(۱) **توابع نمایی و لگاریتم ۱۲**

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور

مولف رحیم قهرمان

هر تابع با ضابطه‌ی $y=a^x$ با شرط $a>0$ و $a\neq 1$ یک تابع نمایی است.

اسم تابع نمایی ۱) نمودار کلی توابع به فرم $y=a^x$ با فرض $a>1$ به صورت مقابل می‌باشد.

۲) نمودار کلی توابع به صورت $y=a^x$ با فرض $0<a<1$ به صورت مقابل می‌باشد.

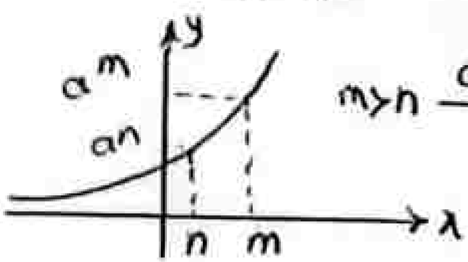
ویژگی‌های تابع نمایی $a>0$ و $a\neq 1$ ، $f(x)=a^x$

۱) نمودار این تابع، همواره از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد، یعنی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع می‌کند.

۲) f تابعی یک‌به‌یک است، زیرا هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. ۳) این تابع در $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است، زیرا یک‌به‌یک می‌باشد. ۴) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ و برد $(0,+\infty)$ است. ۴) این تابع همواره از نواحی اول و دوم دستگاه مختصات عبور می‌کند.

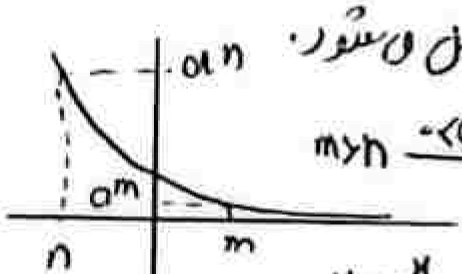
۵) دامنه‌ی تابع $y=(f(x))^x$ از حل دستگاه $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$ به دست می‌آید.

۶) در تابع $y=a^x$ از آنجا که $a>1$، تابع صعودی و $0<a<1$ تابع نزولی است، نتایج زیر نیز حاصل می‌شود.



$m>n \xrightarrow{a>1} a^m>a^n$

$y=a^x \ (a>1)$



$m>n \xrightarrow{0<a<1} a^m<a^n$

$y=a^x \ (0<a<1)$

یادآوری: ۱) اگر $a>1$ باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} 1<a<a^2<a^3<\dots<a^n \\ \sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a}>\dots>\sqrt[n]{a}>1 \end{cases}$$

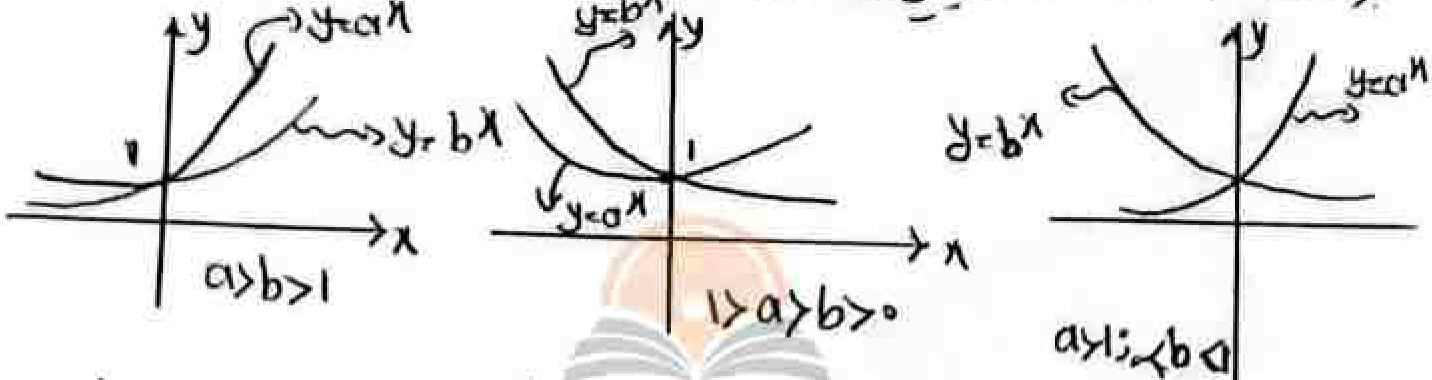
۲) اگر $0<a<1$ باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} 1>a>a^2>a^3>\dots>a^n>0 \\ 0<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\dots<\sqrt[n]{a}<1 \end{cases}$$

۷) این تابع همواره بالای خط $y=0$ است (این گزاره را قطع نمی‌کند)، پس همواره مثبت می‌باشد، یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $f(x)>0$.

۸) در یک تابع نمایی با ضابطه $f(x)=ka^x$ ، مقادیر x تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ثابت (مخالف صفر) و مقادیر $f(x)$ تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ثابت (مخالف یک) می‌دهند.

۹) مقایسه نمودارهای $y=a^x$ و $y=b^x$ $(a>b)$: هر دو نمودار از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرند، اما سرعت آن‌ها متفاوت است، هم برای xهای مثبت و منفی متفاوت است. برای xهای مثبت هر چه پایه بزرگ‌تر باشد، نمودار بالاتر است و برای xهای منفی هرچه پایه بزرگ‌تر باشد نمودار پایین‌تر است. حال با توجه به مقادیر مختلف a و b داریم:



تست: به ازای چند مقدار صحیح برای a، تابع $y=\left(\frac{a^2-4}{12}\right)^x$ یک تابع نمایی نیست؟

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۵

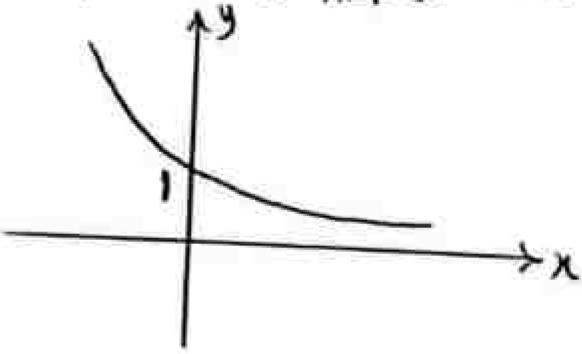
پاسخ: گزینه‌ی ۱)

برای این‌که $y=\left(\frac{a^2-4}{12}\right)^x$ ضابطه تابع نمایی نباشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\frac{a^2-4}{12}\leq 0 \Rightarrow a^2-4\leq 0 \Rightarrow -2\leq a\leq 2\\ \frac{a^2-4}{12}=1 \Rightarrow a=\pm 4\end{cases}$$

پس به ازای مقادیر صحیح $a=\pm4, \pm2, \pm1, 0$ ، تابع $y=\left(\frac{a^2-4}{12}\right)^x$ تابع نمایی نیست. بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ است.

تست: اگر ضابطه‌ی نمودار تابع زیر $f(x)=\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^x+(m^2+m-2)x$ باشد، $f(-1)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) فقط ۲ ۲) فقط $\frac{7}{5}$

۳) ۲ یا $\frac{5}{7}$ ۴) ۲ یا $\frac{7}{5}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

چون تابع نمایی است، پس:

$m^2+m-2=0 \Rightarrow (m-1)(m+2)=0 \Rightarrow m=1$ و -2

$m=1 \Rightarrow f(x)=\left(\frac{1-3}{1-5}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f(-1)=2$

$m=-2 \Rightarrow f(x)=\left(\frac{-2-3}{-2-5}\right)^x=\left(\frac{5}{7}\right)^x \Rightarrow f(-1)=\frac{7}{5}$

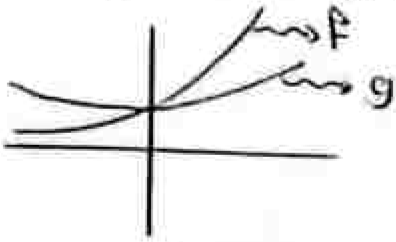
تست: در کدام حالت $y=(a^2-2a)^x$ یک تابع نمایی است؟

۱) $a>2$ ۲) $\sqrt{2}\neq|a-1|>1$ ۳) $|a-1|>1$ ۴) $|a-1|>\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} a^2-2a>0 \Rightarrow (a-1)^2>1 \Rightarrow |a-1|>1 \\ a^2-2a\neq1 \Rightarrow (a-1)^2\neq2 \Rightarrow |a-1|\neq\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}\neq|a-1|>1$$

تست: در شکل مقابل دو تابع نمایی $f(x)=2^x$ و $g(x)=\left(\frac{m-1}{2}\right)^x$ رسم شده‌اند. با توجه به شکل، حدود m کدام است؟



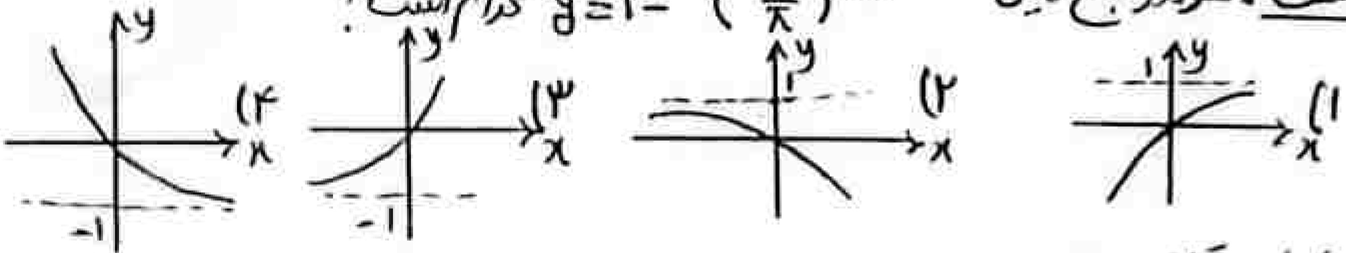
۱) $(3,5)$ ۲) $(2,4)$ ۳) $(-\infty,5)$ ۴) $(3,+\infty)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

