۱ فرض کنید نقاط $(۵ , -۲)$، $(۱ , ۱۱)$ و $(۰ , ۵)$، بر سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱, ۳)$
۲) $(-۱, ۴)$
۳) $(۲, ۹)$
۴) $(۲, ۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲ اگر حاصل عبارت $\sqrt[۳]{\sqrt{۲}} \times (۲ + \sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}(۲ - \sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}$، به صورت $\sqrt[۳]{A}$ باشد، A کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{۳} + ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۳ طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱ < \frac{۲x - ۱}{x + ۱} < ۳$، کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$
۲) $(۴, +\infty)$
۳) $\mathbb{R} - [-۴, ۰]$
۴) $\mathbb{R} - [-۴, -۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ حاصل عبارت $(۲ - \sqrt{۳})^{-۱} + \frac{\sqrt{۲۷} - ۱}{۴ + \sqrt{۳}}$، کدام است؟

۱) $۱ + ۲\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۱ + \sqrt{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع $y = (x - ۱)^{۲}$ بالاتر از نمودار تابع $y = ۴x^{۴}$ است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ فرض کنید $A(-۱, ۹)$ رأس سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ گذرا بر نقطهٔ $(۳, ۱)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

۱) $(۵, -۷)$
۲) $(۵, -۹)$
۳) $(۲, ۵)$
۴) $(۱, ۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \left|۲x^{۲} - ۴\right|$ در زیر خط $y = ۲x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۳ < \frac{x + ۱}{۲x - ۱} < ۱$، کدام است؟

۱) $(۰/۶, ۱/۵)$
۲) $(۰/۸, ۱/۲)$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(۰/۸, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸} + \sqrt{۲۷}}{۵ - \sqrt{۶}} - ۲\left(\sqrt[۴]{۹} - ۱\right)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $۱ + \sqrt{۳}$
۲) $-۱ + \sqrt{۲}$
۳) $۱ - \sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} \cdot \left(\sqrt{۲ - \sqrt{۳}} + \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}\right)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $۱ + \sqrt{۳}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۲ جواب نامعادلهٔ $-۱ \leq ۳x - ۲ \leq ۱$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳} \leq x \leq ۱$

۲) $-۱ \leq x \leq ۱$

۳) $-۱ \leq x \leq \frac{۱}{۳}$

۴) $-۲ \leq x \leq ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۳ نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ در بازهٔ (a , b) بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار دارد. بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۴ نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ در بازهٔ (a , b) بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار دارد، بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x < |x^۲ - ۲x|$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱)$

۲) $(۰, ۳)$

۳) $(۱, ۲)$

۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶ اگر $(۵x - \frac{۳}{۲x}) = ۴$ باشد، حاصل $(۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲})$، کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۲۹

۳) ۳۱

۴) ۳۲

قلمچی علوم انسانی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۵

۱۷ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}} \times \sqrt[۴]{۵۴} \times \sqrt[۶]{۱۲}$، کدام است؟

۱) $۶\sqrt[۶]{۲}$

۲) $۳\sqrt[۶]{۳۲}$

۳) $۲\sqrt[۳]{۹}$

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴}$، در بازهٔ (a, b) پایین تر از خط به معادلهٔ $y = ۲$ است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - ۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + a$ بالای محور x هاست؟

۱) $a < -۱$
۲) $a > ۱$
۳) $a > ۲$
۴) $۱ < a < ۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۰ اگر عبارت $(a - ۱)x^۲ + (a - ۱)x + ۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : ۱ < a < ۵\}$
۲) $\{a : a < ۱\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۱ در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $f(x) = ۵ - |x - ۱|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |۲x|$ قرار دارد؟

۱) $(-\frac{۴}{۳}, ۱)$
۲) $(-\frac{۲}{۳}, ۱)$
۳) $(-\frac{۴}{۳}, ۲)$
۴) $(-\frac{۲}{۳}, ۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۲ مجموعهٔ جواب نامعادلات $x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۴, ۲]$
۲) $[-۶, ۸]$
۳) $[-۶, ۲]$
۴) $[-۲, ۶]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۳ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲x > \frac{x - ۱}{x + ۱}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x : x < -۱\}$
۲) $\{x : x > -۱\}$
۳) $\{x : -۱ < x < ۱\}$
۴) $\{x : -۲ < x < -۱\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$ با دامنهٔ $\{x : |x - ۱| < ۲\}$، همواره چگونه است؟

