

دفترچه پاسخ

آزمون ۱۳ شهریور ۱۴۰۵ اختصاصی دوازدهم ریاضی



پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان
حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-امیرمحمد باقری نصرآبادی-محمد بحیرایی-رضا توکلی-سهیل حسن-خان پور-جمشید حسینی-خواه عادل حسینی-افشین خاصه-خان-سهیل ساسانی-یاسین سپهر-میلاد سجادی لاریجانی-علی شهبازی-حمیدرضا صاحبی-حمید علیزاده-کامیار علییون-کیان کریمی خراسانی-لیلا مرادی-مهدی ملارمضانی-سروش موئینی-علیرضا ندافزاده-مهدی نصراللهی-جهانبخش نیکنام
هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-جواد ترکمن-سیدمحمد رضا حسینی فرد-افشین خاصه-خان-فرزانه خاکپاش-کیوان دارابی-مصطفی دیداری-سوگند روشنی-علیرضا شریف خطیبی-فرشاد صدیقی فر-هومن عقیلی-شبهم غلامی-احمد رضا فلاح-مهرداد ملوندی-نیلوفر مهدوی-نیما مهندس
فیزیک	خسرو ارغوانی فرد-علی اکبریان کیاسری-حسین الهی-زهره آقامحمدی-محمد رضا خادمی-مجتبی خلیل ارجمندی-میثم دشتیان-محمدعلی راست پیمان-دانیال راستی-بهنام رستمی-محمد ساکی-مهدی سلطانی-امیررضا صدریکتا-سعید طاهری بروجنی-مسعود قره خانی-مصطفی کیانی-علیرضا گونه-غلامرضا محبی-حسین مخدومی-حسام نادری-آرش یوسفی
شیمی	جعفر پازوکی-محمد رضا پور جاوید-امیر حاتمیان-ایمان حسین نژاد-ارژنگ خانلری-پیمان خواجوی مجد-مرتضی خوش کیش-حمید ذبحی-حسن رحمتی کوکنده-علیرضا رضایی سراب-فرزاد رضایی-روزبه رضوانی-هانی سوری-آترین صبا-مسعود طبرسا علی طرفی-امیرحسین طیبی-مجید غنچه‌لی-امیرمحمد کنگرانی-میثم کوثری-لنگری-مجتبی محبوب-امیرحسین مسلمی-امین نوروزی-سیدرحیم هاشمی دهکردی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی پایه	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
گروه ویراستاری	سینا صالحی آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرتر کمپور زهره آقامحمدی	احسان پنجه‌شاهی آترین صبا امیرحسین توحیدی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	ابراهیم نوری	علیرضا نجفی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت کار-امیرمحمد علیپور-مهسا محمدنیا				
				علیرضا همایون خواه سجاد بهارلویی	فاطمه الهی محسن دستجردی رزیتا حبیب‌اله

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳

حسابان ۱

گزینه «۴» -۱

(ممنوع بصرایی)

اگر زاویه‌ها را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 36^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = 63^\circ, \beta = 27^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{27^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{20} \text{ rad}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

گزینه «۳» -۲

(سپید ساسانی)

برای طول کمان و مساحت قطاع داریم:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$\frac{\ell^2}{S} = 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\ell^2}{2S}$$

پس داریم:

$$\theta = \frac{18\pi}{2 \times 15} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad} = 108^\circ$$

حال در این سؤال θ برابر است با: (حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

گزینه «۲» -۳

(سپید ساسانی)

$$\sin 56^\circ = \sin(36^\circ + 20^\circ) = \sin(180^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ$$

$$\cos 295^\circ = \cos(270^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\sin 475^\circ = \sin(360^\circ + 115^\circ) = \sin(90^\circ + 25^\circ) = \cos 25^\circ$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{-\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ} \cdot \frac{\cos 25^\circ}{\tan 25^\circ + 1} = \frac{-\tan 25^\circ + 1}{\tan 25^\circ + 1} \cdot \frac{\cos 25^\circ}{\tan 25^\circ + 1}$$

$$\xrightarrow{\tan 25^\circ \approx 0.5} \frac{-0.5 + 1}{0.5 + 1} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

گزینه «۴» -۴

(ممد علیزاده)

$$\cos\left(-\frac{179\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{46\pi}{3}\right)$$

$$\tan \frac{\Delta\pi}{\lambda} \cot \frac{11\pi}{\lambda}$$

$$\frac{\cos\left(\frac{179\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{46\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{4\pi + \pi}{\lambda}\right) \cot\left(\frac{12\pi - \pi}{\lambda}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{180\pi - \pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{48\pi + \pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cot\left(\frac{11\pi}{\lambda}\right)}$$

$$\frac{\cos\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(16\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{-\cot\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \tan\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}$$

$$\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{-1} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-1}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} = -\sqrt{3}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

گزینه «۲» -۵

(موانش نیکام)

$$A = \frac{\cos 65^\circ \cos 15^\circ + \cos(90^\circ - 65^\circ) \cos(90^\circ - 15^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 20^\circ + \sin 70^\circ \cos(270^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 65^\circ \cos 15^\circ + \sin 65^\circ \sin 15^\circ}{\cos 70^\circ \cos 20^\circ + \sin 70^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\cos(65^\circ - 15^\circ)}{\cos(70^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 1$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

گزینه «۲» -۶

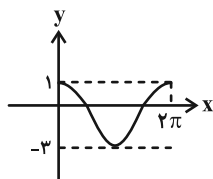
(ممد بصرایی)

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos(\pi - x) - 1 = \cos x + \cos x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos x - 1$$

نمودار تابع f در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر است.



(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

گزینه «۲» -۷

(میلاد سیاری لاریجانی)

دو زاویه α و β متمم هم هستند، بنابراین:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \tan \alpha - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha - \cot \alpha = 2$$

اتحادهای $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ و

$$\cot^2 2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha}$$

لذا داریم:

$$-2 \cot 2\alpha = 2 \Rightarrow \cot 2\alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2\alpha} = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}$$

توجه: اثبات اتحاد $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\tan \alpha - \cot \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha\end{aligned}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۲)

۸- گزینه «۱»

(کالکول)

ابتدا رابطه داده شده را باز می‌کنیم تا رابطه بین $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ را پیدا کنیم:

$$3 \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha \cos \beta + 3 \sin \beta \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta - 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = -5 \sin \beta \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5 \sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -5 \tan \beta \quad (*)$$

ادامه سوال از دو روش حل می‌شود.

روش اول: از اتحاد $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{20}{29} \Rightarrow 29 \tan \alpha = 10 + 10 \tan^2 \alpha$$

$$10 \tan^2 \alpha - 29 \tan \alpha + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{2}{5} \xrightarrow{(*)} \tan \beta = -\frac{2}{25} \\ \tan \alpha = \frac{5}{2} \xrightarrow{(*)} \tan \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\sin 2\alpha = \frac{20}{29} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \pi \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha > 0$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{20}{29} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{10}{29}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{100}{29^2} \Rightarrow (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \frac{100}{29^2}$$

حال با تغییر متغیر $c = \cos^2 \alpha$ داریم:

$$(1 - c)c = \frac{100}{29^2} \Rightarrow c^2 - c + \frac{100}{29^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - \frac{400}{29^2} = \frac{29^2 - 20^2}{29^2} = \frac{(29 - 20)(29 + 20)}{29^2}$$

$$= \frac{9 \times 49}{29^2} = \left(\frac{3 \times 7}{29}\right)^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{25}{29}, \frac{4}{29} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{4}{25}, \frac{25}{4}$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha > 0} \tan \alpha = \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \xrightarrow{(*)} \tan \beta = -\frac{2}{25}, -\frac{1}{2}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- گزینه «۴»

(عادل حسینی)

$$\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 1 - \frac{11}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۰- گزینه «۱»

(رضا توکلی)

می‌دانیم $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ ، لذا داریم:

$$f(x) = \frac{4 \cos^2 2x}{2 \cot 2x} = 2 \frac{\cos^2 2x}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

ریاضی ۱

گزینه ۱۱

(ممشیر حسینی فراه)

چون g تابع همانی است، پس $g(-2) = -2$ و $g(3) = 3$ است. لذا داریم:

$$\frac{3f(1)}{5g(-2)} = -1 \Rightarrow \frac{3f(1)}{-10} = -1 \Rightarrow f(1) = \frac{10}{3}$$

f تابعی ثابت است، پس $f(0) = f(1) = \frac{10}{3}$ و لذا داریم:

$$f(0) \times g(3) = \frac{10}{3} \times 3 = 10$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

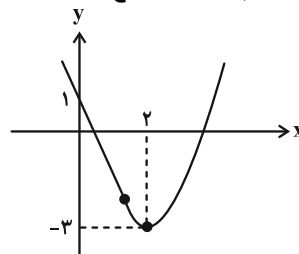
گزینه ۴

(ممشیرضا صامی)

نمودار تابع را رسم کرده و برد آن را می‌یابیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3 & ; x \geq 1 \\ -3x + 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

همان‌طور که از روی شکل پیداست، برد تابع $[-3, +\infty)$ می‌باشد.



(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

گزینه ۱۳

(معاونش نیکنام)

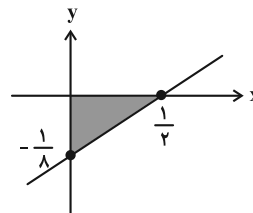
ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x+2) + f(x-1) = (a(3x+2) + b) + (a(x-1) + b) = 4ax + a + 2b$$

ضابطه این تابع باید با ضابطه $y = x$ متحد باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

پس $f(x) = \frac{2x-1}{8}$ و نمودار آن در شکل زیر رسم شده است:



مثلث رنگ شده، سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر می‌شود با:

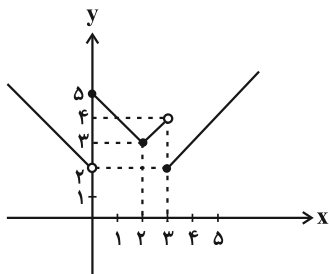
$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

گزینه ۳

(علی شعبرابی)

ابتدا نمودار تابع چندضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم:



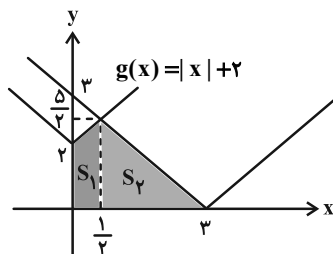
خطوط $y = 1/5$ ، $y = 3$ ، $y = 3/5$ و $y = 5$ به ترتیب نمودار f را در صفر، ۳، ۴ و ۵ نقطه قطع می‌کنند؛ پس از بین خطوط داده شده، خط $y = 3/5$ در تعداد نقاط بیشتری تابع f را قطع می‌کند.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

گزینه ۴

(لاظم ایلالی)

نمودار تابع f از انتقال سه واحدی نمودار تابع $y = |x|$ به سمت راست به‌دست می‌آید و نمودار تابع g از انتقال دو واحدی نمودار تابع $y = |x|$ به بالا به‌دست می‌آید.



$$0 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x+2 \\ f(x) = -x+3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه تلاقی}} x+2 = -x+3$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

مقدار $S_1 + S_2$ مورد نظر سؤال است.

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{8}, \text{ و } S_1 = \frac{\left(2 + \frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{9}{8}$$

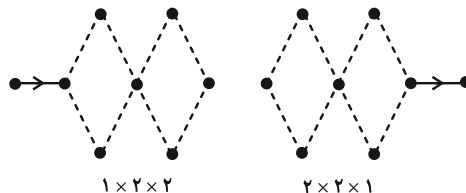
$$S_1 + S_2 = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

گزینه ۳» ۱۶-

(کیان کریمی فراسانی)

انتخاب مسیر به طول ۵ از A به J به یکی از ۲ حالت زیر امکان پذیر است:



پس در مجموع $4 + 4 = 8$ مسیر به طول ۵ داریم.

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

گزینه ۲» ۱۷-

(مهری نصرالهی)

طبق فرض داریم:

$$P(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)!} = 4n^2 - 2n - 12$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (4n+6)(n-2)$$

$$\xrightarrow{n>3} n^2 - n = 4n + 6$$

غ ق ق

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 6 \end{cases}$$

$$P(n-3, n-4) = P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3!$$

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

گزینه ۱» ۱۸-

(یاسین سپهر)

دو حالت داریم:

الف) حرف اول با «ی» شروع شده و حرف آخر یکی از حروف (و، ا، ل)

$$3 \times 5 \times 1$$

باشد:

ب) حرف اول با یکی از حروف «ف، ت، ب» شروع شده و حرف آخر

$$4 \times 5 \times 3$$

«ا، ل، و، ی» باشد:

$$3 \times 5 \times 1 + 4 \times 5 \times 3 = 15 \times 5!$$

(ریاضی ۱- شمارش برون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

گزینه ۱» ۱۹-

(سروش موثینی)

محدودیت برای رقم صدگان و هزارگان وجود دارد:

الف) $\{5\} \in$ هزارگان

$\{0, 1, 2, 3, 4\} \in$ صدگان

عددی که در هزارگان قرار بگیرد، نمی‌تواند در صدگان باشد، بنابراین برای صدگان ۵ حالت وجود دارد. حال داریم:

$$1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$$

ب) $\{4\} \in$ هزارگان

$\{2, 3, 5\} \in$ صدگان

$$1 \times 3 \times 4 \times 3 = 36$$

در این حالت داریم:

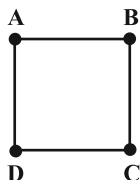
پس در مجموع ۹۶ عدد داریم.

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

گزینه ۴» ۲۰-

(سویل مس-فان پور)

فرض کنیم می‌خواهیم رنگ آمیزی از رأس A آغاز شود؛ چون هنوز رنگی زده نشده است، ۳ حالت برای رنگ آمیزی این رأس داریم؛ اما در ادامه دو حالت پیش می‌آید:



الف) B و D نباید با A هم‌رنگ باشند اما می‌توانند با هم هم‌رنگ باشند، در حالت هم‌رنگی B و D می‌توانیم ۲ انتخاب داشته باشیم و البته C نیز ۲ انتخاب دارد تا با آن‌ها هم‌رنگ نباشد. پس داریم:

$$\underbrace{3}_{\text{رنگ A}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ B}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ C}} = 12$$

ب) رنگ B و D می‌توانند متفاوت باشند که در مجموع ۲ حالت برای آن وجود دارد. اما در این حالت C فقط یک انتخاب (که همان رنگ A است) می‌تواند داشته باشد:

$$\underbrace{3}_{\text{رنگ A}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ B}} \times \underbrace{1}_{\text{رنگ C}} = 6$$

پس در مجموع ۱۸ حالت داریم.

