

(۱) هر کدام ۰/۵ نمره

(الف) اگر  $A$  ماتریس اسکالر و  $B$  ماتریس هم مرتبه با ماتریس  $A$  باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض پذیر است. (درست - نادرست)(ب) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $A^{1403} = A$ . (درست - نادرست)(پ) اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} n & m+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس همانی باشد، حاصل  $n - m$  برابرست با .....

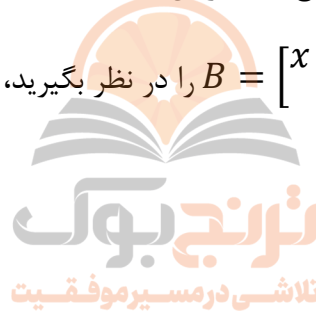
(۲) جای خالی را با اعداد و عبارات مناسب پر کنید. (هر جای خالی ۰/۲۵ نمره)

(الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون را یک ..... می نامند.

(ب) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با .....

(ج) دایره  $C(O, r)$  مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

(د) اگر یک خط، دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند در آن نقطه ..... است.

(۳) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید، اگر  $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مقادیر  $x + y$  را بدست آورید. ۱/۵ نمره(۴) دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند، اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد، حاصل  $AB$  را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره(۵) اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  بصورت  $a_{ij} = \begin{cases} -1 & |i-j| > 1 \\ 0 & |i-j| = 1 \\ 1 & |i-j| < 1 \end{cases}$  باشد، ماتریس  $A^2 - 2I$  را بدست آورید. ۱/۵ نمره(۶) اگر  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$  مقدار  $a$  را بدست آورید. ۱ نمره

۷) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید. ۱/۵ نمره

۸) دترمینال ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

۹) دستگاه معادله زیر را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. ۱/۵ نمره

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$$

۱۰) دترمینال ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  را با روش ساروس محاسبه کنید. ۱/۵ نمره



۱۱) معادله‌ی دایره‌ای را بیابید که نقاط  $A(-۱, ۴)$  و  $B(۳, -۴)$  دو سر یک قطر آن باشند. ۲ نمره

۱۲) وضعیت خط  $x + y = ۱$  و دایره‌ی  $x^2 + y^2 - ۲x - ۲y = ۲$  را نسبت به هم مشخص کنید. ۲ نمره

۱۳) دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید. ۲ نمره

$$\begin{cases} ۴x + y = ۱۱ \\ ۲x - ۳y = ۹ \end{cases}$$

(۱) هر کدام ۰/۵ نمره

(الف) اگر  $A$  ماتریس اسکالر و  $B$  ماتریس هم مرتبه با  $A$  باشد، آنگاه حاصل ضرب آنها تعویض پذیر است. (درست - نادرست)(ب) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $A^{1403} = A$  (درست - نادرست)  $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} = A \rightarrow A^n = A$ (پ) اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} n & m+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس همانی باشد، حاصل  $n - m$  برابرست با .....  
۱ -۲

(۲) جای خالی را با اعداد و عبارات مناسب پر کنید. (هر جای خالی ۰/۲۵ نمره)

(الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون را یک ..... ماتریس ..... می نامند.

(ب) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ..... ضرب درایه های قطر اصلی است.

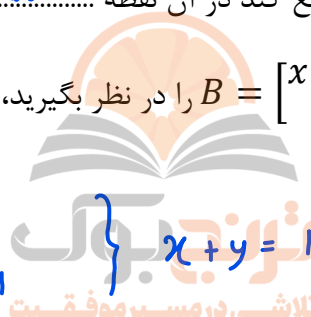
(ج) دایره  $C(O, r)$  مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... از ..... نقطه  $O$  به فاصله  $r$  هستند.

(د) اگر یک خط، دایره ای را فقط در یک نقطه قطع کند در آن نقطه ..... مماس ..... است.

(۳) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید، اگر  $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مقادیر $x + y$  را بدست آورید. ۱/۵ نمره

$$x + 1 + 2 = 5 \rightarrow x = 2$$

$$y + 2 + 3 = 4 \rightarrow y = -1$$

(۴) دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض اند، اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد،

$$n+1=0 \rightarrow n=-1$$

$$m-2=0 \rightarrow m=2$$

حاصل  $AB$  را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

(۵) اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  بصورت  $a_{ij} = \begin{cases} -1 & |i-j| > 1 \\ 0 & |i-j| = 1 \\ 1 & |i-j| < 1 \end{cases}$  باشد، ماتریس  $A^2 - 2I$  را بدست آورید. ۱/۵ نمره

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(۶) اگر  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$  مقدار  $a$  را بدست آورید. ۱ نمره

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2+36+a) - (4a+1+9) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5a+1 \Rightarrow a = \frac{12}{5}$$

(۷) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید. ۱/۵ نمره

$$|A| = \begin{vmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{vmatrix} = 20|A|^2 - 5|A| = |A| \rightarrow |A| = 0 \rightarrow |A|^3 - 2 = -2$$

$$\div |A| \rightarrow 20|A|^2 - 5 = 0 \rightarrow |A|^2 = \frac{5}{20} \rightarrow |A|^2 = \frac{1}{4} \rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \pm \frac{\sqrt{3}}{100}$$

(۸) دترمینال ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (20 + 10 + 0) - (0 + 0 - 10) = 30$$

(۹) دستگاه معادله زیر را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. ۱/۵ نمره

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{8-7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow x=1, y=2$$

(۱۰) دترمینال ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  را با روش ساروس محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 6 - 2) - (2 + 6 + 2) = -6 - 10 = -16$$

(۱۱) معادله‌ی دایره‌ای را بیابید که نقاط  $A(-1, 4)$  و  $B(3, -4)$  دو سر یک قطر آن باشند. ۲ نمره

$$O(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, \beta = \frac{-4 + 4}{2} = 0 \rightarrow O(1, 0)$$

$$R = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 80$$

(۱۲) وضعیت خط  $x + y = 1$  و دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$  را نسبت به هم مشخص کنید. ۲ نمره

$$O(1, 1)$$

$$R = \sqrt{\frac{4 + 4 - 4(-2)}{4}} = 2$$

$$OH = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

خط و دایره متقاطع هستند  $OH < R \rightarrow$

(۱۳) دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید. ۲ نمره

$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{-12 - 2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -42 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow x=3, y=-1$$