

دفترچه پاسخ

آزمون ۳۱ مرداد ۱۴۰۵ اختصاصی دوازدهم ریاضی



پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان
حسابان ۲ و ریاضی پایه	محمد مصطفی ابراهیمی - کاظم اجلالی - سعید اکبرزاده - امیر محمد باقری نصرآبادی - مسعود برملا - شاهین پروازی - سهیل حسن خان پور - عادل حسینی - افشین خاصه خان - طاهر دادستانی - علی ساوجی - یاسین سپهر - رضا سیدنجفی - علی شهبازی - جمشید عباسی - علی کردی - افشین گلستانی - سیدسپهر متولیان - مجتبی مجاهدی - امیر محمودیان - لیل مرادی - مهرداد ملوندی - حمیدرضا نوشکاران - جهانبخش نیکنام
هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیر حسین ابومحبوب - حنا - اتفاقی - اسحاق اسفندیار - معصومه اکبری صحت - علی ایمانی - محبوبه بهادری - محسن بهرام پور - فرزاد جواد - جواد حاتمی - سید محمد رضا حسینی فرد - کیوان دارابی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - رضا سیدنجفی - محمد صحت کار - شایان عیاجی - هومن عقیلی - فرشاد فرامرزی - احمد رضا فلاح - مرتضی فهم علیوی - سیدسروش کریمی مداحی - امیر مالیر - امیر حسین ملازینل - مهرداد ملوندی - نیلوفر مهدوی - امیر وفائی
فیزیک	خسرو ارغوانی فرد - مهران اسماعیلی - محمد اکبری - حسین الهی - زهره آقامحمدی - امیر مسعود حاجی مرادی - فرشید رسولی - محمد جواد سورچی - معصومه شریعت ناصری - مسعود قره خانی - محسن قندچلر - مصطفی کیانی - علیرضا گونه - احسان محمدی - حسین مخدومی - محمد کاظم منشادی - امیر احمد میرسعید - حسام نادری - مجتبی نکوئیان
شیمی	احمد رضا جعفری - مسعود جعفری - امیر حاتمیان - امین خوشنویسان - صادق درتومیان - حمید ذبحی - روزبه رضوانی - سیدرضا رضوی - هانی سوری - میلاد شیخ الاسلامی - خیای - سهراب صادقی زاده - آترین صبا رسول - عابدینی زواره - سیدصدرا عادل - آرمین عظیمی - امیر قاسمی - میثم کیانی - مجتبی محبوب - کارو محمدی - سالار ملکی - نوید نقاشان - امین نوروزی - اکبر هنرمند

گزینه‌گران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی پایه	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینه‌گر	سیدسپهر متولیان	امیر حسین ملازینل	امیر حسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
گروه ویراستاری	سینا صالحی آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیر حسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیر تر کمبور زهره آقامحمدی	احسان پنجه‌شاهی آترین صبا امیر حسین توحیدی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیر حسین ملازینل	امیر حسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	ابراهیم نوری	علیرضا نجفی
(مستندسازی)	معصومه صنعت کار - امیر محمد علیپور - مهسا محمدنیا - فرشته کمرانی امیر عباس محمدی فاطمه الهی محسن دستجردی				

گروه هی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلمچی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



حسابان ۱

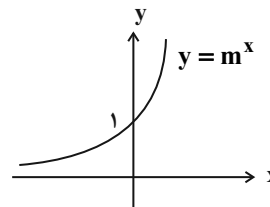
گزینه ۳» ۱-

(سعید اکبرزاده)

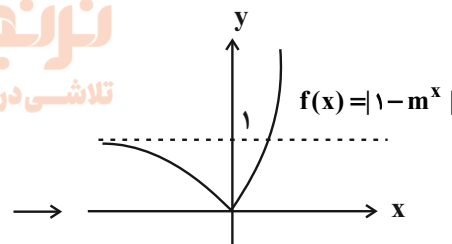
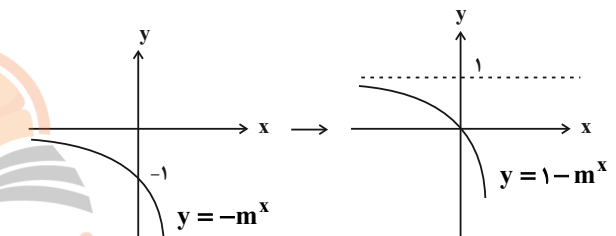
مقادیر تابع نمایی داده شده با افزایش مقادیر x افزایش می‌یابند. پس پایه تابع نمایی عددی بزرگ‌تر از ۱ است.

$$1 < 2m - 2 \Rightarrow 3 < 2m \Rightarrow 1 < m$$

نمودار تابع نمایی $y = m^x$ به صورت زیر است، چون پایه یعنی عدد m بزرگ‌تر از ۱ است.



حال نمودار تابع $f(x) = |1 - m^x|$ را رسم می‌کنیم.



(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۷)

گزینه ۳» ۲-

(رضا سیرنیقی)

با توجه به شکل واضح است که نمودار تابع نمایی دو واحد پایین آمده است، یعنی $c = -2$. از طرفی تابع از نقطه $(0, 4)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$4 = a(b)^0 - 2 \Rightarrow a = 6$$

با توجه به نمودار مشخص است تابع از $(1, 0)$ نیز می‌گذرد، در نتیجه:

$$0 = 6(b)^1 - 2 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

در نهایت $\frac{ac}{b} = -36$ است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

گزینه ۱» ۳-

(یاسین سپهر)

اگر T نیمه عمر یک ماده در حال فروپاشی و جرم نمونه‌ای (مقدار اولیه) از آن m_0 باشد، مقدار آن بعد از مدت زمان t عبارت است از:

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

اگر از ۱۰۰ میلی گرم اولیه، $87/5$ میلی گرم به انرژی تبدیل شود، یعنی $12/5$ گرم از ماده باقی مانده است:

$$m(t) = 100 \times 2^{-\frac{t}{18}} = 12/5 \Rightarrow 2^{-\frac{t}{18}} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{18} = -3 \Rightarrow t = 54 \text{ سال}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۹)

گزینه ۱» ۴-

(علی کردی)

دامنه تابع بازه $\left(-\frac{2b}{3}, +\infty\right)$ است و با توجه به بازه داده شده داریم:

$$-\frac{2b}{3} = 2 \Rightarrow b = -3$$

بنابراین $f(x) = \log_{a+1}(3x - 6)$ داریم:

$$f(11) = \log_{a+1}(33 - 6) = 3 \Rightarrow \log_{a+1}(27) = 3$$

$$\Rightarrow (a+1)^3 = 27 \Rightarrow a+1 = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a+b = -1$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۴)

گزینه ۳» ۵-

(جمشید عباسی)

دامنه تابع بازه $(-1, +\infty)$ است و از آنجا که این بازه باید جواب نامعادله $ax + b > 0$ باشد، داریم:

$$a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b \quad (1)$$

عرض از مبدأ تابع برابر ۱ است، پس:

$$\log_c b = 1 \Rightarrow b = c \quad (2)$$

مختصات نقطه $(2, 2)$ هم در ضابطه صدق می‌کند، لذا:

$$\log_c(2a + b) = 2 \Rightarrow 2a + b = c^2 \quad (3)$$

از دستگاه معادلات (۱)، (۲) و (۳)، مقادیر قابل قبول زیر به دست می‌آید:

$$a = b = c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_3(3x + 3) = 1 + \log_3(x + 1)$$

x_0 محل برخورد نمودار تابع f با محور x ها است، داریم:

$$f(x_0) = 1 + \log_3(x_0 + 1) = 0 \Rightarrow \log_3(x_0 + 1) = -1$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -\frac{2}{3}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)



۶- گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

پس از هر لایه، $0/98$ ناخالصی‌ها باقی می‌ماند؛ بنابراین پس از n لایه،ناخالصی باقی‌مانده $(0/98)^n$ از مقدار اولیه آن خواهد بود. ما باید نامعادله

$$0/7 \leq (0/98)^n \text{ را حل کنیم. از طرفین در مبنای } 10 \text{ لگاریتم می‌گیریم:}$$

$$n \log 0/98 \leq \log 0/7$$

$$\Rightarrow n(\log 2 + 2 \log 7 - 2) \leq \log 7 - 1$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{1 - \log 7}{2 - (\log 2 + 2 \log 7)}$$

حال مقادیر تقریبی را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$n \geq \frac{1 - 0/845}{2 - 1/991} = \frac{0/155}{0/009} \approx 17/2$$

پس حداقل ۱۸ لایه باید بگذاریم.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۶ تا ۷۹ و ۸۶)

۷- گزینه «۲»

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

$$\log_{12}^{36} = \frac{\log_2^{36}}{\log_2^{12}} = \frac{\log_2^{(2^2 \times 3^2)}}{\log_2^{(2^2 \times 3)}} = \frac{2 + 2 \log_2^3}{2 + \log_2^3} = \frac{2 + 2a}{2 + a}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۸- گزینه «۳»

(سیرسپهر متولیان)

$$\frac{1}{5}x^2 - 4x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = a + b = 20 \\ P = ab = 75 \end{cases}$$

روش اول:

$$\log(3a + 5) + \log(3b + 5) = \log(3a + 5)(3b + 5)$$

$$= \log(9ab + 15(a + b) + 25)$$

$$= \log(675 + 300 + 25) = \log 1000 = 3$$

$$\frac{1}{5}x^2 - 4x + 15 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 15$$

روش دوم:

$$\log(3a + 5) + \log(3b + 5) = \log 20 + \log 50 = \log 1000 = 3$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۹- گزینه «۴»

(عادل حسینی)

ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\log(2^x - 1) + \log 1000 = \log 8^x + \log 32$$

$$\Rightarrow \log 1000(2^x - 1) = \log(32 \times 8^x)$$

$$\Rightarrow 1000(2^x - 1) = 32 \times 8^x \xrightarrow{+8} 125(2^x - 1) = 4 \times 8^x = 4(2^x)^3$$

حال با تغییر متغیر $t = 2^x$ داریم:

$$125(t - 1) = 4t^3 \Rightarrow 4t^3 - 125t + 125 = 0$$

$$\text{اگر معادله را به صورت } \frac{t-1}{t^3} = \frac{4}{125} \text{ بنویسیم، می‌بینیم که } t = 5 \text{ جواب}$$

معادله بالا است. پس آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$4t^3 - 125t + 125 = (t - 5)(4t^2 + 20t - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = \log_2 5 \\ t_2 = \frac{-20 + 20\sqrt{2}}{4} = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = \log_2 \frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

می‌دانیم در تابع $y = \log_2 x$ ، با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایشمی‌یابد، لذا از آنجا که $5 > \frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ، نتیجه می‌شود $x_1 > x_2$ و جواببزرگ‌تر معادله، برابر $x_1 = \log_2 5$ خواهد بود.

$$\Rightarrow 2 < \log_2 5 < 3 \Rightarrow [\log_2 5] = 2$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۱۰- گزینه «۲»

(علی شعربی)

$$\log_7^{(2x+1)} - \log_7^{(2x+1)} = 2 \Rightarrow \log_7^{(2x+1)} - 3 \log_7^{(2x+1)} = 2$$

$$\frac{A = \log_7^{(2x+1)}}{\log_7^{(2x+1)} = \frac{1}{\log_7^{(2x+1)}}} \rightarrow A - \frac{3}{A} = 2$$

$$\xrightarrow{\times A} \frac{A^2 - 3A - 2}{(A-3)(A+1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 3 \Rightarrow \log_7^{(2x+1)} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2} \\ A = -1 \Rightarrow \log_7^{(2x+1)} = -1 \Rightarrow 2x+1 = \frac{1}{7} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{15}{4}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

ریاضی ۱

گزینه ۳» ۱۱-

(مبتنی میانه‌ری)

ضلع مربع را با x نشان می‌دهیم، پس:

$$\begin{cases} x^2 = 4x - 3 \\ \text{از انداز محیط کمتر است} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

عبارت $x^2 - 4x + 3$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

پس دو مربع با این ویژگی وجود دارد.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

گزینه ۴» ۱۲-

(عادل مسینی)

عرض از مبدأ سهمی برابر با $c = -4$ است. پس معادله آن را $y = ax^2 + bx - 4$ در نظر می‌گیریم. در این سهمی $x = 2$ ریشه است، پس داریم:

$$0 = a(2)^2 + b(2) - 4 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (1)$$

از طرفی $y = \frac{1}{4}$ عرض رأس سهمی است. حال از رابطه $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ استفاده می‌کنیم:

$$y_S = -\frac{b^2 + 16a}{4a} = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 + 16a = -2a \Rightarrow b^2 + 18a = 0 \quad (2)$$

با جای گذاری $a = \frac{2-b}{2}$ در معادله (۲) داریم:

$$b^2 + 18\left(\frac{2-b}{2}\right) = b^2 - 9b + 18 = (b-3)(b-6) = 0$$

$$\Rightarrow b = 3 \quad \text{یا} \quad b = 6$$

به ازای $b = 3$ ، $a = -\frac{1}{4}$ و به ازای $b = 6$ ، $a = -2$ به دست می‌آید.