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

حسابان ۲

۲۱- گزینه «۲»

(یلا مرادی)

با توجه به شکل اعداد حقیقی بازه $[-3, 5]$ را می توان در تابع داده شده به جای x قرار داد:

$$-3 \leq x \leq 5 \xrightarrow{-x^3} -9 \leq 3x \leq 15 \xrightarrow{+6} -3 \leq 3x+6 \leq 21$$

یعنی بازه $[-3, 21]$ برابر با دامنه تابع f است، بنابراین:

$$D_f = [-3, 21] \Rightarrow D_g : -3 \leq \frac{x}{2} \leq 21 \Rightarrow -6 \leq x \leq 42$$

(حسابان ۲- صفحه های ۲ تا ۱۲)

۲۲- گزینه «۳»

(کلاظم اهلایی)

ترتیب تبدیلات را روی ضابطه تابع داده شده انجام می دهیم:

$$y = x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} y = x^2 + 2x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{عرض نقاط در } |k| \text{ ضرب می کنیم}} y = |k|(x^2 + 2x + 3)$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به سمت پایین}} y = |k|(x^2 + 2x + 3) - 2|k|$$

$$= |k|(x^2 + 2x + 1)$$

یعنی ضابطه مربوط به نمودار نهایی، $y = |k|(x+1)^2$ است که نمودار

این تابع به ازای همه مقادیر حقیقی و غیر صفر k ، بر محور طول ها در $x=1$ مماس بوده و فقط یک نقطه مشترک با محور طول ها دارد.

(حسابان ۲- صفحه های ۲ تا ۱۲)

۲۳- گزینه «۴»

(کامیار علییون)

می دانیم تابع $y = |x+1| + 1$ روی بازه $[-2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

پس برای این که تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، لازم است شرط های زیر برقرار باشد:

الف) سهمی $y = -x^2 - ax$ روی بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد،

این یعنی این بازه نباید شامل طول رأس سهمی باشد:

$$x_S = -\frac{a}{2} \leq -2 \Rightarrow a \geq 4$$

ب) مقدار تابع $y = -x^2 - ax$ در $x = -2$ بیشتر از مقدار تابع

$$-4 + 2a \leq 2 \Rightarrow a \leq 3$$

در نتیجه هیچ مقداری برای a نمی توان پیدا کرد.

(حسابان ۲- صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

(مشابه سوال ۳ دی ۱۴۰۲)

۲۴- گزینه «۲»

(امیرمهر باقری نصرآبادی)

تابع f را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f = \{(-4, x), (-1, 2x - x^2), (0, 2x^2 - 1)\}$$

برای اینکه f صعودی باشد، رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$f(-4) \leq f(-1) \leq f(0)$$

$$\Rightarrow x \leq 2x - x^2 \leq 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - x^2 \leq 2x^2 - 1 \Rightarrow \underbrace{3x^2 - 2x - 1}_{(3x+1)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3} \text{ یا } x \geq 1 \end{cases}$$

اشتراک دو مجموعه بالا تنها عدد صحیح $x=1$ است.

(حسابان ۲- صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۲۵- گزینه «۳»

(افشین فاضله خان)

قضیه تقسیم را می نویسیم:

$$x^2 - ax + b = (x-1)(x+1)q(x) + 2$$

$x = -1$ و $x = 1$ را جای گذاری می کنیم:

$$\begin{cases} -1 + a + b = 0 + 2 \Rightarrow b + a = 3 \\ 1 - a + b = 0 + 2 \Rightarrow b - a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 2, a = 1$$

(حسابان ۲- مشابه تمرین ۷ صفحه ۲۲)

۲۶- گزینه «۳»

(عادل حسینی)

رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$2x^5 - x + 3 = (x-1)(x-2)q(x) + ax + b$$

$x=1$ و $x=2$ را جای گذاری می کنیم:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 65 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = 61, b = -57$$

پس $r(x) = 61x - 57$ و $r(-1) = -118$ است.

(مسایان ۲- تابع: صفحه های ۱۸ تا ۲۰)

۲۷- گزینه «۴»

(معدی ملارمضانی)

رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$2x^5 - x^2 + 3 = (x+1)q(x) + r$$

$x=-1$ را جای گذاری می کنیم:

$$-2 - 1 + 3 = 0 + r \Rightarrow r = 0$$

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $q(x)$ بر $x-1$ برابر $q(1)$ است. پس در

رابطه بالا $x=1$ را جای گذاری می کنیم:

$$2 - 1 + 3 = 2q(1) \Rightarrow q(1) = 2$$

(مسایان ۲- تابع: صفحه های ۱۸ تا ۲۰)

۲۸- گزینه «۱»

(علیرضا نرافزاده)

لازم است که ابتدا ضابطه تابع را ساده کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 ax (1 - \sin^2 ax) = \sin^2 ax \cos^2 ax \\ &= \frac{1}{4} (4 \sin^2 ax \cos^2 ax) = \frac{1}{4} (\sin^2 2ax) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4ax}{2} \right) \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4ax) \end{aligned}$$

دوره تناوب f از رابطه $T = \frac{2\pi}{4|a|} = \frac{\pi}{2|a|}$ به دست می آید:

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow |a| = 4$$

چون $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ ، تفاوتی ندارد $a=4$ باشد یا $a=-4$ و فرض

کنیم $a=4$ است:

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{8} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه های ۲۴ تا ۲۹)

۲۹- گزینه «۳»

(علیرضا نرافزاده)

$$\begin{cases} \max : a + |b| = 3 \\ \min : a - |b| = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -1, |b| = 4$$

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = 2 \times \frac{3}{14} \Rightarrow |c| = \frac{14\pi}{3}$$

طبق نمودار، تابع کسینوس بعد از صفر نزولی است، پس b مثبت بوده و داریم:

$$f(x) = -1 + 4 \cos\left(\frac{14\pi}{3}x\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{14}\right) = -1 + 4 \cos \frac{\pi}{3} = -1 + 2 = 1$$

(مسایان ۲- مثلثات: مشابه تمرین های ۱ و ۲ صفحه ۳۳)

۳۰- گزینه «۴»

(افشین فاضلهفان)

با توجه به اینکه نمودار از نقطه $(0, 2)$ عبور می کند، $c=2$ است. از

$$\frac{\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

طرفی $T=2\pi$ است، پس داریم:

تابع f روی هر بازه از دامنه اش اکیداً صعودی است، پس a و b

هم علامت اند.

نقطه $\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$ روی نمودار واقع است، در نتیجه با فرض اینکه $b > 0$ داریم:

$$4 = a \tan \frac{\pi}{4} + 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{9}{2} = 4.5$$

اگر $b < 0$ باشد، داریم:

$$4 = -a + 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{2}$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه های ۲۹ تا ۳۴)

هندسه ۲

۳۱- گزینه «۱»

(امیرمسین ابومیبوب)

می‌دانیم در یک تجانس به نسبت k ، طول پاره‌خطها $|k|$ برابر و اندازه مساحتها k^2 برابر می‌شود. طول هر ضلع مربعی به طول قطر $\sqrt{2}$ ، برابر ۱ است. اگر S و S' به ترتیب مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ و مساحت مثلث تبدیل یافته آن تحت این تجانس باشند، آن‌گاه داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

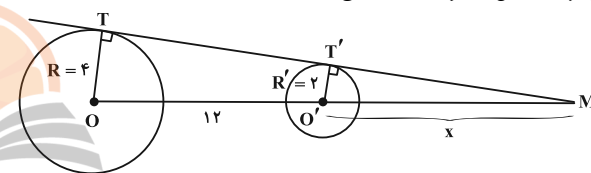
$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{S'}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

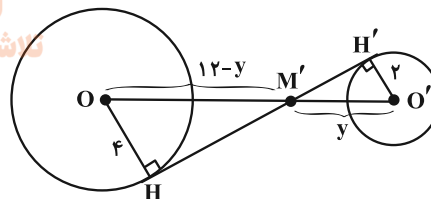
۳۲- گزینه «۳»

(هومن عقیلی)

$OO' > R + R'$ و در نتیجه دایره‌ها متخارجند. مرکز تجانس مستقیم محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی و مرکز تجانس معکوس محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی است.



$$\triangle MO'T' \sim \triangle MOT \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{2}{4} \Rightarrow x = 12$$



$$\triangle M'O'H' \sim \triangle M'OH \Rightarrow \frac{y}{12-y} = \frac{2}{4} \Rightarrow y = 4$$

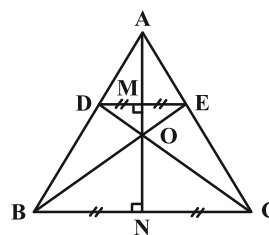
$$\Rightarrow MM' = x + y = 12 + 4 = 16$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۳۳- گزینه «۲»

(هومن عقیلی)

واضح است که $DE \parallel BC$ می‌باشد. مطابق شکل A مرکز تجانس مستقیم و O مرکز تجانس معکوس است و نقاط A ، O و M روی عمودمنصف‌های دو پاره‌خط DE و BC قرار دارند.



$$\triangle ODE \sim \triangle OCB \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{میانۀ } AN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{میانۀ } AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow MN = AN - AM = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OM + ON = 3\sqrt{3}$$

از تشابه دو مثلث ODE و OCB نتیجه گرفتیم که $ON = 3OM$. در نتیجه:

$$OM + 3OM = 3\sqrt{3} \Rightarrow OM = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow OA = OM + AM = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۳۴- گزینه «۱»

(امیرمسین ابومیبوب)

بررسی گزینه‌ها:

(۱) همه تبدیل‌های فوق اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کنند.

(۲) تجانس لزوماً طولی نیست.

(۳) بازتاب و دوران لزوماً شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کنند.

(۴) انتقال با بردار غیرصفر، نقطه ثابت تبدیل ندارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ کار در کلاس ۱ صفحه ۴۸)

۳۵- گزینه «۳»

(غیرزانه فاکپاش)

ترکیب دو تجانس متوالی به مرکز O و نسبت ۲، یک تجانس به مرکز O و نسبت ۴ است. می‌دانیم تجانس تنها در حالتی تبدیل همانی است که نسبت تجانس برابر ۱ باشد، پس این تبدیل همانی نیست. در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» ترکیب دو تبدیل هندسی مشخص شده، یک تبدیل همانی است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه ۴۷)

۳۶- گزینه «۴»

(سیرمهررضا حسینی‌فر)

از آنجا که هر تبدیل هندسی مانند F ، تابعی یک به یک است، می‌توان فرض سوال را ساده‌تر نوشت:

$$F(F(F(A))) = F(A) \xrightarrow{\text{یک به یک}} F(F(A)) = A$$

ترکیب یک بازتاب محوری با خودش، ترکیب دوران 180° با خودش و همچنین ترکیب تجانس با نسبت $k = -1$ با خودش، یک تبدیل همانی است، ولی ترکیب انتقال (با بردار $\vec{v}$) با خودش، انتقالی با بردار $2\vec{v}$ است.

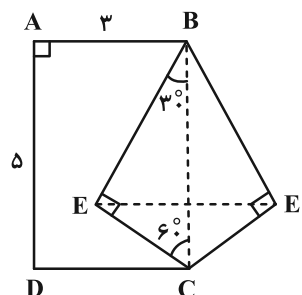
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۷- گزینه «۲»

(فرزانه فاکپاش)

برای افزایش مساحت این قطعه زمین بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع پنج ضلعی $ABECD$ ، کافی است بازتاب نقطه E را نسبت به خط گذرنده از نقاط B و C به دست آوریم. اگر بازتاب یافته نقطه E را E' بنامیم، آن گاه دو مثلث BEC و $BE'C$ هم نهشت هستند. می دانیم در مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع روبه رو به زوایای ۳۰° و ۶۰° درجه به ترتیب

$\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است، پس مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} BE = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ CE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{BEC} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$$

$$2S_{BEC} = 2 \times \frac{25\sqrt{3}}{8} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{4} = 6\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

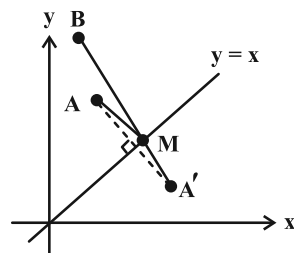
(هنر سه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها؛ صفحه های ۵۱ و ۵۲)

۳۸- گزینه «۳»

(سولکر روشنی)

طبق روش هرون، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به خط $y = x$ که همان نیمساز ربع اول و سوم است، به دست آوریم و فاصله نقطه حاصل را تا B محاسبه کنیم:

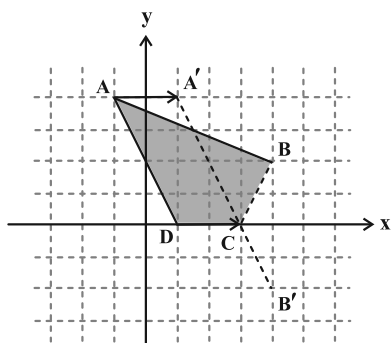
$$\begin{aligned} A(3, 6) &\xrightarrow{y=x} A'(6, 3) \\ \Rightarrow AM + MB &= A'B = \sqrt{(2-6)^2 + (8-3)^2} \\ &= \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \end{aligned}$$



(هنر سه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها؛ صفحه ۵۲)

۳۹- گزینه «۲»

(سیرمدرضا حسینی فرد)



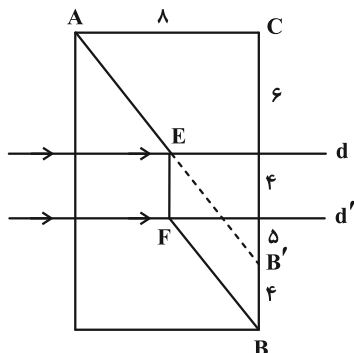
نقاط $D(n, 0)$ و $C(n+2, 0)$ روی محور x ها به فاصله ۲ واحد از هم هستند. پس نقطه A را به اندازه ۲ واحد در راستای محور x ها و به سمت راست انتقال می دهیم تا به نقطه $A'(1, 4)$ برسیم. نقطه B را نیز نسبت به محور x ها بازتاب می دهیم تا نقطه $B'(4, -2)$ به دست آید. اگر نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم محور x ها را در $C(3, 0)$ قطع می کند. بنابراین $n+2=3$ و $n=1$ می شود. به ازای این مقدار n محیط چهارضلعی $ABCD$ کمترین مقدار ممکن را به دست می آورد.

