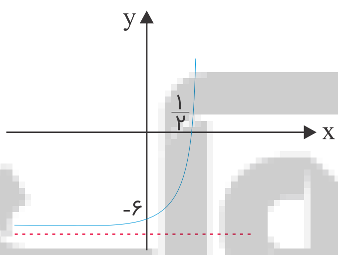
۱ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به‌جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود؟ $(\log ۲ = ۰/۳ \,,\, \log ۳ = ۰/۴۸)$

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۳۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۹ + (\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ است. $f(۲)$، کدام است؟



۱) ۲۳۴
۲) ۱۰۸
۳) ۷۲
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲^x - (\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ را در نظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_۲^{(-۱+\sqrt{۵})}$
۲) $\log_۲^{(۱+\sqrt{۵})}$
۳) $\log_۲^{(۲+\sqrt{۵})}$
۴) $\log_۲^{(۳+\sqrt{۵})}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ اگر $\log_۳^۲ = \frac{۵}{۸}$ باشد، آنگاه $\log_{۱۸}^{۸}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۲}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۸}{۱۱}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{۱}{۱۰}$ جرم باقی‌مانده را ازدست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log ۳ = ۰/۴۸)$

۱) ۳۶۰
۲) ۳۰۰
۳) ۲۷۰
۴) ۲۴۰

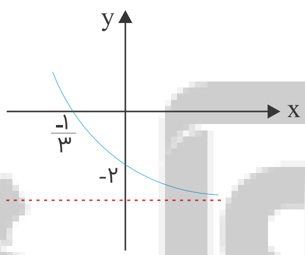
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶ اگر $\log_{۴}^{۳} = ۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲}^{۶}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$
۲) $\frac{۸}{۱۱}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۴ + ۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ از معادله لگاریتمی $\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x + ۱}$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ دو تابع f و g مفروض اند، در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

۱) $f(x) = ۲\log x$ و $g(x) = \log x^۲$
۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}$ و $g(x) = ۱$
۳) $f(x) = (\sqrt{x})^۲$ و $g(x) = x$
۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۰ اگر $۲^{A} = \left(\dfrac{۴\sqrt{۳۲}}{۲\sqrt{۸}}\right)^{۲}$، عدد A کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۶

۳) $۸\sqrt{۲}$

۴) $۱۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ اگر $f(x) = ۲^{x}$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(\frac{۱}{x}) - f(x)}$، به کدام صورت است؟

۱) $R - (-۱, ۱)$

۲) $[-۱, ۰) \cup (۰, ۱]$

۳) $[-۱, ۰) \cup [۱, +\infty)$

۴) $(-\infty, -۱] \cup (۰, ۱]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۲ اگر $۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $\log ۲ = ۰/۳۰۱$، کوچک ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

۱) $۱۹/۸۹$

۲) $۱۹/۹۱$

۳) $۱۹/۹۴$

۴) $۱۹/۹۷$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ نمودار یک تابع به‌صورت $f\,(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^{۲} - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f\,(۳)$ کدام است؟

۱) ۳

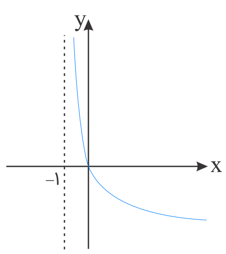
۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_{۲}^{U(x)}$ است. $U\,(x)$ کدام است؟



۱) $x + ۱$

۲) $(x + ۱)^{-۱}$

۳) $x - ۱$

۴) $۱ - x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ اگر $(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} = (۰/۴)^{۲x-۱}$ باشد، $\log_۸^{(۹x+۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x\ ;\ b > ۰$، داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$. مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۷ تابع $f(x) = \log_۳^{(ax+b)}$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(۴) = ۲$ باشد، آن گاه $f(-\frac{۴}{۹})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۸ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = ۲^x$ و $y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴$ از نقطهٔ $A(۰, ۴)$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - ۱$، از دو نقطهٔ $A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $B(۱, ۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = A(۲)^{Bx}$ و خط به معادلهٔ $۴y = ۵x$، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-۱}(۱۰)$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_{۲}^{(bx-۴)}$ از دو نقطهٔ $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۲ اگر $\log_{b}^{a} = \frac{۳}{۲}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵

۳) ۶   ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۳ از دو معادلهٔ دومجهولی $۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y}$ و $\log(x+۲y) = ۱ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) $۱/۲$ ۲) $۱/۴$

۳) $۱/۵$ ۴) $۱/۶$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = ۳^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^{۲}$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ اگر $\log \frac{۲}{x} + \log(x+۱) = ۱$ باشد، لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۲۶ اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^{۳} + ۷)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۷ از تساوی $\log_{x}^{(x^{۲}+۴)} = ۱ + \log_{x}^{۵}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۸ از دو معادلهٔ $\log(y+۲) = ۱$ و $\log(y-x) + \log(۴x+y) = ۲$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۹ از دو معادلهٔ $۴^{x} + ۲^{x} = ۷۲$ و $\log(x+۱) + \log(۲y + x^{۲}) = ۲$، مقدار y کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۰ از دو معادلهٔ $\log_{۳}^{x} + \log_{۳}^{y} = ۲$ و $x^{۲} + y^{۲} = ۴۶$، لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۱ اگر $۴\sqrt{۲} = ۴^{x}$ و $۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y$، مقدار y کدام است؟

۱) ۷/۵
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۵
۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۲ از معادلات $۲^{x} \times ۸^{y} = ۴$ و $\log x = \log ۲ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۳ اگر $\log_{۲}^{(۵x+۱)} + \log_{۲}^{x} = ۲$ باشد، عدد $\frac{۴}{x}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۴ نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ نسبت به هم چگونه اند؟

۱) $f(x)$ بالاتر

۲) $g(x)$ بالاتر

۳) منطبق‌اند

۴) فقط در یک نقطه متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۵ اگر $\log(۸۱)^{K}=\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۶ اگر $\log ۲=k$ باشد، حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$، کدام است؟

۱) $۲k$

۲) $۴k$

۳) $۱+k$

۴) $۲+۴k$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۷ اگر a و b ریشه های معادلهٔ $x^{۲}-۱۰x+۰/۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) صفر

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۸ اگر $۴^{a}=۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۴a+۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۹ اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(۱-\frac{۱}{A})$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) -۳

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۴۰ اگر $۳^{a}=A$ باشد، $\log_{۳}^{۹A^{۲}}$ همواره کدام است؟