چون نمودار g افزایشی است، پس $\frac{m-1}{2}>1$ (۱) اکنون با توجه به وضعیت نمودار دو تابع f و g نسبت به هم، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{m-1}{2}<2$ (۲) از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$1<\frac{m-1}{2}<2 \Rightarrow m\in(3,5)$

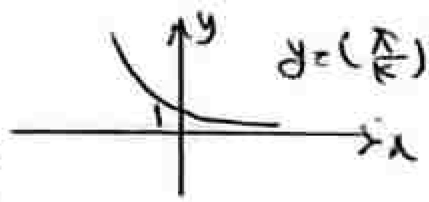
تست: نمودار تابع نمایی $y=1-\left(\frac{4}{\pi}\right)^{-x}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۱

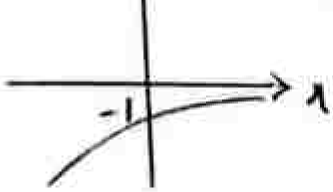
$y=1-\left(\frac{4}{\pi}\right)^{-x}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

$\pi\simeq3.14 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{4}<1$



$y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

$y=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$



$y=1-(\frac{1}{2})^x$

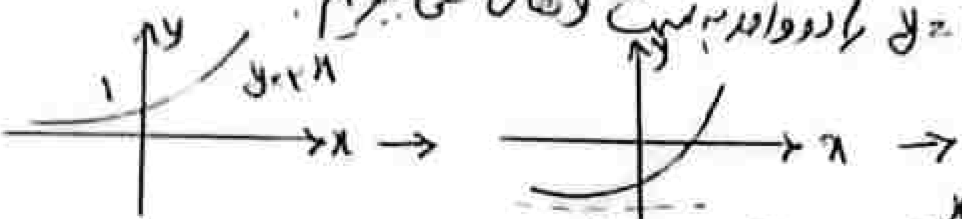
تست: نمودار تابع $f(x)=\frac{4^x-2^x-2}{2^x+1}$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم پاسخ گزینه ۲)

ابتدا ضابطه $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

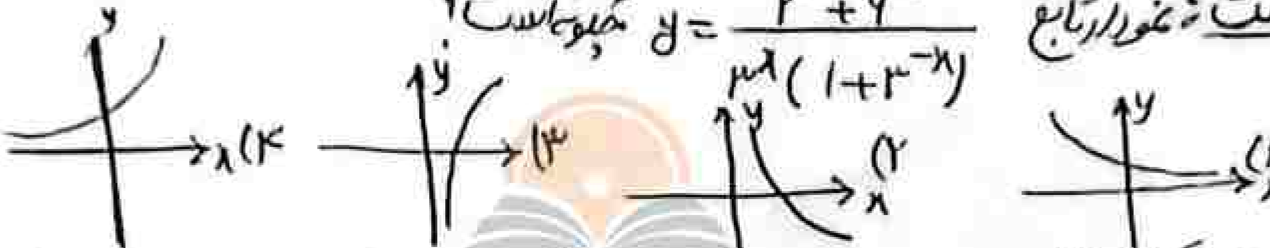
$$f(x)=\frac{(2^x)^2-2^x-2}{2^x+1}=\frac{(2^x-2)(2^x+1)}{2^x+1}=2^x-2$$

بنابراین کافی است نمودار $y=2^x$ را دو واحد به سمت y های منفی ببریم



از ناحیه دوم نمی‌گذرد

تست: نمودار تابع $y=\frac{2^x+6^x}{3^x(1+2^{-x})}$ چگونه است؟

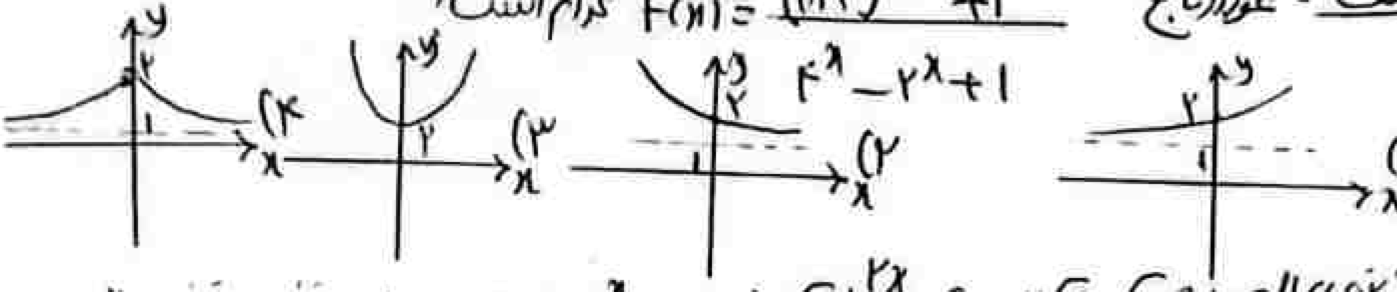


پاسخ: گزینه ۴)

$$y=\frac{2^x+6^x}{3^x(1+2^{-x})}=\frac{2^x+2^x\times3^x}{3^x+1}=\frac{2^x(1+3^x)}{1+3^x}=2^x$$

تابع $y=2^x$ نمایی و صعودی اکید است.

تست: نمودار تابع $f(x)=\frac{(2\sqrt{2})^{2x}+1}{4^x-2^x+1}$ کدام است؟



گزینه ۱) چون $2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$ پس $(2\sqrt{2})^{2x}$ برابر 8^x است. حال با تغییر متغیر $A=2^x$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

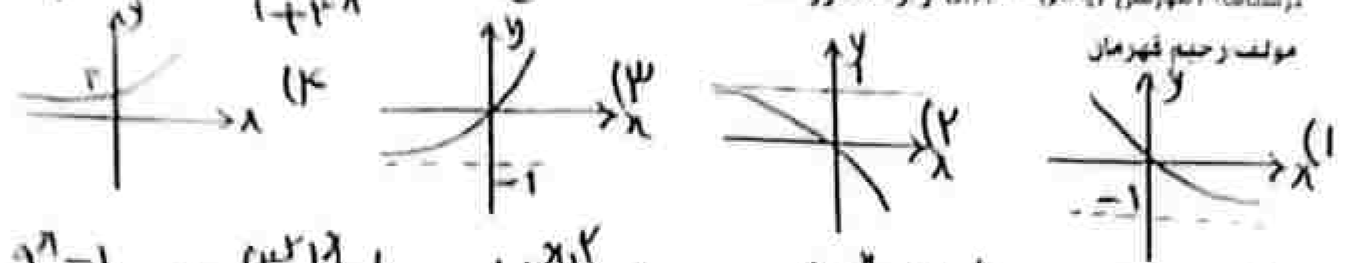
$$f(x)=\frac{(2\sqrt{2})^{2x}+1}{4^x-2^x+1}=\frac{(2^x)^3+1}{(2^x)^2-2^x+1}\xrightarrow{A=2^x}f(x)=\frac{A^3+1}{A^2-A+1}$$

$$=\frac{(A+1)(A^2-A+1)}{A^2-A+1}=A+1\Rightarrow f(x)=2^x+1\to$$

پس نمودار تابع f، نمودار تابع 2^x است که یک واحد به بالا منتقل شده است.

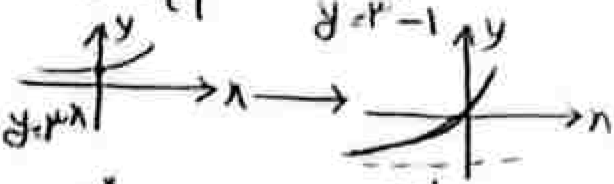
مولف رحیم قهرمان

تست: نمودار تابع $y=\frac{9^x-1}{1+3^x}$ کدام است؟

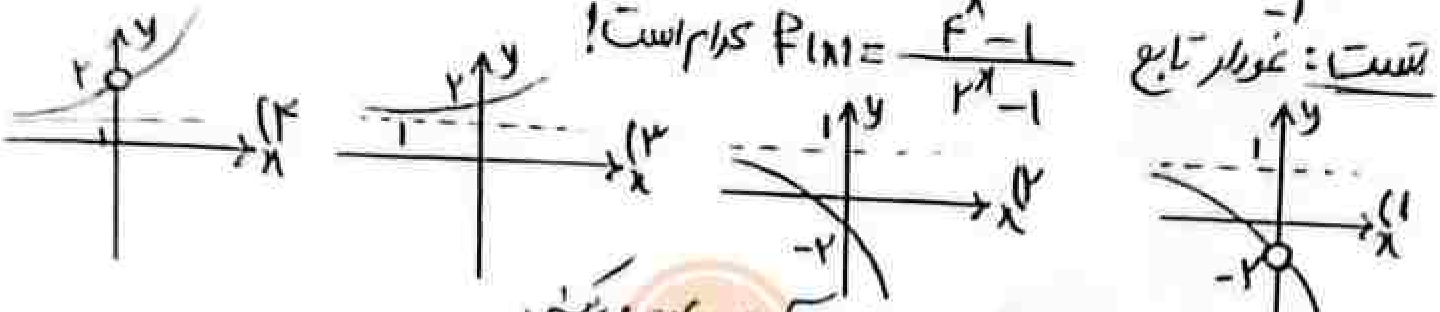


پاسخ: گزینه‌ی ۲) $y=\frac{9^x-1}{1+3^x}=\frac{(3^2)^x-1}{1+3^x}=\frac{(3^x)^2-1}{3^x+1}=\frac{(3^x-1)(3^x+1)}{3^x+1}$

$\xrightarrow[3^x+1>0]{x\in\mathbb{R}} 3^x-1 \Rightarrow y=3^x-1$; $D_y=\mathbb{R}$



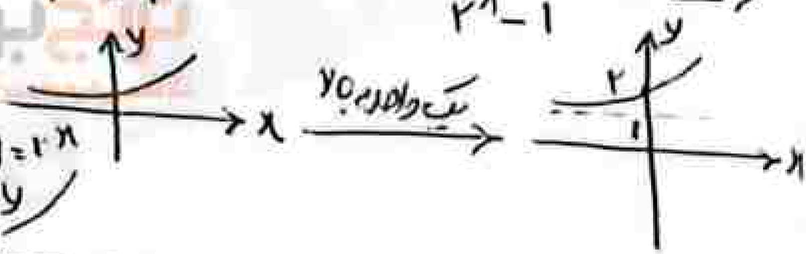
تست: نمودار تابع $f(x)=\frac{4^x-1}{2^x-1}$ کدام است!