(هنر سه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها؛ صفحه ۵۳)

۴۰- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومصوب)

ابتدا نقطه B را ۴ واحد (به اندازه فاصله بین d و d') به طرف بالا انتقال می دهیم تا نقطه B' به دست آید. سپس از B' به A وصل می کنیم تا خط d را در نقطه E قطع کند و از E بر خط d' عمود رسم می کنیم تا آن را در نقطه F قطع نماید. مسیر $AEFB$ کوتاه ترین مسیر ممکن مطابق فرض سؤال است که طول آن برابر $AB' + B'B$ است.



$$\Delta ACB' : AB'^2 = AC^2 + CB'^2 = 8^2 + 15^2 = 289$$

$$\Rightarrow AB' = 17$$

$$AB' + B'B = 17 + 4 = 21$$

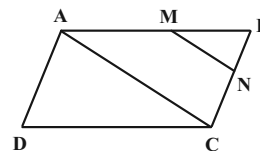
(هنر سه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها؛ صفحه ۵۳)

هندسه ۱

۴۱- گزینه «۲»

(اخشین فاضله‌ن)

طبق فرض داریم:



$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel AC$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle BMN \sim \triangle BAC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BAC}}{S_{BMN}} = \left(\frac{BA}{BM}\right)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{BMN}} = 2 \times 4 = 8$$

(هندسه ۱- پندریلی ها: صفحه ۶۵)

۴۲- گزینه «۲»

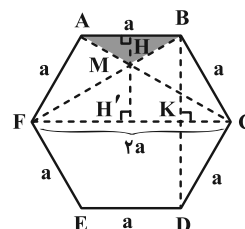
(چوادر ترکمن)

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را a بگیریم، آنگاه $FC = 2a$ (قطر)

بزرگ و $BD = a\sqrt{3}$ (قطر کوچک) می‌باشند. پس $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

است. واضح است که دو مثلث MAB و MFC متشابه‌اند و نسبت تشابه

$$\frac{AB}{FC} = \frac{1}{2} \text{ است. پس نسبت ارتفاع‌ها نیز } \frac{1}{2} \text{ می‌باشد. یعنی:}$$



$$MH = \frac{1}{2} MH' \Rightarrow MH = \frac{1}{3} BK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{6} \times a$$

$$\xrightarrow{a=6} S_{MAB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

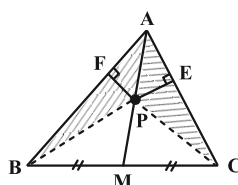
(هندسه ۱- پندریلی ها: صفحه ۶۵)

۴۳- گزینه «۴»

(فرشار صدیقی‌فر)

مطابق شکل، نقطه P را به رئوس B و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم در یک

مثلث دلخواه، میانه هر ضلع، مساحت آن مثلث را نصف می‌کند، پس:



$$\begin{cases} \triangle ABC \xrightarrow{\text{میانه AM}} S_{ABM} = S_{ACM} \\ \triangle PBC \xrightarrow{\text{میانه PM}} S_{PBM} = S_{PCM} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} S_{APB} = S_{APC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \times PF = \frac{1}{2} AC \times PE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{PF}{PE} = \frac{3}{4} = 0.75$$

(هندسه ۱- پندریلی ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۴۴- گزینه «۱»

(امیرفسین ابومحبوب)

مطابق شکل قطر AC را رسم می‌کنیم. همچنین از C به N وصل کرده و ادامه

می‌دهیم تا AB را در نقطه P قطع کند. پاره‌خط‌های AM ، BO و CP

میانه‌های اضلاع مثلث ABC هستند. می‌دانیم از برخورد میانه‌های هر مثلث، شش

مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین با فرض $S_{ABC} = S$ داریم:

$$S_{BGC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

می‌دانیم از برخورد میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم‌مساحت ساخته

$$S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3 \times 24 = 72 \quad \text{می‌شود، پس؛}$$

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

(امیرمسین ابومحبوب)

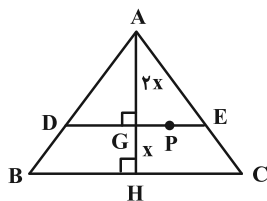
گزینه «۳» -۴۶

پاره خط DE موازی ضلع BC رسم شده است، پس طبق قضیه اساسی

تشابه، دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند. در دو مثلث متشابه نسبت

ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) است. از طرفی می‌دانیم

میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین داریم:



$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AH} \Rightarrow \frac{DE}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = 6$$

مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است. از طرفی هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک

مثلث متساوی‌الساقین محسوب می‌شود، پس مجموع فواصل هر نقطه دلخواه واقع

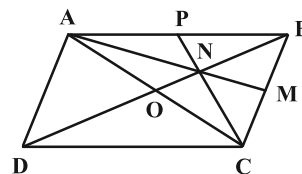
بر ضلع DE (مثل P) از اضلاع AD و AE، برابر اندازه ارتفاع رسم شده از

رأس D در این مثلث است. با توجه به این که ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

برابر یکدیگرند، مقدار مورد نظر برابر طول ارتفاع AG است، یعنی:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)



$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2S \Rightarrow S_{ADO} = S_{CDO} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S$$

$$S_{ADN} = S_{ADO} + S_{ANO} = \frac{1}{2} S + \frac{1}{6} S = \frac{4}{6} S$$

$$S_{NMCD} = S_{CDO} + S_{CON} + S_{CMN} = \frac{1}{2} S + \frac{1}{6} S + \frac{1}{6} S = \frac{5}{6} S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADN}}{S_{NMCD}} = \frac{4}{5}$$

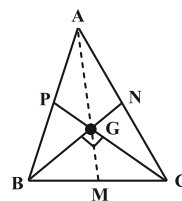
(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

(امیرمسین ابومحبوب)

گزینه «۳» -۴۵

می‌دانیم سه میانه هر مثلث در یک نقطه هم‌رسانند و هر کدام از آن‌ها به

نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌شوند. مطابق شکل و با فرض $BN = 12$ داریم:



$$GM = \frac{1}{3} AM = \frac{15}{3} = 5$$

$$BN \perp CP \xrightarrow{\triangle BGC} \text{ میانه وارد بر وتر } \Rightarrow GM = \frac{BC}{2} = 5$$

$$\Rightarrow BC = 10$$

$$BG = \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$\triangle BGC \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} GC = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

۴۷- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

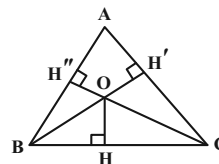
می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از

سه ضلع آن برابر طول ارتفاع مثلث است، پس داریم:

$$h_a = 4 + 2 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = 6 + 2\sqrt{3}$$

مطابق فرض فاصله نقطه O از ضلع BC، برابر $OH = 2\sqrt{3}$ است.

بنابراین داریم:



$$S_{OBC} = \frac{1}{2} OH \times BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times a = \sqrt{3}a = 12 + 4\sqrt{3}$$

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه ۶۸)

۴۸- گزینه «۲»

(امیررضا خلاج)

می‌دانیم مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای طبق فرمول پیک از فرمول

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \text{ به دست می‌آید که در آن } b \text{ نقاط مرزی و } i \text{ نقاط درونی}$$

است. در رابطه $b + i = 15$ با توجه به آن که $b \geq 3$ و $i \geq 0$ ، حداکثر

مقدار i و حداقل مقدار b به ترتیب برابر ۱۲ و ۳ است. در حالت $b = 3$ ،

حداکثر مقدار مساحت را داریم:

$$S_{\max} = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{3}{2} + 12 - 1 = 12/5$$

همچنین حداقل مقدار مساحت به ازای حداقل مقدار i و حداکثر مقدار b

یعنی به ترتیب $i = 0$ و $b = 15$ حاصل می‌شود:

$$S_{\min} = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{15}{2} + 0 - 1 = 6/5$$

$$\Rightarrow S_{\max} + S_{\min} = 12/5 + 6/5 = 18/5$$

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴۹- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق فرمول پیک برای مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = 10 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 11$$

مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی در صورتی حداکثر خواهد بود که b

بیشترین و i کمترین مقدار ممکن را دارا باشند. با توجه به این که کمترین

مقدار i برابر صفر است، داریم:

$$i = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = 11 \Rightarrow b = 22 \Rightarrow \max(b + i) = 22$$

از طرفی در صورتی مجموع نقاط مرزی و درونی حداقل خواهد بود که b

کمترین و i بیشترین مقدار ممکن را دارا باشند. کمترین مقدار b برابر ۳

است، ولی چون i همواره عددی حسابی است، پس b باید زوج باشد و در

نتیجه داریم:

$$b = 4 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 11 \Rightarrow i = 9 \Rightarrow \min(b + i) = 13$$

$$\max(b + i) - \min(b + i) = 22 - 13 = 9$$

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۵۰- گزینه «۱»

(شبنم غلامی)

ابتدا مساحت مثلث را پیدا می‌کنیم. با توجه به شکل، مثلث دارای ۳ نقطه

مرزی و ۲ نقطه درونی است، پس داریم:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{3}{2} + 2 - 1 = 2/5$$

$$S_{\text{پنج‌ضلعی}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{پنج‌ضلعی رنگی}} \Rightarrow S_{\text{پنج‌ضلعی}} = 11/5 + 2/5 = 14/5$$

پنج‌ضلعی شبکه‌ای دارای ۱۱ نقطه درونی است، پس طبق فرمول پیک داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 14/5 = \frac{b}{2} + 11 - 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = 4 \Rightarrow b = 8$$

بنابراین اختلاف تعداد نقاط مرزی و درونی پنج‌ضلعی برابر $11 - 8 = 3$ می‌باشد.

(هنر سه ۱- پندرضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

هندسه ۳

۵۱- گزینه «۳»

(مشابه نهایی - مرداد ۱۴۰۳)

ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$C = 2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 2m \\ 2n & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6-3m & -3 \\ -6 & 3+3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-3m & 2m-3 \\ 2n-6 & 7+3n \end{bmatrix}$$

طبق فرض، ماتریس C قطری است، پس:

$$\begin{cases} 2m-3=0 \Rightarrow m=\frac{3}{2} \\ 2n-6=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 8-3(\frac{3}{2}) & 0 \\ 0 & 7+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی C برابر ۱۹/۵ می‌شود.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۵۲- گزینه «۴»

(مرداد ملونری)

ابتدا رابطه ماتریسی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix} = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+y & 2x-2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix} = 5$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4xy+y^2+4x^2-4xy \end{bmatrix} = 5 \Rightarrow y^2+4x^2=5$$

از رابطه $y = 2x+1$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = 2x+1 \Rightarrow y-2x=1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{y^2+4x^2}_{=5} - 4xy = 1$$

$$\Rightarrow -4xy = -4 \Rightarrow xy = 1$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۵۳- گزینه «۲»

(کیوان دارابی)

از روی ماتریس A، ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 & -21 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -6 & -21 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{1404} = (A^3)^{468} = (-I)^{468} = I$$

در نتیجه:

مجموع درایه‌های A^{1404} برابر ۲ می‌شود.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

۵۴- گزینه «۱»

(مشابه نهایی - شهریور ۱۴۰۱)

برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه A و B داریم:

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

با توجه به رابطه فرض، نتیجه می‌گیریم که $AB = BA$ ، یعنی A و B

تعویض‌پذیرند و داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & m-1 \\ -1 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m+6 & 3m+5 \\ -5m-1 & 3m-4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} m+1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & m-1 \\ -1 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m-2 & m^2+4m-1 \\ -11 & -m+4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

از برابری ماتریس‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$-5m-1 = -11 \Rightarrow m = 2$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ و ۲۱)

۵۵- گزینه «۳»

(علیرضا شریف‌طیپی)

طبق فرض داریم:

$$(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از طرفین وارون می‌گیریم}}$$

$$(A-I) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{18}{25} - \frac{3}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$|A| (A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس مورد نظر برابر می‌شود با:}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{9}{5} = 3 \quad \text{مجموع درایه‌های سطر اول این ماتریس برابر است با:}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B^{-1} \times} \underbrace{B^{-1}}_I BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -7 + 4 + 17 - 9 = 5$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

گزینه «۴» ۵۹

(امیدرضا فلاح)

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ از دو خط تشکیل شده است. اگر

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، شیب دو خط یکسان نبوده و متقاطع هستند. در صورتی که

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، دو خط شیب یکسان و عرض از مبدأ متفاوت دارند، پس

موازی و غیرمنطبق هستند و چنانچه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، شیب و عرض از مبدأ دو خط یکسان است و دو خط بر هم منطبق هستند.

$$m = 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 4y = 8 \\ 4(x - y) = 4(y + 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

از آنجا که $\frac{1}{1} \neq \frac{-4}{-2}$ ، دو خط متقاطع هستند. از طرفی شیب خط اول برابر

$\frac{1}{4}$ و شیب خط دوم برابر $\frac{1}{2}$ است و از آنجا که $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$ ، پس دو

خط بر هم عمود نیستند.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

گزینه «۱» ۶۰

(نیما مهندس)

ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{cases} (2-k)x + y = 0 \\ -3x + ky = 2 \end{cases}$$

معادله در صورتی بی‌شمار جواب دارد که تساوی $\frac{2-k}{-3} = \frac{1}{k} = \frac{0}{2}$

برقرار باشد، ولی به وضوح معادله $\frac{1}{k} = \frac{0}{2}$ فاقد جواب است، پس این

دستگاه به ازای هیچ مقدار حقیقی k ، بی‌شمار جواب ندارد.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

(سیدمهدی عسینی فرد)

گزینه «۳» ۵۶

با توجه به رابطه $A^2 = 4A + 2I$ داریم:

$$A^2 = 4A + 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} A = 4I + 2A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A - 2I$$

$$\xrightarrow{\times B} A^{-1}B = \frac{1}{2}AB - 2B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس حاصل برابر ۱۴ است.