۱) $۲+۲a$

۲) $۳+۲a$

۳) $۲+a^{۲}$

۴) $۳+a^{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۱ از معادلهٔ لگاریتمی $\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)} - \log_{۳}^{(x+۲)} = ۱$، مقدار لگاریتم $(۲x - ۱)$ در پایهٔ ۸، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۲ نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{(ax+b)}$، محور xها رادر نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۳ از تساوی $\log_{x}^{(x-۶)} = ۲ - \log_{x}^{(۳x+۸)}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۴ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \log(x^{۲} - ۳x)}$، به کدام صورت بازه‌ها است؟

۱) $[-۲, ۰) \cup (۳, ۵]$

۲) $[-۲, ۰] \cup (۳, ۵)$

۳) $[-۲, ۳)$

۴) $(۰, ۵]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۴۵ نمودارهای دو تابع $f(x) = ۴^{x}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۶ کدام‌یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-۲}{x}$ برابر است؟

۱) $\log(x-۲) - \log x$

۲) $\log \frac{x^{۲} - ۴}{x^{۲} + ۲x}$

۳) $\frac{۱}{۲} \log (\frac{x-۲}{x})^{۲}$

۴) $۲ \log \sqrt{\frac{x-۲}{x}}$

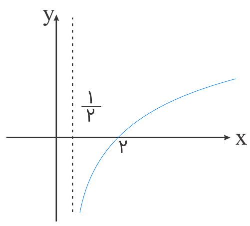
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ از دو معادلهٔ دومجهولی $۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲\log ۳ + \log x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۹ اگر $۸۱^x = ۳^{x^۲-۲}$ باشد، $\log_۶^{(x-۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۰ نمودارهای دو تابع $f(x) = ۳^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{۱}{۹}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. اگر $f(۲) = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۱ نمودارهای دو تابع $y = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}$ و $y = ۳^x + \frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۲ از رابطهٔ $\log(۴x+۱) = \log(x+۲) + \log(۲x-۱)$، مقدار لگاریتم $(۲x+۵)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۳ یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟ $(\log ۱۹ = ۱/۲۸۷ \,,\, \log ۲ = ۰/۳۰۱)$

۱) ۱۷
۲) ۱۸/۵
۳) ۲۱/۵
۴) ۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۴ از رابطهٔ $\log(۴x-۱) = \log(۲x-۵) + \log(x+۱)$، مقدار لگاریتم $(۲x+۱)$ در پایهٔ ۳، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۵ جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال، کم می‌شود. با این روند با گذشت چند سال جمعیت این شهر، نصف جمعیت فعلی آن می‌شود؟ $(\log ۹۹ = ۱/۹۹۵ \ ,\ \log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۶۴
۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۶ اگر $\log ۵ = ۳k$، آنگاه $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

۱) $۱-۴k$
۲) $۲-۵k$
۳) $۱-۲k$
۴) $۱-k$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵۷ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{۱-\log(x-۱)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(۱, ۲]$
۲) $[۲, ۱۰]$
۳) $[۱, ۱۱)$
۴) $(۱, ۱۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_{2}(3x+b)^{2}$، از دو نقطهٔ (۵, ۱۱) و (۲۱, ۱۵) می‌گذرد، a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ گزینه ۲

در هر روز غلظت محلول $\frac{۱۰۰-۴}{۱۰۰}$ یعنی $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n = \frac{۱}{۳}a \Rightarrow n\log(\frac{۹۶}{۱۰۰}) = -\log ۳ \Rightarrow n(\log ۲^۵ \times ۳ - \log ۱۰^۲) = -\log ۳$$

$$\Rightarrow n(۵\log ۲ + \log ۳ - ۲) = -\log ۳ \Rightarrow n(۱/۵ + ۰/۴۸ - ۲) = -۰/۴۸ \Rightarrow n = \frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲} = ۲۴$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود.

۲ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰,-۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^b = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۳^۲ \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+۱} = ۳^۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲x-۱} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴-۱} = -۹ + ۳^۵$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

۳ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۲^{x}-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲}\xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?}\frac{۲^{x}-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۲^{x}-\frac{۱}{۲^{x}}=۴\xrightarrow{t=۲^{x}}t-\frac{۱}{t}=۴\Rightarrow t^{۲}-۱=۴t$$

$$\Rightarrow t^{۲}-۴t-۱=۰\Rightarrow\Delta=۲۰\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۲}=۲+\sqrt{۵}\\ t=\frac{۴-۲\sqrt{۵}}{۲}=۲-\sqrt{۵}\end{cases}$$

$$t=۲^{x}\Rightarrow x=\log_{۲}^{t}\Rightarrow\begin{cases}x=\log_{۲}^{(۲+\sqrt{۵})}\\ x=\log_{۲}^{(۲-\sqrt{۵})}<۰\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

جواب $x=\log_{۲}^{(۲-\sqrt{۵})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا $۲-\sqrt{۵}<۰$ می‌باشد.

۴ گزینه ۲

نکته:

$$۱)\ \log_{b}^{a}=\frac{\log_{x}^{a}}{\log_{x}^{b}}(x>۰,x\neq۱)$$

$$۲)\ \log_{a}^{b^{n}}=n\log_{a}^{b}$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{۱۸}^{۸}=\frac{\log_{۳}^{۸}}{\log_{۳}^{۱۸}}=\frac{\log_{۳}^{۲^{۳}}}{\log_{۳}^{۲}+\log_{۳}^{۹}}=\frac{۳\log_{۳}^{۲}}{\log_{۳}^{۲}+\log_{۳}^{۳^{۲}}}$$

$$=\frac{۳\log_{۳}^{۲}}{\log_{۳}^{۲}+۲\underbrace{\log_{۳}^{۳}}_{۱}}=\frac{۳\left(\frac{۵}{۸}\right)}{\frac{۵}{۸}+۲}=\frac{\frac{۱۵}{\cancel{۸}}}{\frac{۲۱}{\cancel{۸}}}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

۵ گزینه ۱

مقدار اولیهٔ عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{۱}{۱۰}$ باقی‌مانده را ازدست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{۹}{۱۰}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$۸ = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین $\log_{۱۰}$ می‌گیریم:

$$n(\log(\frac{۹}{۱۰})) = \log(\frac{۱}{۳}) \Rightarrow n(\log ۹ - \log ۱۰) = \log(\frac{۱}{۳})$$
$$\Rightarrow n(۲\log ۳ - \log ۱۰) = -\log ۳ \Rightarrow n(۲ \times ۰/۴۸ - ۱) = -۰/۴۸$$
$$\Rightarrow n(۰/۹۶ - ۱) = -۰/۴۸ \Rightarrow ۰/۰۴n = ۰/۴۸ \Rightarrow n = ۱۲$$

پس ۱۲ ماه یعنی $۳۶۰ = ۳۰ \times ۱۲$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم.)