پاسخ: گزینه‌ی ۴) تابع f را با توجه به دامنه‌ی آن ساده می‌کنیم:

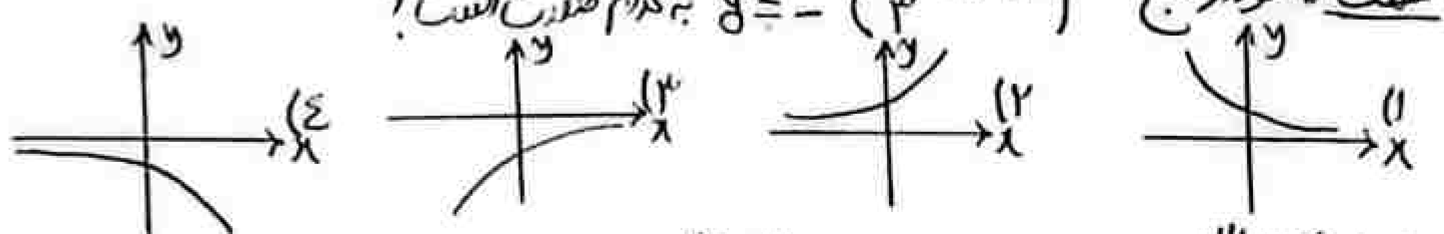
$f(x)=\frac{4^x-1}{2^x-1}=\frac{(2^2)^x-1}{2^x-1}=\frac{(2^x)^2-1}{2^x-1}=\frac{(2^x-1)(2^x+1)}{2^x-1}\xRightarrow{x\neq 0}$

$f(x)=2^x+1$; $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$



چون در دامنه f، $x=0$ نقطه‌ی طول صفر باید توخالی باشد.

تست: نمودار تابع $y=-(3^{-3x+2})$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای رسم نمودار تابع $y=-(3^{-3x+2})$ ابتدا نمودار تابع $f(x)=3^{-3x+2}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نکاتی که برای رسم نمودار تابع $y=a^{mx+n}$ بیان کردیم، چون $a^m=3^{-3}=\frac{1}{27}<1$ است، در نتیجه نمودار تابع f نزولی می‌باشد. سپس کل نمودار f را نسبت

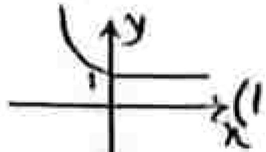
نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)=-(2^{-2x+2})$ به دست آید داریم.

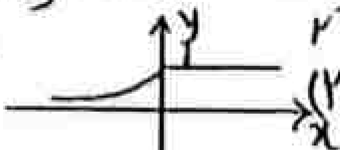
$f(x)=2^{-2x+2} \xrightarrow{a^m<1}$  $\xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نسبت به محور xها}}$

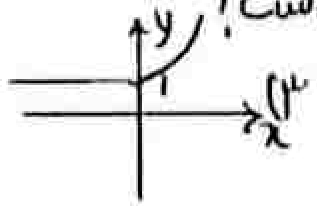
$y=-f(x)=-(2^{-2x+2})$

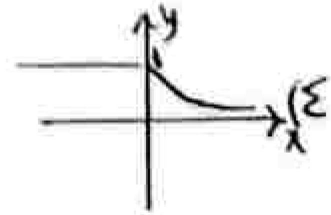
$\rightarrow y=-(2^{-2x+2})$

<u>تست</u>: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(0.5)^{|x|}}{2^{-x}}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

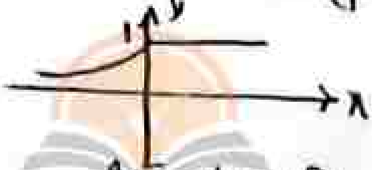
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

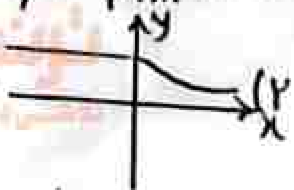
$$f(x)=\frac{(0.5)^{|x|}}{2^{-x}}=\frac{(\frac{1}{2})^{|x|}}{(\frac{1}{2})^{x}}=(\frac{1}{2})^{|x|-x}=\begin{cases}1 & ; x\geq 0\\ (\frac{1}{2})^{-2x} & ; x<0\end{cases}$$

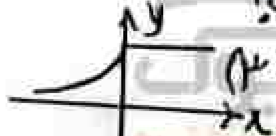
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & ; x\geq 0\\ 4^{x} & ; x<0\end{cases}$$

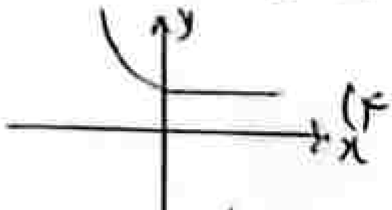


<u>تست</u>: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(\frac{1}{8})^{|x|}}{2^{-3x}}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

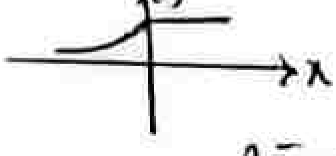
۳) 

۴) 

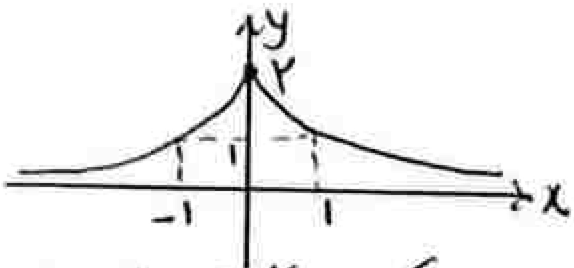
پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\frac{1}{8})^{x}}{(\frac{1}{8})^{x}} & ; x\geq 0\\ \dfrac{(\frac{1}{8})^{-x}}{(\frac{1}{8})^{x}} & ; x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & ; x\geq 0\\ (\frac{1}{8})^{-2x} & ; x<0\end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; x\geq 0\\ 64^{x} & ; x<0\end{cases}$$



<u>تست</u>: نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=2^{-|x|}+1$ ۲) $y=2^{-|x|+1}$

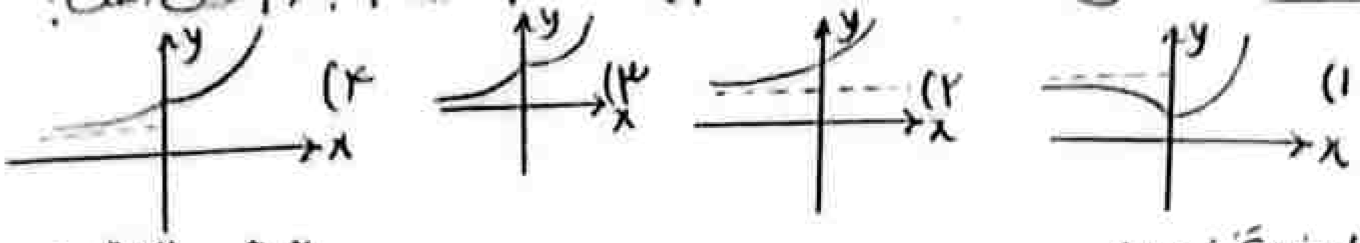
۳) $y=2^{-|x+1|}$ ۴) $y=2^{-|x-1|}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) به ازای $x=0$ طبق نمودار، مقدار y برابر ۲ است که این با گزینه‌های (۳) و (۴) مطابقت ندارد، پس گزینه‌ی (۱) یا (۲) جواب است. از طرفی تابع از نقاط (1,1)

... $(1,-1)$ می‌گذرد که تنها در گزینه‌ی (۲) صدق می‌کند ...

گزینه (۲) ضابطه نمودار داده شده است.

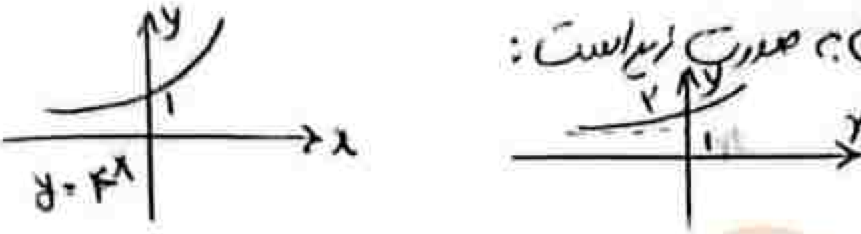
تست: نمودار تابع $f(x) = 2^{x+|x|} + 2^{x-|x|}$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+x}+2^{x-x} \ ; \ x\geq 0 \\ 2^{x-x}+2^{x+x} \ ; \ x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 4^x+1 \ ; \ x\geq 0 \\ 1+4^x \ ; \ x<0 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=4^x+1$ و نمودار آن به صورت زیر است:

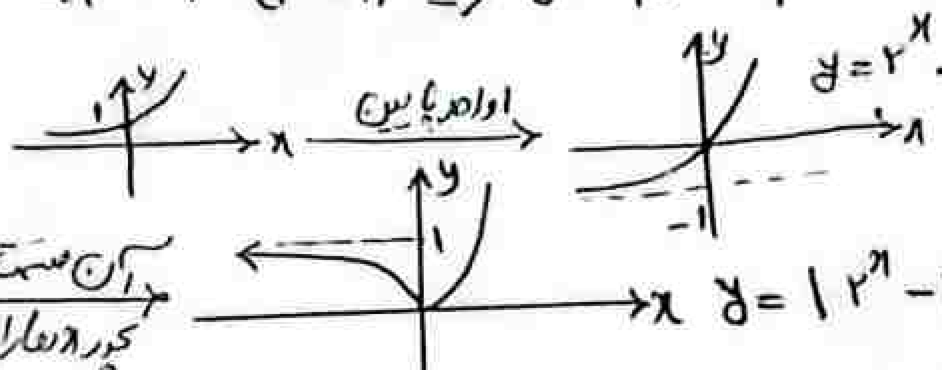


$y=4^x$ $\quad$ $y=4^x+1$

تست: نمودار تابع $y=\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$y=\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}=\sqrt{(2^x-1)^2} \Rightarrow y=|2^x-1|$$