تذکر: دقت کنید که A ماتریسی از مرتبه 2×2 است.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

گزینه «۲» ۵۷

(سوکندر روشنی)

$$(A^{-1})^2 = mA^{-1} + nI \xrightarrow{\times A^2} I = mA + nA^2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 18 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n & 3m+18n \\ -m-6n & 4m+13n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m-6n=0 \Rightarrow m=-6n & (*) \\ 2m+n=1 \xrightarrow{(*)} -11n=1 \Rightarrow 22n=-2 \end{cases}$$

$$11m = -66n = 6(-11n) = 6 \Rightarrow 11m - 22n = 6 - (-2) = 8$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

گزینه «۴» ۵۸

(مشابه نعلایی - فرداد ۱۴۰۲)

طرفین تساوی را از سمت چپ در وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ضرب

می‌کنیم:

$$B^{-1} = \frac{1}{5 \times 3 - 2 \times 7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

آمار و احتمال

۶۱- گزینه «۳»

(سوکنر روشنی)

فرض کنید فراوانی دسته سوم برابر A باشد، در این صورت با توجه به اندازه زاویه متناظر با آن در نمودار دایره‌ای داریم:

$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{A}{90} \Rightarrow A = 10 \Rightarrow x - 4 = 10 \Rightarrow x = 14$$

$$\text{مجموع فراوانی‌ها} = 3a + 15 + 10 + 2a = 90 \Rightarrow 5a = 65 \Rightarrow a = 13$$

اگر α زاویه متناظر با دسته اول باشد، آنگاه:

$$\alpha = \frac{3a}{90} \times 360^\circ = \frac{39}{90} \times 360^\circ = 156^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

۶۲- گزینه «۳»

(انجین فاضله‌فان)

مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر 360° است، بنابراین:

$$\frac{7}{27}\alpha - 2^\circ + \frac{4}{9}\alpha + 7^\circ + \frac{5}{3}\alpha - 12^\circ + \alpha + 3^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{27} + \frac{4}{9} + \frac{5}{3} + 1\right)\alpha - 4^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{91}{27}\alpha = 364^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

بنابراین زوایا مطابق جدول زیر خواهد بود:

کارشناسی‌ارشد	کارشناسی	کاردانی	دیپلم	مدرک
۱۱۱	۱۶۸	۵۵	۲۶	زاویه (درجه)

پس تعداد افراد دارای مدرک کارشناسی بیشتر از سایر گروه‌ها بوده و مد داده‌ها مربوط به این مدرک است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸ و ۸۳)

۶۳- گزینه «۲»

(مهردار ملونری)

ابتدا میانگین محیط مربع‌ها را برابر ۲۳ واحد قرار می‌دهیم:

$$\frac{4(a-3) + 4 \times 2 + 8a + 4 \times 12}{4} = 23$$

$$\Rightarrow (a-3) + 2 + 2a + 12 = 23 \Rightarrow a = 4$$

میانگین مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{(4-3)^2 + 2^2 + 8^2 + 12^2}{4} = \frac{1 + 4 + 64 + 144}{4} = \frac{213}{4}$$

با توجه به $\frac{212}{4} = 53$ نتیجه می‌گیریم که میانگین مساحت مربع‌ها از ۵۳

واحد مربع، به اندازه $\frac{1}{4}$ ، بیشتر است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۶۴- گزینه «۱»

(مهردار ملونری)

چون مد داده‌ها برابر ۳ است، پس $a = b = 3$ ؛ تعداد داده‌ها ۱۰ تا است. در این صورت میانه و چارک‌ها به صورت زیر هستند:

$$1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$Q_1 = 3 \quad \quad \quad Q_3 = 6$$

$$\frac{4+4}{2} = 4$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 6 - 3 = 3$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۲، ۸۳ و ۹۲)

۶۵- گزینه «۱»

(نیلوفر مهرودی)

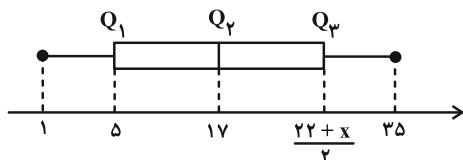
داده‌ها عبارتند از:

$$1, 2, 3, 7, 7, 11, 17, 17, 19, 22, x, 32, 35$$

$$\downarrow$$

$$Q_1 = \frac{2+7}{2} = 5 \quad Q_2 \quad Q_3 = \frac{22+x}{2}$$

نمودار جعبه‌ای داده‌ها به صورت زیر است:



نسبت طول دو بخشی از جعبه که توسط میانه از هم جدا شده‌اند را به دو صورت می‌توان نوشت:

$$(I) \quad \frac{\left(\frac{22+x}{2}\right) - 17}{17 - 5} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{22+x}{2}\right) - 17 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{22+x}{2} = 26 \Rightarrow x = 30$$

$$(II) \quad \frac{17 - 5}{\left(\frac{22+x}{2}\right) - 17} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{22+x}{2}\right) - 17 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{22+x}{2} = 33 \Rightarrow x = 44$$

با اضافه شدن ۲ داده برابر میانگین، میانگین و مجموع مربعات انحراف از میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. پس:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n'} = \frac{5/4 \times n}{n+2} = 5$$

$$\Rightarrow 5/4n = 5n+10 \Rightarrow 0/4n = 10 \Rightarrow n = \frac{100}{4} = 25$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه ۸۸)

(سوکنر روشنی)

گزینه «۲» - ۶۹

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{15} \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{15}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 270$$

$$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= 270 - [3 \times (13 - 15)^2 + 2 \times (18 - 15)^2] = 240$$

$$\Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{240}{10} = 24$$

دقت کنید که میانگین ۵ داده ۱۳، ۱۳، ۱۳، ۱۸ و ۱۸ برابر ۱۵ است و با حذف این داده‌ها، میانگین کل داده‌ها تغییری نمی‌کند.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰، ۸۱ و ۸۸)

(علی ایمانی)

گزینه «۴» - ۷۰

با توجه به فرض، داده‌ها را به صورت جدول زیر مرتب می‌کنیم:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$x_i - \bar{x}$	-۳	-۳	-۱	۰	۲	۵

با توجه به جدول درمی‌یابیم که x_2 و x_1 همان مُد داده‌ها یعنی برابر ۷ هستند. داریم:

$$x_1 - \bar{x} = -3 \Rightarrow 7 - \bar{x} = -3 \Rightarrow \bar{x} = 10$$

واریانس داده‌ها برابر است با میانگین مجذور «انحراف از میانگین» داده‌ها، یعنی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{9+9+1+0+4+25}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{8}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{10} = 0/2\sqrt{2}$$

(ضریب تغییرات)

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۱، ۸۳ و ۸۷ تا ۹۱)

$x = 44$ غیرقابل قبول است زیرا داده‌ها مرتب شده‌اند و مقدار x باید عددی بین ۲۲ تا ۳۲ باشد. بنابراین مقدار x برابر ۳۰ و مجموع ارقام آن برابر ۳ است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

گزینه «۲» - ۶۶ (اغشین فاضله‌فان)

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین همان واریانس آن‌ها است:

$$\sigma^2 = 6/76 \Rightarrow \sigma = \sqrt{6/76} = 2/6$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0/13 = \frac{2/6}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2/6}{0/13} = 20$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

گزینه «۴» - ۶۷ (سیرمحمدرضا مسینی‌فرد)

مجموع فراوانی‌ها برابر ۳۲ است. پس:

$$1+x+6+7+y=32 \Rightarrow x+y=18$$

از طرفی مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر صفر است. پس:

مقدار داده	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۲
فراوانی	۷	x	۶	۱	y
$x_i - \bar{x}$	-۳	-۲	-۱	۰	۷

$$\Rightarrow -21-2x-6+0+7y=0 \Rightarrow -2x-27+7y=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=18 \\ -2x+7y=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=7 \end{cases}$$

حال می‌توانیم واریانس داده‌ها را حساب کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{7 \times (-3)^2 + 11 \times (-2)^2 + 6 \times (-1)^2 + 1 \times (0)^2 + 7 \times (7)^2}{32}$$

$$= \frac{456}{32} = 14/25$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰، ۸۱ و ۸۸)

گزینه «۳» - ۶۸ (امدردضا فلاح)

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 5/4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 5/4 \times n$$

مجموع مربعات انحراف از میانگین

ریاضیات گسسته

گزینه «۴» - ۷۱

(کیوان دارابی)

برای گزینه‌های «۱» تا «۳» مثال‌های نقض زیر وجود دارند.

$$(۱) \quad A = \{1, 2\} \quad B = \{1\} \quad C = \{2\}$$

$$(۲) \quad A = \{1\} \quad B = \{1, 2\} \quad C = \{1, 3\}$$

$$(۳) \quad A = \{1, 2\} \quad B = \{2\} \quad C = \{2, 3\}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

گزینه «۲» - ۷۲

(مشابه نهایی - شهریور ۱۴۰۲)

روند اثبات به روش بازگشتی به صورت زیر است:

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4xy + 4y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2y)^2 \geq 0 \quad (\text{همواره برقرار})$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

گزینه «۴» - ۷۳

(مشابه نهایی - مرداد ۱۴۰۳)

از این که مجموع دو عدد صحیح a و b ، عددی زوج است، نتیجه می‌شود

که هر دو عدد فرد یا هر دو عدد زوج هستند.

$$\begin{cases} a^2 = \lambda k + 1 \\ b^2 = \lambda k' + 1 \end{cases} \quad \text{الف) اگر هر دو عدد } a \text{ و } b \text{ فرد باشند، در این صورت:}$$

و در نتیجه:

$$a^2 + b^2 - 5 = \lambda(k + k') - 3 = \lambda(k + k' - 1) + 5 = \lambda q + 5$$

ب) اگر هر دو عدد a و b زوج باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} a^2 = \lambda k_1 \text{ یا } \lambda k_1 + 4 \\ b^2 = \lambda k_2 \text{ یا } \lambda k_2 + 4 \end{cases}$$

$$۱) \quad a^2 + b^2 = \lambda(k_1 + k_2) = \lambda q$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (\lambda k_1 + 4) + \lambda k_2 = \lambda(k_1 + k_2) + 4 \\ = \lambda q + 4 \\ a^2 + b^2 = \lambda k_1 + (\lambda k_2 + 4) = \lambda(k_1 + k_2) + 4 \\ = \lambda q + 4 \end{cases}$$

$$۳) \quad a^2 + b^2 = (\lambda k_1 + 4) + (\lambda k_2 + 4) = \lambda(k_1 + k_2 + 1) = \lambda q$$

در حالت (ب)، باقی‌مانده تقسیم $a^2 + b^2 - 5$ بر ۸ یکی از دو عدد زیر می‌شود:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 5 = \lambda q - 5 = \lambda(q-1) + 3 \\ a^2 + b^2 = \lambda q + 4 - 5 = \lambda(q-1) + 7 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده تقسیم داده شده یکی از اعداد ۳، ۵ یا ۷ است و نمی‌تواند برابر ۱ باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

گزینه «۱» - ۷۴

(مشابه نهایی - فرداد ۱۴۰۳)

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 4k + 2 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20k + 10 \\ a = 5q + 3 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q + 12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 20(k - q) - 2 = 20(k - q - 1) + 18$$

توجه: البته بدون توجه به این راه‌حل، در بین گزینه‌ها، تنها باقی‌مانده تقسیم

عدد ۱۸ بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ می‌شود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

گزینه «۱» - ۷۵

(یوادر ترکمن)

$$231 \equiv 148 \xrightarrow{\text{تعریف } m} m \mid \underbrace{231 - 148}_{83}$$

$$\xrightarrow{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \neq 1}} m = 83 \Rightarrow m - 2 = 81$$

$$\Rightarrow (83 - 2)! = 81! = \underbrace{1 \times 2 \times \dots \times 41 \times \dots \times 81}_{82} = 82k \equiv 0 \quad 82$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۷۶- گزینه «۱»

(مشابه نهایی - دی ۱۳۹۰)

عدد ۱۵ هم مضرب ۳ است و هم مضرب ۵، پس: $\forall n \geq 5: n! \equiv 0$
در نتیجه:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200!$$

$$\equiv \underbrace{1+2+6+24+0+\dots+0}_{33} \equiv 3$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۷- گزینه «۲»

(مصطفی دیراری)

ابتدا به دنبال توانی از عدد ۵ می‌رویم که به پیمانه ۱۱ با ۱ یا (-۱) هم‌نشت است و سپس باقی‌مانده تقسیم 5^{37} را بر ۱۱ پیدا می‌کنیم:

$$5^2 \equiv 25 \equiv 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5^4 \equiv 9 \equiv -2 \xrightarrow{\times 5} 5^5 \equiv 10 \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۷}} 5^{35} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{37} \equiv 25 \equiv 3$$

حال توانی از عدد ۹ را می‌یابیم که به پیمانه ۱۱ با ۱ یا (-۱) هم‌نشت است

و سپس باقی‌مانده تقسیم 9^{37} را بر ۱۱ پیدا می‌کنیم:

$$9 \equiv -2 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 9^5 \equiv 9 \equiv -3 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۷}} 9^{35} \equiv 1 \xrightarrow{\times 9^2} 9^{37} \equiv 81 \equiv 4$$

$$5^{37} + 9^{37} \equiv 3 + 4 = 7$$

در نتیجه:

پس باقی‌مانده تقسیم برابر با ۷ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۸- گزینه «۴»

(سوکندر روشنی)