۶ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$
$$۲)\ \log_a^{b^n} = n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_۴^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۴} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲^۲} = ۰/۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\frac{\log ۳}{\log ۲} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲} = ۱/۶ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲ \quad (*)$$

سپس باتوجه‌به (*) مقدار $\log_{۱۲}^۶$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{۱۲}^۶ = \frac{\log ۶}{\log ۱۲} = \frac{\log ۲ \times ۳}{\log ۲^۲ \times ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{\log ۲^۲ + \log ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{۲\log ۲ + \log ۳}$$
$$= \frac{\log ۲ + ۱/۶\log ۲}{۲\log ۲ + ۱/۶\log ۲} = \frac{(۱+۱/۶)\log ۲}{(۲+۱/۶)\log ۲} = \frac{۲/۶}{۳/۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطهٔ (*)، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

نکته: $\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m}\log_a^b$

$$\log_۴^۳ = \log_{۲^۲}^۳ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲$$

۷

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ و $(۰, -۲)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(۰, -۲) : f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^b = -۲ \Rightarrow ۲^b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) : f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۴ = ۲^۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}a + ۱ = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}a = ۱ \Rightarrow a = -۳$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱}$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{-۳\times(-\frac{۵}{۳})+۱} = -۴ + ۲^{۵+۱} = -۴ + ۲^۶ = ۶۰$$

۸

گزینه ۲

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \ , \ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a \ , \ \log_a^a = ۱$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = \log_b^a$، همواره باید $a > ۰$ و $b \neq ۱$ باشد.

گام دوم

ابتدا با حل معادلهٔ لگاریتمی داده‌شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log(x - ۳)(x + ۲) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x - ۳)} = \log(۲x - ۵) \Rightarrow \log(x + ۲) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow x + ۲ = ۲x - ۵ \Rightarrow x = ۷$$

به ازای $x = ۷$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل‌قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x + ۱}$ در پایهٔ ۴ را به ازای $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$\log_۴^{\sqrt[۳]{x+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۷+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۸}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۲^۳}} = \log_۴^۲ = \log_{۲^۲}^۲ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۹ گزینه ۴

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱)\ D_f = D_g$$

$$۲)\ \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = ۲\log x \Rightarrow D_f = (۰, +\infty) \\ g(x) = \log x^۲ \Rightarrow D_g = R - \{۰\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|} \Rightarrow D_f = R - \{۰\} \\ g(x) = ۱ \Rightarrow D_g = R \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = (\sqrt{x})^۲ \Rightarrow D_f = (۰, +\infty) \\ g(x) = x \Rightarrow D_g = R \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = \dfrac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = R - \{۰\} \\ g(x) = \dfrac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = R - \{۰\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر ۱- می شوند، پس برابرند.

۱۰ گزینه ۴

برای محاسبهٔ A کافی است سمت چپ تساوی را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۲ بنویسیم. در این صورت در دو طرف تساوی پایه ها با هم مساوی بوده و درنتیجه توان ها نیز باید مساوی باشد.

$$\left(\frac{۴^{\sqrt{۳۲}}}{۲^{\sqrt{۸}}}\right)^۲ = \left(\frac{(۲^۲)^{۴\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}}\right)^۲ = \left(\frac{۲^{۸\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}}\right)^۲ = (۲^{۸\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}})^۲ = (۲^{۶\sqrt{۲}})^۲ = ۲^{۱۲\sqrt{۲}} = ۲^A \Rightarrow A = ۱۲\sqrt{۲}$$

۱۱ گزینه ۴

$$y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-f(x)}=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}-2^{x}}$$

برای یافتن دامنهٔ تعریف تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^{\frac{1}{x}}-2^{x}\geq 0\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\geq 2^{x}$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{x}\geq x\Rightarrow x-\frac{1}{x}\leq 0\Rightarrow \frac{x^{2}-1}{x}\leq 0$$

x		-1		0		1	
$\frac{x^2-1}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

پس دامنهٔ تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۱۲ گزینه ۳

برای تعیین محدودهٔ x، از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادلهٔ داده‌شده از ویژگی $\log a^{n}=n\log a$ استفاده می کنیم.

$$2^{-x}<0/000001\Rightarrow 2^{-x}<10^{-6}\xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم}}\log 2^{-x}<\log 10^{-6}$$
$$\xrightarrow{\log a^{n}=n\log a}-x\log 2<-6\log 10\xrightarrow{\log 10=1}-x\log 2<-6\xrightarrow{\times(-1)}x\log 2>6$$

در صورت سؤال $\log 2=0/301$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(0/301)>6\Rightarrow x(\frac{301}{1000})>6\Rightarrow x>\frac{6000}{301}\Rightarrow x>19/933$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر ۱۹/۹۴ است.

۱۳ گزینه ۴

ابتدا نقاط مشترک دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^{۲} - x \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow A\,(۱, ۰) \\ x = ۲ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow B\,(۲, ۲) \end{cases}$$

$$A \in f \Rightarrow -۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{A+B} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{A+B} = ۲ \Rightarrow A + B = -۱ \quad (۱)$$

$$B \in f \Rightarrow -۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲A+B} = ۲ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲A+B} = ۴ \Rightarrow ۲A + B = -۲ \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

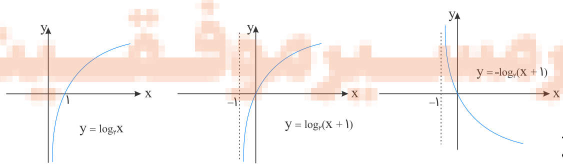
$$\begin{cases} A + B = -۱ \\ ۲A + B = -۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} A = -۱\ ,\ \ B = ۰$$

تابع به فرم $f\,(x) = -۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-x}$ خلاصه می‌شود.

$$f\,(۳) = -۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = -۲ + ۸ = ۶$$

۱۴ گزینه ۲

به کمک انتقال و قرینهٔ نمودار تابع $\log_{۲}^{x}$، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y = -\log_{۲}^{(x+۱)} = \log_{۲}^{(x+۱)^{-۱}} \Rightarrow U\,(x) = (x + ۱)^{-۱}$$

۱۵ گزینه ۱

$$(0/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{125}{8})^{x^2} = ((\frac{5}{2})^3)^{x^2} = (\frac{5}{2})^{3x^2} = (\frac{2}{5})^{-3x^2} = (\frac{4}{10})^{-3x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{4}{10})^{2x-1} = (\frac{4}{10})^{-3x^2} \Rightarrow -3x^2 = 2x-1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{1}{3} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

به ازای $x = -1$ عبارت $\log_8^{(9x+1)}$ تعریف‌نشده است.