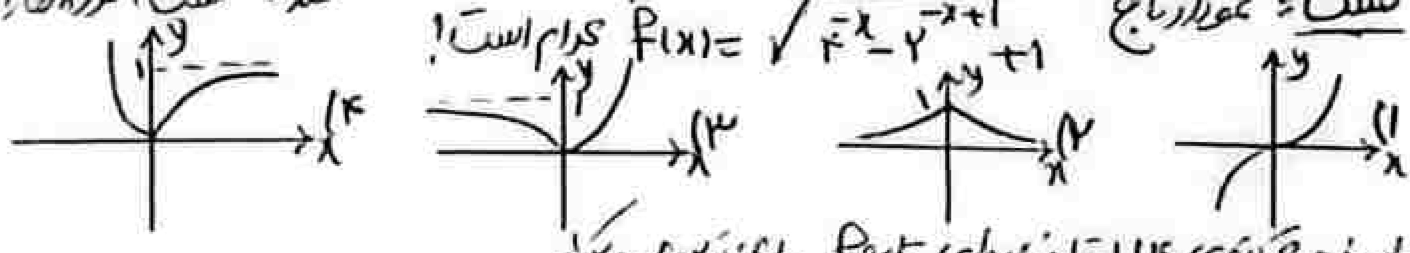


$y=2^x \xrightarrow{2>1}$ $\xrightarrow{\text{واحد پایین}}$ $y=2^x-1$

آن قسمت از نمودار که در پایین محور xها را حذف و قرینه‌ی حذف شده نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم.

$y=|2^x-1|$

تست: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{4^{-x}-2^{-x+1}+1}$ کدام است؟

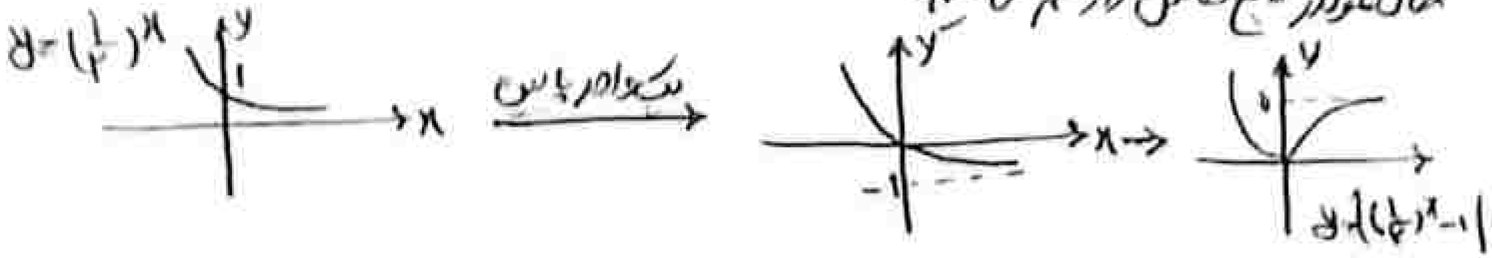


پاسخ: گزینه‌ی (۴) ابتدا ضابطه‌ی تابع f را بازنویسی می‌کنیم.

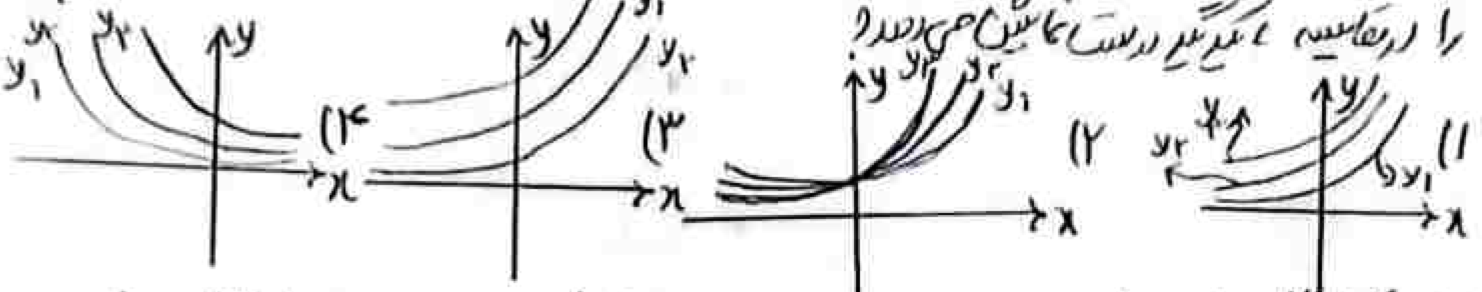
$$f(x)=\sqrt{4^{-x}-2^{-x+1}+1}=\sqrt{(2^{-x})^2-2^{-x}\times 2+1}=\sqrt{(2^{-x}-1)^2} \xrightarrow{\sqrt{x^2}=|x|}$$

$f(x)=|2^{-x}-1|=|(\frac{1}{2})^x-1|$ (8)

حال نمودار تابع حاصل را رسم می‌کنیم:



تست: کدام یک از گزینه‌های زیر، نمودار سه تابع $y_1=4^x$، $y_3=\frac{1}{2}\times 4^x$، $y_2=2\times 4^x$ را در مقایسه با یکدیگر درست نمایش می‌دهد؟



پاسخ: گزینه‌ی (۲) عرض از مبدأ نمودار سه تابع y_1، y_2 و y_3 به ترتیب برابر است با ۱، ۲ و ۱/۲.
در ضمن نمودار این سه تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در هر سه تابع با افزایش مقدار x، مقدار تابع نیز افزایش می‌یابد. این شرط فقط در گزینه‌ی (۲) برقرار است.

تست: شکل روبه‌رو، نمودار دو تابع $y_1=a^x$ و $y_2=b^x$ را در مقایسه با یکدیگر نمایش می‌دهد. چند تا از موارد زیر در مورد a و b، نادرست است؟

الف) $a+b>2$ ب) $b^3+3ab(a+b)>8-a^3$
ج) $b^2+a^2>2ab$ د) $|a-b|=a-b$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

در هر دو نمودار، با افزایش مقدار x، مقدار تابع نیز افزایش می‌یابد، بنابراین باید $a>1$ و $b>1$ در نتیجه $a+b>2$. حال داریم:

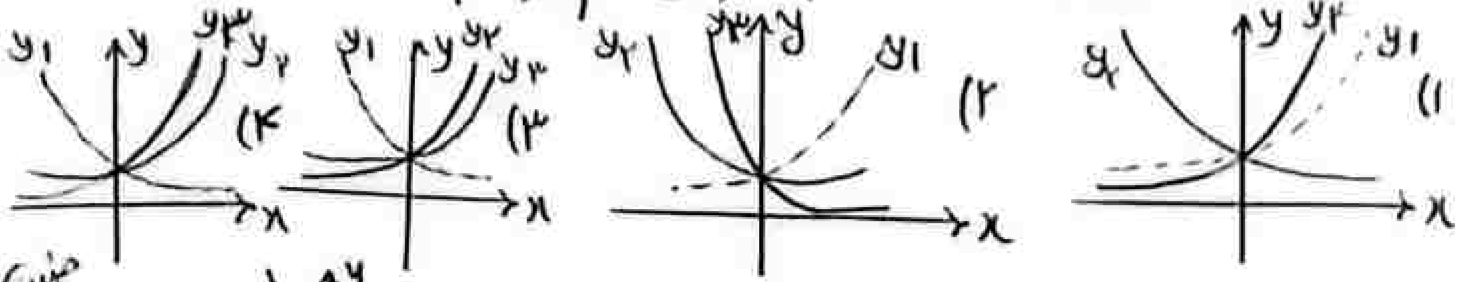
$$a+b>2 \xrightarrow{\text{توان ۳}} (a+b)^3>8 \rightarrow b^3+3ab(a+b)>8-a^3$$

همچنین به ازای xهای مثبت نمودار تابع $y=b^x$ بالای نمودار تابع $y=a^x$ است، یعنی $b>a$ و داریم:

$$b>a \rightarrow b-a>0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (b-a)^2>0 \Rightarrow b^2+a^2>2ab$$

$$b>a \Rightarrow a-b<0 \Rightarrow |a-b|=-(a-b)$$

تست: اگر $0<a<1<b<c$ باشد، در کدام گزینه نمودارهای $y_1=a^x$ ، $y_2=b^x$ و $y_3=c^x$ درست رسم شده اند؟



پاسخ: گزینه ی ۴) چون $0<a<1$ است، نمودار y_1 به صورت

می باشد. (نزولی)

چون b و c بزرگتر از یک هستند، بنابراین نمودار آن ها به صورت

می باشد.

از آن جا که $b<c$ است، نمودار y_3 در قسمت مثبت محور xها بالاتر از نمودار y_2 قرار می گیرد و در قسمت منفی محور xها نمودار y_2 بالای y_3 قرار می گیرد.

تست: نمودار تابع $y=3(0/5)^x-2^{1-x}-1$ از کدام نواحی مختصات می گذرد؟

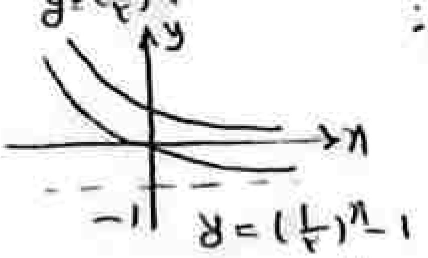
۱) دوم و چهارم ۲) اول و سوم ۳) اول و دوم ۴) سوم و چهارم

پاسخ: گزینه ی ۱)

$y=3(0/5)^x-2^{1-x}-1 \Rightarrow y=3(\frac{1}{2})^x-2\times2^{-x}-1 \rightarrow$

$y=3(\frac{1}{2})^x-2(\frac{1}{2})^x-1 \Rightarrow y=(\frac{1}{2})^x-1$

کافی است نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم:



$\rightarrow$ از نواحی دوم و چهارم می گذرد.