اما در حالت $(a, b) = (-2, 6)$ سهمی $y = -2x^2 + 6x - 4$ را داریم که ریشه‌های آن $x = 1$ و $x = 2$ است و این با نمودار صورت سؤال همخوانی ندارد. در نتیجه فقط $b = 3$ قابل قبول است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

گزینه ۱» ۱۳-

(امیرمهر باقری نصرآبادی)

قاعده مثلث هاشورخورده، اختلاف صفرهای تابع و ارتفاع آن برابر ۶ است.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{100 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{64}}{|a|} = \frac{2\sqrt{17}}{|a|}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{17}}{|a|} \right) (6) = 6\sqrt{17} \Rightarrow |a| = 1$$

دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a = -1$ و در نتیجه $c = -8$ ، پس معادله سهمی داده شده $f(x) = -x^2 + 10x - 8$ است که در آن $a + c = -9$.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

گزینه ۲» ۱۴-

(عادل مسینی)

با توجه به علامت‌های جدول، عبارت مخرج قطعاً یک ریشه و عبارت صورت، یک یا دو ریشه دارد. با توجه به جدول و دو عدد $x = 1$ و $x = c$ (با شرط $c > 1$) در آن، ممکن است دو حالت زیر رخ دهد:

الف) یکی از ریشه‌های صورت (ریشه $x = c$) با ریشه مخرج (یعنی $x = \frac{b}{a}$) یکسان است، پس:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{a}\right) + b = 0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = 0$$

در این شرایط $p(x) = \frac{1}{a}x - 1$ است که ریشه این عبارت باید $x = 1$ باشد:

$$\frac{1}{a} - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$p(x) = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x}$$

در این صورت $c = \frac{b}{a} = 0$ به دست می‌آید که غیرقابل قبول است. ($c > 1$)
ب) صورت فقط ریشه مضاعف $x = c$ و مخرج ریشه $x = 1$ دارد.

$$\begin{cases} \text{صورت } \Delta = a^2 - 4b = 0 \\ \text{ریشه مخرج } a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = b = 4$$

همچنین c ریشه صورت است:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{پس } p(2c) = p(4) = \frac{1}{3} \text{ و } p(x) = \frac{(x-2)^2}{4(x-1)}$$

توجه: در این سوال، قطعاً a غیرصفر است، زیرا با فرض $a = 0$ ، عبارت به

$$\text{صورت } p(x) = \frac{x^2 + b}{-b}$$
 می‌شود که جدول تعیین علامت آن مطابق

صورت سوال نخواهد بود؛ لذا مخرج عبارت، قطعاً یک ریشه دارد.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱۵- گزینه «۲»

(علی ساوپی)

نکته: $(a > 0) \quad u^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |u| \leq a \Leftrightarrow -a \leq u \leq a$

با توجه به نکته بالا، می‌نویسیم:

$$|x^2 - 4x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x^2 - 4x \leq 2 \xrightarrow{+4} 2 \leq x^2 - 4x + 4 \leq 6$$

$$\Rightarrow 2 \leq (x-2)^2 \leq 6 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{2} \leq |x-2| \leq \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq x-2 \leq \sqrt{6} \Rightarrow 2+\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \leq x-2 \leq -\sqrt{2} \Rightarrow 2-\sqrt{6} \leq x \leq 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max\{x\} + \min\{x\} = (2+\sqrt{6}) + (2-\sqrt{6}) = 4$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۱۶- گزینه «۴»

(مهردار ملونری)

براساس ریشه عبارت قدرمطلق که $x_0 = \frac{1}{2}$ است، نامعادله را در دو حالت

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ و } x < \frac{1}{2}$$

حل می‌کنیم:

$$x < \frac{1}{2} : 3x + 2x - 1 \geq 5 \Rightarrow 5x \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \quad (\text{غ ق ق})$$

$$x \geq \frac{1}{2} : 3x - 2x + 1 \geq 5 \Rightarrow x \geq 4$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $x \geq 4$ بوده که تنها فاقد سه عدد طبیعی است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۱۷- گزینه «۲»

(امیر محمودیان)

دو زوج مرتب با مؤلفه اول یکسان $x+2$ وجود دارد، پس برای تابع شدن رابطه باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها برابر باشند:

$$x^3 = x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 2$$

به ازای $x=0$ رابطه را بازنویسی می‌کنیم:

$$\{(2,0), (0,0), (2,0), (2,0)\}$$

تابع است.

به ازای $x=-1$:

$$\{(1,-1), (1,1), (1,-1), (4,-1)\}$$

تابع نیست.

به ازای $x=2$:

$$\{(4,8), (-2,4), (4,8), (-2,2)\}$$

تابع نیست.

پس تنها به ازای $x=0$ تابع است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱۸- گزینه «۳»

(لیلا مراری)

چون $f(x)$ یک تابع است، دو ضابطه تعریف شده به‌ازای $x=2$ برابرند:

$$2m - 4 = 8 - m \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$$

و از آنجا که $x=2-\sqrt{3}$ عددی کوچک‌تر از دو است، باید در ضابطه اول

جایگذاری شود:

$$4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4 \Rightarrow f(2-\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + 4 = 1$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱۹- گزینه «۳»

(عادل حسینی)

باید x هایی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها مقادیر تابع برابر $1, 5, 10$ شوند:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$\begin{cases} f(x)=1 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \\ f(x)=5 \Rightarrow (x-1)^2=4 \Rightarrow x=3 \text{ یا } -1 \\ f(x)=10 \Rightarrow (x-1)^2=9 \Rightarrow x=4 \text{ یا } -2 \end{cases}$$

پس اعضای مجموعه A را باید از بین اعضای مجموعه $X = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$

انتخاب کنیم. در واقع A زیرمجموعه‌ای ناتمامی از مجموعه X است.

مجموعه X ، $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد که برای A ، ۳۱ مجموعه می‌توانیم پیدا کنیم.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۲۰- گزینه «۱»

(یاسین سپهر)

نمایش جبری تابع خطی f به‌صورت $f(x) = ax + b$ می‌باشد.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(x-2) = a(x-2) + b \\ f(x+1) = a(x+1) + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x-2) + f(x+1) = ax - 2a + b + ax + a + b$$

$$\Rightarrow 4x - 8 = 2ax + (-a + 2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ -a + 2b = -8 \xrightarrow{a=2} b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f(2) = 1$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه ۱۰۳)

حسابان ۲

گزینه ۱»

(یاسین سپهر)

نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور x ها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور y ها) انتقال دهیم ضابطه $y = (x-1)^3 + 2$ به دست می‌آید که همان ضابطه مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس: $a = -1, b = -2 \Rightarrow a.b = 2$

(حسابان ۲- تابع: مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۱)

گزینه ۱»

(عمیدرضا نوشکاران)

تابع $\frac{1}{f}$ صعودی و مثبت است. تابع $-g$ نیز صعودی و مثبت است. پس تابع $\frac{1}{f} - g$ که مجموع دو تابع صعودی است، صعودی خواهد شد.

(حسابان ۲- تابع: مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۲)

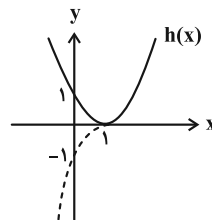
گزینه ۳»

(مسعود برملا)

ابتدا ضابطه تابع $h(x) = |f(x) - g(x)|$ را می‌سازیم:

$$h(x) = |1 - x^3 + 3x^2 - 3x| = |x^3 - 3x^2 + 3x - 1| = |(x-1)^3|$$

نمودار تابع $y = (x-1)^3$ و همچنین نمودار تابع h در شکل زیر رسم شده است.



تابع h روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است اما روی هر کدام از بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$ و زیرمجموعه‌های آنها یکنوا است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

گزینه ۳»

(افشین فاضله‌فان)

مطابق شکل بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن صعودی است، بازه $[-5, 0]$ می‌باشد که طول آن برابر $a = 5$ است. همچنین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن نزولی است، بازه $[-3, 5]$ می‌باشد که طول آن برابر $b = 8$ است. $\Rightarrow |a - b| = 3$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

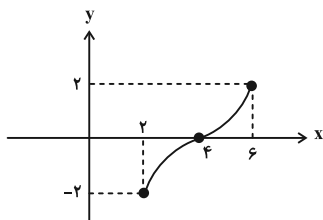
گزینه ۲»

(معمانیفش نیکنام)

$$f(x) = \sqrt{x-2} + (-\sqrt{6-x})$$

$$D_f = [2, 6] \quad (1)$$

تابع f مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس اکیداً صعودی است و نمودار آن به صورت تقریبی شبیه شکل زیر است:



ابتدا دامنه تابع $y = f(f(x) + 4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2 \leq f(x) + 4 \leq 6 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6 \quad (2)$$

و حال نامعادله را حل می‌کنیم:

$$f(f(x) + 4) \leq f(4) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x) + 4 \leq 4$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [2, 4] \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} x \in [2, 4]$$

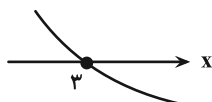
این بازه شامل سه عدد صحیح ۲، ۳ و ۴ است که مجموع آنها برابر ۹ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

گزینه ۴»

(افشین گلستانی)

چون f یک تابع اکیداً نزولی و پیوسته با دامنه $\mathbb{R}$ و $f(3) = 0$ است، پس می‌توان نمودار زیر را برای f فرض کرد.



(ظاهر درستانی)

۲۸- گزینه «۴»

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x+2)$ بر $x-3$ برابر با $p(5)$ است، پس $p(5) = 0$ است. در نتیجه چندجمله‌ای $p(1-2x)$ بر عبارتی بخش‌پذیر است که ریشه آن همان جواب معادله $5 = 1-2x_0$ یعنی $x_0 = -2$ باشد، پس $p(1-2x)$ قطعاً بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

(کالظم ایلانی)

۲۹- گزینه «۴»

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+4$ برابر با $p(-4)$ است، پس $p(-4) = 2$. باقی‌مانده تقسیم $p(x) - 4x$ بر $x+2$ برابر با $f(-2)$ است. برای این کار $x = -2$ را در عبارت $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$r = f(-2) = -8p(-4) - 4(-2) = -8 \times 2 + 8 = -8$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

(عارل مسینی)

۳۰- گزینه «۴»

رابطه تقسیم را برای تقسیم $f(x)$ بر $(x+5)(x-1)$ به صورت $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)q_1(x) + x - 6$ می‌نویسیم:

$$f(x) = (x+5)(x-1)q_1(x) + x - 6 \quad (*)$$

همچنین برای تقسیم $f(f(x))$ بر $x-1$ داریم:

$$f(f(x)) = (x-1)q_2(x) + r$$

می‌بینیم که اگر $x = 1$ را در رابطه بالا جای‌گذاری کنیم، مقدار r به دست می‌آید:

$$r = f(f(1))$$

از رابطه (*) داریم: $f(1) = 0 + (1-6) \Rightarrow f(1) = -5 \Rightarrow r = f(-5)$

$$f(-5) = 0 + (-5-6) = -11$$

مجدداً از رابطه (*) داریم:

$$\text{پس } r = -11 \text{ است.}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

دقت شود که نمودار تابع f الزاماً به شکل بالا نیست، ولی می‌توان برای تصور f از نمودار بالا استفاده کرد.

حال باید دامنه تابع داده شده را پیدا کنیم:

$$0 \leq (x-3)^2 f(2-x) \Rightarrow (x-3)^2 f(2-x) \geq 0$$

نامعادله را با تعیین علامت حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ f(2-x) = 0 \Rightarrow 2-x = 3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	3
$(x-3)^2 f(2-x)$	$-$	$+$

$$\Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

برای فهمیدن علامت خانه‌های جدول از عددگذاری استفاده کرده‌ایم.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۲۷- گزینه «۱»

عبارت $3 + 2\sqrt{2}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2} + 1)^2$$

حال این عبارت را در نامعادله سوال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt{2} + 1)^{x^2 - 3x + 2} < (\sqrt{2} + 1)^2$$

تابع نمایی $y = (\sqrt{2} + 1)^t$ اکیداً صعودی است؛ در نتیجه:

$$x^2 - 3x + 2 < 2 \Rightarrow x^2 - 3x < 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b - 3a = 6$$

(مسئله ۲- تابع: مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۲)

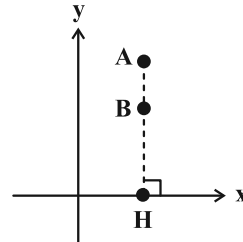


هندسه ۲

گزینه «۴» ۳۱

(سولگر روشنی)

تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس. هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از همان صفحه است.



در گزینه «۴» نقاط واقع بر محور x ها تصویر منحصر به فرد یک نقطه از صفحه نیستند. به عنوان مثال در شکل، تصویر نقاط A و B (که طول یکسانی دارند)، تحت این تابع بر نقطه H منطبق می‌گردد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه ۳۴)

گزینه «۳» ۳۲

(امیرمسین ایومسوب)

ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ، انتقالی با بردار $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ است.

مطابق شکل داریم:

$$\vec{BO} = \vec{OD} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{BO} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$$

بنابراین کافی است با برداری هم اندازه و خلاف جهت $\vec{AD}$ ، انتقال را انجام دهیم تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ بر $ABCD$ منطبق گردد که در بین گزینه‌ها، تنها بردار $\vec{CB}$ دارای این ویژگی است، یعنی داریم:

$$\vec{CB} = \vec{DA} = -\vec{AD}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

گزینه «۲» ۳۳

(شایان عباپی)

انتقال تبدیلی طولی است، پس شعاع دایره در انتقال تغییری نمی‌کند و $R' = 2$ است. نقطه O (مرکز دایره C) در این انتقال بر نقطه O' (مرکز دایره C') تصویر می‌شود، پس طول خط‌المركزین دو دایره برابر طول بردار انتقال است، یعنی $OO' = 5$ بوده و در نتیجه داریم:

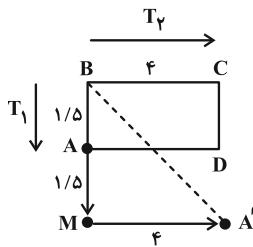
$$5 > 2 + 2 \Rightarrow OO' > R + R'$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

گزینه «۴» ۳۴

(مهریار ملونری)

مطابق شکل و فرض سؤال داریم:



$$T_1(A) = M$$

$$T_1(T_1(A)) = T_1(M) = A'$$

در مثلث قائم‌الزاویه BMA' به طول اضلاع قائمه ۴ و ۳ طبق قضیه

$$A'B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \text{فیثاغورس داریم:}$$

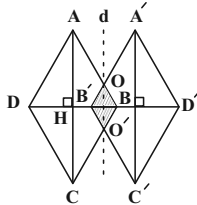
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

گزینه «۱» ۳۵

(سولگر روشنی)

$$\Delta AHB : AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = 8^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 36 \Rightarrow BH = 6 \Rightarrow BD = 12$$



بازتاب تبدیلی طولی است. از طرفی خط d (محور بازتاب) موازی قطر بزرگ لوزی $ABCD$ است، بنابراین چهارضلعی $OBO'B'$ یک لوزی بوده که زوایای آن برابر زوایای لوزی $ABCD$ است، پس این دو لوزی متشابه هستند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است و در نتیجه داریم:

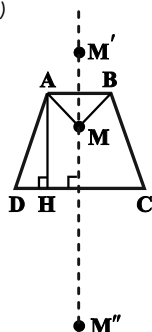
$$\frac{S_{OBO'B'}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{OB}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{OBO'B'}}{\frac{1}{2} \times 16 \times 12} = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OBO'B'}}{96} = \frac{9}{100} \Rightarrow S_{OBO'B'} = \frac{9 \times 96}{100} = 8.64$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

گزینه «۲» ۳۶

(امیر وغانی)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH(AB + CD)$$

$$\Rightarrow 56 = \frac{1}{2} AH(7 + 9)$$

$$\Rightarrow AH = 7$$

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط موازی، معادل یک انتقال با برداری به طول دو برابر فاصله این دو خط است، بنابراین داریم:

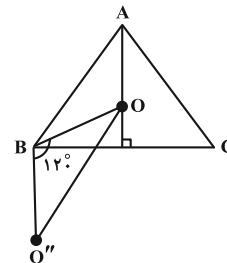
$$MM'' = 2AH = 2 \times 7 = 14$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: برگرفته از تمرین ۴ صفحه ۴۲)

۳۷- گزینه «۱»

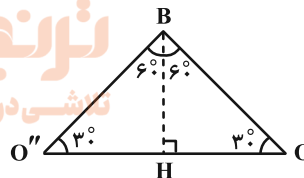
(کیوان دارابی)

حاصل دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط متقاطع یک دوران است. مطابق شکل، O'' دوران یافته O در جهت ساعتگرد و به اندازه زاویه 120° به مرکز دوران B است. (زاویه دوران دو برابر زاویه بین دو محور است) اگر طول ضلع مثلث a باشد، آنگاه:



$$BO = \frac{2}{3}h_a = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

با توجه به شکل زیر داریم:



$$OH = O''H$$

$$\Rightarrow OO'' = 2OH = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}BO\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}a = a$$

روش دوم محاسبه OO'' : چهارضلعی $AOO''B$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

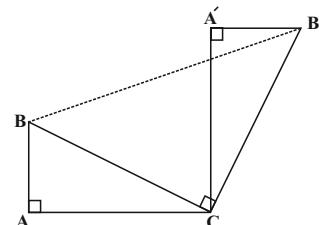
$$AO = BO'', \quad AO \parallel BO'' \Rightarrow OO'' = AB = a$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: برگرفته از تمرین ۵ صفحه ۴۳)

۳۸- گزینه «۱»

(معصومه اکبری صمد)

فرض کنید $AB = 1$ و $AC = 3$ باشد. در این صورت داریم:



$$\Delta ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow BC = \sqrt{10}$$

دوران تبدیلی طولی است، پس $B'C = \sqrt{10}$ است. از طرفی در دوران، زاویه بین هر پاره‌خط و تصویر آن، برابر با زاویه دوران است، پس $\widehat{BCB'} = 90^\circ$ و در نتیجه مثلث BCB' قائم‌الزاویه است. داریم:

$$\Delta BCB' : BB'^2 = BC^2 + B'C^2 = 10 + 10 = 20 \Rightarrow BB' = 2\sqrt{5}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۳۹- گزینه «۲»

(امیرفرسین ابومصوب)

فرض کنید از مرکز تقارن هر کدام از این چندضلعی‌ها به تمام رئوس آن چندضلعی وصل کنیم. زاویه بین هر دو پاره‌خط متوالی در هر کدام از این چندضلعی‌ها به صورت زیر است:

$$\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ \quad \text{گزینه «۴»}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود فقط در شش‌ضلعی منتظم، 120° مضربی از زاویه بین هر دو پاره‌خط متوالی که از مرکز تقارن به رأس‌ها وصل می‌شود، می‌باشد و در نتیجه، در بین گزینه‌ها، تحت دوران با زاویه 120° حول مرکز تقارن، فقط شش‌ضلعی منتظم، بر خودش منطبق می‌شود.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴۰- گزینه «۱»

(مشویه بهاری)

هر بردار انتقالی که موازی نیمساز ربع اول دستگاه مختصات (خط $y = x$) باشد را می‌توان به صورت $\vec{v} = (a, a)$ نمایش داد. بنابراین مختصات نقطه B' به صورت $B'(1+a, -1+a)$ خواهد بود. دوران تبدیلی طولی است، در نتیجه اگر B' دوران یافته A به مرکز مبدأ مختصات و زاویه θ باشد، آنگاه داریم:

$$OB' = OA \Rightarrow \sqrt{(1+a)^2 + (-1+a)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{بهاره توان}} 1 + a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a = 6$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 2$$

طول بردار انتقال همان طول پاره‌خط BB' است، پس:

$$BB' = \sqrt{(1+a-1)^2 + (-1+a+1)^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{4} = 2$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

هندسه ۱

گزینه «۴» - ۴۱

(امیرحسین ابومفیوب)

می‌دانیم هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند. اگر نسبت تشابه

این دو شش ضلعی منتظم را برابر k در نظر بگیریم، آن‌گاه نسبت مساحت‌ها

برابر k^2 و نسبت محیط‌ها برابر k است. داریم:

$$\frac{S}{S'} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{P}{P'} = k \Rightarrow \frac{P}{45} = \frac{3}{4} \Rightarrow P = 45 \times \frac{3}{4} = 33 \frac{3}{4}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

گزینه «۱» - ۴۲

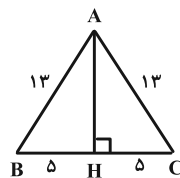
(امیرحسین ملازینل)

کافی است طول بلندترین ارتفاع را در مثلث ABC به دست آوریم و

سپس با استفاده از نسبت تشابه دو مثلث، اندازه ارتفاع متناظر را در مثلث

$A'B'C'$ پیدا کنیم. می‌دانیم بلندترین ارتفاع هر مثلث، ارتفاع وارد بر

کوچک‌ترین ضلع آن است، پس مطابق شکل داریم:



$$\Delta ABH : AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AH = 12$$

نسبت ارتفاع‌های متناظر در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

از طرفی نسبت محیط‌ها در دو مثلث متشابه نیز با همین نسبت برابر است. با

توجه به این‌که محیط مثلث ABC برابر $10 + 13 + 13 = 36$ است، داریم:

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{\Delta ABC \text{ محیط}}{\Delta A'B'C' \text{ محیط}} \Rightarrow \frac{12}{A'H'} = \frac{36}{48} \Rightarrow A'H' = 16$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

گزینه «۲» - ۴۳

(امیرحسین ابومفیوب)

مثلی به طول اضلاع ۴، ۸ و $4\sqrt{3}$ ، قائم‌الزاویه است، چون طول اضلاع آن

در قضیه فیثاغورس صدق می‌کنند.

$$4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48 = 64 = 8^2$$

بنابراین مساحت این مثلث برابر است با: $S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

مساحت مثلث دوم در صورتی بیشترین مقدار ممکن را دارد که ضلع به طول

$3\sqrt{3}$ متناظر با کوچک‌ترین ضلع مثلث اول باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{8\sqrt{3}} = \frac{27}{16} \Rightarrow S_2 = 13 \frac{5}{8}\sqrt{3}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

گزینه «۲» - ۴۴

(امیررضا خلاح)

در یک n ضلعی از هر رأس $n-3$ قطر می‌گذرد. با توجه به قطرهای

مشترک، در مجموع $3(n-3) - 3$ قطر بین آن‌ها وجود دارد. پس:

$$3(n-3) - 3 = 15 \Rightarrow 3(n-3) = 18 \Rightarrow n = 9$$

با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس n ضلعی، سطح آن به $n-2$ مثلث

تقسیم می‌شود. پس جواب $9-2=7$ می‌باشد.

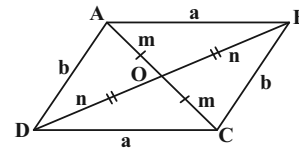
(هنرسه ۱- پندرشعاعی‌ها: صفحه ۵۵)

۴۵- گزینه «۴»

(کتاب آبی)

با توجه به فرض سؤال و محیط متوازی الاضلاع ABCD داریم:

$$2(a+b) = 24 \Rightarrow a+b = 12$$



می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها نصف یکدیگرند، پس داریم:

$$\begin{cases} \triangle OAB \text{ محیط} = a + m + n = 16 \\ \triangle OBC \text{ محیط} = b + m + n = 14 \end{cases}$$

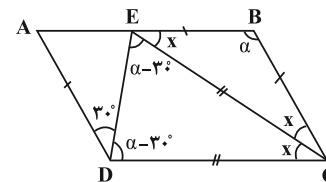
$$\xrightarrow{+} (a+b) + (2m+2n) = 30 \Rightarrow 2m+2n = 18$$

بنابراین مجموع اندازه‌های دو قطر برابر ۱۸ است.

۴۶- گزینه «۱»

(امیر مالمیر)

مطابق شکل و فرض داریم:



$$BE = AD \xrightarrow{AD=BC} BE = BC$$

$$\triangle BEC \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BCE} = x$$

$$BE \parallel CD \text{ و مورب } CE \Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{BEC} = x$$

$$\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow \alpha = 30^\circ + \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{CDE} = \alpha - 30^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و DEC داریم:

$$\begin{cases} \alpha + 2x = 180^\circ \\ 2(\alpha - 30^\circ) + x = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2x = 180^\circ \\ 2\alpha + x = 240^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 100^\circ \\ x = 40^\circ \end{cases}$$

بنابراین $\widehat{A} = 180^\circ - \alpha = 80^\circ$ است.

(هنرسه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

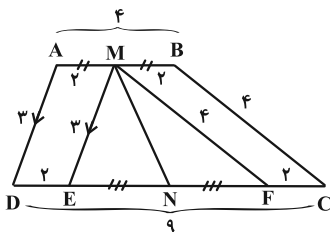
۴۷- گزینه «۳»

(هومن عقیلی)

از M (وسط قاعده کوچک‌تر) خطوط ME و MF را به موازات ساق‌های

AD و BC رسم می‌کنیم.

(هنرسه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)



مطابق شکل، چهارضلعی‌های AMED و BMFC متوازی‌الاضلاع هستند،

پس $ME = AD = 3$ و $MF = BC = 4$ و داریم:

$$EF = 9 - 4 = 5$$

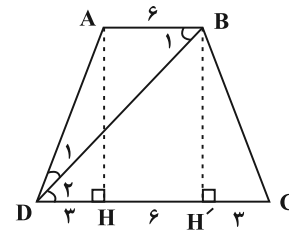
از عکس قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود $\widehat{EMF} = 90^\circ$ و لذا MN میانه

$$\text{وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه MEF است و } MN = \frac{EF}{2} = 5/2$$

(هنرسه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۴۸- گزینه «۴»

(رضا سیرنیفی)



$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 \xrightarrow{\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2} \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$$

$$\xrightarrow{\Delta ABD \text{ متساوی الساقین}} AD = AB = 6$$

$$\Delta ADH : AH^2 = AD^2 - DH^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$\xrightarrow{AH=BH'} BH'^2 = AH^2 = 27$$

$$\Delta BDH' : BD^2 = BH'^2 + DH'^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow BD = 6$$

$$\Rightarrow BD = 6\sqrt{3}$$

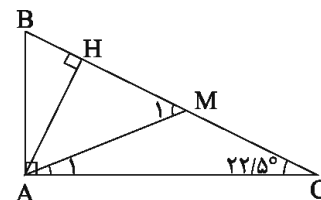
(هنر سه -۱- پندرضلعی ها: صفحه های ۶۱ تا ۶۳)

۴۹- گزینه «۳»

(سید سروش کریمی مدرامی)

زاویه حاده دیگر در این مثلث، برابر ۲۲/۵ درجه می شود. در این مثلث

قائم الزاویه، میانه و ارتفاع وارد بر وتر را رسم می کنیم:



می دانیم طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است، مطابق شکل داریم:

$$AM = CM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C} = 22/5^\circ$$

$$\Delta AMC : \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 45^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه رو به زاویه 45° ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول وتر است.

$$\Delta AMH : \widehat{M}_1 = 45^\circ$$

پس داریم:

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

(هنر سه -۱- پندرضلعی ها: صفحه های ۶۰ و ۶۴)

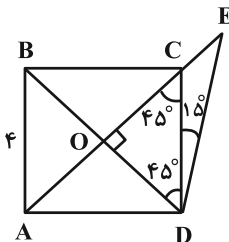
(علی ایمانی)

۵۰- گزینه «۳»

در شکل زیر، نقطه O محل برخورد قطرهای مربع است. در مثلث DOE،

$\widehat{D} = 60^\circ$ و $\widehat{O} = 90^\circ$ ، بنابراین $\widehat{E} = 30^\circ$ است. از طرفی در مثلث

قائم الزاویه، طول ضلع روبه رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است. پس داریم:



$$DB = \sqrt{2} AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow DO = \frac{1}{2} DB = 2\sqrt{2} \quad (*)$$

$$\Delta DOE : DO = \frac{1}{2} DE \xrightarrow{(*)} DE = 4\sqrt{2}$$

روش دوم: می دانیم در مربع، قطرهای عمود منصف یکدیگرند. از طرفی E روی

امتداد قطر AC قرار دارد، پس E روی عمود منصف BD بوده و در

نتیجه $BE = ED$ است. از طرفی $\widehat{BDE} = 60^\circ$ ، پس مثلث BDE

متساوی الاضلاع است و در نتیجه داریم:

$$DE = BD = \sqrt{2} AB = 4\sqrt{2}$$

(هنر سه -۱- پندرضلعی ها: صفحه ۶۴)

هندسه ۳

۵۱- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومفیوب)

ماتریس B همانی (I) است.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست: $A \times I = I \times A = A$

(۲) تساوی را ساده می‌کنیم:

$$B^T \times A = I \Rightarrow (I)^T \times A = I \Rightarrow A = I$$

تساوی تنها در حالتی برقرار است که $A = I$ باشد و در نتیجه در حالت

کلی برقرار نیست.

$$A \times \underbrace{(I)^T}_I = \underbrace{(I)^T}_I \times A = A$$

(۳) درست:

$$A \times \underbrace{(I)^T}_I = A$$

(۴) درست:

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: برگرفته از کاردرکلاس صفحه ۱۹)

تلاشی در مسیر موفقیت

۵۲- گزینه «۲»

(مهمر صمدکار)

درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس ABC برابر است با حاصل ضرب

ماتریسی زیر:

(ستون j ام ماتریس C) (ماتریس B) (سطر i ام ماتریس A)

بنابراین درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= 6 + 6 + 3 = 15$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵۳- گزینه «۱»

(مهرزاد ملونری)

چون $A^3 = \bar{O}$ است، پس $A^4 = \bar{O}$ ؛ ضرب دو ماتریس را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (A^T + 5A + 2I)(2A^T - A + I) \\ = 2A^4 + (-1 + 10)A^3 + (1 - 5 + 4)A^2 + (5 - 2)A + 2I \\ = \bar{O} + \bar{O} + \bar{O} + 3A + 2I = 3A + 2I \end{aligned}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵۴- گزینه «۳»

(مهمر صمدکار)

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T$$

$$\Rightarrow AB + BA = A^T + B^T - (A - B)^T$$

$$(A - B)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 20 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ -1 & 22 \end{bmatrix}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵۵- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومفیوب)

ماتریس A^2 را محاسبه کرده و درایه‌هایش را نظریه‌نظیر با درایه‌های

ماتریس صورت سوال برابر قرار می‌دهیم:

$$A^2 = A \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2m & -8 \\ 4m & -2m + 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m = 4 \Rightarrow m = 1 \\ a = 1 - 2m = 1 - 2 = -1 \\ b = -8 \\ c = -2m + 9 = -2 + 9 = 7 \end{cases}$$

$$a + b + c = -1 - 8 + 7 = -2$$

بنابراین داریم:

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۰)

$$A^{-1} = 3I - A \Rightarrow A + A^{-1} = 3I \Rightarrow A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3 + 3 = 6$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربرد: برگرفته از هاشیه صفحه ۲۳ کتاب درسی)

(سیرمدرسا حسینی فرد)

گزینه ۳» ۵۹-

با توجه به رابطه $A^2 = 3A - I$ و این نکته که $AA^{-1} = I$ است، داریم:

$$A^2 = 3A - I \xrightarrow{A^{-1} \times} A = 3I - A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = 3I - A$$

$$\Rightarrow A^{-1}B = 3B - AB = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

تذکر: دقت کنید که A ماتریسی 2×2 است.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربرد: صفحه ۲۲)

(اسحاق اسفندیار)

گزینه ۴» ۶۰-

$$A + 2I = \begin{bmatrix} |A| & |A| + 2 \\ |A| - 1 & |A| + 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} |A| & |A| + 2 \\ |A| - 1 & |A| + 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} |A| - 2 & |A| + 2 \\ |A| - 1 & |A| + 3 \end{bmatrix}$$

از طرفین تساوی ماتریسی به دست آمده دترمینان می‌گیریم:

$$|A| = (|A| - 2)(|A| + 3) - (|A| + 2)(|A| - 1)$$

$$\Rightarrow |A| = |A|^2 + |A| - 6 - |A|^2 - |A| + 2$$

$$\Rightarrow |A| = -4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}} -\frac{1}{4}(-1 + 2 + 5 - 6) = 0$$

بنابراین جمع درایه‌های ماتریس مذکور برابر صفر می‌شود.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

(سوکنر روشنی)

گزینه ۳» ۵۶-

برای دو ماتریس A و B به ترتیب داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \log_2^5 \\ \log_2^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \log_2^5 \\ \log_2^5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A^{19} = (A^2)^9 A = (I)^9 A = IA = A$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & \tan \theta \\ \cot \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tan \theta \\ \cot \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow B^{20} = (B^2)^{10} = (I)^{10} = I$$

$$A^{19} + B^{20} = A + I$$

بنابراین داریم:

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

(پوار ماتمی)

گزینه ۲» ۵۷-

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 & -2a^2 \\ -2a^2 & 2a^2 \end{bmatrix} = -2a \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = (-2a)A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^4 = (-2a)^2 A^2 = (-2a)^3 A$$

$$A^{2n} = (-2a)^{2n-1} \times A$$

با ادامه این روند نتیجه می‌گیریم:

و با مقایسه رابطه بالا با عبارت صورت سؤال داریم:

$$(-2a)^{2n-1} = 2^{2n-1} \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

(احمدرضا فلاح)

گزینه ۱» ۵۸-

طبق فرض، دو ماتریس A و $3I - A$ وارون یکدیگرند، از طرفی دو

ماتریس A^{-1} وارون ماتریس A می‌باشد، بنابراین با توجه به قضیه یکتایی

وارون ماتریس‌ها داریم:

آمار و احتمال

۶۱- گزینه «۲»

(سولندر روشنی)

احتمال شرطی مورد نظر را از طریق کاهش فضای نمونه حل می‌کنیم. تعداد

حالت‌های فضای نمونه با در نظر گرفتن اینکه کتاب ریاضی بعد از کتاب

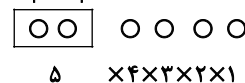
فیزیک قرار گرفته باشد، برابر است با: $n(S) = \frac{6!}{2} = 360$

برای محاسبه تعداد حالت‌هایی که کتاب ریاضی بلافاصله بعد از کتاب

فیزیک قرار گیرد، می‌بایست دو کتاب به صورت یک بسته در نظر گرفته

شوند. داریم:

ریاضی فیزیک



$$\Rightarrow n(A) = 5! = 120$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۵۲)

۶۲- گزینه «۲»

(سیرمهر رضا مسینی فرد)

ابتدا جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\sim p \wedge q$
د	د	ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	ن

تنها در ردیف اول جدول، ارزش هر دو گزاره p و q درست است، پس

احتمال درست بودن دو گزاره p و q در صورت درستی هر کدام از

گزاره‌های $p \Rightarrow q$ یا $\sim p \vee q$ (این دو گزاره هم‌ارز هستند)، برابر $\frac{1}{3}$ و

در صورت درستی گزاره $\sim p \wedge q$ یا $\sim p \Leftrightarrow q$ ، امکان درست بودن هر

دو گزاره p و q وجود ندارد و احتمال آن برابر صفر است.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۵۲)

۶۳- گزینه «۱»

(نیلوغر مهروری)

$$B \subseteq A \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = A \\ A \cap B = B \end{cases}$$

با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

حال طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B')}$$

$$= \frac{P(A) - P(B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

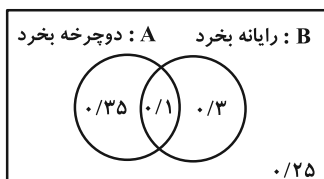
$$\Rightarrow \frac{P(A|B')}{P(A \cup B)} = \frac{P(A|B')}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۵۲)

۶۴- گزینه «۱»

(غریزاد بواروی)

مطابق فرض و نمودار ون داریم:



با توجه به صورت سوال، باید احتمال $P(B'|A')$ را به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} P(B'|A') &= \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P[(A \cup B)']}{1 - P(A)} \\ &= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)} = \frac{1 - [0/35 + 0/4 - 0/1]}{1 - 0/35} \\ &= \frac{1 - 0/75}{0/55} = \frac{0/25}{0/55} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۵۲)

۶۵- گزینه «۴»

(فرشاد خرامرزی)

احتمال موردنظر برابر است با:

$P(\text{سیاه، سفید، سیاه}) + P(\text{سفید، سیاه، سفید})$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{10}{56} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ و ۶۵ تا ۶۷)

۶۶- گزینه «۱»

(شانه اتفاقی)

اگر پیشامد اینکه حداقل یکی از توپ‌های انتخابی قرمز باشد را A بنامیم،

آنگاه A' پیشامد آن است که هر سه توپ انتخابی آبی باشند. در این

$$P(A') = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$$

صورت داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ و ۶۵ تا ۶۷)

۶۷- گزینه «۳»

(امیرمسین ابومصوب)

پیشامدهای انتخاب دو مهره به طور متوالی و با جای‌گذاری، مستقل از

یکدیگر هستند.

اگر پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره خارج شده از جعبه را با A نمایش دهیم،

داریم:

$$P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{4}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

دومهرسفيد دومهرآبی دومهرقرمز

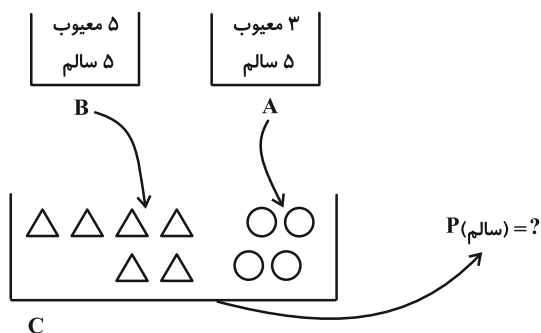
بنابراین احتمال هم‌رنگ نبودن دو مهره برابر است با:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$

(آمار و احتمال - احتمال: مشابه تمرین ۹ صفحه ۶۸)

۶۸- گزینه «۱»

(سوکندر روشنی)



$$P(\text{سالم}) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100} + \frac{30}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۶۹- گزینه «۳»

(امیرمسین ابومصوب)

مطابق نمودار درختی داریم:

مهره‌آبی از ظرف اول	$\frac{3}{8}$	مهره‌آبی از ظرف دوم	$\frac{4}{6}$
مهره‌قرمز از ظرف اول	$\frac{5}{8}$	مهره‌آبی از ظرف دوم	$\frac{3}{6}$

در حالت اول مهره انتخابی از ظرف اول، آبی است. بنابر قانون بیز احتمال

مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{8} \times \frac{4}{6}}{\frac{3}{8} \times \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{6}} = \frac{12}{12+15} = \frac{12}{27}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۷۰- گزینه «۴»

(مرتضی فویم‌علوی)

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس $P(A) = P(A|B)$

است. از طرفی برای دو پیشامد مستقل A و B ،

رابطه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}P(B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{15} = 0.1$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

ریاضیات گسسته

۷۱- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید عدد طبیعی n عددی فرد و مربع کامل باشد. در این صورت n را می‌توان به صورت k^2 ، $(k \in \mathbb{N})$ ، نوشت به طوری که k عددی فرد باشد. از طرفی n مضرب ۵ است، پس k نیز باید مضرب ۵ باشد، یعنی $k = 5t$ ، $(t \in \mathbb{N})$ ، و t فرد است (چون k عددی فرد است). در این صورت داریم:

$$1000 \leq 5t < 10000 \xrightarrow{\text{جذر}} 10^4 \leq (5t)^2 < 10^6 \Rightarrow 10^4 \leq n < 10^6$$

$$\xrightarrow{+5} 20 \leq t < 200 \Rightarrow t = 21, 23, \dots, 199$$

$$\frac{199-21}{2} + 1 = 90$$

تعداد این اعداد فرد برابر است با:

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۷۲- گزینه «۱»

(مهمر صحت کار)

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 5 \mid b+1 \xrightarrow{\times 7} 35 \mid 7b+7 \\ 7 \mid b-1 \xrightarrow{\times 5} 35 \mid 5b-5 \end{cases}$$

طرف دوم دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$35 \mid 7b+12 \Rightarrow 35 \mid 2(b+6) \Rightarrow 35 \mid b+6$$

$$\Rightarrow b+6 = 35q \Rightarrow b = 35q-6 \quad (q \in \mathbb{Z})$$

اعداد دو رقمی ممکن برای b عبارتند از:

q	۱	۲	۳
b	۲۹	۶۴	۹۹

میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار b برابر است با:

$$\frac{29+99}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

توجه: از $35 \mid 2(b+6)$ نتیجه می‌شود $2(b+6)$ مضرب ۳۵ است و چون عوامل ۵ و ۷ در عدد ۲ وجود ندارد، لذا $(b+6)$ مضرب ۳۵ خواهد بود، یعنی $35 \mid b+6$ ؛ استدلال فوق به «لم اقلیدس» معروف است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۷۳- گزینه «۳»

(غرضار یواری)

بررسی گزاره‌ها:

الف) $a = 2$ و $b = -2$ مثال نقض می‌باشد.

ب) گزاره شرطی (ب) زمانی برقرار است که $b \neq 0$ باشد، زیرا اگر $b = 0$ باشد، نمی‌توان گفت الزاماً رابطه $|a| \leq |b|$ درست است.

بنابراین $a = 2$ و $b = 0$ مثال نقضی برای این گزاره می‌باشد چراکه $2 \mid 0$ ولی $0 \nmid 2$.

ج) عکس گزاره قسمت (ج) درست است. اما خود گزاره (ج) لزوماً درست نمی‌باشد. (کافی است $a = 5$ و $b = 7$ و $c = 2$ گرفته شود).

د) گزاره درست می‌باشد و مثال نقض ندارد.