برای $x = \frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_8^{(9x+1)} = \log_8^{(9\times\frac{1}{3}+1)} = \log_8^4 = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}$$

۱۶ گزینه ۳

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times b^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$ در می آید. مقدار $f(\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = \frac{3}{2} \times 8 = 3 \times 4 = 12$$

۱۷ گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax+b>۰$ بوده و $x>-\frac{b}{a}$ می‌شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل‌قبول برای x، رابطهٔ بین a و b مشخص می‌شود.

ب) $f(۴)=۲$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده‌شده مقادیر a و b مشخص شده و درنهایت $f(-\frac{۴}{۹})$ حساب می‌شود.

گام دوم

$$x>-\frac{b}{a}, x\in(-\frac{۱}{۲},+\infty)\Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲b\ \ (I)$$

$$f(۴)=۲\Rightarrow \log_{۳}^{(۴a+b)}=۲\Rightarrow ۴a+b=۳^{۲}=۹\Rightarrow ۴a+b=۹$$

$$\xrightarrow{(I)} ۴(۲b)+b=۹\Rightarrow ۸b+b=۹\Rightarrow ۹b=۹\Rightarrow b=۱\xrightarrow{(I)} a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\log_{۳}^{(۲x+۱)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{۴}{۹})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-\frac{۴}{۹})=\log_{۳}^{(-\frac{۸}{۹}+۱)}=\log_{۳}^{\frac{۱}{۹}}=\log_{۳}^{۳^{-۲}}=-۲\log_{۳}^{۳}=-۲$$

۱۸ گزینه ۴

$$\begin{cases} y=۲^{x} \\ y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴ \end{cases}\Rightarrow ۲^{x}=\sqrt{۲}\times ۲^{\frac{x}{۲}}+۴\xrightarrow{۲^{\frac{x}{۲}}=t} t^{۲}=\sqrt{۲}t+۴\Rightarrow t^{۲}-\sqrt{۲}t-۴=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm ۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \begin{cases} t=۲\sqrt{۲} \\ t=-\sqrt{۲}\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$۲^{\frac{x}{۲}}=t\xrightarrow{t=۲\sqrt{۲}} ۲^{\frac{x}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=۲^{۳}=۸$$

$$d=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۸-۴)^{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۱۹ گزینه ۳

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:

الف) مختصات دو نقطهٔ A و B را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

ب) با مشخص شدن ضابطهٔ $f(x)$، حاصل $f(-۱)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=a(b)^{x}-۱ \xrightarrow{A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})} \frac{۱}{۲}=a(b)^{-\frac{۱}{۲}}-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x)=a(b)^{x}-۱ \xrightarrow{B(۱,۱۱)} ۱۱=ab-۱ \Rightarrow ab=۱۲ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{۳}{۲}\sqrt{b}\times b=۱۲ \Rightarrow b^{\frac{۳}{۲}}=۸ \Rightarrow \sqrt{b^{۳}}=۸$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} b^{۳}=۶۴ \Rightarrow b=۴ \xrightarrow{(II)} ۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=۳(۴)^{x}-۱$ در می آید. $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱)=۳(۴)^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

۲۰ گزینه ۳

نقاط برخورد در ضابطهٔ توابع $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و $۴y=۵x$ صدق می‌کند.

$$۴y=۵x \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow (۲,\frac{۵}{۲}) \\ x=۴ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow (۴,۵) \end{cases}$$

$$f(x)=A(۲)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (۲,\frac{۵}{۲}) : \frac{۵}{۲}=A(۲)^{B\times ۲} \Rightarrow ۵=۲A(۲)^{۲B} \\ (۴,۵) : ۵=A(۲)^{B\times ۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲A(۲)^{۲B}=A(۲)^{۴B} \Rightarrow ۲^{۲B+۱}=۲^{۴B} \Rightarrow ۲B+۱=۴B \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}$$

$$۵=A(۲)^{۴B} \xrightarrow{B=\frac{۱}{۲}} ۵=A(۲)^{۲} \Rightarrow A=\frac{۵}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}=۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{x}{۲}}=۸=۲^{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow f^{-۱}(۱۰)=۶$$

۲۱ گزینه ۳

گام اول

مختصات دو نقطهٔ $(2,6)$ و $(12,10)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطهٔ تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$f(2)=6 \Rightarrow a+\log_2^{(2b-4)}=6 \Rightarrow \log_2^{(2b-4)}=6-a$$

$$\Rightarrow 2^{6-a}=2b-4 \qquad (1)$$

$$f(12)=10 \Rightarrow a+\log_2^{(12b-4)}=10 \Rightarrow \log_2^{(12b-4)}=10-a$$

$$\Rightarrow 12b-4=2^{10-a} \qquad (2)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{2^{6-a}}{2^{10-a}}=\frac{2b-4}{12b-4} \Rightarrow 2^{-4}=\frac{2b-4}{12b-4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16}=\frac{2(b-2)}{4(3b-1)} \Rightarrow 3b-1=8(b-2) \Rightarrow 3b-1=8b-16$$

$$\Rightarrow 5b=15 \Rightarrow b=3 \xrightarrow{(2)} 2^{10-a}=32=2^5 \Rightarrow 10-a=5 \Rightarrow a=5$$

۲۲ گزینه ۴

با استفاده از دو ویژگی $\log ab=\log a+\log b$ و $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$ ، عبارت لگاریتمی را ساده کرده و با توجه به فرض $\log_b^a=\frac{3}{2}$، مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}=\log_{\sqrt{b}}^{a}+\log_{\sqrt{b}}^{b^2}=\log_{b^{\frac{1}{2}}}^{a}+\log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_b^a+\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_b^b$$

$$=2\log_b^a+4\log_b^b=2\left(\frac{3}{2}\right)+4(1)=3+4=7$$

۲۳ گزینه ۴

$$3^{2x+y}=9\times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y}=3^{2+x-y} \Rightarrow 2x+y=2+x-y \Rightarrow 2y=2-x \quad (1)$$

$$\log(x+2y)=1+\log y \Rightarrow \log(x+2y)-\log y=\log 10$$

$$\log\frac{(x+2y)}{y}=\log 10 \Rightarrow \frac{x+2y}{y}=10 \Rightarrow x+2y=10y \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)} x+2y=5\times(2y) \xrightarrow{(1)} x+2-x=5(2-x) \Rightarrow x=\frac{8}{5}=1/6$$

