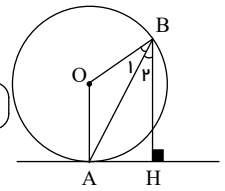
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: امتحان هندسه پایه یازدهم

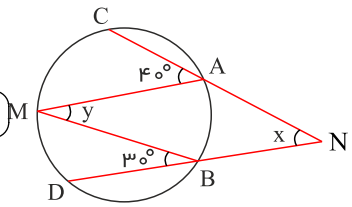
تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۸/۰۲

شهیدپورجندقی

۱ در شکل مقابل ثابت کنید: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$



۲ در دایرهٔ روبه‌رو، حاصل $x + y$ کدام است؟

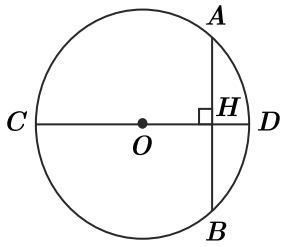


۳ قضیه: ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، و بالعکس.

۴ طول خط المرکزین در دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.

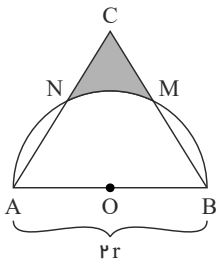
۵ دو دایرهٔ $C(O, 2m-3)$ و $C'(O', 2)$ با خط‌المرکزین $d = OO' = m+1$ مفروض‌اند. اگر بتوان با طول‌های شعاع‌های دو دایره و خط‌المرکزین مثلثی ساخت، حدود m چقدر است؟

۶ در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

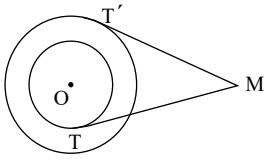


۷ اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با ..... اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن زاویه.

۸ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. مساحت قسمت هاشورزده چقدر است؟

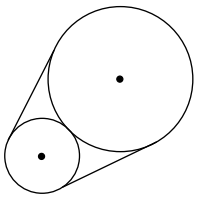


۹ دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های R و $3R$ مفروض هستند. مطابق شکل، از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دو دایره رسم شده است. اگر $MT' = 2R$ باشد، MT چند است؟

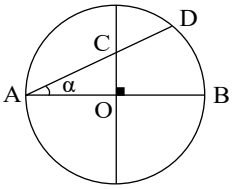


ترنج بوک
تلاشی در مسیر موفقیت

۱۰ دو تیر استوانه‌ای به قطرهای ۶ و ۱۸سانتی‌متر مطابق شکل، کنار یکدیگر قرار گرفته و با سیم به‌هم بسته شده است. طول سیم که دور آنها می‌پیچد؛ چقدر است؟



۱۱ در شکل مقابل دو قطر دایره عمود بر هم هستند، نسبت $\frac{CD}{CA}$ چقدر است؟



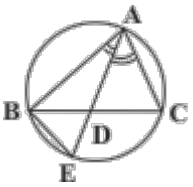
۱۲ در دایرهٔ با شعاع ۱۲، طول وتری که عمود منصف یک شعاع باشد، چقدر است؟

۱۳ دو دایرهٔ مساوی با شعاع ۳ و فاصلهٔ خط‌المرکزین ۸ داده شده است. از وسط خط‌المرکزین قاطعی رسم می‌کنیم، اگر طول وتر جداشده در یکی از دایره‌ها $\sqrt{۲}$ باشد، طول وتر جداشده در دایرهٔ دوم چقدر است؟

۱۴ مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d = ۱۳$ برابر $۵a - ۳$ باشد.

۱۵ قضیه: ثابت کنید اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

۱۶ با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید: (AD نیمساز زاویهٔ BAC است)الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

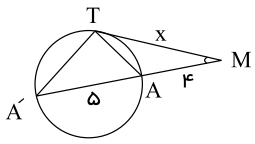


ب) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

پ) $AD^{۲} = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

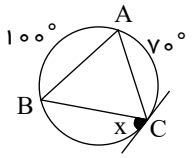
۱۷ مقدار x را در هریک از شکل‌های زیر به‌دست آورید.

الف از نقطهٔ M بر دایره، یک مماس و یک قاطع رسم کرده‌ایم. مقدار x را بیابید.

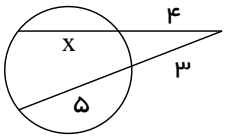


۱۸ مقدار x را در هریک از شکل‌های زیر به‌دست آورید.