۱) منفی
۲) مثبت
۳) صعودی
۴) نزولی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{۲x - ۳}{x + ۱} > ۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$
۲) $\mathbb{R} - [-۴, ۶]$
۳) $x > ۴$
۴) $x < -۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(۲m - ۱)\,x^۲ + ۶x + m - ۲ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-۲ < m < ۲/۵$
۲) $-۲ < m < ۳/۵$
۳) $-۱ < m < ۳/۵$
۴) $-۱ < m < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(x - ۴)\,|x| < ۲x - ۵$، به کدام صورت است؟

۱) $(۱, ۵)$
۲) $(۱ - \sqrt{۶}\,, ۱ + \sqrt{۶})$
۳) $(۱, ۵) \cup (۱ + \sqrt{۶}\,, +\infty)$
۴) $(-\infty\,, ۱ - \sqrt{۶}) \cup (۱, ۵)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۸ اگر $\alpha = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} - ۴}$ و $\beta = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} + ۴}$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^۲ + \beta^۲ + \alpha\beta)(\alpha^۲ + \beta^۲ - \alpha\beta)$، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۷\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۹ مجموعه جواب نامعادله $|x^۲ + ۱| > |x - ۲| - ۱ + ۲x$، به‌صورت کدام بازه است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۰ به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m - ۱)\,x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

۱) $m < -۲$
۲) $m > ۲/۵$
۳) $۱ < m < ۲$
۴) $۱ < m < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۱ مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{۳x + ۱}{x - ۳} > -۱$ به کدام صورت است؟

۱) $x < \frac{۱}{۲}$

۲) $x < ۳$

۳) $-\frac{۱}{۲} < x < ۳$

۴) $\frac{۱}{۲} < x < ۳$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y = (۱ - m)x^۲ + ۲(m - ۳)x - ۱$، همواره پایین محور xها است؟

۱) $۱ < m < ۵$

۲) $۲ < m < ۵$

۳) $۲ < m < ۷$

۴) $۲ < m < ۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x - ۲} > \frac{۷x - ۸}{x^۲ - x - ۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴, ۲) \cup (۲, ۳)$

۲) $(۲, ۴)$

۳) $(-۱, ۲) \cup (۲, ۴)$

۴) $(-۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۴ اگر $A = \sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}$ باشد، حاصل $(۱ + A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۵ اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵

۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۶ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۱ < \left|\frac{۲ - x}{۲x - ۳}\right|$، به‌صورت کدام بازه است؟

۱) $(۱, \frac{۳}{۲})$

۲) $(۱, \frac{۵}{۳})$

۳) $(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳})$

۴) $(\frac{۵}{۳}, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱ گزینه ۱

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۰,۵):\ c=۵\\(-۲,۵):\ ۴a-۲b+۵=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow ۲a-b=۰\\(۱,۱۱):\ a+b+۵=۱۱\Rightarrow a+b=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-b=۰\\a+b=۶\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$$\text{گزینهٔ ۱}:(-۱,۳)\Rightarrow ۲(-۱)^۲+۴(-۱)+۵=۳\ \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۲}:(-۱,۴)\Rightarrow ۲(-۱)^۲+۴(-۱)+۵\neq ۴\ \times$$

$$\text{گزینهٔ ۳}:(۲,۹)\Rightarrow ۲(۲)^۲+۴(۲)+۵\neq ۹\ \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴}:(۲,۱۵)\Rightarrow ۲(۲)^۲+۴(۲)+۵\neq ۱۵\ \times$$

۲ گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه حاصل عبارت داده‌شده برابر $\sqrt[۳]{A}$ است، ابتدا طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم. دو عبارت $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ مزدوج یکدیگر هستند. دو عبارت هم‌توان از آن‌ها جدا کرده و با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم و درنهایت مقدار A را به دست می‌آوریم.

$$\sqrt[۳]{A}=(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}A=(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۹}{۲}}\times(۲+\sqrt{۳})^{۴}\times\sqrt{۲}$$

$$=(۲-\sqrt{۳})^{۴}(۲+\sqrt{۳})^{۴}(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۲}=\left[(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})\right]^{۴}\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\sqrt{۲}$$

$$=(۴-۳)^{۴}\sqrt{۲(۲-\sqrt{۳})}=\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}=\left|\sqrt{۳}-۱\right|=\sqrt{۳}-۱\Rightarrow A=\sqrt{۳}-۱$$