پس در کل سه مورد از چهار گزاره بالا با مثال نقض رد می‌شوند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

(برگرفته از متن کتاب درسی)

۷۴- گزینه «۴»

(مصطفی زیداری)

طبق تعریف $b \mid m$ و $k \mid m$ داریم:

$$\begin{cases} d \mid a \Rightarrow (a, d) = d \\ b \mid c \Rightarrow [b, c] = c \end{cases}$$

همچنین $d \mid c$ پس $(d, c) = d$ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

(برگرفته از کاردرکلاس (۱) صفحه ۱۱۳)

۷۵- گزینه «۴»

(مهمر صحت کار)

با در نظر گرفتن این‌که $64 = 2^6$ ، $81 = 3^4$ و $125 = 5^3$ ، نتیجه می‌گیریم اعدادی نسبت به هر سه عدد اول هستند که نه عامل ۲ داشته باشند، نه عامل ۳ و نه عامل ۵. در این شرایط کوچک‌ترین عدد دو رقمی مرکب $7^2 = 49$ و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مرکب $91 = 7 \times 13$ است. پس جواب مسئله برابر است با:

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۷۶- گزینه «۳»

(پوار هاتمی)

طبق قضیه تقسیم، با شرط $a = bq + r$ ، $b \in \mathbb{N}$ است به طوری که $0 \leq r < b$ باشد. بنابراین داریم:

$$96 = bq + 6 \Rightarrow 90 = bq \Rightarrow q = \frac{90}{b} \quad (b > 6)$$

چون q عددی صحیح است، b باید یکی از مقسوم علیه های ۹۰ باشد که از ۶ بزرگ تر است. بنابراین مجموعه مقادیر ممکن برای عدد طبیعی b عبارتند از:

$$b = 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

پس برای b ، ۷ مقدار طبیعی وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۴ و ۱۵)

۷۷- گزینه «۳»

(سیرمهر شا عسینی فرد)

برای عدد n می توان ۶ حالت در نظر گرفت:

$$n = 6k \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 1$$

$$n = 6k + 1 \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 2$$

$$n = 6k + 2 \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 5$$

$$n = 6k + 3 \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 4$$

$$n = 6k + 4 \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 5$$

$$n = 6k + 5 \rightarrow n^2 + 1 = 6k' + 2$$

پس عبارت حاصل به یکی از صورت های $6k' + 1$ ، $6k' + 2$ ، $6k' + 4$ و

یا $6k' + 5$ می باشد که k' عددی صحیح است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۵ و ۱۶)

۷۸- گزینه «۲»

(نیلوفر مهری)

طبق ویژگی های هم نهشتی داریم:

$$4^3 = 64 = 3 \times 21 + 1 \Rightarrow 4^3 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲۶}} 4^{78} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{79} \equiv 4$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۸ تا ۲۱)

(مشابه مثال صفحه ۲۱)

۷۹- گزینه «۳»

(علی ایمانی)

طبق تعریف هم نهشتی می توان گفت:

$$45 \equiv 24 \Rightarrow a \mid 45 - 24 \Rightarrow a \mid 21$$

$$\xrightarrow{a \neq 1} a = 3 \text{ یا } 7 \text{ یا } 21$$

$$a = 7 \xrightarrow{\substack{a \text{ نباید عامل ۳} \\ \text{داشته باشد}}} (a, 3) = 1 \text{ : طبق فرض}$$

$$7^2 \equiv 49 \equiv 1 \Rightarrow 7^{120} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7} 7^{121} \equiv 7$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۸ تا ۲۱)

۸۰- گزینه «۲»

(ممنون بهرام پور)

ابتدا a را بدست می آوریم:

$$2! + 4! + 6! + \dots + 1402! \equiv 2 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 2$$

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم 2^{1401} بر ۴۴ کافی است ۴۴ را به

صورت ضرب دو عدد ۴ و ۱۱ که نسبت به هم اول هستند بنویسیم:

$$\begin{cases} 2^{1401} \equiv 0 \\ 2^5 = 32 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲۸۰}} 2^{1400} \equiv 1 \xrightarrow{\times 2} 2^{1401} \equiv 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{1401} \equiv 0 + 24 = 24 \\ 2^{1401} \equiv 2 + 22 = 24 \end{cases} \Rightarrow 2^{1401} \equiv 24 \pmod{44}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۸ تا ۲۱)

فیزیک ۲

گزینه ۳» ۸۱-

(فسین مفرومی)

اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری برحسب جریان عبوری از آن، از رابطه $V = \mathcal{E} - Ir$ به دست می آید.

با توجه به نمودار $\mathcal{E} = 18V$ می باشد و در ولتاژ $6V$ ، جریان عبوری برابر با $3A$ است، پس داریم: $V = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow 6 = 18 - 3r \Rightarrow r = 4\Omega$
حال به ازای جریان $2A$ ، ولتاژ دو سر باتری را حساب می کنیم.

$$V = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow V = 18 - 2 \times 4 = 10V$$

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۱ تا ۶۶)

گزینه ۲» ۸۲-

(ممنن قدرپهلر)

در حالت اول، ولت سنج آرمانی به صورت متوالی در مدار قرار دارد و در نتیجه جریان الکتریکی در مدار برقرار نمی شود. در این صورت برای ولت سنج (V_1) خواهیم داشت:

$$V_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{محرکه}} = 18 - 10 = 8V$$

وقتی هر دو کلید بسته باشند، مقاومت $R = 4\Omega$ اتصال کوتاه شده و مقاومت $R' = 2\Omega$ در مدار قرار می گیرد. در این حالت جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{محرکه}} - \mathcal{E}_{\text{محرکه}}}{R_{eq} + r_T} = \frac{18 - 10}{2 + (1 + 1)} = 2A$$

ولت سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R' = 2\Omega$ را نشان می دهد.

$$V_T = R'I = 2 \times 2 = 4V \quad \text{بنابراین:}$$

$$V_T - V_1 = 4 - 8 \Rightarrow V_T - V_1 = -4V \quad \text{بنابراین:}$$

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۱ تا ۶۶)

گزینه ۳» ۸۳-

(فسرو ارغوانی فرد)

در این مسئله باتری های $\mathcal{E}_2$ و $\mathcal{E}_3$ محرکه و باتری $\mathcal{E}_1$ ضد محرکه است؛ بنابراین جهت جریان در مدار ساعتگرد می باشد. ابتدا جریان را به دست می آوریم:

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1}{R_1 + R_T + r_1 + r_T + r_T} = \frac{12 + 5 - 9}{2 + 3 + 1 + 1 + 1} = \frac{8}{8} = 1A$$

حال یک بار از نقطه A و بار دیگر از نقطه B ساعتگرد حرکت می کنیم تا به نقطه اتصال به زمین ($V = 0$) برسیم و تغییر پتانسیل هر جزء مدار را می نویسیم:

$$V_A - R_T I + \mathcal{E}_2 - r_T I = 0$$

$$\Rightarrow V_A - 3 \times 1 + 12 - 1 \times 1 = 0 \Rightarrow V_A = -8V$$

$$V_B + \mathcal{E}_2 - r_T I = 0 \Rightarrow V_B + 12 - 1 \times 1 = 0 \Rightarrow V_B = -11V$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$$

بنابراین:

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۱ تا ۶۶)

گزینه ۳» ۸۴-

(مصطفی کیانی)

با توجه به نمودار داده شده، به ازای جریان های الکتریکی $I_1 = 3A$ و $I_2 = 6A$ ، توان خروجی باتری یکسان است. بنابراین می توان نوشت:

$$P_1 = P_2 \xrightarrow{P = \mathcal{E}I - rI^2} \mathcal{E}I_1 - rI_1^2 = \mathcal{E}I_2 - rI_2^2$$

$$\Rightarrow r(I_2^2 - I_1^2) = \mathcal{E}(I_2 - I_1)$$

$$\Rightarrow r(I_2 + I_1)(I_2 - I_1) = \mathcal{E}(I_2 - I_1)$$

$$\xrightarrow{\substack{I_2=6A \\ I_1=3A}} r \times (6+3) = 18 \Rightarrow r = 2\Omega$$

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۷ تا ۷۰)

گزینه ۴» ۸۵-

(زهره آقاممیری)

توان الکتریکی از رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ به دست می آید. کم ترین توان مربوط به

حالتی است که R بیشترین مقدار ممکن را دارد و از آنجا که مقاومت معادل دو مقاومت موازی کوچک تر از هر یک از آنها است، بیشترین مقدار

$$P_{min} = \frac{V^2}{R_{max}} = \frac{(240)^2}{960} = 60W \quad \text{ممکن } 960\Omega \text{ است.}$$

بیشترین توان مربوط به حالتی است که R کمترین مقدار را دارد. این در حالتی است که هر دو کلید بسته باشند، چون در به هم بستن موازی مقاومت ها، مقاومت معادل کوچکتر از هر یک از مقاومت ها است:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{240} + \frac{1}{960} = \frac{5}{960} \Rightarrow R_{min} = 192\Omega$$

$$P_{max} = \frac{V^2}{R_{min}} = \frac{(240)^2}{192} = 300W$$

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۷ تا ۷۷)

گزینه ۳» ۸۶-

(مهمر اکبری)

با توجه به اینکه توان مصرفی مقاومت R برابر با توان خروجی باتری است، ابتدا جریان الکتریکی مدار را به ازای مقاومت های $R_1 = 2\Omega$ و $R_T = 12\Omega$ ، به دست می آوریم:

$$P_1 = R_1 I_1^2 \xrightarrow{P_1 = 32W} 32 = 2 \times I_1^2 \Rightarrow I_1 = 4A$$

$$P_T = R_T I_T^2 \xrightarrow{P_T = 27W} 27 = 12 \times I_T^2 \Rightarrow I_T = \frac{9}{4} \Rightarrow I_T = \frac{3}{2}A$$

اکنون با استفاده از رابطه $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ مقادیر $\mathcal{E}$ و r را پیدا می کنیم:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \Rightarrow 4 = \frac{\mathcal{E}}{2 + r} \Rightarrow \mathcal{E} = 8 + 4r \quad (I)$$

$$I_T = \frac{\mathcal{E}}{R_T + r} \xrightarrow{(I)} \frac{3}{2} = \frac{8 + 4r}{12 + r} \Rightarrow 36 + 3r = 16 + 8r$$

$$\Rightarrow r = 4\Omega \xrightarrow{(I)} \mathcal{E} = 8 + 4 \times 4 = 24V$$

در آخر، بیشینه توان خروجی باتری را از رابطه زیر، می یابیم:

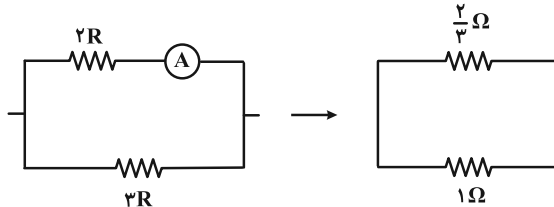
$$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{24 \times 24}{4 \times 4} = 36W$$

(فیزیک ۲- صفحه های ۶۱ تا ۷۰)

$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} \xrightarrow{I_{\text{کل}} = 8A} 8 = \frac{10}{R_{\text{eq}} + 1}$$

$$\Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{1}{4} \Omega \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{R \times 2R}{R + 2R} \Rightarrow R = \frac{1}{3} \Omega$$

اگر فقط کلید k_1 را باز کنیم، مطابق شکل زیر داریم:



$$R'_{\text{eq}} = \frac{\frac{2}{3} \times 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \Omega$$

$$I'_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R'_{\text{eq}} + r} = \frac{10}{\frac{2}{5} + 1} \Rightarrow I'_{\text{کل}} = \frac{10}{\frac{7}{5}} = \frac{50}{7} A$$

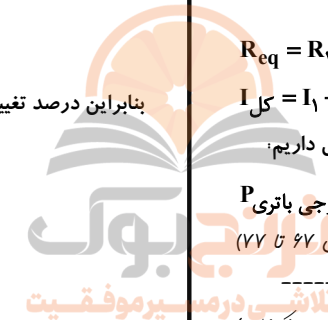
جریان گذرنده از آمپرسنج در این حالت برابر است با:

$$I' = \frac{2R}{2R + 2R} I'_{\text{کل}} = \frac{2}{5} \times \frac{50}{7} = \frac{20}{7} A$$

بنابراین درصد تغییرات جریان عبوری از آمپرسنج برابر است با:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I' - I}{I} \times 100 = \frac{\frac{20}{7} - 8}{8} \times 100 = \frac{-\frac{36}{7}}{8} \times 100 = -\frac{9}{14} \times 100 \approx -64\%$$

(فیزیک ۲ - صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)



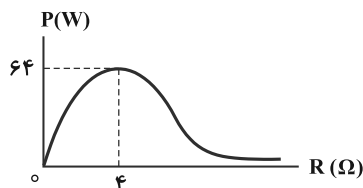
(کتاب آبی فیزیک کتلور ریاضی)

۹۰ - گزینه «۲»

برای حل این سؤال باید دو مطلب را یادآوری کنیم:

(۱) به ازای $R = r$ ، توان خروجی باتری بیشینه است.

(۲) توان بیشینه باتری از رابطه $P_{\text{max}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$ محاسبه می‌شود.



با توجه به مطالب بالا و نمودار داده شده، داریم:

$$P_{\text{max}} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \xrightarrow{P_{\text{max}} = 64W, R=r=4\Omega}$$

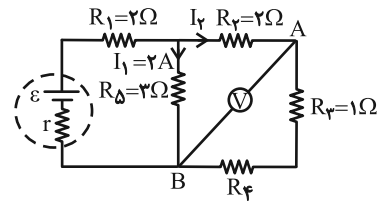
$$64 = \frac{\varepsilon^2}{4 \times 4} \Rightarrow \varepsilon^2 = 210 \Rightarrow \varepsilon = 25 = 32V$$

(فیزیک ۲ - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۸۷ - گزینه «۲»

(زهره آقاممیری)

با توجه به این که توان مصرفی در مقاومت R_D برابر با $12W$ است، داریم:



$$P = R_D I_1^2 \Rightarrow 12 = 3 I_1^2 \Rightarrow I_1 = 2A$$

از طرفی ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B را نشان می‌دهد:

$$V_{AB} = R_D I_1 - R_2 I_2 \Rightarrow 4 = 6 - 2 I_2 \Rightarrow I_2 = 1A$$

چون جریان I_2 ، I_3 برابر جریان I_1 است، پس مقاومت معادل R_2 ، R_3 و R_4 نیز دو برابر مقاومت R_D است.

$$R_2 + R_3 + R_4 = 6 \Rightarrow R_4 = 3\Omega$$

R_D با R_2, R_3, R_4 موازی است و معادل آن‌ها R' می‌باشد که داریم:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \Rightarrow R' = 2\Omega$$

مقاومت معادل کل مدار برابر است با:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R' \Rightarrow R_{\text{eq}} = 2 + 2 = 4\Omega$$

و جریان کل مدار برابر است با:

$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 = 2 + 1 = 3A$$

توان خروجی باتری با توان مصرفی مقاومت معادل برابر است، پس داریم:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = R_{\text{eq}} I^2 = 4 \times (3)^2 = 36W$$

(فیزیک ۲ - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۸۸ - گزینه «۴»

(مبینی کلویان)

با افزایش مقاومت متغیر R_4 ، مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد؛ بنابراین

طبق رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r}$ ، جریان گذرنده از باتری کاهش می‌یابد. با توجه