تست: اگر منحنی $y=2\times3^{x+1}-18$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدا مختصات است)

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ی ۱)

ابتدا محل برخورد با محورهای مختصات را مشخص می کنیم:

برخورد با محور yها: $x=0 \Rightarrow y=2\times3^{1}-18=-12 \Rightarrow A(0,-12)$

برخورد با محور xها: $y=0 \Rightarrow 2\times3^{x+1}-18=0 \Rightarrow 3^{x+1}=9 \Rightarrow x=1 \rightarrow B(1,0)$

$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \left|\frac{OA \times OB}{2}\right| = \left|\frac{(-3)\times(4)}{2}\right| = 6$

تست: نمودار تابع $y=(2\sqrt{2})^{x+2} - 4(\sqrt{2})^{3x} - \frac{1}{2}$ محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳- پاسخ: گزینه ۲

برای پیدا کردن محل تقاطع یک تابع با محور طول‌ها، باید ببینیم به ازای چه x ای، مقدار تابع صفر می‌شود.

$y=(2\sqrt{2})^{x+2} - 4(\sqrt{2})^{3x} - \frac{1}{2} \xrightarrow{y=0} \left((2\sqrt{2})^{x} \times (2\sqrt{2})^{2}\right) - 4\left((\sqrt{2})^{3}\right)^{x} - \frac{1}{2} = 0$

$\to \left((2\sqrt{2})^{x} \times 8\right) - \left(4 \times (2\sqrt{2})^{x}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2\sqrt{2})^{x}} (2\sqrt{2})^{x} \times (8-4) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (2\sqrt{2})^{x} \times 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow (2\sqrt{2})^{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{x} = 2^{-3} \Rightarrow$

$2^{\frac{3}{2}x} = 2^{-3} \Rightarrow \frac{3x}{2} = -3 \to x = -2$

تست: در تابع نمایی $f(x)=ab^{x}$ با کم کردن ۳ واحد از متغیر مستقل، مقدار تابع چه قدر تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{1}{b^3}$ واحد کم می‌شود. ۲) $\frac{1}{b^3}$ برابر می‌شود. ۳) b^3 واحد کم می‌شود. ۴) b^3 برابر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

$f(x)=ab^{x} \xrightarrow[\text{مستقل } x]{\text{کم کردن ۳ واحد از متغیر}} f(x-3) = ab^{x-3} = ab^{x} \times b^{-3}$

$\Rightarrow \frac{f(x-3)}{f(x)} = \frac{ab^{x} \times b^{-3}}{ab^{x}} = b^{-3} = \frac{1}{b^3} \Rightarrow$ $\frac{1}{b^3}$ برابر می‌شود.

تست: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}3^{kx} ; & x\geq 0\\ 9^{-kx} ; & x<0\end{cases}$ اگر $f(-2)=5$، آنگاه مقدار $f(2)f(4)$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۴ ۳) ۲۵ ۴) ۴۶ پاسخ: گزینه ۳

$f(-2)=5 \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی (2)}]{-2<0} 9^{2k}=5 \Rightarrow 3^{4k}=5 \quad (1)$

$f(2) \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی (1)}]{2\geq 0} 3^{2k}$ و $f(4) \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی (1)}]{4\geq 0} 3^{4k} \Rightarrow f(2)f(4)=3^{8k} \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases}3^{4k}=5\\ f(2)f(4)=(3^{4k})^{2}\end{cases} \Rightarrow f(2)f(4)=5^{2}=25$

تست: اگر $f(x)=a^{x}$ و $f(x-2)-f(x-1)=2f(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۲ ۴) ۸

$f(x)=a^x \Rightarrow f(x-2)=a^{x-2}$

$f(x)=a^x \Rightarrow f(x-1)=a^{x-1}$

بنابراین:

$f(x-2)-f(x-1)=2f(x) \Rightarrow a^{x-2}-a^{x-1}=2a^x \Rightarrow$

$a^x a^{-2}-a^x a^{-1}=2a^x \xrightarrow{\div a^x \neq 0} a^{-2}-a^{-1}=2 \xrightarrow{\times a^2} 1-a=2a^2 \rightarrow$

$2a^2+a-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 & \times \\ a=\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$

<u>تست</u>: اگر در تابع $f(x)=a^x+b^x$ داشته باشیم $\frac{f(1)}{f(-1)}=24$ و $\frac{f(3)}{f(1)}=28$ آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۷۴ ۲) ۴۹ ۳) ۵۲ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۳ (۵۲) از آنجا که $f(2)=a^2+b^2$ است، باید مقدار a^2+b^2 را بیابیم. داریم:

$\frac{f(1)}{f(-1)}=24 \Rightarrow \frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}=24 \Rightarrow \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=24 \Rightarrow \frac{(a+b)(ab)}{a+b}=24$

$\Rightarrow ab=24 \ (*)$

$\frac{f(3)}{f(1)}=28 \Rightarrow \frac{a^3+b^3}{a+b}=28 \rightarrow \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b}=28 \Rightarrow$

$a^2-ab+b^2=28 \ (**) \ ; \ (*),(**) \Rightarrow \begin{cases} ab=24 \\ a^2-ab+b^2=28 \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{دو طرف معادله‌ها را با هم}} ab+a^2-ab+b^2=24+28 \Rightarrow a^2+b^2=52 \rightarrow f(2)=52$

<u>تست</u>: اگر $f(x)=(\sqrt{3})^x$ در داشته باشیم $f(x+5)-f(x+3)=A\,f(x+1)$، A کدام است؟

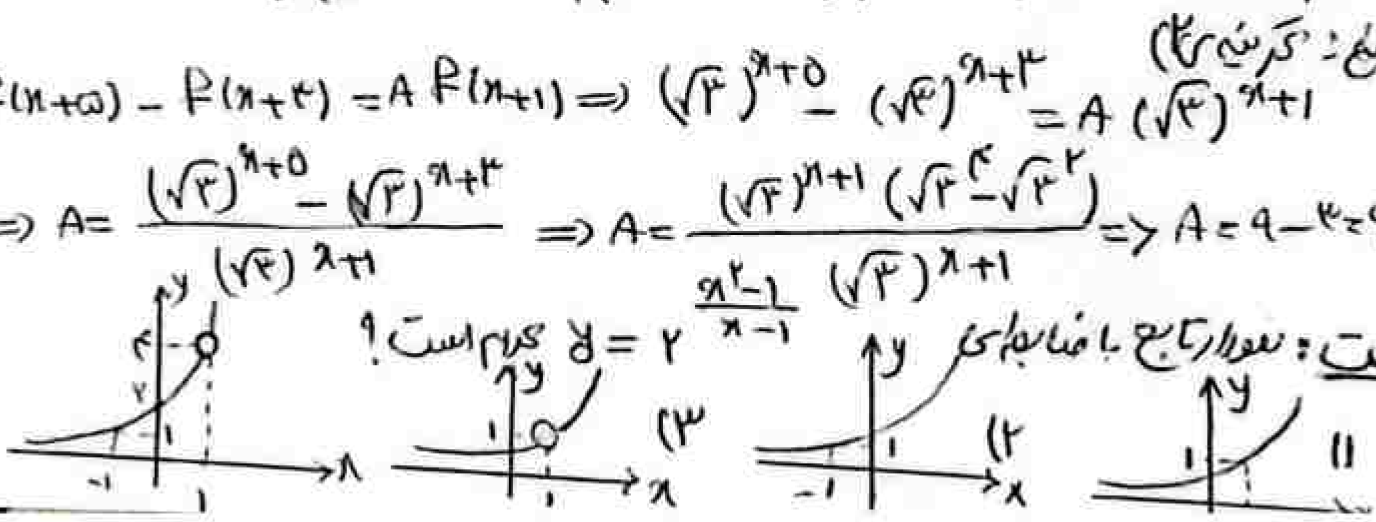
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه ۲

$f(x+5)-f(x+3)=A\,f(x+1) \Rightarrow (\sqrt{3})^{x+5}-(\sqrt{3})^{x+3}=A(\sqrt{3})^{x+1}$

$\Rightarrow A=\frac{(\sqrt{3})^{x+5}-(\sqrt{3})^{x+3}}{(\sqrt{3})^{x+1}} \Rightarrow A=\frac{(\sqrt{3})^{x+1}\left((\sqrt{3})^4-(\sqrt{3})^2\right)}{(\sqrt{3})^{x+1}} \Rightarrow A=9-3=6$

<u>تست</u>: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=2^{\frac{x^2-1}{x-1}}$ کدام است؟

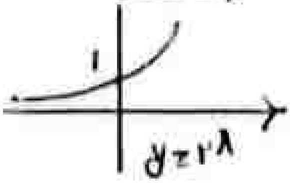


درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور پاسخ: گزینه ی ۴)

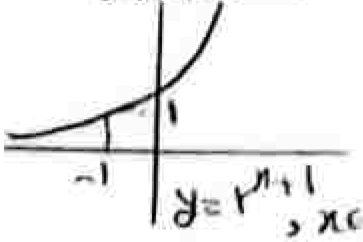
مولف رحیم قهرمان

$y=2^{\frac{x^2-1}{x-1}}=2^{\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}} \xrightarrow{x\neq 1}$

$y=2^{x+1};\ x\neq 1$

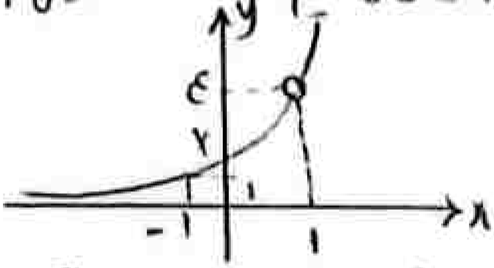


$y=2^x$ $\xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\text{یک واحد به سمت چپ}}$



$y=2^{x+1},\ x\in\mathbb{R}$

$\xrightarrow[\text{رسم می‌کنیم}]{\text{نقطه‌ای به طول } x=1 \text{ را توخالی}}$



$y=2^{x+1};\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$

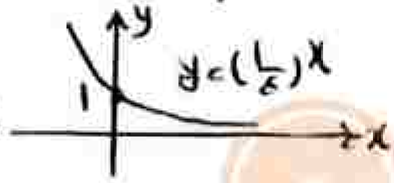
تست: تابع $f(x)=1-2^{1-2x}$ از کدام نواحی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) فقط دوم ۲) فقط اول ۳) اول و دوم ۴) سوم و چهارم