عدد داده شده مضرب ۹ است، پس طبق قاعده بخش‌پذیری بر ۹ داریم:

$$77a1a \equiv 7 + 7 + a + 1 + a \equiv 0 \Rightarrow 2a \equiv -15 \equiv -15 + 27 \equiv 12$$

$$\xrightarrow{+2} a \equiv 6 \xrightarrow{9 \leq a \leq 9} a = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6^6 \equiv 0^6 \equiv 0 \equiv -6 \\ 6^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1 \equiv -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{[6, 7]=42} 6^42 \equiv -6 \equiv 36$$

در نتیجه $6^6 \in [36]_{42}$.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۹- گزینه «۴»

(مشابه نهایی - خرداد ۱۳۹۰)

باید ببینیم که ۱۲ بهمن، چند روز بعد از اول مهر است؟

$$131 = 12 + 3 \times 30 + (30 - 1) = \text{تعداد روزها بهمن آبان، آذر، دی مهر}$$

روز شنبه را به پیمانه ۷، عدد صفر در نظر می‌گیریم:

جمعه	پنج‌شنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	(۰)

$$131 \equiv 5$$

در نتیجه ۱۲ بهمن، روز پنج‌شنبه است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۲۴)

۸۰- گزینه «۳»

(کیوان دارابی)

$$1403x \equiv 2024 \Rightarrow 1400x + 3x \equiv 2023 + 1$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 15 \xrightarrow{+3} x \equiv 5 \xrightarrow{(3, 7)=1}$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \\ 2024x \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow 2024x \equiv 1 \times 5 \equiv 5$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

فیزیک ۲

۸۱- گزینه «۱»

(امیررضا صدریکتا)

با توجه به جهت خطوط مغناطیسی، قطب A، N است و سایر قطبها به ترتیب از چپ به راست S، S، N، S است. دو قطب C و E به ترتیب قطبهای شمال و جنوب جغرافیایی و قطبهای جنوب و شمال مغناطیسی زمین را نشان می‌دهند.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۸۲- گزینه «۲»

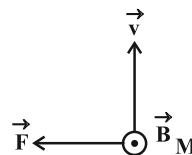
(مهمعلی راست‌پیمان)

ابتدا با استفاده از قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی هر یک از سیم‌ها را تعیین می‌کنیم و سپس با توجه به جهت و اندازه میدان‌ها در نقطه M، اندازه میدان مغناطیسی خالص را در این نقطه می‌یابیم. با توجه به جهت جریان‌ها، میدان مغناطیسی حاصل از جریان‌های I_۱ و I_۳ در نقطه M برون‌سو و میدان مغناطیسی حاصل از جریان I_۲ درون‌سو است. از طرف دیگر، چون B_۱ + B_۳ > B_۲ است، جهت میدان مغناطیسی خالص در نقطه M برون‌سو خواهد بود. بنابراین داریم:

$$B_M = B_1 + B_3 - B_2 \quad \frac{B_2 = 1 \cdot G, B_3 = 2 \cdot G}{B_1 = 3 \cdot G}$$

$$B_M = 3 + 2 - 1 = 4 \cdot G$$

اکنون با توجه به جهت $\vec{B}_M$ و اندازه آن‌ها، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار q و جهت آن را می‌یابیم. دقت کنید برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر بار، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم.



$$F = |q| v B_M \sin \theta \quad \frac{v = 2 \times 10^6 \frac{m}{s}, |q| = 4 \times 10^{-6} C}{B_M = 4 \cdot G = 4 \times 10^{-4} T, \theta = 90^\circ}$$

$$F = 4 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ = 32 \times 10^{-4} N$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹، ۹۰ و ۹۴ تا ۹۶)

۸۳- گزینه «۲»

(زهره آقاممیری)

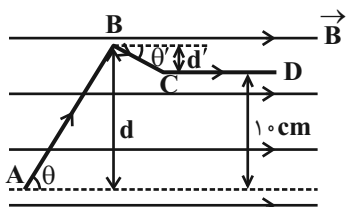
با استفاده از رابطه $F = I l B \sin \theta$ می‌توان اندازه نیروی وارد بر هر قطعه از سیم از طرف میدان مغناطیسی را محاسبه نمود.

$$F_{AB} = I B (\ell \sin \theta) \xrightarrow{\ell \sin \theta = d} F_{AB} = I d B$$

$$F_{BC} = I B (\ell' \sin \theta') \xrightarrow{\ell' \sin \theta' = d'} F_{BC} = I d' B$$

$$F_{CD} = I B (\ell'' \sin \theta'') \xrightarrow{\ell'' \sin \theta'' = 0} F_{CD} = 0$$

سپس به کمک قاعده دست راست، جهت این نیروها را تعیین می‌کنیم. جهت نیروی وارد بر سیم AB درون‌سو و جهت نیروی وارد بر سیم BC برون‌سو است. پس داریم:



$$F_{net} = F_{AB} - F_{BC} = I B (d - d') \xrightarrow{d - d' = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}}$$

$$F_{net} = 20 \times 0.1 \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-2} N$$

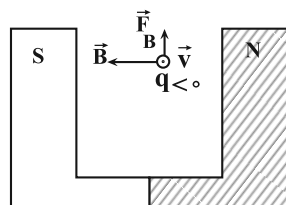
و جهت نیروی برآیند در جهت نیروی وارد بر سیم AB یعنی درون‌سو خواهد شد.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۸۴- گزینه «۱»

(علی اکبریان‌کیاسری)

در ابتدا ترازو نیروی وزن آهنربا را نشان می‌دهد. با عبور ذره باردار از میان قطب‌های آهنربا، با توجه به قطب‌های آهنربا، جهت حرکت ذره و با استفاده از قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره از طرف آهنربا به سمت بالا می‌باشد و اندازه آن برابر است با:



$$F_B = |q| v B \sin \theta \quad \frac{|q| = 2 \times 10^{-6} C, \theta = 90^\circ}{v = 5 \times 10^6 \frac{m}{s}, B = 1 \cdot G = 1 \times 10^{-4} T}$$

$$F_B = 20 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\sin 90^\circ = 1} F_B = 1 N$$

چون از طرف آهنربا بر ذره باردار، نیروی $\vec{F}_B$ رو به بالا وارد می‌شود، طبق قانون سوم نیوتون، ذره باردار نیز نیرویی هم‌اندازه با اندازه $\vec{F}_B$ و رو به پایین و در جهت نیروی وزن آهنربا بر آن وارد می‌کند. بنابراین، ترازو، مجموع اندازه‌های $\vec{F}_B$ و $\vec{W}$ را نشان می‌دهد که برابر است با:

$$F_N = F_B + W \quad \frac{W = 3 N}{F_B = 1 N}$$

$$F_N = 1 + 3 = 4 N$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۸۵- گزینه «۳»

(ممدعلی راست پیمان)

تعداد دورهای پیچۀ مسطح برابر است با:

$$N = \frac{L}{2\pi R}$$

بنابراین بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ مسطح برابر است با:

$$B_{\text{پیچۀ}} = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{\mu_0 L I}{2R^2} = \frac{\mu_0 LI}{4\pi R^2}$$

برای بزرگی میدان در مرکز سیملوله، داریم:

$$B_{\text{سیملوله}} = 1/4 B_{\text{پیچۀ}} \Rightarrow \mu_0 \frac{N'}{l} I = 1/4 \frac{\mu_0 LI}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow N' = \frac{1/4 L l}{4\pi R^2} = \frac{1/4 \times 72 \times 20 \times 10^{-2}}{4 \times 3 \times (0.1)^2} \Rightarrow N' = 168 \text{ دور}$$

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۸۶- گزینه «۲»

(فسین مشرومی)

ابتدا تعداد حلقه‌های سیملوله را می‌یابیم. داریم:

$$N = \frac{L}{2\pi R} = \frac{12}{2\pi \times 1 \times 10^{-2}} \Rightarrow N = \frac{600}{\pi}$$

حال طبق رابطه بزرگی میدان مغناطیسی در محور سیملوله، داریم:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{600}{\pi \times 0.2} \times 2 = 24 \times 10^{-4} T = 24 G$$

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

۸۷- گزینه «۳»

(مجتبی فلیل ارجمندی)

طبق رابطه اندازه میدان در مرکز پیچۀ داریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \\ I = 7A, N = \frac{1}{8}, R = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$N = \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$$

$$B = \frac{12 \times 10^{-7} \times \frac{1}{8} \times 7}{2 \times 0.2} = 7/5 \times 10^{-7} T = 75 \times 10^{-4} G$$

طبق قاعده دست راست، جهت میدان ناشی از جریان پیچۀ در مرکز آن به

صورت برون سو $\odot$ است و چون مس از مواد دیامغناطیسی است، میدان

پیچۀ در آن سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی خلاف میدان اولیه می‌شود؛

پس جهت دوقطبی‌های ایجاد شده در قطعه، درون سو است $\otimes$.

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ و ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۸۸- گزینه «۳»

(آرش یوسفی)

با توجه به قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه درون سو و هم‌راستا اما در خلاف جهت حرکت الکترون است. بنابراین، زاویه

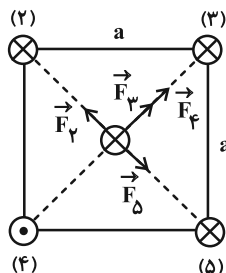
بین $\vec{B}$ و $\vec{v}$ برابر $\theta = 180^\circ$ است، لذا طبق رابطه $F = |q| v B \sin \theta$ ، نیرویی بر الکترون وارد نخواهد شد.

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۸۹، ۹۰ و ۹۷ تا ۹۹)

۸۹- گزینه «۱»

(مسام نادری)

می‌دانیم دو سیم با جریان هم‌جهت یکدیگر را جذب و دو سیم با جریان خلاف جهت همدیگر را دفع می‌کنند. با توجه به شکل سؤال سیم‌های (۳) و (۵) به سیم (۱) نیروی جاذبه با اندازه یکسان وارد می‌کنند اما چون خلاف جهت هستند همدیگر را خنثی می‌کنند. سیم (۴)، سیم (۱) را دفع می‌کند و اگر جریان سیم (۲) برون سو باشد، سیم (۱) را دفع کرده و برابند نیروهای وارد بر سیم (۱) صفر می‌شود، پس جریان (۲) درون سو است. حال برابند نیروهای وارد بر سیم (۱) را در حالت جدید مشخص می‌کنیم:



چون فاصله سیم (۲) و (۵) تا سیم (۱) برابر و جریان‌ها و طول سیم‌ها هم یکسان است، پس نیروی برابری دارند ($F_2 = F_5$) و برابند این دو نیرو صفر می‌شود. F_4 و F_3 هم به دلیل مشابه هم‌اندازه هستند و برابندشان در راستای قطر مربع، مطابق شکل بالا می‌شود.

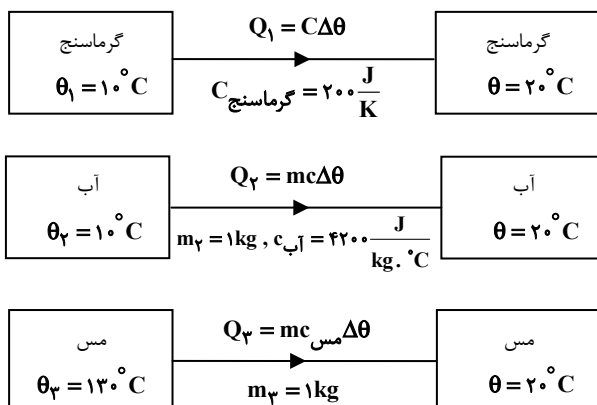
(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۹۰- گزینه «۲»

(غلامرضا ممی)

عبارت (الف) نادرست است. میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود.

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)



$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow C_{\text{گرماسنج}}(\theta - \theta_1) + m_2 c_{\text{آب}}(\theta - \theta_2) + m_3 c_{\text{مس}}(\theta - \theta_3) = 0$$

$$200 \times (20 - 10) + 1 \times 4200 \times (20 - 10) + 1 \times c_{\text{مس}}(20 - 130) = 0$$

$$\Rightarrow 2000 + 42000 = 110c_{\text{مس}} \Rightarrow 44000 = 110c_{\text{مس}}$$

$$\Rightarrow c_{\text{مس}} = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

(علیرضا گونه)

گزینه «۳» ۹۵

با توجه به تعریف بازده، توان خروجی این گرمکن برابر است با:

$$R_a = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow 70 = \frac{P_{\text{خروجی}}}{3 \times 10^3} \times 100$$

$$\Rightarrow P_{\text{خروجی}} = 2100 \text{ W}$$

از طرفی مقدار گرمای لازم برای تبدیل یخ صفر درجه سلسیوس به آب

20°C برابر است با:

$$Q = mL_F + mc\Delta\theta = m \times 336 \times 10^3 + m \times 4200 \times (20 - 0)$$

$$\Rightarrow Q = 420000m \quad (\text{J})$$

در نهایت داریم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{Q}{t} \Rightarrow 2100 = \frac{420000m}{8 \times 60 \times 60} \Rightarrow m = 144 \text{ kg}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۶)

(میثم رشتیان)

گزینه «۳» ۹۶

اگر بخواهیم تبخیر سطحی جرم یکسانی از آب در ظرف A در مدت زمان بیشتری انجام شود، آهنگ تبخیر در ظرف A باید کمتر باشد.

آهنگ تبخیر با افزایش دما و مساحت سطح آزاد مایع و همچنین با کاهش فشار محیط بیشتر می‌شود.

در گزینه «۱» چون سطح مقطع ظرف A بیشتر است، تبخیر در ظرف A سریع‌تر می‌شود؛ پس $\Delta t_A < \Delta t_B$.

فیزیک ۱

گزینه «۲» ۹۱

ابتدا اختلاف دما برحسب درجه سلسیوس را می‌یابیم:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\theta_2 = 25^\circ \text{C}}{\theta_1 = 15^\circ \text{C}} \rightarrow \Delta\theta = 35 - 15 = 20^\circ \text{C}$$

اکنون اختلاف دما را برحسب درجه فارنهایت تعیین می‌کنیم:

$$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta = \frac{9}{5} \times 20 = 36^\circ \text{F}$$

در آخر، با توجه به این که $\Delta T = \Delta\theta$ است، بنابراین اختلاف دما برحسب کلون برابر

$\Delta T = 20^\circ \text{K}$ می‌باشد. دقت کنید، از آنجایی که $T = \theta + 273$ است، لذا

$\Delta T = \Delta\theta$ می‌باشد. همچنین، چون $F = \frac{9}{5}\theta + 32$ می‌باشد، بنابراین

$$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta \quad \text{خواهد بود.}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

(غلامرضا ممینی)

گزینه «۳» ۹۲

بررسی موارد نادرست:

الف) این دماسنج به دلیل دقت کمتر آن نسبت به دماسنج‌هایی که امروزه به عنوان دماسنج معیار شناخته می‌شوند، از مجموعه دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.