۳ گزینه ۲

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $\frac{۳}{۲}x - ۲$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = ۱۹۲ \Rightarrow x(\frac{۳}{۲}x - ۲) = ۱۹۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x^{۲} - ۲x = ۱۹۲$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۳x^{۲} - ۴x - ۳۸۴ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۲ + \sqrt{۱۱۵۶}}{۳} = \frac{۲ + ۳۴}{۳} = ۱۲ \quad (*)$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲((\frac{۳}{۲}x - ۲) + x) \underset{(*)}{=} ۲((۱۸ - ۲) + ۱۲) = ۵۶$$

$$-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ -۱ < \dfrac{۲x-۱}{x+۱} \\ ۲)\ \dfrac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱)\frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱}+۱>۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱}>۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۳x}{x+۱}}_{p(x)}>۰$$

x	-∞		-۱		۰		+∞
p(x)		+ ج	ت ن	−	∘	+ ج	

$$\Rightarrow x<-۱ \ \text{یا}\ x>۰\ (I)$$

$$۲)\frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱}<۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۴}{x+۱}}_{q(x)}<۰$$

x	-∞		-۴		-۱		+∞
q(x)		− ج	∘	+	ت ن	− ج	

$$\Rightarrow x<-۴ \ \text{یا}\ x>-۱\ (II)$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} x<-۴ \ \text{یا}\ x>۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R}-[-۴,۰]$$

راه‌حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینهٔ "۴":

$$x=۰ \Rightarrow -۱<\frac{-۱}{۱}<۳ \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲":

$$x=-۵ \Rightarrow -۱<\frac{-۱۱}{-۴}<۳ \Rightarrow -۱<\frac{۱۱}{۴}<۳ \quad \checkmark$$

۵ گزینه ۱

ابتدا هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$

$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱\quad(۱)$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}\quad(۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۶ گزینه ۲

نمودار $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار $y=۴x^۴$ قرار دارد، پس:

$$(x-۱)^۲>۴x^۴\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}|x-۱|>۲x^۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ x-۱>۲x^۲\\ \text{یا}\\ ۲)\ x-۱<-۲x^۲\end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x-۱>۲x^۲\Rightarrow ۲x^۲-x+۱<۰\xrightarrow{a>۰,\Delta<۰}\text{غ ق ق}$$

$$۲)\ x-۱<-۲x^۲\Rightarrow\underbrace{۲x^۲+x-۱}_{p(x)}<۰\Rightarrow\Delta=۹\Rightarrow x=-۱\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
p(x)		+	○	− ج	○	+	

$$\Rightarrow x\in(-۱,\ \frac{۱}{۲})$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a,b)=\left(-۱,\ \frac{۱}{۲}\right)$، درنتیجه:

$$b-a=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

۷ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\text{رأس سهمی}: A(-1,9) \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \quad (*)$$

حال نقاط $A(-1,9)$ و $(3,1)$ را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(-1,9): a-b+c=9 \xrightarrow{(*)} a-2a+c=9 \Rightarrow -a+c=9 \\ (3,1): 9a+3b+c=1 \xrightarrow{(*)} 9a+6a+c=1 \Rightarrow 15a+c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+c=9 \\ 15a+c=1 \end{cases} \Rightarrow 16a=-8 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} b=-1$$

$$a-b+c=9 \Rightarrow -\frac{1}{2}+1+c=9 \Rightarrow c=\frac{17}{2}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$$

هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند، جواب مسئله است:

گزینهٔ ۱:

$$(5,-7) \Rightarrow -\frac{1}{2}(25) - 5 + \frac{17}{2} \neq -7 \quad \times$$

گزینهٔ ۲:

$$(5,-9) \Rightarrow -\frac{1}{2}(25) - 5 + \frac{17}{2} = -9 \quad \checkmark$$

گزینهٔ ۳:

$$(2,5) \Rightarrow -\frac{1}{2}(4) - 2 + \frac{17}{2} \neq 5 \quad \times$$

گزینهٔ ۴:

$$(1,5) \Rightarrow -\frac{1}{2} - 1 + \frac{17}{2} \neq 5 \quad \times$$

راه‌حل دوم: حالت کلی معادلهٔ سهمی به رأس (α,β) به‌صورت زیر است:

$$y = k(x-\alpha)^2 + \beta$$

بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی}: A(-1,9) \Rightarrow y = k(x+1)^2 + 9$$

اکنون نقطهٔ $(3,1)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k(3+1)^2 + 9 = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$$