الف

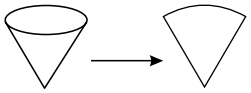


ب



۱۹ شکل فضایی و گستردهٔ یک مخروط داده شده است. شعاع قاعدهٔ مخروط ۳ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۴ سانتی‌متر است.

ترنج بوک
تلاشی درمسیر موفقیت



الف طول کمان قطاع حاصل از شکل گستردهٔ این مخروط چند رادیان است؟

ب مساحت قطاع را به‌دست آورید.

۲۰ در دایرهٔ $C(O,R)$، دو وتر موازی $AB=۴$ و $CD=۸$ به فاصلهٔ ۶ واحد از یکدیگر رسم شده‌اند. شعاع دایره را به دست آورید.

ترنج بوک
تلاشی در مسیر موفقیت

پاسخنامه تشریحی

۱ شعاع در نقطهٔ تماس بر مماس عمود است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}=۹۰^\circ, \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow OA \| BH \Rightarrow O\hat{A}B=\hat{B}_۲ \\ OA=OB \Rightarrow O\hat{A}B=\hat{B}_۱ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲$$

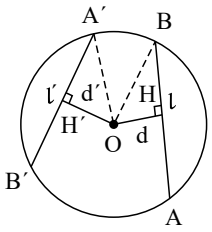
۲

$$\begin{cases} \text{زاویهٔ محاطی } y: \widehat{AB}=۲y \ , \ x=\dfrac{\widehat{CD}-\widehat{AB}}{۲} \\ \text{محاطی } \hat{A}=\dfrac{\widehat{MC}}{۲} \Rightarrow \widehat{MC}=۸۰^\circ \\ \text{محاطی } \hat{B}=\dfrac{\widehat{MD}}{۲} \Rightarrow \widehat{MD}=۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۸۰^\circ+۶۰^\circ-۲y}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x+۲y=۱۴۰^\circ \Rightarrow x+y=۷۰^\circ$$

۳ برهان: از مرکز دایره عمودهای OH و OH' را بر وترهای $AB=l$ و $A'B'=l'$ وارد می‌کنیم.

می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می‌کند. $(OH'=d' \ , \ OH=d)$



$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲=OH^۲+HB^۲ \Rightarrow R^۲=d^۲+\frac{l^۲}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{OH'A'}: OA'^۲=OH'^۲+H'A'^۲ \Rightarrow R^۲=d'^۲+\frac{l'^۲}{۴}$$

$$l>l' \Leftrightarrow l^۲>l'^۲ \Leftrightarrow R^۲-\frac{l^۲}{۴}<R^۲-\frac{l'^۲}{۴} \Leftrightarrow d^۲<d'^۲ \Leftrightarrow d<d'$$

۴

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲} \ \Rightarrow \ TT'=\sqrt{۳۶-۱} \ \Rightarrow \ TT'=\sqrt{۳۵}$$

۵ تنها در حالتی می‌توان با طول شعاع‌ها و خط‌المرکزین مثلث ساخت که دو دایره متقاطع باشند. داریم:

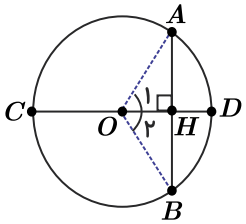
$$|R-R'|<d<R+R' \Rightarrow |۲m-۵|<m+۱<۲m-۱$$

$$۱) m+۱<۲m-۱ \Rightarrow m>۲$$

$$۲) |۲m-۵|<m+۱ \Rightarrow -m-۱<۲m-۵<m+۱ \Rightarrow \frac{۴}{۳}<m<۶$$

بنابراین محدودهٔ m به‌صورت $۲<m<۶$ می‌باشد.

۶ روش اول:



$$\begin{cases} OA=OB \\ OH=OH \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta AOH \cong \Delta BOH \rightarrow$$

$$AH=BH \ , \ \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲ \rightarrow AD=BD$$

روش دوم:

$$OA=OB=r \Rightarrow OAB \text{ متساوی الساقین}$$

چون در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، نیمساز و میانه هم هست داریم:

$$AH=BH \ , \ O_۱=O_۲ \Rightarrow AD=BD$$

۷ نصف

۸ مساحت قسمت هاشورزده برابر است با مساحت لوزی $CMON$ منهای مساحت قطاع $\widehat{MON}=۶۰^\circ$. لوزی $CMON$ از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع r (شعاع دایره) تشکیل شده است:

$$\overset{\Delta}{MOB}: \hat{B}=۶۰^\circ \ , \ OB=OM \Rightarrow BM=OB=OM=r \Rightarrow CM=۲r-MB \Rightarrow CM=r$$