ب) گستره دماسنجی این دماسنج به جنس سیم‌های آن بستگی دارد.

ث) از دماسنج بیشینه-کمینه معمولاً در هواشناسی استفاده می‌شود و از ترموکوپل معمولاً در مدارهای الکترونیکی استفاده می‌شود.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

(مهری سلطانی)

گزینه «۳» ۹۳

هرگاه اختلاف افزایش حجم مایع و ظرف به اندازه حجم فضای خالی ظرف باشد، مایع در آستانه سرریز شدن قرار می‌گیرد.

$$\Delta V_{\text{ظرف}} - \Delta V_{\text{مایع}} = 30 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_{\text{مایع}} \beta \Delta\theta$$

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = V_{\text{ظرف}} \alpha \Delta\theta$$

$$300 = (3700 \times 5 \times 10^{-4} - 4000 \times 15 \times 10^{-5}) \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 24^\circ \text{C}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

(مصطفی کیانی)

گزینه «۴» ۹۴

با توجه به طرح‌واره رسم شده و استفاده از رابطه تعادل گرمایی، گرمای ویژه مس را می‌یابیم. دقت کنید، چون در ابتدا آب و گرماسنج در تعادل گرمایی‌اند، دمای اولیه گرماسنج و آب یکسان و برابر 10°C است.

$$۱۲۰۰c_{\text{آب}} = m'c_{\text{آب}}(۶۰) + m'(\Delta ۴۰c_{\text{آب}}) = ۶۰۰m'c_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{۱۲۰۰}{۶۰۰} \Rightarrow m' = ۲ \text{ kg} = ۲۰۰۰ \text{ g}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما: صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۱)

۹۹- گزینه «۳»

(فسین الهی)

سه عبارت (الف)، (ب) و (ت) نادرست می‌باشند.

دلایل نادرستی موارد ذکر شده به صورت زیر است:

(الف) با توجه به اینکه فلزات رسانای بهتری هستند گرمای دست ما را به سرعت انتقال می‌دهند و سردتر از چوب به نظر می‌رسند.

(ب) به انرژی‌ای که بر اثر اختلاف دما بین دو جسم انتقال می‌یابد گرما گفته می‌شود.

(ت) ظرفیت گرمایی ویژه به جرم جسم بستگی ندارد.

(فیزیک ۱- دما و گرما: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۱۷)

۱۰۰- گزینه «۱»

(دانیال راستی)

$$PV = nRT$$

طبق معادله حالت برای گازهای آرمانی داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (۱)$$

با توجه به ثابت بودن nR داریم:

فشار آب در عمق ۲۰۰ m برابر است با:

$$P_1 = P_0 + \rho_{\text{آب}} g h_1 \quad \frac{h_1 = ۲۰۰ \text{ m}, \rho_{\text{آب}} = ۱۰۰۰ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{g = ۱۰ \frac{\text{N}}{\text{kg}}, P_0 = ۱۰^۵ \text{ Pa}}$$

$$P_1 = ۱۰^۵ + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۲۰۰ = ۲۱ \times ۱۰^۵ \text{ Pa}$$

و در عمق $h_2 = h_1 - ۱۴۰ = ۶۰ \text{ m}$ برابر است با:

$$P_2 = P_0 + \rho_{\text{آب}} g h_2 \quad \frac{h_2 = ۶۰ \text{ m}, \rho_{\text{آب}} = ۱۰۰۰ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{g = ۱۰ \frac{\text{N}}{\text{kg}}, P_0 = ۱۰^۵ \text{ Pa}}$$

$$P_2 = ۱۰^۵ + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۶۰ = ۷ \times ۱۰^۵ \text{ Pa}$$

با توجه به نسبت مساحت سطح‌ها، نسبت حجم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad S = 4 \pi R^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$$

در نهایت با توجه به معادله (۱) داریم:

$$\frac{۲۱ \times ۱۰^۵ \times V_1}{T_1} = \frac{۷ \times ۱۰^۵ \times ۲۷ \times V_1}{T_2 \times ۸}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{۷ \times ۲۷}{۸ \times ۲۱} = \frac{9}{8}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

در گزینه «۲» چون فشار روی آب در ظرف A کمتر است، تبخیر در ظرف A سریع‌تر می‌شود؛ پس $\Delta t_A < \Delta t_B$.

در گزینه «۳» چون دمای آب در ظرف A کمتر است، آهنگ تبخیر در A کمتر می‌شود؛ بنابراین $\Delta t_A > \Delta t_B$.

در گزینه «۴» چون سرعت وزش باد در اطراف ظرف A بیشتر است، تبخیر در A سریع‌تر انجام می‌شود؛ پس $\Delta t_A < \Delta t_B$.

(فیزیک ۱- دما و گرما: صفحه ۱۰۷)

۹۷- گزینه «۲»

(علیرضا کونه)

با رسم طرح‌واره زیر و نوشتن رابطه تعادل گرمایی داریم:

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{یخ } -۲۰^\circ\text{C}} \xleftarrow{Q_1} \boxed{\text{یخ } ۰^\circ\text{C}} \xleftarrow{Q_2} \boxed{\text{آب } ۰^\circ\text{C}} \xleftarrow{Q_3} \boxed{\text{آب } ۱۰^\circ\text{C}} \\ \text{و} \quad \boxed{\text{آب } ۳۰^\circ\text{C}} \xleftarrow{Q_4} \boxed{\text{آب } ۱۰^\circ\text{C}} \end{array}$$

می‌دانیم: $c_{\text{آب}} = ۴۰۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}$ و $c_{\text{یخ}} = ۱۶۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \Rightarrow m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta \theta_{\text{یخ}} + m_{\text{آب}} L_F$$

$$+ m_{\text{یخ}} c_{\text{آب}} \Delta \theta'_{\text{یخ}} + m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta \theta_{\text{آب}} = 0$$

$$\Rightarrow m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \times (0 - (-۲۰)) + m_{\text{یخ}} \times ۱۶۰$$

$$+ m_{\text{یخ}} \times ۴۰۰ \times (۱۰ - ۰) + ۴ \times ۲۰ \times m_{\text{آب}} \times (۱۰ - ۳۰) = 0$$

$$\Rightarrow ۲۰ m_{\text{یخ}} + ۱۶۰ m_{\text{یخ}} + ۲۰ m_{\text{یخ}} - ۱۶۰ = 0$$

$$\Rightarrow m_{\text{یخ}} = \frac{۱۶۰}{۲۰۰} = ۰.۸ \text{ kg}$$

$$m_{\text{یخ}} = ۰.۸ \times \text{تعداد} \Rightarrow ۰.۸ = \text{تعداد}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد تکه یخ} = ۸$$

(فیزیک ۱- دما و گرما: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۶)

۹۸- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

با توجه به مقادیر گرمای ویژه و گرمای نهان داریم:

$$L_V = ۵۴۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}, \quad c_{\text{یخ}} = \frac{1}{4} c_{\text{آب}}, \quad L_F = ۸۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}$$

$$Q_1 = m c_{\text{یخ}} \Delta \theta_{\text{یخ}} + m L_F + m c_{\text{آب}} \Delta \theta_{\text{آب}}$$

$$\begin{array}{l} m = ۱۰ \text{ kg}, \quad c_{\text{یخ}} = \frac{1}{4} c_{\text{آب}}, \quad \Delta \theta_{\text{یخ}} = -(-۲۰) = ۲۰^\circ\text{C} \\ L_F = ۸۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}, \quad \Delta \theta_{\text{آب}} = ۳۰ - ۰ = ۳۰^\circ\text{C} \end{array} \rightarrow$$

$$Q_1 = ۱۰ \times \left(\frac{1}{4} c_{\text{آب}}\right) \times ۲۰ + ۱۰ \times (۸۰ c_{\text{آب}})$$

$$+ ۱۰ \times c_{\text{آب}} \times (۳۰) = ۱۲۰۰ c_{\text{آب}}$$

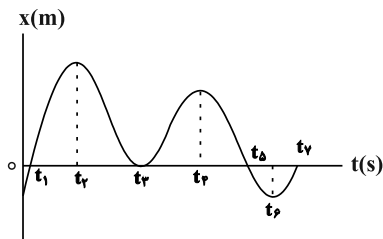
$$Q_2 = m' c_{\text{آب}} \Delta \theta' + m' L_V \quad \frac{L_V = ۵۴۰ \text{ cal/}^\circ\text{C kg}, \quad Q_2 = ۱۲۰۰ c_{\text{آب}}}{\Delta \theta' = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰^\circ\text{C}} \rightarrow$$

فیزیک ۳

۱۰۱- گزینه «۳»

(مسعود قره‌فانی)

جهت بردار مکان در لحظه t_1 از منفی به مثبت و در لحظه t_2 از مثبت به منفی تغییر می‌کند. (۲ بار)



جهت حرکت در قله‌ها و دره‌ها تغییر می‌کند؛ یعنی در لحظات t_1, t_2, t_3, t_4 و t_4 (۴ بار).

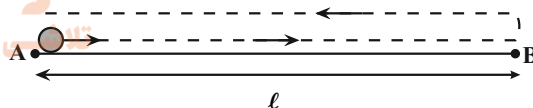
جهت بردار شتاب از زمان صفر تا بین زمان t_2 و t_3 منفی است. از زمان t_3 تا بین t_2 و t_3 مثبت می‌شود. از زمان t_3 تا t_4 بین t_2 و t_3 منفی و از زمان t_3 تا t_4 مثبت می‌باشد. (۳ بار تغییر جهت)

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۱۱۳)

۱۰۲- گزینه «۱»

(غلامرضا مصبی)

اگر مسافت طی شده از A تا B برابر با ℓ ، زمان رفت t_1 و زمان برگشت t_2 باشد، در این صورت و با توجه به رابطه تندی متوسط داریم:



$$s_{av} = \frac{\ell}{t_1 + t_2}, s_{av} = \frac{\ell}{t_1}, s_{av} = \frac{\ell}{t_2}$$

$$s_{av} = s_{av} - \Delta \Rightarrow \frac{\ell}{t_1 + t_2} = \frac{\ell}{t_1} - \Delta$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\ell}{t_1} - \frac{\ell}{t_1 + t_2} \Rightarrow \Delta = \frac{\ell(t_1 + t_2) - \ell t_1}{t_1(t_1 + t_2)}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\ell t_2}{t_1(t_1 + t_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell(t_2 - t_1)}{t_1(t_1 + t_2)} = \Delta \Rightarrow \ell(t_2 - t_1) = \Delta t_1(t_1 + t_2) \quad (1)$$

با توجه به اینکه اختلاف تندی متوسط در مسیر رفت و برگشت برابر $\frac{m}{s}$ است، می‌توان نوشت:

$$s_{av} - s_{av} = \frac{\ell}{t_1} - \frac{\ell}{t_2} = \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell t_2 - \ell t_1}{t_1 t_2} = \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{\ell(t_2 - t_1)}{t_1 t_2} = \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \ell(t_2 - t_1) = \frac{m}{s} t_1 t_2 \quad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta t_1(t_2 + t_1) = \frac{m}{s} t_1 t_2 \Rightarrow \Delta t_2 + \Delta t_1 = \frac{m}{s} t_2 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{m}{s} t_2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{m}{s}$$

$$\frac{s_{av}}{s_{av}} = \frac{\ell}{t_1} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{s_{av}}{s_{av}} = \frac{m}{s} \Rightarrow s_{av} = \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{3}{5} s_{av}$$

$$\Rightarrow s_{av} = 0.6 s_{av} \Rightarrow s_{av} = 0.6 s_{av}$$

درمی‌یابیم که تندی متوسط در مسیر برگشت ۶۰ درصد تندی متوسط در مسیر رفت است. یعنی تندی متوسط در مسیر برگشت ۴۰ درصد نسبت به مسیر رفت کاهش یافته است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۹)

۱۰۳- گزینه «۳»

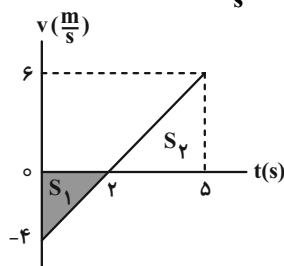
(فسرو ارغوانی‌فر)

برای پاسخ دادن به این سؤال بهتر است معادله سرعت-زمان متحرک را به‌دست آورده و نمودار آن را رسم کنیم و سپس با استفاده از مساحت سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور t که معرف جابه‌جایی متحرک است، جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک را بیابیم. به همین منظور از روی معادله حرکت، a و v_0 را می‌یابیم و در رابطه $v = at + v_0$ جایگذاری می‌کنیم تا معادله سرعت به‌دست آید:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \\ x = t^2 - 4t + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} a = 1 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 4 \xrightarrow{v=0} 0 = 2t - 4 \Rightarrow t = 2s$$

$$v = 2t - 4 \xrightarrow{t=5s} v = 2 \times 5 - 4 = 6 \frac{m}{s}$$



$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{-4 \times 2}{2} + \frac{3 \times 6}{2} = 5m$$

$$\ell = |S_1| + S_2 = \left| \frac{-4 \times 2}{2} \right| + \frac{3 \times 6}{2} = 13m$$

در آخر نسبت $\frac{v_{av}}{s_{av}}$ را می‌یابیم:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{5}{13}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۴ - گزینه «۱»

(مسین الهی)

روش اول: ابتدا با استفاده از معادله سرعت- جابه‌جایی، شتاب متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 10^2 - 6^2 = 2a(8) \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

با استفاده از معادله سرعت- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 10 = 4(t) + 6 \Rightarrow t = 1s$$