به ثابت بودن مقادیر مقاومت‌های R_1 ، R_2 ، R_3 و R_D می‌توان گفت که

با کاهش جریان گذرنده از باتری، جریان گذرنده از مقاومت

R_3 که (I_3) می‌باشد نیز کاهش می‌یابد. پس طبق رابطه $V = R_3 I_3$ ،

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_3 کاهش می‌یابد. با کاهش جریان

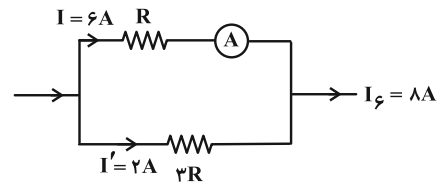
گذرنده از مقاومت R_3 ، جریان گذرنده از مقاومت R_1 نیز کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۲ - صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۸۹ - گزینه «۲»

(معصومه شریعت‌ناصری)

اگر هر دو کلید بسته باشند، مقاومت R در سمت چپ اتصال شده و داریم:



جریان این شاخه یک سوم شاخه بالاست



فیزیک ۱

گزینه «۳» - ۹۱

(علیرضا کونه)

با استفاده از رابطه انرژی جنبشی و با توجه به اینکه $v_2 = v_1 + 6 \frac{m}{s}$

و $K_2 = K_1 + \frac{300}{100} K_1 = \frac{400}{100} K_1 = 4 K_1$ است، به صورت زیر

را می‌یابیم:

$$K_2 = 4 K_1 \xrightarrow{K = \frac{1}{2} m v^2} \frac{1}{2} m v_2^2 = 4 \times \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$v_2^2 = 4 v_1^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} v_2 = 2 v_1 \xrightarrow{v_2 = v_1 + 6}$$

$$v_1 + 6 = 2 v_1 \Rightarrow 6 = 2 v_1 - v_1 \Rightarrow v_1 = 6 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۳ و ۵۵)

گزینه «۴» - ۹۲

(ممنون قندچلر)

برای دو نقطه A و B، رابطه انرژی جنبشی را می‌نویسیم. دقت کنید

که $K_B = K_A + 40 J$ و $v_B = v_A + 2 \frac{m}{s}$ است.

$$A : K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow K_A = \frac{1}{2} (4) v_A^2 = 2 v_A^2 \quad (I)$$

$$B : K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow K_A + 40 = \frac{1}{2} (4) (v_A + 2)^2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II) - (I)} 2 v_A^2 + 40 = 2 v_A^2 + 8 v_A + 8$$

$$\Rightarrow v_A = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow v_B = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow K_B = \frac{1}{2} (4) (6)^2 = 72 J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۳ و ۵۵)

گزینه «۱» - ۹۳

(مصطفی کیانی)

با استفاده از تعریف کار داریم:

$$W = F d \cos \theta \xrightarrow{\theta_A = 0^\circ, \theta_B = 45^\circ, \theta_C = 60^\circ}$$

$$\begin{cases} W_A = F_A d_A \\ W_B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B d_B \xrightarrow{\frac{F_A = F_B = F_C}{d_A = d_B = d_C}} W_A > W_B > W_C \\ W_C = \frac{1}{2} F_C d_C \end{cases}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

گزینه «۴» - ۹۴

(مهمراکم منشادی)

با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_t = K_2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$v_1 = 36 \frac{km}{h} = \frac{36}{3.6} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow W_t = 20000 - \frac{1}{2} \times 2000 \times 10^2 \Rightarrow W_t = -80000 J$$

چون در یک جابه‌جایی افقی، کار نیروی افقی منفی شده است. بنابراین بردار

نیرو و بردار جابه‌جایی در خلاف جهت هم هستند و در نتیجه $\theta = 180^\circ$ است. با استفاده از تعریف کار یک نیرو، می‌توان نوشت:

$$W_F = W_t = F d \cos 180^\circ = -80000$$

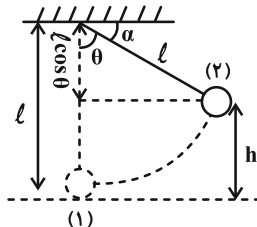
$$\Rightarrow F \times 40 = 80000 \Rightarrow F = 2000 N$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

گزینه «۱» - ۹۵

(مصطفی کیانی)

اگر پایین‌ترین نقطه مسیر حرکت گلوله آونگ را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض کنیم، در این نقطه گلوله فقط انرژی جنبشی و در بالاترین نقطه مسیر (در نقطه‌ای که راستای نخ با خط قائم بیشترین زاویه یعنی زاویه θ را می‌سازد)، فقط انرژی پتانسیل گرانشی دارد. با توجه به شکل زیر و با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، می‌توان نوشت:



مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2} m v_1^2 = m g h + 0$$

$$\xrightarrow{h = l(1 - \cos \theta)} v_1^2 = 2 g l (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow 10^2 = 2 \times 10 \times 10 \times (1 - \cos \theta)$$

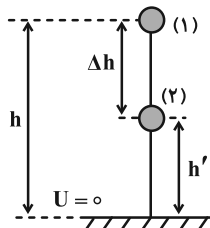
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

گزینه «۱» - ۹۶

(مسین الهی)

با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی در دو نقطه نشان داده شده در مسیر حرکت، داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \xrightarrow{K_1 = 0}$$

$$U_1 = U_2 + K_2 \xrightarrow{K_2 = \frac{3}{2} U_2} U_1 = U_2 + \frac{3}{2} U_2 = \frac{5}{2} U_2$$

$$\Rightarrow m g h = \frac{5}{2} m g h' \Rightarrow h' = \frac{2}{5} h$$

$$(U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = -f_k d \xrightarrow{U_2=0}$$

$$(0 + \frac{1}{2}mv_2^2) - (mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2) = -f_k d \xrightarrow{v_2=12 \frac{m}{s}, f_k=4N, m=2kg, h_1=6m}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 144 - 2 \times 10 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times v_1^2 = -4 \times 10$$

$$v_1^2 = 64 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱ - صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

(مسعود قره‌فانی)

۹۹ - گزینه «۲»

ابتدا توان خروجی پمپ را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t} = \frac{mg\Delta h + \frac{1}{2}mv^2}{t}$$

$$\Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{100 \times 10 \times 5 + \frac{1}{2} \times 100 \times 10^2}{10} = 1000 W = 1 kW$$

حال طبق رابطه بازده داریم:

$$\text{بازده} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان مصرفی}} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{بازده} = \frac{1}{2} \times 100 = 50\%$$

(فیزیک ۱ - صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

(محمدرضا سورشی)

۱۰۰ - گزینه «۳»

ابتدا با داشتن بازده ماشین A، W_1 و Q را حساب می‌کنیم:

$$A = \frac{W_1}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 = \text{بازده درصدی ماشین A}$$

$$\Rightarrow 75 = \frac{W_1}{60} \times 100 \Rightarrow W_1 = 45 kJ$$

$$\text{انرژی ورودی} = W_1 + Q \Rightarrow 60 = 45 + Q \Rightarrow Q = 15 kJ$$

حال Q' را حساب می‌کنیم:

$$Q - Q' = 6 kJ \Rightarrow 15 - Q' = 6 \Rightarrow Q' = 9 kJ$$

در نهایت بازده ماشین B را به دست می‌آوریم:

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{W_2}{W_1} \times 100 = \frac{W_1 - Q'}{W_1} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{بازده بر حسب درصد} = \frac{45 - 9}{45} \times 100 = 80\%$$

(فیزیک ۱ - صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

برای محاسبه $\frac{\Delta h}{h}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{h - h'}{h} = \frac{h - \frac{2}{5}h}{h} = \frac{3}{5}$$

(فیزیک ۱ - صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

(سراسری ریاضی ۹۷ با انرژی تغییر)

(مسین الهی)

۹۷ - گزینه «۳»

با نوشتن اصل پایستگی انرژی مکانیکی برای دو محموله بین نقاط رها شدن و رسیدن به زمین داریم:

$$A \text{ محموله: } E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow U_1 = K_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (I)$$

$$B \text{ محموله: } E'_1 = E'_2 \Rightarrow U'_1 + K'_1 = U'_2 + K'_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1'^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad (II)$$

با کم کردن دو طرف معادلات (I) و (II)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{1}{2}mv_2'^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_1'^2 = v_2'^2 - v_2^2$$

$$\Rightarrow v_1'^2 = (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \Rightarrow 640 = 8(v_2' + v_2)$$

$$\Rightarrow v_2' + v_2 = 80 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} v_2' + v_2 = 80 \frac{m}{s} \\ v_2' - v_2 = 80 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_2' = \frac{80}{2} = 40 \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = 40 \frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در (I)}} gh = \frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow 10 \times h = \frac{1}{2}(40)^2$$

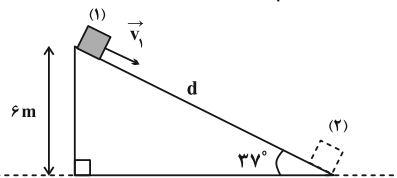
$$\Rightarrow h = 80 m$$

(فیزیک ۱ - صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

(مسعود قره‌فانی)

۹۸ - گزینه «۱»

ابتدا طول سطح شیبدار را پیدا می‌کنیم:



مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی

$$\sin 37^\circ = \frac{h}{d} \xrightarrow{h=6m, \sin 37^\circ = 0.6}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{6}{d} \Rightarrow d = 10 m$$

اکنون با استفاده از قانون پایستگی انرژی، تندی اولیه جسم را می‌یابیم:

$$E_2 - E_1 = W_{f_k} \xrightarrow{W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ = -f_k d} E_2 - E_1 = W_{f_k} \xrightarrow{E = U + K}$$

فیزیک ۳

گزینه ۴» ۱۰۱-

(امسان مضمیری)

در لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می کند، x و به دنبال آن بردار مکان تغییر علامت می دهند. پس داریم:

$$x = 4t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow (2t - 3)^2 = 0$$

چون این معادله تغییر علامت نمی دهد. پس، هیچ گاه از مبدأ مکان عبور نمی کند و در نتیجه بردار مکان آن تغییر جهت نمی دهد.

(فیزیک ۳- صفحه های ۲ تا ۲۱)

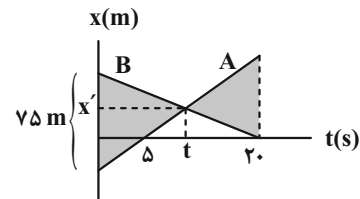
گزینه ۳» ۱۰۲-

(امیرمسعود عالی مرادی)

طبق صورت سوال، تندی متحرک A دو برابر تندی متحرک B است و چون سرعت متحرک A مثبت و سرعت متحرک B منفی است، بنابراین مطابق شکل زیر می توان نوشت:

$$v_A = -2v_B \Rightarrow \frac{x' - 0}{t - 5} = -2 \times \frac{0 - x'}{20 - t} \Rightarrow t = 10s$$

حال با توجه به تشابه مثلث ها، فاصله دو متحرک از یکدیگر در لحظه $t = 20s$ برابر با $75m$ خواهد شد.



(فیزیک ۳- صفحه های ۱۳ تا ۱۵)

گزینه ۳» ۱۰۳-

(غرشید رسولی)

در نمودارهای «الف» و «ب» در بازه زمانی 0 تا t_1 جهت حرکت متحرک ثابت است؛ بنابراین بزرگی جابه جایی و مسافت طی شده با یکدیگر برابر است. در نمودار «ب» در بازه زمانی 0 تا t_1 جهت حرکت متحرک عوض می شود. بنابراین مسافت طی شده و بزرگی جابه جایی با یکدیگر برابر نیستند.

(فیزیک ۳- صفحه های ۲ تا ۱۵)

گزینه ۳» ۱۰۴-

(مسین الهی)

با توجه به اینکه حرکت هواپیما تا لحظه بلند شدن از روی باند با شتاب ثابت انجام می شود، بنابراین نمودار مکان- زمان آن سهمی است و در نتیجه گزینه (۴) نادرست است.

همچنین هواپیما از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین سرعت اولیه آن صفر بوده و در نتیجه خط مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظه شروع ($t = 0$) باید افقی باشد؛ بنابراین گزینه (۲) نیز نادرست است.