با جایگذاری گزینه‌ها در معادلهٔ سهمی، فقط نقطهٔ گزینهٔ (۲) در معادله صدق می‌کند.

$$y(۵) = -۹$$

۸

گزینه ۱

نمودار $y = \left|۲x^۲ - ۴\right|$ در زیر خط $y = ۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$\left|۲x^۲ - ۴\right| < ۲x$$

$$\Rightarrow -۲x < ۲x^۲ - ۴ < ۲x \xrightarrow{\div ۲} -x < x^۲ - ۲ < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x < x^۲ - ۲$ و $x^۲ - ۲ < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ > -x \Rightarrow \underbrace{x^۲ + x - ۲}_{p(x)} > ۰$$

x	-∞		-۲		۱		+∞
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲ < x \Rightarrow \underbrace{x^۲ - x - ۲}_{q(x)} < ۰$$

x	-∞		-۱		۲		+∞
q(x)		+	۰	− ج	۰	+	

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow (a, b) = (۱, ۲)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$۲ - ۱ = ۱$$

۹ | گزینه ۴

$$۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \\ ۲)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-x+۲}{۲x-۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
p(x)		−	ت.ن	+	ج	−	

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۴}{۵}$		$+\infty$
q(x)		− ج	ت.ن	+		− ج	

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۴}{۵} \quad (II)$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۴}{۵} < x < ۲ \Rightarrow x \in (۰/۸, ۲)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینهٔ "۳":

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{۱} < ۳$$

حذف گزینهٔ "۱" و "۲":

$$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$$

۱۰ گزینه ۲

ابتدا هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6}=\frac{19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\quad(1)$$

$$2\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}=\frac{2}{\sqrt[4]{9}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\sqrt{3}+1\quad(2)$$

بنابراین طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{2}-1$$

۱۱ گزینه ۴

برای اینکه حاصل عبارت را به دست آوریم ابتدا فرض می‌کنیم $A=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ که عبارتی مثبت است، باشد. باتوجه‌به عبارت‌های زیر رادیکال‌ها اگر A^2 را به دست آوریم، به راحتی عبارت‌ها ساده می‌شوند. پس ابتدا A^2 سپس A را حساب می‌کنیم. پس از تعیین A، حاصل عبارت $A\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ را مشخص می‌کنیم.

$$A=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^2=(2-\sqrt{3})+2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+(2+\sqrt{3})$$

$$=2-\sqrt{3}+2\sqrt{4-3}+2+\sqrt{3}=2+2+2=6\Rightarrow A^2=6\Rightarrow A=\sqrt{6}$$

با معلوم شدن مقدار A، حاصل عبارت اصلی را به دست می‌آوریم:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{6}\times\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

۱۲ گزینه ۱

برای به دست آوردن محدودهٔ x، موانعی که در اطراف آن وجود دارد را مرحله‌به‌مرحله حذف می‌کنیم تا جواب نامعادله به دست آید:

$$-1\leq 3x-2\leq 1\xrightarrow{+2}1\leq 3x\leq 3\xrightarrow{\div 3}\frac{1}{3}\leq x\leq 1$$

۱۳ گزینه ۲

گام اول

الف) داریم:

$$۲y+x=۵\Rightarrow ۲y=۵-x\Rightarrow y=\frac{۵-x}{۲}$$

ب) چون می خواهیم نمودار تابع $y=۴-|x|$ بالای خط به معادلهٔ $۲y+x=۵$ قرار بگیرد، ابتدا باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $۴-|x|>\frac{۵-x}{۲}$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۴-|x|>\frac{۵-x}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۸-۲|x|>۵-x\Rightarrow x-۲|x|>-۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\geq ۰: x-۲x>-۳\Rightarrow x<۳\Rightarrow ۰\leq x<۳\\ x<۰: x+۲x>-۳\Rightarrow ۳x>-۳\Rightarrow x>-۱\Rightarrow -۱<x<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow -۱<x<۳\Rightarrow x\in(-۱,۳)\Rightarrow (a,b)=(-۱,۳)\Rightarrow b-a=۳+۱=۴$$

۱۴ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$۲y+x=۵\Rightarrow ۲y=-x+۵\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

نمودار تابع $y=۴-|x|$ بالای خط $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ قرار دارد پس باید نامعادلهٔ $۴-|x|>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ برقرار باشد. جواب نامعادله را در دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ تعیین می کنیم.