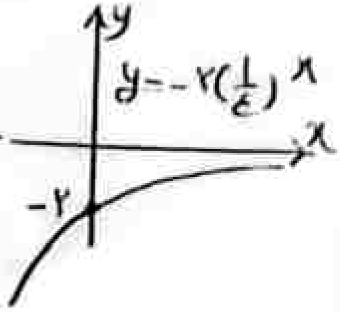
پاسخ: گزینه ی ۱)

$f(x)=1-2^{1-2x}=1-(2^1\times 2^{-2x})=1-2(\frac{1}{2^2})^x \Rightarrow$

$f(x)=1-2(\frac{1}{4})^x$

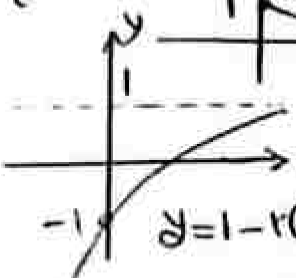


$y=(\frac{1}{4})^x$ $\xrightarrow[\text{دو برابر شدن عرض نقاط}]{\text{قرینه نسبت به محور xها}}$



$y=-2(\frac{1}{4})^x$

$\xrightarrow[\text{به سمت بالا}]{\text{انتقال یک واحد}}$

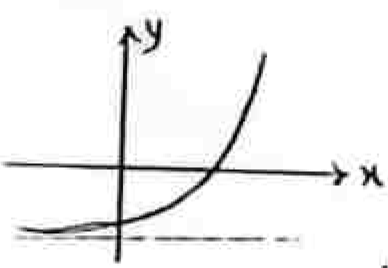


$y=1-2(\frac{1}{4})^x$ نمودار تابع از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

تست: نمودار وارون تابع $f(x)=2(2^{x-1}-1)$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

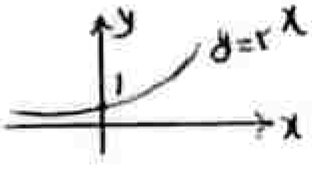
پاسخ: گزینه‌ی ۴) داریم $f(x)=2(2^{x-1}-1) \Rightarrow y=2^x-2$ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f از ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. از آن جا که نمودار تابع f و نمودار وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات قرینه هستند، پس نمودار وارون تابع f از ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات نخواهد گذشت.



تست: تابع $f(x)=|2^{x+1}-1|$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

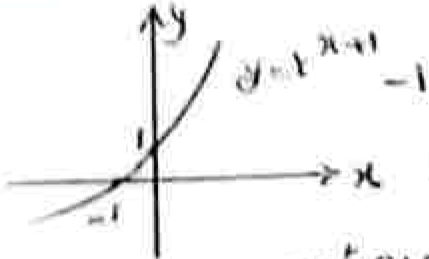
۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) صفر

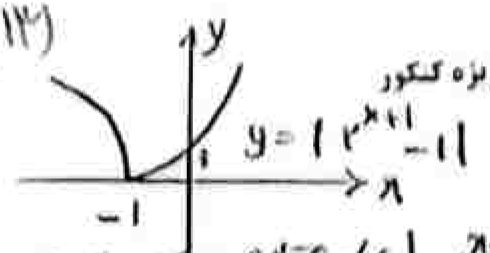
پاسخ: گزینه‌ی ۳) تابع $f(x)=|2^{x+1}-1|$ را رسم می‌کنیم.



$y=2^x$ $\longrightarrow$

$y=2^{x+1}=2(2^x)$ $\longrightarrow$





با توجه به نمودار تابع $|2^{x+1}-1|$، این تابع در بازه‌ی $[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس حداقل مقدار a برابر ۱- است.

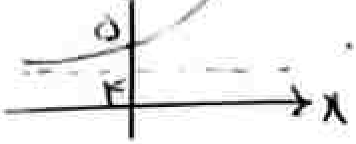
تست: برد تابع $f(x)=2^{x+1}-\frac{4^x-16}{2^x+4}$ به صورت $(a,+\infty)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۴- پاسخ: گزینه‌ی ۳

دامنه‌ی تابع $f(x)=2^{x+1}-\frac{4^x-16}{2^x+4}$ مجموعه اعداد حقیقی است و داریم:

$$f(x)=2^{x+1}-\frac{(2^x)^2-4^2}{2^x+4}=2^{x+1}-\frac{(2^x-4)(2^x+4)}{2^x+4}\Rightarrow$$

$$f(x)=2^{x+1}-2^x+4=2^x(2-1)+4=2^x+4$$

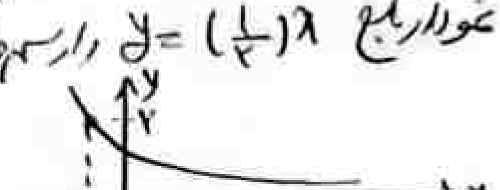


مطابق نمودار تابع f، برد آن $(4,+\infty)$ است، پس مقدار a برابر ۴ است.

تست: برد تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^{x^2-2x}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty,2]$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(0,\frac{1}{2}]$ ۴) $[\frac{1}{2},2]$ پاسخ: گزینه‌ی ۲

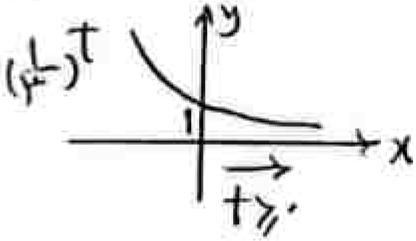
اگر $x^2-2x=A$ فرض کنیم، برد تابع $y=(\frac{1}{2})^A$ را با شرط $A\geq -1$ می‌خواهیم.
($x^2-2x=(x^2-2x+1)-1=(x-1)^2-1\geq -1$) نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم می‌کنیم.
اگر $x\geq -1$ باشد، y در فاصله‌ی $(0,2]$ تغییر می‌کند.



تست: برد تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^{x^2}$ شامل چند عدد صحیح می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار پاسخ: گزینه‌ی ۲

می‌دانیم $x^2\geq 0$ است. اگر فرض کنیم $x^2=t$ باشد، در این صورت برد تابع $y=(\frac{1}{2})^t$ با شرط $t\geq 0$ را می‌خواهیم. به نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^t$ توجه کنید، با شرط $t\geq 0$، برد تابع $(0,1]$ می‌شود. پس فقط یک عدد صحیح در برد قرار دارد.

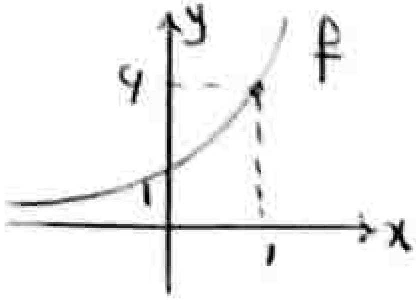


تست: برد تابع $f(x)=2^{1-\sin x}$ کدام است؟

۱) $[1,2]$ ۲) $[0,4]$ ۳) $[\frac{1}{2},4]$ ۴) $[1,4]$

پاسخ. گزینه‌ی ۴) تابع نمایی در پایه‌ی ۲ حالت صعودی دارد، می‌دانیم $0\leq 1-\sin x\leq 2$ پس $2^0\leq f(x)\leq 2^2$، لذا برد تابع $[1,4]$ می‌باشد.

تست: نمودار تابع نمایی $f(x)=\frac{1}{4}a^{bx}+c$ به صورت مقابل است. اگر a و b اعداد طبیعی باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟



۱) $\{2,16\}$ ۲) $\{4,8,16\}$ ۳) $\{4,8\}$ ۴) $\{2,4,16\}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) مطابق نمودار صورت سوال $f(0)=1$

$$f(0)=\frac{1}{4}a^0+c=1\Rightarrow \frac{1}{4}+c=1\to c=\frac{3}{4}$$

از طرفی $f(1)=4$ است پس:

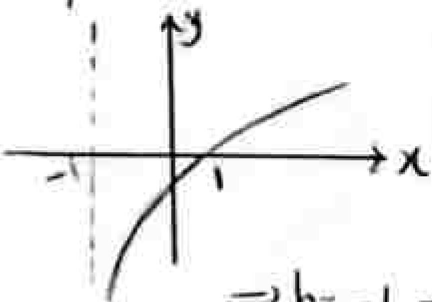
$$f(1)=\frac{1}{4}a^b+\frac{3}{4}=4\Rightarrow \frac{1}{4}a^b=\frac{16}{4}\to a^b=16$$

چون a و b اعداد طبیعی هستند پس:

$$1)\begin{cases}a=16\\b=1\end{cases},\quad \begin{cases}a=4\\b=2\end{cases},\quad \begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$$

بنابراین مجموعه مقادیر a به صورت $\{2,4,16\}$ است.