۲۴ گزینه ۳

نقاط مشترک دو تابع $C\left(۱,۱\right)$ و $D\left(۳,۹\right)$ است.

$$C\in f\Rightarrow ۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=۰$$
$$D\in f\Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow ۳A+B=۲$$

$$\begin{cases}A+B=۰\\ ۳A+B=۲\end{cases}\xrightarrow{(-)}۲A=۲\Rightarrow A=۱\ ,\ B=-۱$$

$$f\left(x\right)=۳^{x-۱}\Rightarrow f\left(۰\right)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۲۵ گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log a+\log b=\log ab$، معادلهٔ لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$\log\frac{۲}{x}+\log(x+۱)=۱\Rightarrow\log\frac{۲}{x}(x+۱)=۱\Rightarrow\frac{۲(x+۱)}{x}=۱۰$$
$$\Rightarrow ۲(x+۱)=۱۰x\Rightarrow ۲x+۲=۱۰x\Rightarrow ۸x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ $\log_۸^x$ از ویژگی $\log_b^a\frac{m}{n}=\log_{b^n}^{a^m}$ استفاده می کنیم.

$$\log_۸^x=\log_۸^{\frac{۱}{۴}}=\log_{۲^۳}^{۲^{-۲}}=-\frac{۲}{۳}\log_۲^۲=-\frac{۲}{۳}$$

۲۶ گزینه ۲

با استفاده از فرضیات بیان‌شده در صورت سؤال، مقدار $a^۳$ را به دست می‌آوریم.

$$\log_{\sqrt{۳}}^a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۳^a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲\log_۳^a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\log_۳^a=\frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{\log_b^a=c\Rightarrow a=b^c}a=۳^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow a^۳=\left(۳^{\frac{۲}{۳}}\right)^۳=۳^۲=۹$$

با استفاده از ویژگی $\log_b^a\frac{m}{n}=\log_{b^n}^{a^m}$ حاصل لگاریتم $\left(a^۳+۷\right)$ را در مبنای ۸ حساب می کنیم:

$$\log_۸^{(a^۳+۷)}=\log_۸^{(۹+۷)}=\log_۸^{۱۶}=\log_{۲^۳}^{۲^۴}=\frac{۴}{۳}\log_۲^۲=\frac{۴}{۳}$$

۲۷ گزینه ۴

$$\log_x^{(x^2+4)} = 1 + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^x + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^{5x}$$
$$\Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 4 \end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم ۴ در پایهٔ ۲ را حساب می کنیم:

$$\log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2\log_2^2 = 2$$

۲۸ گزینه ۳

با استفاده از معادلهٔ $\log(y+2) = 1$ به آسانی مقدار y را حساب می‌کنیم.

$$\log(y+2) = 1 \Rightarrow \log_{10}^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y + 2 = 10 \Rightarrow y = 8$$

y را در معادلهٔ دوم قرار داده و مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \Rightarrow \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$$
$$\xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10}^{(8-x)(4x+8)} = 2 \Rightarrow (8-x)(4x+8) = 10^2 = 100$$
$$\Rightarrow -4x^2 + 24x + 64 = 100 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۲۹ گزینه ۳

معادلهٔ توانی را با استفاده از تغییر متغیر $2^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار 2^x همیشه مثبت است.

$$4^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x = 72 \xrightarrow{2^x = t} t^2 + t = 72$$
$$\Rightarrow t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-8) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = -9 & \text{غ.ق.ق} \\ t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادلهٔ لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار y را به دست می آوریم.

$$\log(x+1) + \log(2y + x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2$$
$$\xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10}^{4(2y+9)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} 4(2y+9) = 10^2 = 100$$
$$\Rightarrow 2y + 9 = 25 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$$

۳۰ گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$، معادلهٔ لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xy را حساب می کنیم.

$$\log_۳^x + \log_۳^y = ۲ \Rightarrow \log_۳^{xy} = ۲ \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} xy = ۳^۲ = ۹$$

مقادیر $x^۲ + y^۲$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x + y$ را محاسبه می کنیم.

$$(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy \xrightarrow[x^۲+y^۲=۴۶]{xy=۹} (x+y)^۲ = ۴۶ + ۱۸ = ۶۴$$

$$\xrightarrow[\text{عدد جلوی لگاریتم}]{x\,,y>۰} x + y = ۸ \log_۴^{(x+y)} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۳۱ گزینه ۳

گام اول

الف) در صورت سؤال دو معادله یکی به صورت نمایی و دیگری لگاریتمی داده‌شده است. در معادلهٔ نمایی تنها مجهول x و در معادلهٔ لگاریتمی x و y مجهول است. پس ابتدا معادلهٔ نمایی را حل کرده و x را محاسبه می کنیم. سپس با جایگذاری x در معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را هم به دست می آوریم.

ب) برای حل معادلهٔ نمایی دو طرف را به دو عدد توان دار با پایهٔ ۲ تبدیل کرده و با مساوی قرار دادن توان ها مقدار x را حساب می کنیم.

گام دوم

$$۴\sqrt{۲} = ۴^x \Rightarrow ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^۲)^x \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

حال با داشتن مقدار x و حل معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را محاسبه می کنیم:

$$۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y \xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}} ۱ + \log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ + \log\sqrt{\frac{۹}{۴}} = \log y$$

$$\Rightarrow \log ۱۰ + \log\frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow \log ۱۰(\frac{۳}{۲}) = \log ۱۵ = \log y \Rightarrow y = ۱۵$$

۳۲ گزینه ۴

دو معادلهٔ نمایی و لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم.