$$x\geq ۰: |x|=x\Rightarrow ۴-x>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}x<۴-\frac{۵}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow x<۳\xrightarrow{x\geq ۰}۰\leq x<۳\quad (I)$$

$$x<۰: |x|=-x\Rightarrow ۴+x>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow \frac{۳}{۲}x>-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\div\frac{۳}{۲}}x>-۱\xrightarrow{x<۰}-۱<x<۰\quad (II)$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازهٔ (I) و (II) بوده که برابر $(-۱,۳)$ می شود. $b-a$ برابر است با:

$$b-a=۳-(-۱)=۳+۱=۴$$

۱۵ گزینه ۴

برای حل تست گام‌های زیر را برمی‌داریم:

الف) باتوجه‌به کتاب درسی، داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

ب) نامعادله را در دو مرحله ($a < k$ و $-k < a$) حل کرده و بین مجموعه‌جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow -x < x^۲ - ۲x < x$$

$$۱)\ \ x^۲ - ۲x > -x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x(x-۱) > ۰ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < ۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ x^۲ - ۲x < x \Rightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Rightarrow x(x-۳) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۳ \quad (II)$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه‌جواب به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$(I) \cap (II)\ :\ ۱ < x < ۳ \Rightarrow x \in (۱, ۳)$$

۱۶ گزینه ۳

راه‌حل اول:

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای ابتدا طرفین تساوی $۵x - \frac{۳}{۲x} = ۴$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow (۵x)^۲ - ۲ \times (۵x) \times (\frac{۳}{۲x}) + (\frac{۳}{۲x})^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ - ۱۵ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۱۶ \Rightarrow ۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۱۶ + ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۳۱$$

راه‌حل دوم:

$$۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = (۵x)^۲ + (\frac{۳}{۲x})^۲ = (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۲ \times (۵x) \times (\frac{۳}{۲x})$$

$$= (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۱۵ \xrightarrow{۵x - \frac{۳}{۲x} = ۴} (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۱۵ = ۴^۲ + ۱۵ = ۱۶ + ۱۵ = ۳۱$$

۱۷ گزینه ۴

تمامی عبارت‌ها را بر اساس توان‌هایی از ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$\sqrt[۶]{۲^۲ \times ۳} \times \sqrt[۴]{۲ \times ۳^۳} \times \sqrt[۳]{۲ \times \sqrt[۴]{۲ \times ۳}}$$

$$= ((۲)^{\frac{۲}{۶}} \times (۳)^{\frac{۱}{۶}}) \times (۲^{\frac{۱}{۴}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}}) \times (۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۱}{۱۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۱۲}})$$

$$= ۲^{(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۲})} \times ۳^{(\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۱۲})} = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$$

۱۸

گزینه ۲

گام اول

الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ در صورتی پایین خط $y=۲$ قرار می گیرد که نامعادلهٔ $\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲$ برقرار باشد.
ب) با تعیین علامت، محدودهٔ جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازهٔ (a,b) مطابقت داده و مقدار $b-a$ را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲\Rightarrow\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}-۲<۰\Rightarrow\frac{۳x^۲-۲x-۲x^۲-۸}{x^۲+۴}<۰\Rightarrow\frac{x^۲-۲x-۸}{x^۲+۴}<۰$$
$$\xrightarrow{x^۲+۴>۰}x^۲-۲x-۸<۰\Rightarrow(x-۴)(x+۲)<۰\Rightarrow-۲<x<۴\Rightarrow x\in(-۲\,,\,۴)$$

بنابراین بازهٔ $(a\,,\,b)$ به صورت $(-۲\,,\,۴)$ در آمده و حاصل $b-a$ برابر است با:

$$b-a=۴-(-۲)=۴+۲=۶$$

۱۹

گزینه ۳

اگر قرار باشد عبارت درجه دو به فرم $y=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور xها قرار داشته باشد باید دو شرط زیر هم زمان برقرار باشد:

۱) $a>۰$

۲) $\Delta<۰$

مجموعه جواب هر دو نامعادله را تعیین کرده و بین آن ها اشتراک می گیریم:

$$f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$$

۱) $a-۱>۰\Rightarrow a>۱\quad(I)$

۲) $\Delta<۰\Rightarrow(۲\sqrt{۲})^۲-۴(a-۱)(a)<۰\Rightarrow ۸-۴a^۲+۴a<۰$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۴a-۸>۰\xrightarrow{\div ۴}a^۲-a-۲>۰$$

$$\Rightarrow(a-۲)(a+۱)>۰\Rightarrow a<-۱ \text{ یا } a>۲\quad(II)$$

اشتراک مجموعه جواب های (I) و (II) برابر است با:

$$(I)\cap(II):a>۲$$

۲۰ گزینه ۳

عبارت درجهٔ دو در صورتی به ازای هر مقدار x منفی است که اولاً ضریب x^2 منفی باشد، ثانیاً معادله ریشه نداشته و $\Delta < 0$ باشد. مجموعه‌جواب نامعادله‌های گفته‌شده را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$f(x) = (a-1)x^2 + (a-1)x + 1$$

$$1)\ \ a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (I)$$

$$2)\ \ \Delta < 0 \Rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-1-4) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \quad (II)$$

بین دو مجموعه‌جواب (I) و (II) هیچ اشتراکی وجود ندارد، بنابراین مجموعه‌جواب قابل‌قبول برای a مجموعهٔ $\varnothing$ است.

۲۱ گزینه ۳

گام اول

الف) باتوجه‌به ریشه‌های قدر مطلق $|2x|$ و $|x-1|$، عبارت درون قدرمطلق‌ها را در سه محدودهٔ $x < 0$، $0 \leq x \leq 1$ و $x > 1$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هریک از سه محدودهٔ مشخص‌شده به‌صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به‌دست‌آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$1)\ \ x < 0 \Rightarrow |2x| = -2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > -2x \Rightarrow x + 4 > -2x \Rightarrow 3x > -4$$

$$\Rightarrow x > -\frac{4}{3} \xrightarrow{x<0} x \in (-\frac{4}{3}, 0)$$

$$2)\ \ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > 2x \Rightarrow x + 4 > 2x \Rightarrow x < 4 \xrightarrow{0\leq x\leq 1} x \in [0, 1]$$

$$3)\ \ x > 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = x-1$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > 2x \Rightarrow 5 - (x-1) > 2x \Rightarrow 5 - x + 1 > 2x \Rightarrow 3x < 6$$

$$\Rightarrow x < 2 \xrightarrow{x>1} x \in (1, 2)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\frac{4}{3}, 2)$ درمی‌آید.

۲۲ گزینه ۳

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می کنیم. یک بار $x \geq ۰$ و بار دیگره $x < ۰$ فرض می شود. مجموعه جواب نامعادله را در هر یک از حالت ها به دست آورده و چون هر دوی آن ها برای ما قابل‌قبول است بین آن ها اجتماع می گیریم.

$$۱)\ \ x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$\Rightarrow ۲x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲ \xrightarrow{x \geq ۰} ۰ \leq x \leq ۲$$

$$۲)\ \ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۳ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x < ۰$$

مجموعه جواب نامعادله $= [-۶\,,\,۰) \cup [۰\,,\,۲] = [-۶\,,\,۲]$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$، آنگاه $-a \leq x \leq a$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$|x| \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \leq x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲$$

$$x \geq -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲}x - ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶$$

بنابراین $-۶ \leq x \leq ۲$ بوده و مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-۶\,,\,۲]$ به دست می آید.

۲۳ گزینه ۱

با ایجاد تغییراتی در نامعادله سعی می کنیم به نامعادله ای به صورت $Q(x) > ۰$ برسیم. $Q(x)$ را تعیین علامت کرده و محدوده ای که مثبت باشد را به عنوان جواب در نظر می گیریم.

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲x \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱} - ۲x > ۰ \Rightarrow \frac{x-۱-۲x(x+۱)}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۱-۲x^۲-۲x}{x+۱} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲x^۲ - x - ۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{-(۲x^۲+x+۱)}{x+۱} > ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{۲x^۲+x+۱}{x+۱} < ۰$$

عبارت $۲x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت است، چون در این عبارت درجه دو مقدار $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است پس مخرج باید منفی باشد. داریم:

$$x + ۱ < ۰ \Rightarrow x < -۱ \Rightarrow \{x : x < -۱\}$$

۲۴ گزینه ۱

روش اول:

ابتدا با استفاده از تعریف نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u| < a$، دامنهٔ تعریف تابع را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$|u| < a \Rightarrow -a < u < a$$

سپس مشخص می‌کنیم در محدودهٔ به‌دست‌آمده، تابع $f(x)$ چه وضعیتی دارد.

