طور جداگانه بررسی کرد.

گام دوم

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y = \sqrt{3x+4}$ و $y = 2|x-1| - x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y = \sqrt{3x+4}$ بالای نمودار تابع $y = 2|x-1| - x$ قرار می‌گیرد. باتوجه به گام اول، ابتدا وضعیت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$y = 2|x-1| - x = \begin{cases} 2(x-1) - x & ; x \geq 1 \\ 2(-x+1) - x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 1 \\ -3x+2 & ; x < 1 \end{cases}$$



همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادله داده شده بازه $(-4/3, 7)$ است و طول وسط آن $7/3$ می‌شود.

روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{3x+4}$ روی بازه $[-4/3, +\infty)$ تعریف شده و $x=1$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq 1$ و $-4/3 \leq x < 1$ به دست می‌آوریم:

$$x \geq 1: |x-1| = x-1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2$$

در بازه $[1, 2)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بازه $x-2 < 0$ و $\sqrt{3x+4} > 0$ است. به ازای $x \geq 2$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$\begin{aligned} 3x+4 &> (x-2)^2 \Rightarrow 3x+4 > x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 7x < 0 \\ \Rightarrow x(x-7) < 0 &\Rightarrow 0 < x < 7 \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < 7 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 1: |x-1| = -(x-1) = -x+1 &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(-x+1) - x \\ \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -2x+2-x &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \end{aligned}$$

در محدوده $-4/3 \leq x < 0$ نامعادله $\sqrt{3x+4} > -3x+2$ برقرار نیست پس جواب نامعادله را در محدوده $0 < x < 1$ بررسی می‌کنیم. باتوجه به اینکه به ازای $0 < x < 1$ ، $|-3x+2| > |\sqrt{3x+4}|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به

$$3x + 4 > (2 - 3x)^2 \Rightarrow 3x + 4 > 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow 9x^2 - 15x < 0$$

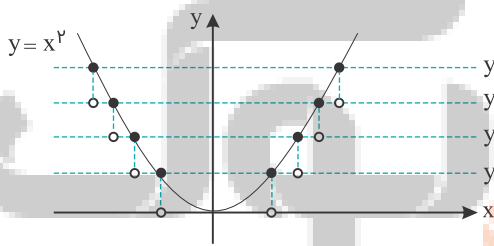
$$\Rightarrow 3x(3x - 5) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{0 < x < 1} 0 < x < 1 \text{ (II)}$$

اجتماع دو بازه (I) و (II)، بازه $0 < x < 1$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{1}{3}$ است.

گزینه ۴

۱۳۰

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می‌گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $x \in (-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

گزینه ۲

۱۳۱

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-1)^2 = -(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+1)^2 + 4$$

حال باید طول نقطه تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-1)^2 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 : -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2 : -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

گزینه ۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آن‌ها با هم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم با هم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m+2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

$$f(6) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \xrightarrow{x=t^2} x = 9$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=t^2} x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند.

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(6) = f^{-1}(6) = a \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(6) = 4$$

$$g(12) = f^{-1}(12) = b \Rightarrow f(b) = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + 4)(\sqrt{b} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -4 \text{ غ ق ق} \\ \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow g(12) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(6) + g(12) = 4 + 9 = 13$$