روش دوم: می‌توانیم برای این که زمان را مستقیماً محاسبه کنیم از معادله مستقل از شتاب استفاده کنیم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \frac{8}{\Delta t} = \frac{6 + 10}{2} \Rightarrow \Delta t = 1s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

(برگرفته از آزمون نهایی مرداد ماه سال ۱۴۰۳)

۱۰۵ - گزینه «۴»

(مسعود قره‌فانی)

در بازه زمانی صفر تا ۴s با استفاده از معادله مستقل از شتاب داریم:

$$v_f = 0$$

$$\Delta x = \frac{v_f + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow -16 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -8 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-8)}{4} = 2 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین:

حال به کمک معادله سرعت- جابه‌جایی، سرعت متحرک را در لحظه‌ای که برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 64 = 2 \times 2 \times (-4)$$

$$\Rightarrow v^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow |v| = \sqrt{48} \Rightarrow v = -4\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

توجه: از آنجا که شیب نمودار مکان- زمان در لحظه اولین گذر متحرک از مبدأ مکان منفی است، پس سرعت نیز منفی است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۶ - گزینه «۳»

(مسام نادری)

جهت بالا را مثبت فرض می‌کنیم و می‌دانیم:

جابه‌جایی سنگ را در ۸ ثانیه اول و همچنین ۶ ثانیه اول حرکت حساب کرده و اختلاف این دو مقدار همان جابه‌جایی سنگ در دو ثانیه آخر حرکتش می‌باشد:

$$\Delta y_{(0-8)} = -\frac{1}{2}(10)(8)^2 = -320m$$

$$\Delta y_{(0-6)} = -\frac{1}{2}(10)(6)^2 = -180m$$

$$\Rightarrow \Delta y_{(6-8)} = \Delta y_{(0-8)} - \Delta y_{(0-6)} = -320 - (-180) = -140m$$

$$\Rightarrow |\Delta y_{(6-8)}| = 140m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

(برگرفته از آزمون نهایی دی ماه سال ۱۴۰۱)

۱۰۷ - گزینه «۲»

(بهنام رستمی)

گلوله اول ۳ ثانیه بیش‌تر از گلوله دوم در حرکت است. داریم:

$$y_1 = \frac{1}{2}g(t+3)^2 = 5(t+3)^2 \Rightarrow y_1 = 5t^2 + 30t + 45$$

$$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

$$y_1 - y_2 = 165m$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 5t^2 + 30t + 45 - 5t^2 = 165 \Rightarrow t = 4s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۰۸ - گزینه «۳»

(مهمر ساکی)

زمانی که نخ را به سرعت می‌کشیم، زمان انتقال نیرو به گوی وجود ندارد و طبق قانون اول نیوتون، جسم تمایل دارد حالت اولیه خود را حفظ کند. در نتیجه نخ (۲) پاره می‌شود. زمانی که نیروی وارد بر گوی به آرامی افزایش یابد، زمان کافی برای انتقال نیرو به گوی وجود دارد و چون نیروی وارد بر نخ (۱) به اندازه وزن گوی بیشتر از نیروی وارد بر نخ (۲) است، نخ (۱) پاره می‌شود.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۰۹ - گزینه «۴»

(سعید طاهری بروینی)

چون سرعت تغییر کرده است و جسم تحت تأثیر دو نیروی ثابت است، حرکت جسم با شتاب ثابت است.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-4\vec{i} - 4\vec{j}}{2} = -2\vec{i} - 2\vec{j} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

از قانون دوم نیوتون داریم:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_2 = m\vec{a} - \vec{F}_1 = -6\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = -9\vec{i} - 2\vec{j} (N)$$

چون سوال نیروی عکس‌العمل $\vec{F}_2$ را می‌خواهد، پس:

$$\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2 = 9\vec{i} + 2\vec{j} (N)$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

۱۱۰ - گزینه «۲»

(مسین الهی)

ابتدا بردار نیروی خالص را برحسب بردارهای یک‌ه می‌نویسیم:

$$\vec{F} = -4\vec{i} - 20\vec{j} (N)$$

با توجه به قانون دوم نیوتون ($\vec{F} = m\vec{a}$) داریم:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow (-4\vec{i} - 20\vec{j}) = 0.4\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -10\vec{i} - 50\vec{j} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

(مشابه مثال ۲-۲ صفحه ۳۴ کتاب درسی)

شیمی ۲

۱۱۱- گزینه «۴»

(سید رحیم هاشمی دهکردی)

رطوبت موجود در هوای آزاد، رشد و تکثیر میکروب‌ها را افزایش می‌دهد تا جایی که ماده غذایی سرانجام فاسد شود.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۱۱۲- گزینه «۳»

(امیرمسین مسلمی)

بررسی موارد:

الف) نادرست:



ب) درست: سرعت مصرف B با سرعت تولید A برابر است.

پ) نادرست: به ازای تولید ۲ مول ماده C، ۱ مول ماده B مصرف شده است و ۱ مول ماده A تولید (نه مصرف) شده است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱۱۳- گزینه «۴»

(پیمان فوازی میر)

معادله واکنش پس از موازنه به صورت زیر است:



حال داریم:

ماده	N_2O_5	NO_2	O_2
مول اولیه	۰/۸	۰	۰
مول نهایی	۰/۸-۲x	+۴x	+x

$$0/8 - 2x + 4x + x = 1/25 \Rightarrow x = 0/15 \text{ mol}$$

پس مقدار ۰/۳ مول از N_2O_5 تجزیه شده است:

$$\text{درصد } N_2O_5 = \frac{0/3}{0/8} \times 100 = 37/5\%$$

سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط تولید O_2 برابر است زیرا ضریب یک دارد.

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{0/15 \text{ mol}}{2L \times 2/5 \text{ min}} = \frac{0/15}{5} = 0/03 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

۱۱۴- گزینه «۱»

(امیرمحمدرکنگرنانی)

واکنش سریع پتاسیم با آب سرد نسبت به سدیم ← اثر ماهیت شیمیایی یا نوع واکنش‌دهنده

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۱۱۵- گزینه «۳»

(سیدرحیم هاشمی دهکردی)

بررسی عبارت‌ها:

۱) در مقابل مصرف هر دو ذره سیاه A، یک ذره سفید B تولید می‌شود، ضریب استوکیومتری A، دو برابر ضریب استوکیومتری B و واکنش به صورت $2A \rightarrow B$ است.

۲) در مقابل کاهش هر دو ذره سیاه (A)، یک ذره سفید (B) تولید می‌شود، پس معادله واکنش به صورت $2A \rightarrow B$ بوده و به همین سبب سرعت متوسط مصرف A، دو برابر سرعت متوسط تولید B است.

$$t_1 = 0, t_2 = 8 \text{ min} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 8 - 0 = 8 \text{ min}$$

$$n_1 B = 0$$

$$n_2 B = 4 \times 0/2 = 0/8 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \Delta n_B = n_2 - n_1 = 0/8 - 0 = 0/8 \text{ mol}$$

$$\Delta[B] = \frac{\Delta n_B}{V} = \frac{0/8}{2} = 0/4 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$\bar{R}_B = \frac{\Delta[B]}{\Delta t} = \frac{0/4}{8} = 0/05 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

۴) همواره سرعت واکنش نسبت به مصرف هر یک از واکنش‌دهنده‌ها یا تولید هر یک از فراورده‌ها، مقداری برابر است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

۱۱۶- گزینه «۴»

(امین نوروزی)

معادله موازنه شده به شکل زیر است:



نمودار با توجه به این که نزولی است پس مربوط به N_2O_5 است. زیرا طبق نمودار مقدار کاهش می‌یابد.

(مبتنی بر منبع)

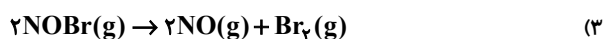
۱۱۹- گزینه «۳»

بررسی گزینه‌ها:

(۱) با توجه به این که با مصرف واکنش‌دهنده غلظت آن کاهش می‌یابد، سرعت انجام واکنش نیز به مرور کاهش می‌یابد و در ۳ ثانیه انتهایی واکنش کمتر از ۳ ثانیه سوم آن خواهد بود.

(۲) با توجه به رابطه $\bar{R} = \frac{-\Delta[\text{NOBr}]}{\Delta t} = \frac{\Delta[\text{NO}]}{\Delta t}$ واکنش، سرعت

مصرف گاز NOBr با سرعت تولید گاز NO برابر است.



$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{-\Delta[\text{NOBr}]}{\Delta t}$$

توجه داشته باشید که در انتها غلظت واکنش‌دهنده برابر با صفر خواهد بود.

$$22\text{ g NOBr} \times \frac{1\text{ mol NOBr}}{110\text{ g NOBr}} = 0.2\text{ mol NOBr}$$

$$\text{NOBr اولیه غلظت} = \frac{0.2\text{ mol}}{4\text{ L}} = 5 \times 10^{-2}\text{ M}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{-(-5 \times 10^{-2})}{2 \times 50} = 5 \times 10^{-4}\text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{-\Delta[\text{NOBr}]}{\Delta t} = \frac{\Delta[\text{Br}_2]}{\Delta t} \quad (4)$$

اگر رابطه (۴) را در ۶ ضرب کنیم، به درستی گزینه دست می‌یابیم.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

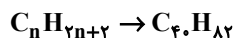
(روزیه رضوانی)

۱۲۰- گزینه «۱»

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۲) لیکوپن فعالیت رادیکال‌ها را کاهش می‌دهد.

(۳) ۱۳ پیوند دوگانه دارد.



$$82 - 56 = 26 \quad \frac{26}{2} = 13$$

نکته: به ازای هر پیوند دوگانه، ۲ هیدروژن از فرمول مولکولی آلکان کم می‌شود.

(۴) از واکنش‌های ناخواسته جلوگیری می‌کند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه ۹۱)

$$3\text{ mol.min}^{-1} = \frac{\bar{R}_{\text{N}_2\text{O}_5}}{2} \Rightarrow \bar{R}_{\text{N}_2\text{O}_5} = 2 \times 3\text{ mol.min}^{-1}$$

$$\Delta n_{\text{N}_2\text{O}_5} = \bar{R}_{\text{N}_2\text{O}_5} \times \Delta t = 2 \times 3\text{ mol.min}^{-1} \times 15\text{ s}$$

$$\times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 1.5\text{ mol}$$

در نمودار شمار اولیه N_2O_5 برابر ۳ مول است و تغییرات مول برابر ۱/۵

مول است. پس مقدار m برابر ۱/۵ مول خواهد بود.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۱۱۷- گزینه «۱»

(ایمان حسین‌نژاد)

$$t_1 = 20 \Rightarrow t_2 = 30$$

$$\bar{R}_{\text{NOBr}} = \frac{-\Delta[\text{NOBr}]}{\Delta t}$$

$$= \frac{-(0.02 - 0.024)}{10} = \frac{+0.004}{10} = 0.0004 = 4 \times 10^{-4}\text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{NO}} = \bar{R}_{\text{NOBr}}$$

$$\bar{R}_{\text{NO}} = 4 \times 10^{-4}\text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

(مسعود طبرسا)

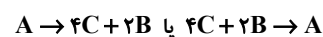
۱۱۸- گزینه «۲»

$$\frac{|\Delta n|}{\Delta t} = \bar{R}$$

$$4\bar{R}_A = 2\bar{R}_B = \bar{R}_C \xrightarrow{+4} \frac{\bar{R}_A}{1} = \frac{\bar{R}_B}{2} = \frac{\bar{R}_C}{4}$$

علامت منفی کنار عبارت A نشان می‌دهد که A با B و C در دو طرف

متفاوت معادله واکنش قرار دارند. پس معادله به شکل زیر است:



(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸، ۹۲ و ۹۳)

شیمی ۱

گزینه ۲ - ۱۲۱

(علیرضا رضایی سراب)

برای تبدیل CO_2 به مواد معدنی آن را با منیزیم اکسید و کلسیم اکسید واکنش می‌دهند، که هر دو اکسیدهای فلزی و بازی هستند.

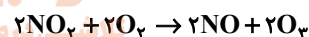
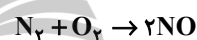
در مورد «۴» دقت کنید که اتانول و روغن‌های گیاهی سوخت سبز هستند و پلیمرهایی که بر پایه نشاسته ساخته می‌شوند نیز پلاستیک سبز هستند که هردو زیست تخریب‌پذیر بوده و در طبیعت به مواد ساده‌تر تبدیل می‌شوند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

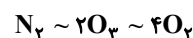
گزینه ۳ - ۱۲۲

(امیرمسیر طیبی)

ابتدا هر سه واکنش را موازنه می‌کنیم، به‌طوری که ضریب ماده مشترک بین هر دو واکنش برابر شود:



درمی‌یابیم که به ازای هر مول N_2 مصرفی، ۲ مول O_2 تولید می‌شود و در مجموع ۳ واکنش، ۴ مول O_2 به مصرف می‌رسد؛ یا به عبارتی:



$$? \text{ g O}_2 = 18 / 0.6 \times 10^{24} \text{ atom N} \times \frac{1 \text{ mol N}}{6 / 0.2 \times 10^{23} \text{ atom N}}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol N}_2}{2 \text{ mol N}} \times \frac{2 \text{ mol O}_2}{1 \text{ mol N}_2} \times \frac{48 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 1440 \text{ g O}_2$$

$$? \text{ L O}_2 = 18 / 0.6 \times 10^{24} \text{ atom N} \times \frac{1 \text{ mol N}}{6 / 0.2 \times 10^{23} \text{ atom N}}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol N}_2}{2 \text{ mol N}} \times \frac{4 \text{ mol O}_2}{1 \text{ mol N}_2} \times \frac{22 / 4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 1344 \text{ L O}_2$$

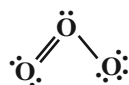
(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۸۱)

گزینه ۱ - ۱۲۳

(مبین غنچه‌الی)

آلوتروپ کمیاب اکسیژن همان اوزون است و تنها مورد «گزینه اول» در مورد آن نادرست است. نقطه جوش اوزون از نقطه جوش O_2 (آلوتروپ دیگر اکسیژن) بیشتر است.

با توجه به ساختار لوویس اوزون، در آن ۶ الکترون پیوندی و ۱۲ الکترون ناپیوندی وجود دارد.