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱,\ ۳)$$

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = x^۲ - ۲x + ۱ - ۴ = (x-۱)^۲ - ۴$$

در محدودهٔ $(-۱,\ ۳)$، وضعیت $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

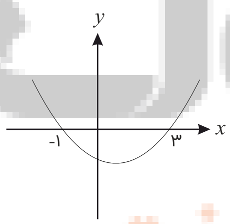
$$-۱ < x < ۳ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ < ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow f(x) < ۰$$

پس در دامنهٔ مشخص‌شده تابع $f(x)$ همواره منفی است.

روش دوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

با رسم نمودار تابع $f(x)$ وضعیت آن را در بازهٔ داده‌شده بررسی می‌کنیم.



در بازهٔ $(-۱,\ ۳)$ نمودار $f(x)$ همواره زیر محور xها قرار دارد پس مقدار آن همواره منفی است.

روش سوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱,\ ۳)$$

تابع $f(x)$ را تعیین علامت کرده و وضعیت آن را روی دامنهٔ تعریف‌شده یعنی بازهٔ $(-۱,\ ۳)$ مشخص می‌کنیم:

تابع $f(x)$ روی دامنهٔ تعریف‌شده در صورت تست همواره منفی است.

x		-۱		۳	
$f(x)$	+	۰	−	۰	+

۲۵ گزینه ۱

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰\Rightarrow\underbrace{\frac{-x-۶}{x+۱}}_{p(x)}<۰$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
$p(x)$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

$$p(x)<۰\Rightarrow x<-۶ \text{ یا } x>-۱\quad(۱)$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰\Rightarrow\underbrace{\frac{x-۴}{x+۱}}_{q(x)}>۰$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
$q(x)$		$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

$$q(x)>۰\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۴\quad(۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازهٔ $(-\infty,-۶)$ و $(۴,+\infty)$ می‌باشد که به‌صورت $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

۲۶ گزینه ۳

مسئله را با این شرط که ضریب $x^۲$ مخالف صفر است، حل می‌کنیم. ($۲m - ۱ \neq ۰$)

شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد این است که $\Delta > ۰$.

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۶)^۲ - ۴(۲m-۱)(m-۲) > ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۹ - (۲m^۲ - ۴m - m + ۲) > ۰ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ < ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۲m-۷)(m+۱)}_{P(m)} < ۰ \Rightarrow m = -۱ , \frac{۷}{۲}$$

m		-۱		$\frac{۷}{۲}$	
P(m)	+	۰	−	۰	+

$$P(m) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < \frac{۷}{۲}$$

۲۷ گزینه ۴

یک‌بار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و بار دیگر $x < 0$. در هر دو حالت مجموعه‌جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$(x-4)\,x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \quad (\mathrm{I})$$

باتوجه‌به محدودهٔ اولیه $(x \geq 0)$ این جواب قابل‌قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x-4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

x		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$	
$x^2 - 2x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x < 1 - \sqrt{6} \text{ یا } x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x<0} x < 1 - \sqrt{6} \quad (\mathrm{II})$$

اجتماع دو مجموعه‌جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

۲۸

گزینه ۴

گام اول

طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$$

گام دوم

با استفاده از اتحاد مزدوج و با در نظر گرفتن $A=\alpha^{۲}+\beta^{۲}$ و $B=\alpha\beta$ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}-\alpha\beta\right)\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha\beta\right)=\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}\right)^{۲}-(\alpha\beta)^{۲}=\alpha^{۴}+\beta^{۴}+۲\alpha^{۲}\beta^{۲}-\alpha^{۲}\beta^{۲}=\alpha^{۴}+\beta^{۴}+\alpha^{۲}\beta^{۲}$$

مقادیر α و β را در عبارت به‌دست‌آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)}\right)^{۲}\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}+۴\right)}\right)^{۲}$$

$$=\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)\left(۳\sqrt{۲}+۴\right)}\right)^{۲}$$

$$=۳\sqrt{۲}-۴+۳\sqrt{۲}+۴+\sqrt{۲}=۷\sqrt{۲}$$

۲۹

گزینه ۴

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq 2$ و $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad x \geq 2 \;\Rightarrow\; x - 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x - 2| = x - 2 \\
&2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \\
&\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \\
&\Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{II}) \quad x < 2 \;\Rightarrow\; x - 2 < 0 \;\Rightarrow\; |x - 2| = -(x - 2) \\
&2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x + 2 < 0 \\
&\Rightarrow (x - 2)(x - 1) < 0 \;\Rightarrow\; 1 < x < 2 \xrightarrow{x<2} 1 < x < 2
\end{aligned}$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(1, 2)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1|$ می‌شود.