۹ طبق روابط طولی داریم:

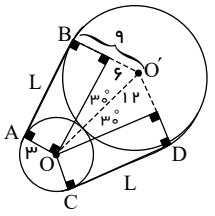
$$MT^{۲}=MO^{۲}-R^{۲}$$
$$MT'^{۲}=MO^{۲}-(۳R)^{۲}=MO^{۲}-۹R^{۲}$$
$$\Rightarrow MT^{۲}-MT'^{۲}=MO^{۲}-R^{۲}-MO^{۲}+۹R^{۲}=۸R^{۲}$$
$$MT'=۲R\Rightarrow MT^{۲}-۴R^{۲}=۸R^{۲}\Rightarrow MT^{۲}=۱۲R^{۲}\Rightarrow MT=\sqrt{۱۲}R$$

۱۰ چون دو دایره بر هم مماس هستند، طول خط‌المرکزین برابر است با:

$$OO'=R_{۱}+R_{۲}=۳+۹=۱۲$$

از O عمودهایی بر شعاع‌های $O'B$ و $O'D$ فرود می‌آوریم، در نتیجه دو مستطیل به وجود می‌آید، بنابراین طول سیم برابر است با دو برابر طول مماس مشترک خارجی و مجموع یک کمان ۱۲۰° از دایرهٔ کوچک (چرا؟!) و یک کمان ۲۴۰° از دایرهٔ بزرگ (چرا؟!):

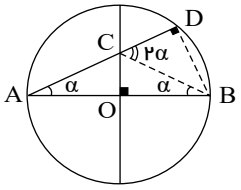
$$x=۲\sqrt{۱۲^{۲}-(۶)^{۲}}+\frac{۱۲۰}{۳۶۰}(۲\pi\times ۳)+\frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲\pi\times ۹)=۱۲\sqrt{۳}+۲\pi+۱۲\pi=۱۲\sqrt{۳}+۱۴\pi$$



توجه: اگر دو دایره مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آنها را از رابطهٔ $L=۲\sqrt{RR'}$ هم می‌توان به دست آورد.

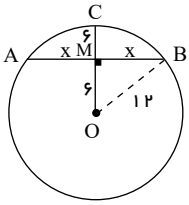
۱۱ مطابق شکل، چون دو قطر دایره بر هم عمودند، (دو قطر عمودمنصف یکدیگرند) پس $AC=BC$ و در نتیجه $\hat{A}=\hat{B}=\alpha$ می‌باشد. چون $\hat{C}_{۱}$ زاویهٔ خارجی مثلث ABCاست، پس $\hat{C}_{۱}=۲\alpha$.

چون $AC=BC$ است، نسبت $\frac{CD}{AC}$ برابر $\frac{CD}{BC}$ می‌باشد. حال اگر به نوع زاویهٔ محاطی $\hat{D}$ دقت کنیم، پی می‌بریم این زاویه روبه‌رو به قطر است و داریم:



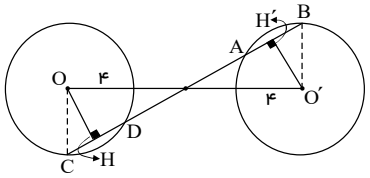
$$\hat{D}=۹۰^\circ\Rightarrow \cos ۲\alpha=\frac{CD}{BC}\xrightarrow{BC=AC}\frac{CD}{AC}=\cos ۲\alpha$$

۱۲ وقتی وتر AB عمودمنصف شعاع OC است، بر آن عمود است و آن را نصف می‌کند، پس مطابق شکل $OM=۶$ می‌باشد. حال در مثلث قائم‌الزاویه OMB داریم:



فیثاغورس : $MB^{۲}=۱۲^{۲}-۶^{۲}=۱۰۸\Rightarrow AB=۲\sqrt{۱۰۸}=۱۲\sqrt{۳}$

۱۳ اولاً به‌دلیل تقارن مسأله $AB=CD$، در ثانی اگر بخواهیم استدلال کنیم از O و O' عمودهایی بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه به‌حالت وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند و نتیجه $OH=O'H'$ است و حال می‌گوییم در دو دایرهٔ مساوی اگر دو وتر از مرکز به یک فاصله باشند، باهم برابرند.