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

گزینه ۴ - ۱۲۴

(مبین محبوب)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) طبق متن کتاب درسی، گازها برخلاف مایعات و جامدات تراکم‌پذیر می‌باشند.
(۲) برای توصیف یک نمونه گاز افزون بر مقدار و دمای آن باید فشار آن نیز مشخص باشد.

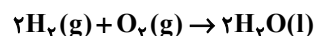
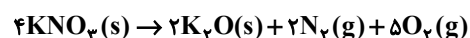
(۳) در دما و فشار یکسان حجم مقدار مول معینی از گازهای گوناگون با هم برابر است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۶ تا ۷۸)

گزینه ۱ - ۱۲۵

(مبین محبوب)

ابتدا واکنش را نوشته و موازنه می‌کنیم:



کاهش جرم مخلوط واکنش مربوط به خروج گازهای N_2 و O_2 حاصل از این واکنش می‌باشد و به ازای ۲۱۶ g (مجموع جرم‌های مولی 2N_2 و 5O_2) کاهش جرم، مقدار ۲ مول N_2 و ۵ مول O_2 تولید می‌شود، بنابراین:

$$? \text{ L O}_2 = 86 / 4 \text{ g کاهش جرم} \times \frac{5 \text{ mol O}_2}{216 \text{ g کاهش جرم}}$$

$$\times \frac{22 / 4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 44 / 8 \text{ L O}_2$$

۱۲۸- گزینه «۲»

(آخرین صبا)

بررسی گزینه‌ها نادرست:

۱ و ۳) زیست کره (B) شامل تمام جانداران روی کره زمین است. در

واکنش‌های آن‌ها درشت‌مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.

۴) در فصل ۲ کتاب دهم آموختید که در هوا کره (A) علاوه بر

مولکول‌های دو اتمی اکسیژن (O_2) و نیتروژن (N_2)، گازهای دیگری

مانند آرگون، کربن‌دی‌اکسید و ... نیز وجود دارد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

(برگرفته از کتاب آبی)

۱۲۹- گزینه «۴»

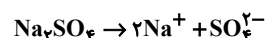
(ارژنگ فاندلی)

ابتدا مقدار سدیم سولفات حل شده در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{\text{میلی گرم حل شونده}}{\text{جرم محلول (kg)}}$$

$$\Rightarrow 710 = \frac{x \text{ mg}}{1 / \Delta \text{ kg}} \Rightarrow x = 1065 \text{ mg Na}_2\text{SO}_4$$

$$= 1065 \times 10^{-3} \text{ g Na}_2\text{SO}_4$$



$$1065 \times 10^{-3} \text{ g Na}_2\text{SO}_4 \times \frac{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4}{142 \text{ g Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{2 \text{ mol Na}^+}{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4}$$

$$= 15 \times 10^{-3} \text{ mol Na}^+ = 0.015 \text{ mol Na}^+$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه‌های ۹۴ و ۹۵)

۱۳۰- گزینه «۳»

(پیمان فواجوی میر)

$$100 \times \frac{\text{جرم محلول دوم} \times \text{درصد جرمی محلول دوم} + \text{جرم محلول اول} \times \text{درصد جرمی محلول اول}}{\text{جرم محلول دوم} + \text{جرم محلول اول}} = \text{درصد جرمی نهایی}$$

$$46 = \frac{(40 \times 100) + (50 \times x)}{100 + x} \Rightarrow x = 150 \text{ g}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

$$\frac{5 \text{ mol } O_2}{216 \text{ g جرم کاهش}} \times \frac{86}{4} \text{ g جرم کاهش} = 2 \text{ mol } O_2$$

$$? \text{ g H}_2\text{O} = 2 \text{ mol } O_2 \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}}$$

$$= 72 \text{ g H}_2\text{O}$$

(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۱۲۶- گزینه «۴»

(عمید زبئی)

بررسی موارد:

۱) درست؛ جرم مولی و نقطه جوش N_2 از H_2 بیشتر است.

۲) درست؛ یکی از چالش‌های هابر این بود که واکنش در دما و فشار اتاق

انجام نمی‌شود.

۳) درست؛ N_2 همان جو بی‌اثر است.

۴) نادرست؛ با سرد کردن مخلوط، آمونیاک را جدا می‌کنند.

(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۲۷- گزینه «۱»

(روزبه رضوانی)

آنیون
کاتیون

Ni_2S_3 $\frac{3}{2}$ نیکل (III) سولفید

$Ba_3(PO_4)_2$ $\frac{2}{3}$ ۱) باریم فسفات

$Sc_2(SO_4)_3$ $\frac{3}{2}$ ۲) اسکاندیم سولفات

$Al_2(CO_3)_3$ $\frac{3}{2}$ ۳) آلومینیم کربنات

$Ga_2(SO_4)_3$ $\frac{3}{2}$ ۴) گالیم سولفات

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

شیمی ۲

گزینه ۲» ۱۳۱-

(عس رصمتی کولنره)

چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر (با جرم مولی زیاد) هستند و دارای بخش‌های قطبی و ناقطبی می‌باشند. در این مولکول‌ها بخش ناقطبی بر بخش قطبی غالب است. بخش عمده چربی‌ها را اسیدهای چرب تشکیل می‌دهند که جزء کربوکسیلیک اسیدها هستند و فرمول کلی آن‌ها به صورت RCOOH می‌باشد.

(استرها برخلاف اسیدهای چرب نمی‌توانند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کنند؛ زیرا در استرها اتم هیدروژن متصل به یکی از اتم‌های N یا O یا F وجود ندارد.)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

(برگرفته از باهم بینریشیم)

گزینه ۴» ۱۳۲-

(مرتضی فوش کیش)

با توجه به جدول زیر با افزایش دما درصد لکه باقی مانده کمتر می‌شود. (قدرت پاک‌کنندگی بیشتر می‌شود) درصد لکه باقی مانده در لباس پلی‌استری در شرایط یکسان، بیشتر از لباس نخی است در نتیجه لکه‌های چربی چسبندگی بیشتری روی لباس پلی‌استری دارند.

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^{\circ}\text{C}$)	درصد لکه باقی مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	۲۵
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	۱۵
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	۰
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	۱۵

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۹ و ۱۰)

(برگرفته از خود را بیازماید)

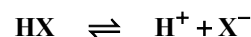
گزینه ۱» ۱۳۳-

(فرزاد رضایی)

ابتدا غلظت مولی HX را با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{10 \text{ a d}}{Mw} = \frac{10 \times 15 \times 0.8}{150} = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$$

اکنون با استفاده از جدول تغییر غلظت داریم:



$$\begin{array}{ccccccc} 0.8 & & 0 & & 0 & & x = M\alpha \\ 0.8 - x & & x & & x & & x = 0.8 \times 0.01 = 0.008 \end{array}$$

$$\frac{\text{مجموع غلظت یون‌ها}}{\text{غلظت اولیه HX}} = \frac{2x}{0.8} = \frac{2 \times 0.008}{0.8} = 0.02$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

گزینه ۱» ۱۳۴-

(میثم کوشری لنگری)

(۱) HA می‌تواند HCl و HB می‌تواند HF باشد.

(۲) درصد یونش در محلول اسید HB ، ۲۵ درصد و در محلول HC ، ۵۰ درصد است. در ضمن چون حجم یکسان است و رسانایی الکتریکی به غلظت یون‌ها بستگی دارد؛ از آنجایی که دو محلول تعداد یون برابر دارند، رسانایی الکتریکی برابری نیز خواهند داشت.

(۳) در محلول اسیدهای ضعیف با افزایش غلظت، درجه یونش کاهش می‌یابد. زیرا در دمای ثابت، K ثابت است و با توجه به عبارت روبه‌رو که برای اسیدهای ضعیف صدق می‌کند، با افزایش M باید کاهش یابد تا رابطه زیر برقرار باشد.

$$K = M_1 \alpha_1^2 = M_2 \alpha_2^2 \Rightarrow \alpha_2(M_1) \rightarrow \alpha_2(\alpha_1)$$

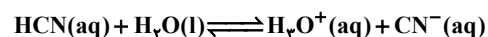
(۴) درصد یونش اسیدها:

$$\alpha_{\text{HB}} = \frac{2}{8} \times 100 = 25\% \quad \alpha_{\text{HC}} = \frac{2}{4} \times 100 = 50\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

گزینه ۲» ۱۳۵-

(جعفر پازوکی)



$$\text{pH} = 5/4 \Rightarrow [\text{H}^+] = [\text{CN}^-] = 10^{-5/4} = 4 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CN}^-]}{[\text{HCN}]} = 4/8 \times 10^{-10} = \frac{(4 \times 10^{-6})^2}{[\text{HCN}]}$$

$$\Rightarrow [\text{HCN}] = \frac{10}{3} \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HCN}] \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4 \times 10^{-6}}{\frac{10}{3} \times 10^{-2}} = 1/2 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.012$$

۱۳۸- گزینه «۴»

(علی طرغی)

تهیه مواد جدید، بهبود خواص مواد و تأمین انرژی، هر سه در حوزه دانش الکتروشیمی قرار می گیرند.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۳۷ تا ۳۹)

۱۳۹- گزینه «۱»

(محمدرضا پوریاوید)

واکنش انجام شده به صورت $2\text{Na} + \text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{NaCl}$ می باشد که در آن اتم های سدیم الکترون از دست می دهند ($\text{Na} \rightarrow \text{Na}^+ + e^-$) و اکسایش پیدا می کنند. به این ترتیب به عنوان کاهنده باعث کاهش یافتن گاز کلر ($\text{Cl}_2 + 2e^- \rightarrow 2\text{Cl}^-$) خواهند شد.

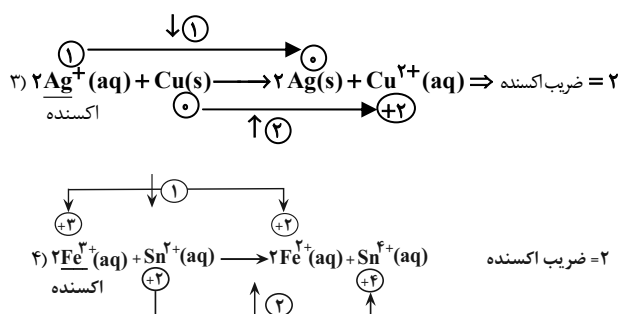
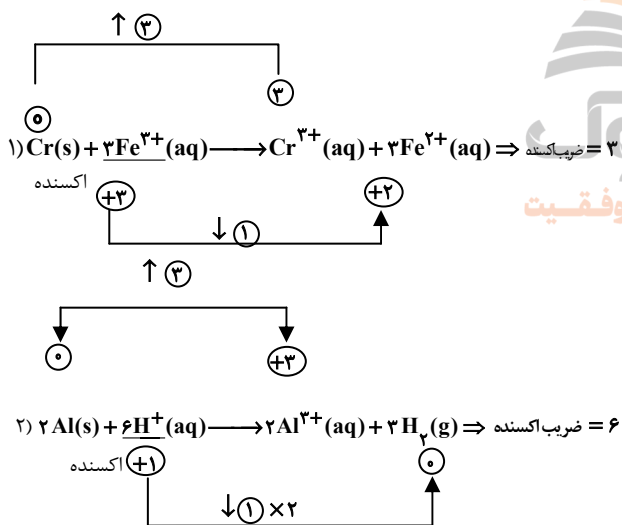
(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۳۹ تا ۴۲)

(مشابه با هم بیندیشیم صفحه ۴۰)

۱۴۰- گزینه «۲»

(امیر خاتمیان)

گونه اکسند، گونه ای است که با گرفتن الکترون کاهش می یابد.
تغییرات عدد اکسایش گونه کاهنده $\leftarrow$ ضریب اکسند
تغییرات عدد اکسایش گونه اکسند $\leftarrow$ ضریب کاهنده
معادله ها را موازنه می کنیم:



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۴۰ تا ۴۲)

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-6}} = 2.5 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{2.5 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-6}} = 6.25 \times 10^{-4}$$

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۸ تا ۲۸)

۱۳۶- گزینه «۴»

(هانی سوری)

بررسی موارد:

۱) همه بازها در آب به طور کامل یونش نمی یابند. بازهای قوی این گونه هستند.

۲ و ۳) pH محلول ها به قدرت آن ها بستگی ندارد بلکه به غلظت آن ها بستگی دارد.

۴) هر چه در شرایط یکسان pH محلول یک باز بیشتر باشد آن باز قوی تر است.

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

$$\frac{[\text{H}^+]_1}{[\text{H}^+]_2} = \frac{10^{-\text{pH}_1}}{10^{-\text{pH}_2}} = \frac{10^{-13/4}}{10^{-10/7}} = 10^{-2/7}$$

$$[\text{H}^+]_1 = 10^{-2/7} [\text{H}^+]_2 = 10^{-3} \times 2 [\text{H}^+]_2$$

نسبت غلظت هیدرونیوم های ۲ محلول عکس نسبت غلظت هیدروکسیدهای آن ها می باشد. بنابراین:

$$\frac{[\text{H}^+]_1}{[\text{H}^+]_2} = \frac{[\text{OH}^-]_2}{[\text{OH}^-]_1} \Rightarrow \frac{[\text{OH}^-]_1}{[\text{OH}^-]_2} = \frac{1000}{2} = 500$$

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۲۴ تا ۳۰)

۱۳۷- گزینه «۴»

(مسعود طبرسا)

$$\text{pH} = 2/15 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/15} = 10^{-3+0/85}$$

$$= 10^{-3} \times 10^{0/85} \xrightarrow{10^{0/85} = 1} [\text{H}^+] = 7 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{[\text{H}^+] = [\text{HBr}]} [\text{HBr}] = 7 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{HBr}] = 7 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow 7 \times 10^{-3} = \frac{n}{0.1} \Rightarrow n = 7 \times 10^{-4} \text{ mol HBr}$$

$$7 \times 10^{-4} \text{ mol HBr} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol HBr}} \times \frac{3 \text{ L CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} = 2.1 \times 10^{-2} \text{ L CO}_2$$

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۲۴ تا ۳۰، ۳۱ و ۳۶)