برای حل از دو ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ و $a^n \times a^m = a^{m+n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲^x \times ۸^y = ۴ \Rightarrow ۲^x \times (۲^۳)^y = ۲^۲ \Rightarrow ۲^x \times ۲^{۳y} = ۲^۲ \Rightarrow x + ۳y = ۲ \\ \log x = \log ۲ + \log y \Rightarrow \log x = \log ۲y \Rightarrow x = ۲y \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲y + ۳y = ۲ \Rightarrow ۵y = ۲ \Rightarrow y = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{x=۲y} x = \frac{۴}{۵}$$

۳۳ گزینه ۴

با استفاده از ویژگی های $\log_b^{a}+\log_b^{c}=\log_b^{ac}$ و $\log_b^{a}=c\Rightarrow a=b^{c}$ معادله را حل می کنیم:

$$\log_{۲}^{(۵x+۱)}+\log_{۲}^{x}=۲\Rightarrow \log_{۲}^{(۵x+۱)x}=۲\Rightarrow (۵x+۱)x=۲^{۲}=۴\Rightarrow ۵x^{۲}+x=۴$$
$$\Rightarrow ۵x^{۲}+x-۴=۰\Rightarrow (۵x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} ۵x-۴=۰\Rightarrow ۵x=۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۵} \\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$x=-۱$ به این دلیل قابل‌قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x=\frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار $\frac{۴}{x}$ برابر ۵ به دست می آید.

۳۴ گزینه ۳

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x)=\log_{۲}^{\frac{۱}{x}}=\log_{۲}^{x^{-۱}}=-\log_{۲}^{x}\ ,\ D_f=(۰,+\infty)$$
$$g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}=\log_{۲^{-۱}}^{x}=-\log_{۲}^{x}\ ,\ D_g=(۰,+\infty)$$

مشاهده می کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضابطه های برابر و دامنه تعریف یکسان دارند. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هستند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

۳۵ گزینه ۳

با استفاده از ویژگی $\log A^{n}=n\log A$، ابتدا مقدار K را محاسبه می کنیم.

$$\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^{K}\Rightarrow \log ۳+\log ۳^{\frac{۱}{۴}}=\log(۳^{۴})^{K}=\log ۳^{۴K}$$
$$\xrightarrow{\log A^{n}=n\log A}\log ۳+\frac{۱}{۴}\log ۳=۴K\log ۳\Rightarrow (۱+\frac{۱}{۴})\log ۳=۴K\log ۳$$
$$\Rightarrow ۴K=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow K=\frac{۵}{۱۶}\ \text{یا}\ \frac{۵}{K}=۱۶$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می کنیم:

$$\log_{۲}^{\frac{۵}{K}}=\log_{۲}^{\frac{۵}{\frac{۵}{۱۶}}}=\log_{۲}^{۲^{۴}}=۴\log_{۲}^{۲}=۴\times ۱=۴$$

۳۶ گزینه ۲

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^{n}}=n\log_b^{a}$ تغییراتی در عبارت $۲\log(۱+\sqrt{۵})$ ایجاد می کنیم.

$$۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۱+\sqrt{۵})^{۲}=\log(۱+۲\sqrt{۵}+۵)=\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده از ویژگی $\log a+\log b=\log ab$ استفاده می کنیم.

$$A=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})$$
$$=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log ۲^{۴}=۴\log ۲\xrightarrow{\log ۲=k}A=۴k$$

۳۷ | گزینه ۱

در معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$، اگر α و β ریشه های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

هم چنین از ویژگی های لگاریتم داریم:

$$\log a + \log b = \log ab$$

پس حاصل $a + b$ و $a \times b$ را به دست می آوریم:

$$x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } a \text{ و } b} \begin{cases} S = a + b = -(\frac{-۱۰}{۱}) = ۱۰ \\ P = a \times b = \frac{۰/۱}{۱} = ۰/۱ \end{cases}$$

حاصل عبارت لگاریتمی را محاسبه می کنیم:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b)$$
$$= \log ۰/۱ - \log ۱۰ = \log ۱۰^{-۱} - \log ۱۰ = -\log ۱۰ - \log ۱۰ = -۱ - ۱ = -۲$$

۳۸ | گزینه ۱

ابتدا از معادلهٔ نمایی داده‌شده مقدار a را حساب می کنیم.

$$۴^a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۲^۲)^a = ۲^۱ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲a} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۲a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

با دانستن مقدار a محاسبهٔ لگاریتم داده‌شده کار چندان سختی نیست.

$$\log_۴^{(۴a+۱)} = \log_۴^{۴(\frac{۳}{۴})+۱} = \log_۴^{۳+۱} = \log_۴^۴ = ۱$$

۳۹ | گزینه ۴

$$A = \log_۸^{۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}} \xrightarrow{\sqrt[۳]{۰/۲۵} = (\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{-\frac{۲}{۳}}} \log_{۲^۳}^{۲ \times ۲^{-\frac{۲}{۳}}} \Rightarrow \log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

$$\log_۴^{\frac{۱}{A}-۱} \xrightarrow{A = \frac{۱}{۹}} \log_۴^{۹-۱} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

۴۰ گزینه ۱

$$k=\log_{۳}^{۹A^{۲}}=\log_{۳}^{۹}+\log_{۳}^{A^{۲}}=\log_{۳}^{۳^{۲}}+\log_{۳}^{A^{۲}}\Rightarrow k=۲\log_{۳}^{۳}+۲\log_{۳}^{A}$$
$$\xrightarrow{\log_{۳}^{۳}=۱}k=۲+۲\log_{۳}^{A}$$

ازآنجاکه $A=۳^{a}$، مقدار k برابر است با:

$$\Rightarrow k=۲+۲\log_{۳}^{۳^{a}}=۲+۲a\log_{۳}^{۳}=۲+۲a$$

۴۱ گزینه ۴

$$\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)}-\log_{۳}^{(x+۲)}=۱\Rightarrow\log_{۳}^{\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}}=۱\Rightarrow\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=۳$$
$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۳x-۵=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۴۰}}{۴}=\frac{۳\pm۷}{۴}\Rightarrow x=-۱,\ \frac{۱۰}{۴}$$

چون باید $۲x-۱>۰$ باشد، بنابراین جواب $x=\frac{۱۰}{۴}$ قابل‌قبول است.

$$\log_{۸}^{(۲x-۱)}=\log_{۸}^{(\frac{۱۰}{۲}-۱)}=\log_{۸}^{۴}=b\Rightarrow۴=۸^{b}\Rightarrow۲^{۲}=۲^{۳b}\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

۴۲ گزینه ۱

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $(\alpha,-\alpha)$ است.

$$\begin{cases}y(-۱)=۰\\y(۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-a+b)}=۰\\\log_{\frac{۱}{۲}}^{(a+b)}=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=۱\\a+b=۲\end{cases}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