حال با استفاده از رابطه مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان هواپیما را در لحظه $t = 40s$ می یابیم. (مبدأ مکان، شروع حرکت هواپیما فرض می شود):

$$v_0 = 0, x_0 = 0, t = 40s, a = 3 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 3 \times 40^2 = 2400m$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

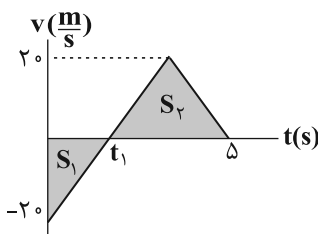
(فیزیک ۳- صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

(برگرفته از کتاب درسی)

گزینه ۱» ۱۰۵-

(علیرضا کونه)

لحظه ای که سرعت متحرک برابر با صفر می شود را t_1 می نامیم. برای به دست آوردن مسافت طی شده توسط متحرک کافی است مساحت های محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان را بدون توجه به علامت آن ها با یکدیگر جمع کنیم.



$$\ell = |S_1| + S_2$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{20 \times t_1}{2} + \frac{20 \times (5 - t_1)}{2} = 10t_1 + 10(5 - t_1) = 50m$$

(فیزیک ۳- صفحه های ۲، ۳، ۱۹ و ۲۰)

گزینه ۳» ۱۰۶-

(مصطفی کیانی)

با توجه به نمودار، خط مماس بر آن در لحظه $t = 0$ افقی می باشد که یعنی $v_0 = 0$ ، پس:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{v_0=0} x = \frac{1}{2}at^2 + x_0$$

متحرک در لحظه $t = 5s$ در مکان $x = 0$ قرار دارد. پس داریم:

$$0 = \frac{1}{2}(2)(5)^2 + x_0 \Rightarrow x_0 = -25m$$

معادله سرعت- زمان در حرکت شتاب ثابت، $v = at + v_0$ می باشد و

$$v = 2 \times 5 + 0 = 10 \frac{m}{s} \quad \text{برای محاسبه سرعت در لحظه } t = 5s \text{ داریم:}$$

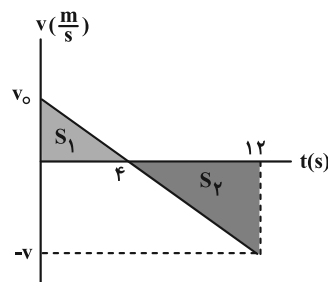
(فیزیک ۳- صفحه های ۱۵ تا ۱۷)

(برگرفته از آزمون نهایی خرداد ماه سال ۱۳۰۰)

۱۰۷- گزینه «۴»

(امیراعمر میرسعید)

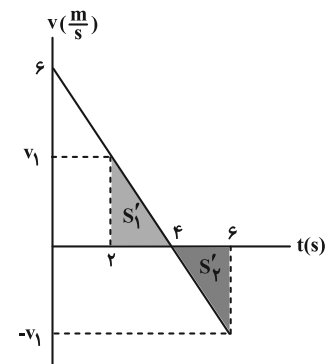
کمترین تندی متوسط در مدت ۴ ثانیه مربوط به زمانی است که تندی متحرک به کمترین مقدار می‌رسد، یعنی اطراف مکانی که تندی صفر است. پس ۲ ثانیه بعد از $v = 0$ و ۲ ثانیه قبل از $v = 0$ یعنی از لحظه $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 6s$ را در نظر می‌گیریم، برای حل این مسئله در گام اول نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم، با توجه به شکل، سرعت اولیه مثبت ولی شتاب منفی است. پس:



$$\text{تشابه: } \frac{v_0}{4} = \frac{v}{12-4} \Rightarrow v = 2v_0$$

$$S_1 + S_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_0 \times 4}{2} + \frac{8 \times -2v_0}{2} = -36$$

$$\Rightarrow 2v_0 - 8v_0 = -36 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s}$$



$$\text{تشابه: } \frac{6}{4} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{m}{s}$$

$$S'_1 = \frac{3 \times 2}{2} = 3, \quad S'_2 = \frac{-3 \times 2}{2} = -3$$

$$\text{تندی متوسط: } s_{av} = \frac{S'_1 + |S'_2|}{4} = \frac{6}{4} = 1.5 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۸- گزینه «۲»

(مسعود قره‌فانی)

برای محاسبه مسافت پیموده شده توسط سنگ در ثانیه پنجم داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_{f(s)} = -\frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = -80m$$

$$y_{\Delta(s)} = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 = -125m$$

$$\Rightarrow \Delta y_{f-\Delta} = y_{\Delta(s)} - y_{f(s)} = -125 - (-80) = -45m$$

$$\Rightarrow |\Delta y_{f-\Delta}| = 45m$$

یعنی متحرک از $t = 4s$ تا $t' = 5s$ مسافت $45m$ را به سمت پایین حرکت کرده است. حال مسافت پیموده شده در ۳ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_3 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = -45m \Rightarrow |\Delta y_3| = 45m$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta y_{f-\Delta}|}{|\Delta y_3|} = \frac{45}{45} = 1$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۰۹- گزینه «۲»

(مهران اسماعیلی)

اگر گلوله اول پس از زمان t_1 به زمین برسد و برای گلوله دوم زمان t_2 سپری شده باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \end{cases} \xrightarrow{\frac{h_1}{h_2} = 4} \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2} = 4 \Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = 4 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 2 \Rightarrow t_1 = 2t_2$$

در لحظه رسیدن گلوله اول به زمین، دو گلوله حداکثر فاصله را از یکدیگر دارند.

$$h_1 - h_2 = 135m \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 135m$$

$$\xrightarrow{g=10 \frac{m}{s^2}} t_1^2 - t_2^2 = 27$$

$$(2t_2)^2 - t_2^2 = 27 \Rightarrow t_2^2 = 9 \Rightarrow t_2 = 3s$$

$$t_1 = 2t_2 = 6s \Rightarrow t_1 - t_2 = 3s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۱۰- گزینه «۱»

(مسام نادری)

با کمک معادله مکان- زمان، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$t = 0.2s = \frac{1}{5}s, \quad h = 20cm = \frac{1}{5}m$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow g = 10 \frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

(مشابه تمرین ۱- ۱۲ صفحه ۲۴)



شیمی ۲

۱۱۱- گزینه «۳»

(عمید زبئی)

گزینه اول نادرست است. بخش عمده انرژی شیر داغ، هنگام سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

گزینه دوم نادرست است. در فرآیندهای گرماده، دما می‌تواند تغییر نکند.

گزینه سوم درست است.

گزینه چهارم نادرست است. در فرآیند سوخت و ساز شیر در بدن، شیر (۳۷°C) به فرآورده‌های (۳۷°C) تبدیل می‌شود.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۱)

۱۱۲- گزینه «۲»

(میلاد شیخ الاسلامی فیاضی)

گرمای از دست رفته توسط آب ۳۰°C صرف ذوب شدن یخ صفر درجه و تبدیل آن به آب صفر درجه خواهد شد پس گرمای از دست رفته توسط آن را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 100 \times 4 \times (0 - 30)$$

(علامت منفی نشان‌دهنده آزاد شدن گرماست.) -12000 J

همین مقدار گرما توسط یخ صفر درجه جذب شده و به آب صفر درجه تبدیل می‌شود. طبق گفته سوال هر مول یخ برای ذوب شدن به ۶۰۰ ژول گرما نیاز دارد پس ۱۲۰۰۰ ژول گرما می‌تواند ۲ مول یخ را به آب صفر درجه تبدیل کند. با توجه به جرم مولی آب، جرم یخ ذوب شده برابر است با:

$$\text{یخ } 36 \text{ g} = \frac{\text{یخ } 18 \text{ g}}{\text{یخ } 1 \text{ mol}} \times 2 \text{ mol}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه ۶۰)

۱۱۳- گزینه «۳»

(آترین صبا)

گرمای ویژه آب به مقدار آن بستگی ندارد (درستی گزینه اول). دما معیاری از سردی و گرمی اجسام بوده و میانگین انرژی جنبشی ذرات سازنده ماده را نشان می‌دهد. با توجه به یکسان بودن دمای دو ظرف، میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های آب نیز در دو ظرف برابر است (درستی گزینه دوم). ظرفیت گرمایی یک ماده علاوه بر نوع و حالت فیزیکی آن ماده، به مقدارش هم بستگی دارد و با افزایش مقدار آب، C بیشتر می‌شود (نادرستی گزینه سوم). دایر انداختن گلوله فلزی داغ مشابه در دو ظرف، دمای نهایی آب در ظرف اول بیشتر از ظرف دوم است، زیرا ظرفیت گرمایی آب در ظرف اول کمتر بوده و با دریافت مقدار گرمای یکسان نسبت به ظرف دوم افزایش دمای بیشتری دارد (درستی گزینه چهارم).

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۰)

(برگرفته از کنکور تهرانی ۱۴۰۰)

۱۱۴- گزینه «۲»

(اکبر هنرمند)

در واکنش (I)، به ازای مصرف x مول NaHCO_3 ، $\frac{x}{2}$ مول CO_2 و $\frac{x}{2}$ مول H_2O و در واکنش (II)، به ازای مصرف y مول CaCO_3 ، y مول CO_2 تولید می‌شود. بنابراین:

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{x}{2} \quad n_{\text{CO}_2} = \frac{x}{2} + y$$

با توجه به گرمای داده شده به فرآورده‌ها، می‌توان مول هر فرآورده را به دست آورد:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{Q}{c\Delta\theta} = \frac{4220}{4 \times 10} = 108 \text{ g}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = 108 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}} = 6 \text{ mol} \Rightarrow x = 12$$

$$m_{\text{CO}_2} = \frac{Q}{c\Delta\theta} = \frac{4224}{0.8 \times 15} = 352 \text{ g}$$

$$n_{\text{CO}_2} = 352 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} = 8 \text{ mol} \Rightarrow y = 2$$

حالا می‌توان جرم مخلوط را محاسبه نمود:

$$\text{جرم مخلوط} = (12 \times 84) + (2 \times 100) = 1208 \text{ g}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۱۱۵- گزینه «۲»

(مسعود جعفری)

فرایندهای گرماگیر:

تبخیر آب - تصعید یخ خشک - ذوب شدن بستنی

در این فرایندها سامانه با جذب گرما به سطح انرژی بالاتر می‌رود.

انرژی



(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۱)

۱۱۶- گزینه «۲»

(سالار ملکی)

گرمای آزاد شده از سوختن یک گرم از هر یک از هیدروکربن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$1) 1 \text{ g C}_7\text{H}_6 \times \frac{1 \text{ mol}}{96 \text{ g}} \times \frac{-1560 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} = -16.25 \text{ kJ}$$

$$2) 1 \text{ g C}_7\text{H}_6 \times \frac{1 \text{ mol}}{92 \text{ g}} \times \frac{-2058 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} = -22.37 \text{ kJ}$$

$$3) 1 \text{ g C}_7\text{H}_6 \times \frac{1 \text{ mol}}{94 \text{ g}} \times \frac{-1410 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} = -14.99 \text{ kJ}$$

$$4) 1 \text{ g C}_7\text{H}_6 \times \frac{1 \text{ mol}}{96 \text{ g}} \times \frac{-1300 \text{ kJ}}{1 \text{ mol}} = -13.54 \text{ kJ}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)



۱۱۷- گزینه «۱»

(شارج از کشور تبریز ۱۴۰۰)

برای محاسبه $|\Delta H|$ واکنش موردنظر، ضرایب واکنش اول را بدون تغییر جهت معادله در ۳ ضرب می‌کنیم، واکنش دوم را معکوس کرده و ضرایب آن را نصف می‌کنیم و ضریب‌های واکنش سوم را بدون تغییر جهت در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Delta H = 3\Delta H_1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\Delta H_2 + \frac{1}{4}\Delta H_3$$

$$= 3(-184/6) + \frac{1374}{4} - \frac{493}{4}$$

$$\Delta H = -113/5 \text{ kJ}$$

$$? \text{ mol BCl}_3 = 45/4 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol BCl}_3}{113/5 \text{ kJ}} = 0/4 \text{ mol BCl}_3$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۱۱۸- گزینه «۲»

(میثم کیانی)

ابتدا تغییر آنتالپی سوختن پروپین و اتین را که به دلیل اضافه شدن یک گروه CH_3 به وجود می‌آید را حساب می‌کنیم، سپس آنتالپی سوختن بوتین را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H(\text{CH}_3) = \Delta H(\text{C}_3\text{H}_4) - \Delta H(\text{C}_2\text{H}_2)$$

$$= -1938 - (-1300) = -638 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Delta H(\text{C}_4\text{H}_6) = \Delta H(\text{C}_3\text{H}_4) + \Delta H(\text{CH}_3)$$

$$\Rightarrow -1938 - 638 = -2576 \text{ kJ}$$

حالا انرژی آزاد شده از سوختن بوتین را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ kJ} = 28 \text{ g C}_4\text{H}_6 \times \frac{100}{100} \times \frac{1 \text{ mol C}_4\text{H}_6}{54 \text{ g C}_4\text{H}_6}$$

$$\times \frac{-2576 \text{ kJ}}{1 \text{ mol C}_4\text{H}_6} \approx -935 \text{ kJ}$$

$$? \text{ g C}_4\text{H}_6 = -935 \text{ kJ} \times \frac{2 \text{ mol C}_4\text{H}_6}{-3120 \text{ kJ}}$$

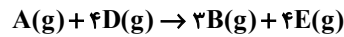
$$\times \frac{30 \text{ g}}{1 \text{ mol C}_4\text{H}_6} \approx 18 \text{ g C}_4\text{H}_6$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۱۱۹- گزینه «۱»

(کآرو ممدری)

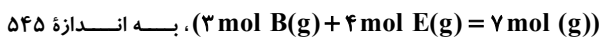
اجزای واکنش (II) را در ۲ ضرب کرده، (III) را معکوس می‌کنیم واکنش (I) را بدون تغییر باقی می‌گذاریم. با جمع کردن این واکنش‌ها می‌توان به واکنش مورد نظر سؤال رسید.



$$\Delta H = \Delta H_1 + 2\Delta H_2 - \Delta H_3 = 542 + 2(-98) - 891$$

$$= -545 \text{ kJ}$$

در این واکنش، به ازای تولید هفت مول گاز



کیلوزول گرما آزاد می‌شود.

$$\text{گاز ۵۶ mol} = 43/6 \text{ kJ} \times \frac{7 \text{ mol گاز}}{545 \text{ kJ}}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۱۲۰- گزینه «۲»

(امین فوشنوسان)

عبارت «پ» و «ت» نادرست است.

تعداد کربن‌ها (n) برابر ۱۰ عدد است. برای محاسبه تعداد H ها، تعداد پیوندهای دوگانه و حلقه را با هم جمع کرده و در عدد ۲ ضرب کرده و از $2n + 2$ کم می‌کنیم.

$$\text{H} : (2n + 2) - [(4 + 1) \times 2] \xrightarrow{n=10} \text{H} = 12$$

پس فرمول ترکیب داده شده $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{O}$ می‌باشد و فرمول مولکولی ۲-

هپتانون $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}$ است مجموع شمار اتم‌ها در این دو مولکول به ترتیب ۲۳ و ۲۲ می‌باشد.

برای محاسبه پیوند اشتراکی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(4 \times \text{C}) + (\text{H}) + (2 \times \text{O})}{2}$$

$$= \frac{10(4) + (12 \times 1) + (1 \times 2)}{2} = 27$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

شیمی ۱

۱۲۱- گزینه «۲»

(عمید زبئی)

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) درست؛ در لایه‌های اول و سوم هواکره، با افزایش ارتفاع، دما کاهش می‌یابد.

(۲) نادرست؛ در ارتفاعات بسیار بالا، گونه‌های خنثی و مثبت یافت می‌شود.

(۳) درست؛ حدود ۷۵ درصد جرم هواکره را تروپوسفر تشکیل می‌دهد.