تست: نمودار وارون تابع $y=2^{x+a}+b$ به صورت زیر است. مقدار $a-b$ کدام است؟



۱) -2 ۲) 2 ۳) -1 ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۲) $f^{-1}(1)=0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow 2^a+b=1$

$$f(-1)=-\infty\Rightarrow f(-\infty)=-1\Rightarrow 0+b=-1$$

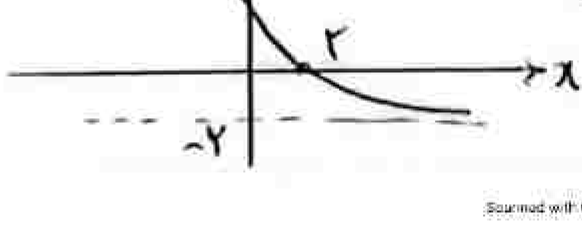
$$\Rightarrow b=-1\Rightarrow 2^a-1=1\Rightarrow a=1\longrightarrow a-b=2$$

تست: اگر برد تابع $y=2^{-x+a}+b$ برابر $(-2,+\infty)$ و نمودار محور xها را در ۲ قطع کند، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱) چون نمودار ۲- واحد پایین آمده پس $b=-2$ و به ازای $x=2$، $y=0$ می‌شود.

$$0=2^{-2+a}-2\Rightarrow a=3\Rightarrow a+b=1$$



مولف رحیم قهرمان

تست: برد تابع $f(x)=a^{x+b}+c$ بازه $(-1,+\infty)$ بوده و نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $A(-1,0)$ و $B(0,d)$ قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث $O\hat{A}B$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، حاصل جمع مقادیر a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه ۳)

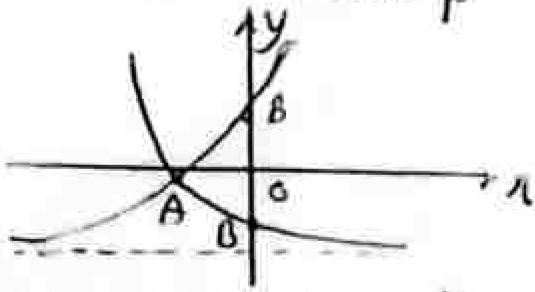
برد تابع $(-1,+\infty)$ است، بنابراین $c=-1$ می‌باشد، همچنین تابع از نقطه $(-1,0)$ عبور می‌کند پس خواهیم داشت:

$$f(-1)=0 \Rightarrow a^{b-1}+c=0 \Rightarrow a^{b-1}-1=0 \to a^{b-1}=1 \to b-1=0 \to b=1$$

ضابطه تابع به صورت $f(x)=a^{x+1}-1$ می‌باشد. نمودار تابع به یکی از دو حالت زیر است:

$$S_{O\hat{A}B}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{3} \Rightarrow OA\times OB=\frac{2}{3} \to 1\times|d|=\frac{2}{3}$$

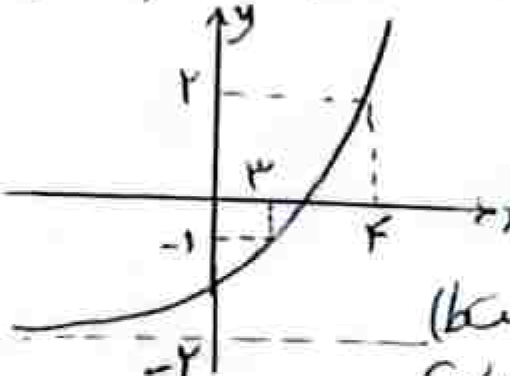
$$\Rightarrow \begin{cases} f(0)=\frac{2}{3} \to a-1=\frac{2}{3} \to a=\frac{5}{3} \\ f(0)=-\frac{2}{3} \to a-1=-\frac{2}{3} \to a=\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow a_1+a_2=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=a^{x+b}+c$ به صورت زیر باشد، $f^{-1}(14)$ کدام است؟

۱) ۴٫۵ ۲) ۵ ۳) ۵٫۵ ۴) ۶



پاسخ: گزینه ۲) می‌دانیم که نمودار تابع نمایی $y=a^x$ $(a>1)$ به صورت

است، برای رسم نمودار تابع $y=a^{x+b}+c$، باید نمودار بالا را (با توجه به علامت b) به اندازه b واحد به سمت چپ یا راست منتقل کنیم؛ بنابراین این انتقال افقی تاثیری در برد تابع ندارد و چون برد نمودار صورت سوال به صورت $(-2,+\infty)$ است، پس نمودار بالا برای رسیدن به آن شرایط باید ۲ واحد به سمت پایین منتقل می‌شود پس:

$$c=-2 \Rightarrow f(x)=a^{x+b}-2$$

از طرفی با توجه به شکل داده شده نمودار مورد نظر از دو نقطه $(3,-1)$ و $(4,2)$ عبور کرده است، بنابراین مختصات این نقاط باید در تابع صدق کند پس:

$f(3)=-1 \iff a^{3+b}-2=-1 \to a^{3+b}=1 \to$
$3+b=0 \to b=-3$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم.

$f(x)=4^{x-3}-2$

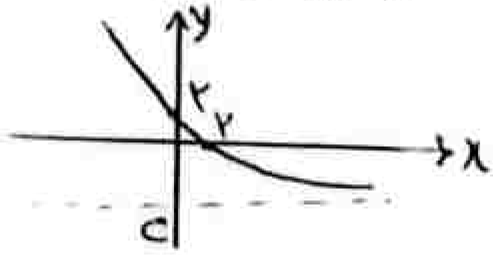
می‌دانیم اگر تابعی وارون‌پذیر باشد، در این صورت

$f(a)=b \iff f^{-1}(b)=a$

در نتیجه برای یافتن $f^{-1}(14)$ تابع را برابر ۱۴ قرار می‌دهیم:

$4^{x-3}-2=14 \to x=5 \Rightarrow f^{-1}(14)=5$

تست: با توجه به نمودار تابع $f(x)=-1+3^{ax-b}$، حاصل ضرب جواب‌های معادله $(-4a)^{bx+c}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{7x^2+1}$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{7}$ ۲) $-\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$f(0)=2 \xrightarrow{x=0} -1+3^{a\times 0-b}=2 \Rightarrow 3^{-b}=3 \Rightarrow b=-1$

$f(2)=0 \xrightarrow{y=0} -1+3^{a\times 2-b}=0 \Rightarrow 3^{2a-b}=1 \Rightarrow 2a-b=0 \xrightarrow{b=-1}$
$a=-\frac{1}{2}$

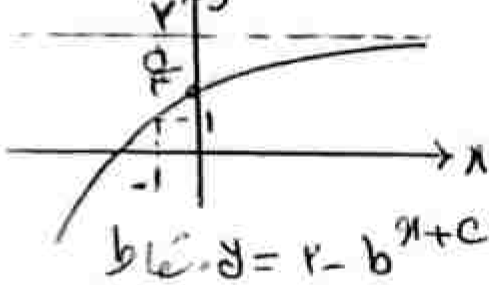
همچنین با توجه به خط چین که $y=-1$ است، مقدار $c=-1$ به دست می‌آید. بعد از به دست آوردن مقادیر a، b و c سراغ حل معادله می‌رویم:

$(-4a)^{bx+c}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{7x^2+1} \Rightarrow (2)^{-x-1}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{7x^2+1} \to$

$(2)^{-x-1}=(2^{-\frac{1}{2}})^{7x^2+1} \Rightarrow 2^{-x-1}=2^{-\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{7}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$

$\to 7x^2-2x-1=0 \to$ حاصل ضرب $=P=\frac{c}{a}=-\frac{1}{7}$

تست: نمودار تابع نمایی $y=a-b^{x+c}$ مطابق شکل زیر است. حاصل $3b+a+c$ کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) نمودار تابع داده شده قرینه یک تابع نمایی نزولی نسبت به محور xها است که دو واحد به بالا انتقال داده شده است، پس $a=2$ را خواهیم داشت.

$y=2-b^{x+c}$، b نقاط $(-1,1)$ و $(0,\frac{5}{4})$ بر روی نمودار تابع قرار دارند، بنابراین.

$(0, \frac{5}{4}) \in f \Rightarrow f(0) = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{5}{4} = 2 - b^{0+c}$

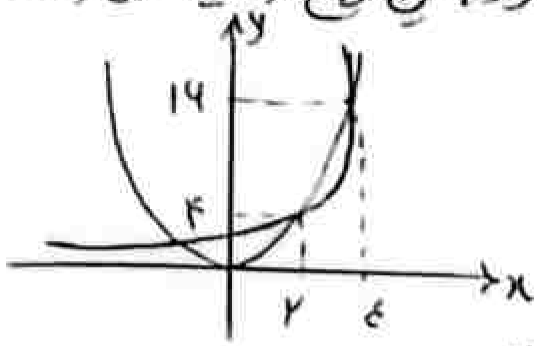
$\rightarrow b^c = \frac{3}{4}\ (*)$ و $(-1,1) \in f \rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 - b^{c-1} \rightarrow b^{c-1} = 1$

$\rightarrow b^{-1} \times b^c = 1 \xrightarrow{(*)} \frac{3}{4} b^{-1} = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{4}, c = 1 \rightarrow 4b + a + c = 4$

<u>تست</u>: عرض از مبدا خطی که نقاط برخورد دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ در ناحیه اول را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) -8 ۲) -12 ۳) -10 ۴) -4 پاسخ: گزینه‌ی ۱)

با رسم نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ مشخص می‌شود که این توابع در ناحیه اول در نقاط $A(2,4)$ و $B(4,16)$ متقاطع هستند.



$m_{AB} = \frac{16-4}{4-2} = 6 \rightarrow$ معادله خط: $y = 6x - 8$

$\xrightarrow{x=0}$ عرض از مبدا: $y = -8$

<u>تست</u>: فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه‌ی $A(0,4)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ. گزینه‌ی ۴)

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \Rightarrow ((\sqrt{2})^2)^x = (\sqrt{2})^x \times \sqrt{2} + 4$$

$$\Rightarrow ((\sqrt{2})^x)^2 - ((\sqrt{2})^x)(\sqrt{2}) - 4 = 0 \xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t} t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \longrightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} & \text{ق ق} \\ t = -\sqrt{2} & \text{غ ق ق (همیشه مثبت است)} \end{cases}$$

بنابراین داریم: $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^x = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow x = 3$

$x = 3$ را در یکی از دو معادله منحنی‌ها می‌گذاریم تا y حاصل شود.