۳۰ گزینه ۲

عبارت درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$۱)\quad a > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (I)$$

$$f(x) = (m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$$

$$۲)\quad \Delta < ۰ \Rightarrow ۶^۲ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۳۶ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۹ - (m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۹ - ۲m^۲ + m + ۱ < ۰ \Rightarrow -۲m^۲ + m + ۱۰ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - m - ۱۰ > ۰ \Rightarrow (۲m-۵)(m+۲) > ۰$$

$$\Rightarrow m > \frac{۵}{۲} \text{ یا } m < -۲ \quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) : m > \frac{۵}{۲} \Rightarrow m > ۲/۵$$

۳۱ گزینه ۱

راه‌حل اول:

با عددگذاری داریم:

$$x = ۱ \xrightarrow[\text{در نامعادله}]{\text{با جایگذاری}} -۱ < \frac{۳(۱)+۱}{(۱)-۳} < ۳ \Rightarrow -۱ < -۲ < ۳ \quad \times$$

بنابراین گزینه‌های ۲،۳و۴ نادرست است.

راه‌حل دوم:

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلقی استفاده کنیم.

گام دوم

$$-۱ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳ \xrightarrow{-۱} -۲ < \frac{۳x+۱-x+۳}{x-۳} < ۲ \Rightarrow -۲ < \frac{۲x+۴}{x-۳} < ۲$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۲(x+۲)}{x-۳}\right| < ۲ \xrightarrow{\div ۲} \left|\frac{x+۲}{x-۳}\right| < ۱ \Rightarrow |x+۲| < |x-۳|$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ + ۴x + ۴ < x^۲ - ۶x + ۹ \Rightarrow ۱۰x < ۵ \xrightarrow{\div ۱۰} x < \frac{۱}{۲}$$

۳۲ گزینه ۲

اگر سهمی پایین محور xها باشد، باید $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد. پس:

$$y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-3)^2 + 4(1-m) = 4(m^2 - 6m + 9) + 4 - 4m < 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (1)$$

$$a = 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر بازهٔ $(2, 5)$ است.

۳۳ گزینه ۳

راه‌حل تستی:

$$x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{13}{4} > 3 \quad \checkmark$$

$x = 3$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} 4 > 0 \quad \Rightarrow \text{گزینهٔ ۲ هم حذف می‌شود}$$

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{(7x-8) - x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x-2)(x+1)} = \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} = -\frac{x-4}{x+1} > 0$$

x		-1		2		4	
$-\frac{x-4}{x+1}$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$-$

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

۳۴ گزینه ۳

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}\,(12)^{-1/5} = \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}\,(12)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \times \frac{1}{\sqrt{12^3}}$$

$$A = \sqrt[10]{3^5} \times \frac{1}{12\sqrt{12}} = \sqrt{3} \times \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = 24 \Rightarrow \left(1 + A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+24)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

۳۵ گزینه ۲

$$A = \sqrt[۵]{۲^۲ \times (۲^۴)^{\frac{۱}{۳}}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲ \times ۲^{\frac{۴}{۳}}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$
$$= (۲^{\frac{۱۰}{۳}})^{\frac{۱}{۵}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۶}{۳}} = ۲^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow (۲A)^{-\frac{۱}{۳}} = (۲ \times ۴)^{-\frac{۱}{۳}} = ۸^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۳۶ گزینه ۲

$$\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right| > ۱ \Rightarrow (\frac{۲-x}{۲x-۳})^۲ > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۶۴ - ۴(۳)(۵) = ۴$$
$$\Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{۸ \pm \sqrt{۴}}{۶} \Rightarrow x_{۱,۲} = ۱,\ \frac{۵}{۳}$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
۳x۲-۸x+۵	+	۰	−	۰	+

مقدار $x = \frac{۳}{۲}$ که در این بازه قرار دارد، غیرقابل‌قبول است (ریشهٔ مخرج است)، پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x = (۱, \frac{۵}{۳}) - \frac{۳}{۲}$$

نکته: گزینه‌های ۱ و ۳ را نیز می توان به عنوان جواب‌های درست در نظر گرفت ولی باتوجه به گزینه های موجود کامل‌ترین جواب گزینهٔ ۲ است. در غیر این‌صورت گزینه های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.