۴۳ گزینه ۳

$$\log_{x}^{(۳x+۸)}+\log_{x}^{(x-۶)}=۲\Rightarrow\log_{x}^{(۳x+۸)(x-۶)}=۲\Rightarrow x^{۲}=۳x^{۲}-۱۰x-۴۸\Rightarrow x^{۲}-۵x-۲۴=۰$$
$$\Rightarrow(x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۸\Rightarrow\log_{۴}^{۸}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}}=\frac{۳}{۲}\\x=-۳\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۴۴

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه‌به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\text{I)}\ x^۲ - ۳x > ۰ \Rightarrow x(x-۳) > ۰ \Rightarrow x > ۳ \text{ یا } x < ۰$$

$$\text{II)}\ ۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq \log(x^۲ - ۳x) \Rightarrow \log ۱۰ \geq \log(x^۲ - ۳x)$$

$$\Rightarrow ۱۰ \geq x^۲ - ۳x \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۱۰ \leq ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۵$$

اشتراک دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده برابر $[-۲, ۰) \cup (۳, ۵]$ است.

۴۵

گزینه ۲

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطهٔ تقاطع یعنی نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = ۴^x \\ g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲} = (\frac{۱}{۴})^x + \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴^x = (\frac{۱}{۴})^x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴^x - (\frac{۱}{۴})^x = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{(*)} x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از توابع}} y = ۲ \Rightarrow A(\frac{۱}{۲}, ۲)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

حل معادلهٔ $(*)$:

$$۴^x - (\frac{۱}{۴})^x = \frac{۳}{۲}\ ,\ a = ۴^x$$

$$\Rightarrow a - \frac{۱}{a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲ - \frac{۳}{۲}a - ۱ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+\frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ a = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۴۶ گزینه ۴

برای آنکه دو تابع برابر باشند، باید دامنه‌های یکسانی داشته باشند. در این تست کافی است دامنهٔ تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ را پیدا کنیم و با دامنهٔ تک‌تک گزینه‌ها مقایسه کنیم.

$$y=\log\frac{x-۲}{x}\Rightarrow \text{دامنه}:\frac{x-۲}{x}>۰\Rightarrow\begin{cases}x>۲\\ \text{یا}\\ x<۰\end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۱}: y=\log(x-۲)-\log x\Rightarrow \text{دامنه}:\begin{cases}x-۲>۰\Rightarrow x>۲\\ x>۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۲$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: y=\log\frac{x^۲-۴}{x(x+۲)}=\log\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)}\Rightarrow\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)}>۰$$

در گزینهٔ ۲ باید $x\neq -۲$ باشد، پس دامنهٔ آن با دامنهٔ تابع اولیه مغایرت دارد.

$$\text{گزینهٔ ۳}: y=\frac{۱}{۲}\log\left(\frac{x-۲}{x}\right)^۲\Rightarrow\left(\frac{x-۲}{x}\right)^۲>۰\Rightarrow x\neq ۲,۰$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}\xrightarrow{\text{دامنه}}\sqrt{\frac{x-۲}{x}}>۰\Rightarrow\frac{x-۲}{x}>۰\Rightarrow\begin{cases}x>۲\\ \text{یا}\\ x<۰\end{cases}$$

بنابراین فقط دامنهٔ گزینهٔ ۴ با دامنهٔ تابع اولیه برابر است.

۴۷ گزینه ۳

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم (از معادلهٔ لگاریتمی y را بر حسب x به دست می‌آوریم) با حل دستگاه دومعادله و دومجهول حاصل x و y را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\log y=۲\log ۳+\log x\Rightarrow \log y=\log ۳^۲+\log x$$

$$\Rightarrow \log y=\log ۹x\Rightarrow y=۹x\qquad(۱)$$

$$۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times(۲^۲)^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times ۲^{۲x+۲y}=۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷}=۱=۲^۰\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰\xrightarrow{(۱)}۳x+۱۸x-۷=۰$$

$$\Rightarrow ۲۱x=۷\Rightarrow x=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}$$

$$y=۹x\Rightarrow y=۹\times\frac{۱}{۳}=۳$$

۴۸ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$y=-۱+\log_b^{(۲(x+\frac{a}{۲}))}$$

تابع به اندازهٔ $+\frac{۱}{۲}$ نسبت به نمودار $y=\log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۱$$
$$y=-۱+\log_b^{(۲x-۱)}$$

به‌علاوه مقدار تابع در $x=۲$ صفر است:

$$y\left(۲\right)=-۱+\log_b^{۳}=\circ\Rightarrow\log_b^{۳}=۱\Rightarrow b=۳$$
$$y=-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)}\xrightarrow{\text{برخورد با } y=۱}-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)}=۱$$
$$\Rightarrow\log_{۳}^{(۲x-۱)}=۲\Rightarrow ۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

راه‌حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y=-۱+\log_b^{(۲x+a)}$$

$$\left.\begin{array}{l}۲x+a>\circ\Rightarrow x>-\frac{a}{۲}\\ \text{طبق نمودار}: x>\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a=-۱$$

$$(۲,\circ)\Rightarrow -۱+\log_b^{۳}=\circ\Rightarrow b=۳$$

۴۹ گزینه ۳

$$۳^{x^۲-۲}=۸۱^x\Rightarrow ۳^{x^۲-۲}=۳^{۴x}\Rightarrow x^۲-۲=۴x$$
$$x^۲-۴x=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۶\Rightarrow (x-۲)^۲=۶\Rightarrow x-۲=\sqrt{۶}$$

حاصل $\log_{۶}^{(x-۲)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_{۶}^{(x-۲)}=\log_{۶}^{\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

۵۰ گزینه ۲

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول ۱− متقاطع هستند، پس:

$$f(-۱) = g(-۱) \Rightarrow ۳^{-a+b} = \left(\frac{۱}{۹}\right)^{-۱}$$
$$\Rightarrow ۳^{-a+b} = ۹ = ۳^{۲} \Rightarrow -a+b = ۲ \qquad (*)$$

ازطرفی $f(۲) = \frac{۱}{۳}$، بنابراین:

$$۳^{۲a+b} = \frac{۱}{۳} = ۳^{-۱} \Rightarrow ۲a+b = -۱ \qquad (**)$$

از حل دستگاه معادلات $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a+b = ۲ \\ ۲a+b = -۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱ \xrightarrow{(*)} b = ۱ \Rightarrow f(x) = ۳^{-x+۱}$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۲۷)$، کافی است معادلهٔ $f(x) = ۲۷$ را حل کنیم:

$$۳^{-x+۱} = ۲۷ = ۳^{۳} \Rightarrow -x+۱ = ۳ \Rightarrow -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲۷) = -۲$$