(۴) درست؛ با افزایش ارتفاع، غلظت گازها در هواکره کاهش می‌یابد اما درصد حجمی آن‌ها ثابت است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۵۱)

۱۲۲- گزینه «۱»

(روزبه رضوانی)

$$T = \theta + 273 \rightarrow 25 + 273 = 298K$$

با توجه به اینکه به ازای هر کیلومتر ۶ درجه سانتی‌گراد کاهش دما داریم؛

از آنجایی که تغییرات دمای سلیوس و کلوین با هم برابر است، داریم؛

$$\frac{-6^\circ C}{1000m} \times 8400m = -50 / 4^\circ C = \Delta\theta \Rightarrow \Delta T = -50 / 4K$$

$$298 - 50 / 4 = 247 / 6K$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{|247/6 - 298|}{298} \times 100 \approx 16/91$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه ۵۰)

۱۲۳- گزینه «۲»

(امیر هاتمیان)

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) تهیه اکسیژن صد درصد خالص در این فرایند، دشوار است. زیرا نقطه جوش آن نزدیک به آرگون است.

(۲) نقطه جوش گازهای اکسیژن، آرگون و نیتروژن برحسب درجه سلسیوس،

به ترتیب برابر ۱۸۳-، ۱۸۶- و ۱۹۶- است. بنابراین طی کاهش دما، ابتدا

اکسیژن، سپس آرگون و در نهایت گاز نیتروژن به حالت مایع تبدیل می‌شود.

(۳) در حالت (۳) آرگون به صورت گاز از هوای مایع خارج می‌شود اما گاز اکسیژن همچنان به صورت مایع در ظرف وجود دارد که در هواکره درصد حجمی بالایی (حدود ۲۰٪) دارد.

(۴) گاز خارج شده در حالت (۲) نیتروژن است ولی از هلیوم برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI استفاده می‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۵۳)

۱۲۴- گزینه «۳»

(سیدرضا رضوی)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) عنصر اکسیژن با اغلب (نه همه) عناصر واکنش می‌دهد.

(۲) با افزایش ارتفاع نسبت به سطح زمین، فشار گاز اکسیژن و همچنین غلظت آن کاهش می‌یابد.

(۴) کربن مونوکسید نسبت به کربن دی‌اکسید سطح انرژی بیشتری دارد و ناپایدارتر است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۳۹، ۵۲، ۵۳ تا ۵۸)

۱۲۵- گزینه «۳»

(امیررضا چغفری)

موارد (ب)، (ت) نادرست هستند. Al_2O_3 ؛ آلومینیم اکسید؛ CuO ؛ مس اکسید؛

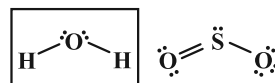
دقت کنید: اگر در فرمول مولکولی یک ترکیب، تنها یک اتم از عنصر سمت چپ وجود داشته باشد، پیشوند مونو را به کار نمی‌بریم.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۱۲۶- گزینه «۳»

(امیر قاسمی)

ساختار لوویس ترکیبات مذکور به صورت زیر است:



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۱۲۷- گزینه «۱»

(میلاد شیخ‌الاسلامی فیاضی)

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) نادرست؛ فرآورده سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی فقط کربن مونوکسید

و بخار آب نیست و طبق متن کتاب درسی فرآورده‌های دیگر نیز تولید

می‌شوند.

(۲) درست؛ نور حاصل از سوختن گوگرد آبی و نور حاصل از سوختن سدیم

زرد است. طول موج نور آبی کوتاه‌تر از زرد است.

(۳) درست؛ سوختن واکنشی شیمیایی است که در آن، یک ماده با اکسیژن به

سرعت واکنش می‌دهد و بخشی از انرژی شیمیایی آن به صورت گرما و نور

آزاد می‌شود.

(۴) درست؛ میل ترکیبی کربن مونوکسید با هموگلوبین خون بیش از ۲۰۰

برابر اکسیژن است در نتیجه میل ترکیبی اکسیژن با هموگلوبین خون کمتر از

پنج هزارم برابر $\left(\frac{1}{۲۰۰۰}\right)$ کربن مونوکسید است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۱۲۸- گزینه «۳»

(صارق در تومیان)

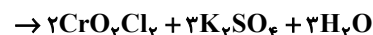
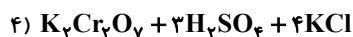
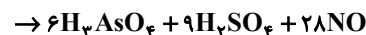
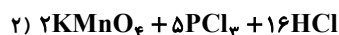
در معادله نمادی، حالت فیزیکی مواد مشخص می‌گردد. نماد « Δ » نشان می‌دهد که واکنش‌دهنده‌ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱۲۹- گزینه «۳»

(مبینی محبوب)

واکنش‌های مورد نظر به شکل زیر، موازنه می‌شوند و با توجه به آن گزینه «۳» درست است.



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱۳۰- گزینه «۴»

(مبینی محبوب)

طبق شکل صفحه ۶۹ کتاب درسی زمین بخش قابل توجهی از گرمای جذب شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد ولی گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج کامل گرمای آزاد شده می‌شوند.

بررسی نادرستی سایر گزینه‌ها:

(۱) در سده اخیر میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد افزایش یافته است.

(۲) در سده اخیر میانگین جهانی دمای سطح زمین افزایش یافته است.

(۳) هواکره همانند لایه پلاستیکی برای گلخانه است و سبب گرم شدن کره

زمین می‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

شیمی ۳

گزینه ۱-۱۳۱

(عمید زبئی)

هرچه غلظت یون‌های آزاد موجود در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی محلول بیشتر است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: محلول HCl اسیدی قوی می‌باشد.

$$\text{HCl} \rightarrow \text{H}^+ + \text{Cl}^-$$

$$[\text{H}^+] = M = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{غلظت کل یون‌ها} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

گزینه «۲»: در محلول HCN ، غلظت H_3O^+ با غلظت CN^- برابر است.

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = M\alpha = \frac{2}{100} \times 0.05 = 0.001 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{غلظت کل یون‌ها} = 2 \times 0.001 = 0.002 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

گزینه «۳»: HNO_3 اسید قوی به شمار می‌آید.

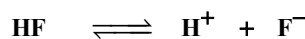
$$? \text{ mol HNO}_3 = \frac{0.315 \text{ g HNO}_3}{63 \text{ g HNO}_3} \times 1 \text{ mol HNO}_3 = 0.005 \text{ mol HNO}_3$$

$$[\text{HNO}_3] = \frac{0.005 \text{ mol}}{0.05 \text{ L}} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{غلظت کل یون‌ها} = 2 \times 0.1 = 0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

گزینه «۴»: HF اسید ضعیفی می‌باشد. برای تعیین غلظت یون‌ها جدول تغییرات تنظیم می‌کنیم:



$$0.2 - x \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{F}^-]}{[\text{HF}]} \Rightarrow 6 \times 10^{-4} = \frac{x^2}{0.2 - x} \Rightarrow x \approx 0.01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{غلظت کل یون‌ها} = 2x \approx 0.02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۴)

گزینه ۲-۱۳۲

(آرمین عظیمی)

معادله یونش اسید HA به صورت زیر است:



رابطه درصد یونش به صورت زیر است:

$$100 \times \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}} = \text{درصد یونش}$$

$$= \frac{250}{750 + 250} \times 100 = 25\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

گزینه ۱-۱۳۳

(رسول عابری زواره)

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) در زندگی روزانه با انواع اسیدها سروکار داریم که برخی قوی و اغلب ضعیف هستند. اسیدهای خوراکی و اسید موجود در مرکبات نیز ضعیف هستند.

(۲) اسیدها را براساس درجه یونش آن‌ها به دو دسته قوی و ضعیف دسته‌بندی می‌کنند. اسیدهایی قوی هستند که می‌توان یونش آن‌ها را در آب کامل در نظر گرفت ($\alpha \approx 1$).

(۳) تنها هیدروژن گروه کربوکسیل در کربوکسیلیک اسیدها می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

(۴) اسید موجود در ریواس اسید ضعیف است. در اسیدهای ضعیف مقدار کمی از یون‌های آب پوشیده به همراه شمار زیادی از مولکول‌های یونیده نشده در محلول یافت می‌شوند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

(برگرفته از متن کتاب)

گزینه ۱-۱۳۴

(امیر ماتیان)

نکته: سامانه تعادلی را می‌توان از دیدگاه کیفی و کمی بررسی کرد. محلول اسیدهای ضعیف در آب سامانه تعادلی است. از دیدگاه کیفی رفتاری که سبب می‌شود غلظت تعادلی همه گونه‌ها در سامانه، ثابت (و نه الزاماً برابر) بماند این است که سرعت تولید هرگونه با سرعت مصرف آن برابر است. از دیدگاه کمی ثابت تعادل بررسی می‌شود.

(۱) نادرست - در واکنش‌های تعادلی غلظت گونه‌های شرکت‌کننده در تعادل ثابت است، ولی لزوماً برابر نیست.

(۲) درست - در هنگام تعادل، سرعت واکنش رفت با سرعت واکنش برگشت برابر است.

(۳) درست - ثابت تعادل هر سامانه تعادلی فقط تابع دما است.

(۴) درست - ثابت یونش یک اسید، نسبت حاصل ضرب غلظت تعادلی یون‌های موجود در محلول را به غلظت تعادلی آن اسید نشان می‌دهد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

گزینه ۳-۱۳۵

(رسول عابری زواره)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: درست؛ اسید HX به طور کامل یونیده شده است، یعنی میزان یون‌های آن بیشتر است؛ پس در غلظت برابر با اسید دیگر رسانایی الکتریکی بیشتری دارد.

گزینه «۲»: درست؛ در محلول HX مولکول یونیده‌نشده وجود ندارد؛ چون به طور کامل به یون تبدیل شده است.

گزینه «۳»: نادرست؛ در اسید قوی‌تر HX غلظت یون هیدرونیوم بیشتر، اما غلظت یون هیدروکسید کمتر است.

گزینه «۴»: درست؛ اسید HX اسید قوی‌تری نسبت به اسید HA است و ثابت یونش بیشتری هم دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۴)

(برگرفته از با هم بیداریم صفحه ۱۸)



۱۳۶- گزینه «۴»

(نویز نقاشان)

از آنجا که ثابت یونش اسیدی برای HA بیشتر از HB است، پس در دما و غلظت یکسان HA اسید قوی‌تر از HB می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: قدرت اسیدی HA بیشتر از HB است.

گزینه «۲»: در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، از آنجا که اسید HA قوی‌تر است، پس رسانایی الکتریکی محلول حاوی اسید HA بیشتر است.

گزینه «۳»: از آنجا که اسید HB ضعیف‌تر است، در شرایط یکسان از نظر

دما و غلظت، غلظت H^+ در محلول حاوی اسید HB کمتر و در

نتیجه pH آن محلول بیشتر است.

گزینه «۴»: ثابت تعادل تغییر می‌کند ولی دقیق نمی‌توان محاسبه نمود فقط

می‌توانیم نتیجه بگیریم که K_a هر دو واکنش تغییر می‌کند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۳۷- گزینه «۱»

(امین نروزی)

۱) محلول HBr اسید قوی است پس با یونش کامل در نظر گرفته می‌شود

و در محلول نهایی، HBr مولکولی (یونیده نشده) تقریباً صفر است و غلظت

نهایی H^+ و Br^- با غلظت اولیه HBr برابر است.

۲) محلول HF اسید ضعیف است. پس $[H^+] = [F^-] > [HF]$ است.

۳) HI اسید قوی است و تقریباً HI یونیده نشده (مولکولی) در محلول آن

یافت نمی‌شود: $(HI) \approx 0$

۴) محلول HCN اسید ضعیف است و شمار ناچیزی از یون‌های آب پوشیده

H^+ و CN^- در محلول آن وجود دارد و کمتر از $0.3M$ مربوط به

CN^- است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۱۳۸- گزینه «۳»

(سیدصدرا عادل)

$$0.94g HA \times \frac{1 \text{ mol HA}}{47g HA} = 0.02 \text{ mol HA}$$



غلظت اولیه 0.02 0 0

تغییرات غلظت -4×10^{-3} $+4 \times 10^{-3}$ $+4 \times 10^{-3}$

غلظت تعادلی 0.016 4×10^{-3} 4×10^{-3}

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow \frac{(4 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}{16 \times 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

دقت کنید که به ازای تولید هر مول A^- همان مقدار H^+ تولید می‌شود.

مقدار pH محلول برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log 4 \times 10^{-3} = 3 - \log 4$$

$$= 3 - 2 \log 2 = 2/4$$

$$[H^+].[OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-3}}$$

$$= 2/5 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{pH}{[OH^-]} = \frac{2/4}{2/5 \times 10^{-12}} = 9/6 \times 10^{11}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۸)

۱۳۹- گزینه «۲»

(هانی سوری)

محلول HA طبق $[HA] = M.V$ شامل ۲ مول HA است.

حجم محلول نهایی ۲ لیتر خواهد بود.

طبق $\alpha = \frac{[H^+]}{M}$ مقدار $[H^+]$ در محلول HA برابر است با:

$$[H^+] = M.\alpha$$

مقدار مول H^+ محلول نهایی برابر است با: $(M.\alpha) + 0.1$

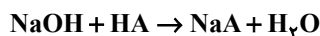
$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow 0.3 = -\log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-0.3} = 10^{-1} \times 10^{0.7} = 0.5$$

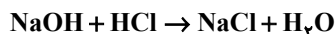
$$[H^+].V = H^+ \Rightarrow 0.5 \times 2 = 1 \text{ mol } H^+$$

$$\Rightarrow 1 = M.\alpha + 0.1 \Rightarrow 2 \times \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.45$$

$$\Rightarrow 45\% = \text{درصد یونش}$$



$$2 \text{ mol HA} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol HA}} \times \frac{40g NaOH}{1 \text{ mol NaOH}} = 80g NaOH$$



$$0.1 \text{ mol HCl} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol HCl}} \times \frac{40g NaOH}{1 \text{ mol NaOH}} = 4g NaOH$$

پس $80 + 4 = 84$ گرم NaOH نیاز است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۴ تا ۳۲)

۱۴۰- گزینه «۲»

(سهراب صادقی زاده)

هنگام استفاده از محلول غلیظ سود، رعایت نکات ایمنی ضروری است؛ زیرا

تماس این محلول با بدن و تنفس بخارات آن آسیب جدی به دنبال دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۲ و ۳۰ تا ۳۲)

(برگرفته از متن کتاب)