۱۴

$$R=۳\quad و\quad R'=۸\quad و\quad d=۱۳$$

$$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\ \Rightarrow\ ۵a-۳=\sqrt{۱۳^{۲}-(۸-۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۵a-۳=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\ \Rightarrow\ a=۳$$

۱۵ مطابق شکل، امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ C در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم.

$AB \times AC = AD \times AE \Rightarrow AB \times AC = AD \times (AD + DE)$

$\Rightarrow AB \times AC = AD^{۲} + AD \times DE$

$\Rightarrow \begin{cases} AD^{۲} = AB \times AC - AD \times DE \\ AD \times DE = BD \times DC \end{cases}$

$\Rightarrow AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC$

۱۷

الف

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$MT^{۲} = MA \times MA' \Rightarrow x^{۲} = ۴ \times ۹ \Rightarrow x = ۶$

۱۸

الف

$\overset{\frown}{BC} + ۱۰۰^\circ + ۷۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۹۰^\circ$

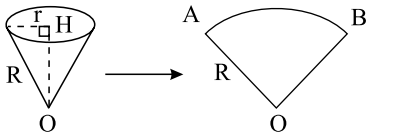
(زاویهٔ ظلّی) $\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۹۰^\circ}{۲} = ۹۵^\circ$

ب

$۴(۴ + x) = ۳(۳ + ۵) \Rightarrow ۴ + x = ۶ \Rightarrow x = ۲$

۱۹

الف



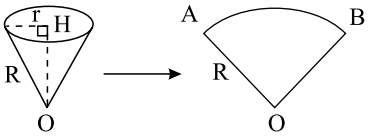
محیط قاعدهٔ مخروط $= ۲\pi r = ۲\pi \times ۳ = ۶\pi$ (۱)

$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} \rightarrow R = \sqrt{۴^{۲} + ۳^{۲}} = ۵$ (۲)

$\alpha = \frac{\text{طول کمان } AB}{R} = \frac{۶\pi}{۵} rad$

ترنج بوک
تلاشی درمسیرموفقیت

ب



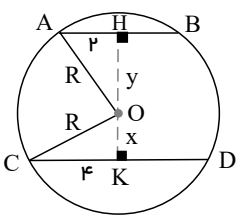
محیط قاعدهٔ مخروط $= ۲\pi r = ۲\pi \times ۳ = ۶\pi$ (۱)

$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} \rightarrow R = \sqrt{۴^{۲} + ۳^{۲}} = ۵$ (۲)

$\alpha = \frac{\text{طول کمان } AB}{R} = \frac{۶\pi}{۵} rad$

$S = \frac{۱}{۲}\alpha R^{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۶\pi}{۵} \times ۵^{۲} = ۱۵\pi$

۲۰ مطابق شکل، نقطهٔ O مرکز دایره است. می‌دانیم که عمود رسم‌شده از مرکز دایره بر وتر، آن را نصف می‌کند، داریم:



$\begin{cases} \hat{H} = ۹۰^\circ \ , \ AH = BH = \frac{۴}{۲} = ۲ \\ \overset{\triangle}{AOH} : y^{۲} = R^{۲} - ۴ \end{cases}$

$\begin{cases} \hat{K} = ۹۰^\circ \ , \ CK = DK = \frac{۸}{۲} = ۴ \\ \overset{\triangle}{COK} : x^{۲} = R^{۲} - ۱۶ \end{cases}$

$\begin{cases} y^{۲} = R^{۲} - ۴ \\ x^{۲} = R^{۲} - ۱۶ \end{cases} \Rightarrow y^{۲} - x^{۲} = ۱۲ \Rightarrow (y - x)(y + x) = ۱۲$

از طرفی فاصلهٔ دو وتر از یکدیگر ۶ واحد است، پس:

$x + y = ۶ \Rightarrow (y - x) \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow y - x = ۲$

با حل دستگاه زیر مقادیر x و y و در نهایت R به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+y=۶ \\ y-x=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=۴ \end{cases} \xrightarrow{y^۲=R^۲-۴} y^۲=R^۲-۴ \Rightarrow ۱۶=R^۲-۴ \Rightarrow R^۲=۲۰ \Rightarrow R=۲\sqrt{۵}$$

توجه: دو وتر AB و CD نمی‌توانند در یک طرف O قرار گیرند. (چرا؟)

ترنج بوک
تلاشی در مسیر موفقیت