۵۱ گزینه ۳

گام اول

دو تابع در نقطهٔ A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطهٔ دو تابع نقطهٔ برخورد را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳}\Rightarrow\left(۳^{-\frac{۱}{۲}}\right)^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳^{-x}=۳^x+\frac{۸}{۳}\xrightarrow{۳^{-x}=t}t=\frac{۱}{t}+\frac{۸}{۳}\xrightarrow{\times t}t^۲=۱+\frac{۸}{۳}t$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳t^۲=۳+۸t\Rightarrow ۳t^۲-۸t-۳=۰$$

$$\Delta=(-۸)^۲-۴(۳)(-۳)=۶۴+۳۶=۱۰۰$$

$$\begin{cases}t_۱=\dfrac{۸+۱۰}{۶}=\dfrac{۱۸}{۶}=۳\Rightarrow ۳^{-x}=۳\Rightarrow x=-۱\\ t_۲=\dfrac{۸-۱۰}{۶}=\dfrac{-۲}{۶}=-\dfrac{۱}{۳}\quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$x=-۱\Rightarrow y=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو تابع نقطهٔ $A(-۱,۳)$ است.

فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,۳)$ از نقطهٔ $(-۱,۱)$ برابر با $۳-۱=۲$ است.

۵۲ گزینه ۴

$$\log(x+۲)+\log(۲x-۱)=\log(۴x+۱)\Rightarrow\log(x+۲)(۲x-۱)=\log(۴x+۱)$$
$$\Rightarrow(x+۲)(۲x-۱)=(۴x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x+۴x-۲=۴x+۱\Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=+\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

$x=\frac{۳}{۲}$ قابل‌قبول است.

$$\log_۴^{(۲x+۵)}=\log_۴^{(۳+۵)}=\log_{۲^۲}^{۲^۳}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۵۳ گزینه ۳

اگر باد اولیهٔ قایق را x در نظر بگیریم آنگاه در روز nاُم باد قایق $x(۰/۹۵)^n$ خواهد بود.

$$x(۰/۹۵)^n=\frac{x}{۲}\Rightarrow\left(\frac{۹۵}{۱۰۰}\right)^n=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\left(\frac{۲۰}{۱۹}\right)^n=۲\Rightarrow n(\log ۲۰-\log ۱۹)=\log ۲\Rightarrow n=\frac{۰/۳۰۱}{۱/۳۰۱-۱/۲۸۷}=۲۱/۵$$

۵۴ گزینه ۴

$$\log(2x-5)+\log(x+1)=\log(4x-1)\Rightarrow \log(2x-5)(x+1)=\log(4x-1)$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-5x-5=4x-1\Rightarrow 2x^2-7x-4=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{7\pm 9}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=4 & (\text{ق.ق})\\ x=-\frac{1}{2} & (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

$$\log_3^{(2x+1)}=\log_3^{(2\times4+1)}=\log_3^{9}=2$$

۵۵ گزینه ۲

اگر جمعیت اولیه x نفر باشد، سال اول $\frac{99}{100}x$ و سال دوم $\left(\frac{99}{100}\right)^2x$ و سال nاُم $\left(\frac{99}{100}\right)^n x$ نفر خواهد بود.

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n x=\frac{1}{2}x\Rightarrow\left(\frac{100}{99}\right)^n=2$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{100}{99}\right)^n=\log 2\Rightarrow n(\log 100-\log 99)=\log 2$$

$$\Rightarrow n=\frac{0/3}{2-1/995}=60$$

۵۶ گزینه ۱

یک رابطهٔ فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log 10=1\Rightarrow \log 2\times 5=1\Rightarrow \log 2+\log 5=1$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log 2$ و $\log 5$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\log\sqrt[3]{\frac{16}{10}}=\log\sqrt[3]{\frac{8}{5}}=\log\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\log 2-\log\sqrt[3]{5}=\log 2-\log 5^{\frac{1}{3}}$$

$$=\log 2-\frac{1}{3}\log 5\xrightarrow[\log 2=1-3k]{\log 5=3k}\log\sqrt[3]{1/6}=1-3k-\frac{1}{3}(3k)=1-3k-k=1-4k$$

۵۷ گزینه ۴

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:

الف) دامنه تعریف تابع $y=\log g(x)$ به صورت $g(x)>۰$ است.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

$$y=\log(x-۱)\Rightarrow x-۱>۰\Rightarrow x>۱ \quad (I)$$
$$f(x)=\sqrt{۱-\log(x-۱)}\Rightarrow ۱-\log(x-۱)\geq ۰\Rightarrow \log(x-۱)\leq ۱$$
$$\Rightarrow \log(x-۱)\leq \log ۱۰\Rightarrow ۰<x-۱\leq ۱۰\Rightarrow ۱<x\leq ۱۱ \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I)\cap(II): D_f=(۱,۱۱]$$

۵۸ گزینه ۳

چون تابع از دو نقطهٔ $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$(۵,۱۱)\in f\Rightarrow ۱۱=a+\log_{۲}^{(۱۵+b)^{۲}}$$
$$(۲۱,۱۵)\in f\Rightarrow ۱۵=a+\log_{۲}^{(۶۳+b)^{۲}}$$
$$\begin{cases} ۱۱=a+\log_{۲}^{(۱۵+b)^{۲}} \\ ۱۵=a+\log_{۲}^{(۶۳+b)^{۲}} \end{cases} \xRightarrow{\times(-۱)} \begin{cases} -۱۱+a=-\log_{۲}^{(۱۵+b)^{۲}} \\ ۱۵-a=\log_{۲}^{(۶۳+b)^{۲}} \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۴=\log_{۲}^{(۶۳+b)^{۲}}-\log_{۲}^{(۱۵+b)^{۲}}\Rightarrow ۴=۲\log_{۲}^{(۶۳+b)}-۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}$$
$$\Rightarrow ۴=۲(\log_{۲}^{(۶۳+b)}-\log_{۲}^{(۱۵+b)})\Rightarrow ۲=\log_{۲}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}\Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴$$
$$\Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b\Rightarrow ۳b=۳\Rightarrow b=۱$$

$$۱۱=a+\log_{۲}^{(۱۵+b)^{۲}}\xrightarrow{b=۱}۱۱=a+\log_{۲}^{(۱۶)^{۲}}$$
$$\Rightarrow ۱۱-a=۸\Rightarrow a=۳$$