$x = 3 \xrightarrow{y = 2^x} y = 2^3 = 8$

پس نقطه‌ی تلاقی $B(3,8)$ است که فاصله‌اش از نقطه‌ی $A(0,4)$ برابر با:

$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = 5$

مولف: رحیم قهرمانی

تست: نمودارهای توابع $y=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2x}$ و $y=2^x+\frac{3}{2}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases} y=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2x} \\ y=2^x+\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تقاطع}} (\frac{\sqrt{2}}{2})^{2x}=2^x+\frac{3}{2} \Rightarrow ((\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^x=2^x+\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow (\frac{1}{2})^x-2^x-\frac{3}{2}=0 \rightarrow \frac{1}{2^x}-2^x-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{2^x=t}$$

$$\frac{1}{t}-t-\frac{3}{2}=0 \rightarrow 2t^2+3t-2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \ \times \\ t=\frac{1}{2} \ \checkmark \Rightarrow 2^x=\frac{1}{2} \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow A(-1,2)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-1,2)$ را از نقطه‌ی $B(-1,1)$ می‌یابیم:

$$AB=|2-1|=1$$

تست: توابع $f(x)=3-2^{x+1}$ و $g(x)=\frac{5-2^{2x+1}}{3}$ در نقاطی با طول α و β متقاطع هستند. مقدار $f(\alpha)+g(\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۴

ابتدا معادله $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم. $2^x=A$

$$\frac{5-2^{2x+1}}{3}=3-2^{x+1} \Rightarrow \frac{5-2A^2}{3}=3-2A \Rightarrow$$

$$2A^2-6A+4=0 \rightarrow A^2-3A+2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \Rightarrow 2^x=1 \\ A=2 \Rightarrow 2^x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\alpha=0,\ A(0,1),\ f(\alpha)=g(\alpha)=1$$

$$\beta=1,\ B(1,-1),\ f(\beta)=g(\beta)=-1 \Rightarrow f(\alpha)+g(\beta)=0$$

تست: نمودارهای توابع نمایی $y_1=f(x-3)$ و $y_2=64f(x)$ دقیقاً بر روی یکدیگر منطبق شده‌اند. اگر $f(x)=a^x$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

وقتی نمودارهای دو تابع دقیقاً بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند، یعنی ضابطه‌های آن‌ها با هم برابر است:

$$y_1=y_2 \Rightarrow f(x-3)=64f(x) \Rightarrow a^{x-3}=64\times a^x \Rightarrow$$

$$a^x\times a^{-3}=64\times a^x \rightarrow a^{-3}=64 \rightarrow a=\frac{1}{4}$$

تست و آموزش تبدیلات انتقال های افقی برای توابع

درسنامه آموزشی ریاضی تجربی ویژه کنکور

مولف رحیم قهرمان

نمودار تابع $f(x)=4^{x+1}$ را بر نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{8}(4^x)$ منطبق کرد؟

۱) ۲٫۵ واحد به راست　　۲) ۲٫۵ واحد به چپ

۳) ۵ واحد به راست　　۴) ۵ واحد به چپ

پاسخ: گزینه ۱) ابتدا پایه‌های هر دو تابع را یکسان می‌کنیم:

$f(x)=4^{x+1}=(2^2)^{x+1}=2^{2x+2}$　ممکن است فکر کنید $\Rightarrow$

$g(x)=\frac{1}{8}(4^x)=\frac{2^{2x}}{2^3}=2^{2x-3}$　برای تبدیل $2x+1$ به $2x-2$ کافی

است یک انتقال افقی ۴ واحدی داشته باشید اما از آنجا که ملاک انتقال افقی، تغییرات بر روی x است، ابتدا باید توابع f و g را به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{cases} f(x)=2^{2x+2}=2^{2(x+1)} \\ g(x)=2^{2x-3}=2^{2(x-\frac{3}{2})} \end{cases}$$

پس در واقع باید $x+1$ به $x-\frac{3}{2}$ تبدیل شود $\Leftarrow$ این اتفاق با یک انتقال افقی ۲٫۵ واحدی امکان پذیر است. با زهم دقت کنید تغییرات بر روی محور xها برعکس اعمال می‌شود، پس انتقال باید ۲٫۵ واحد در راستای مثبت محور xها، یعنی به سمت راست صورت گیرد.

تست: اگر نمودار توابع نمایی $f(x)=a^x$ و $g(x)=\left(\frac{6}{a+1}\right)^{-x}$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگر باشند، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) $\frac{2}{3}$　　پاسخ: گزینه ۲)

نمودار تابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند. برای اینکه نمودار دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\left(\frac{6}{a+1}\right)^{-x}$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگر باشند، باید داشته باشیم:

$$a=\frac{6}{a+1} \to a^2+a-6 \to (a-2)(a+3)=0 \to \begin{cases} a=2 ✓ \\ a=-3 ✗ \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $a=-3$ تابع $y=a^x$ تابع نمایی نیست. پس فقط $a=2$ قابل قبول است.

تست: نمودار توابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=(1-2a)^{-x}$ نسبت به محور yها

مولف: رحیم قهرمانی

قرینه هستند. فاصله نقطه تلاقی تابع $g(x)$ و تابع $y=f(x)-\frac{8}{3}$ از نقطه $(-1,1)$ کدام است؟ ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی (۲) به عنوان یک نکته مهم باید بدانیم دو تابع $y=a^x$ و $y=b^x$ وقتی نسبت به محور y ها قرینه هستند که a و b معکوس همدیگر باشند، یعنی حاصل ضرب آن‌ها 1 باشد. پس برای دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=(\frac{1}{1-2a})^x$ می‌توان نوشت:

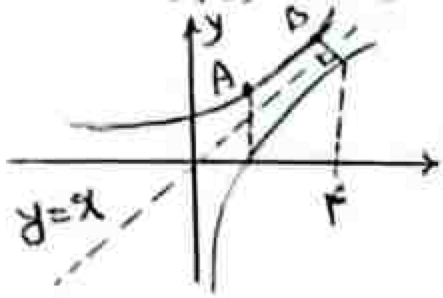
$a(\frac{1}{1-2a})=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \rightarrow$ پس $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ و $g(x)=3^x$ هستند. برای به دست آوردن نقطه تلاقی تابع $g(x)$ و $f(x)-\frac{8}{3}$ باید معادله‌ی $g(x)=f(x)-\frac{8}{3}$ را حل کنیم، داریم:

$3^x=(\frac{1}{3})^x-\frac{8}{3} \xrightarrow{3^x=A} 3A^2+8A-3=0 \Rightarrow (A+3)(3A-1)=0 \Rightarrow$

$\begin{cases} A=-3: & 3^x=-3 \ \times \\ A=\frac{1}{3}: & 3^x=\frac{1}{3} \rightarrow x=-1 \ \checkmark \end{cases}$

درنتیجه نقطه برخورد دو تابع $A(-1,\frac{1}{3})$ است که فاصله آن از نقطه $(-1,1)$ با توجه به هم‌طول بودن دو نقطه برابر با $\frac{2}{3}$ است.

تست: شکل مقابل، نمودار تابع $y=2^x$ و وارونش را نشان می‌دهد. طول پاره‌خط AB کدام است؟

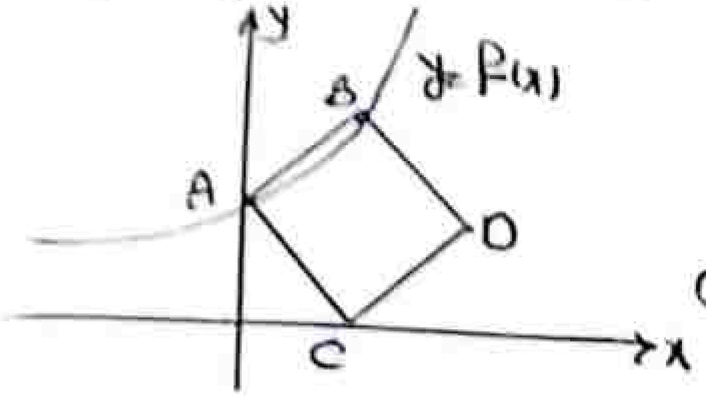


۱) ۲ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳) واضح است که نمودار پایینی، نمودار $y=\log_2^x$ و نمودار بالایی، نمودار $y=2^x$ است. نمودار $y=\log_2^x$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول 1 قطع می‌کند. پس طول نقطه A برابر 1 است و چون روی $y=2^x$ قرار دارد، عرض آن 2 می‌شود، پس $A(1,2)$ است. از طرفی عرض نقطه‌ی B برابر 4 است (دو تابع وارون یکدیگر هستند) پس $B(2,4)$ می‌باشد. حال داریم:

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

تستی: مطابق شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=a^x$ از رئوس A و B از مربع ABCD می‌گذرد. اگر مختصات C، نقطه برخورد منحنی $f^{-1}(x-1)$ با محور xها باشد، مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا مختصات نقطه‌ی C را مشخص می‌کنیم:

$$f^{-1}(x-1)=0 \xrightarrow{\text{وارون}} f(0)=x-1 \xrightarrow{f(x)=a^x} 1=x-1 \rightarrow x=2$$

$\rightarrow C(2,0)$

از طرفی می‌دانیم تابع نمایی $y=a^x$ در نقطه‌ی $(0,1)$ محور yها را قطع می‌کند. پس $A(0,1)$ همچنین نقطه $B(x,a^x)$ نیز روی $f(x)=a^x$ قرار دارد.

چهارضلعی ABCD مربع است، پس:
۱) خطوط AB و AC بر هم عمودند و شیب‌هایشان عکس و قرینه هم است
۲) اندازه AB و AC هم برابر است

$$1)\ m_{AC}=\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2} \Rightarrow m_{AB}=2 \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=2$$

در نتیجه:

$$\frac{a^x-1}{x-0}=2 \rightarrow a^x-1=2x \ (*)$$

$$2)\ AB=\sqrt{(a^x-1)^2+x^2} \xrightarrow{(*)} \sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5} \rightarrow x^2=1$$

$$AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

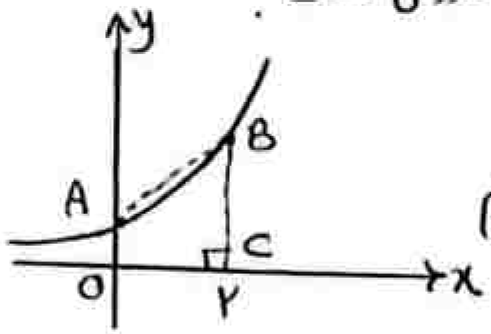
با توجه به نمودار تابع ، $x=1$ قابل قبول است.

با جایگذاری $x=1$ در (۵) داریم: $a^1-1=2 \to a=3$

پس مجموع مختصات نقطه B برابر است با:

$$B(x,a^x) \xrightarrow[a=3]{x=1} B(1,3) \Rightarrow x_B+y_B=1+3=4$$

تست: نمودار تابع $f(x)=a\times b^x$ به شکل مقابل است، مساحت ذوزنقه OABC برابر ۲۰ و شیب خط AB برابر ۸ است. $f(-2)$ چه عددی است؟



۱) $\frac{2}{27}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا عرض نقاط A و B را به دست می‌آوریم تا اندازه‌ی ذوزنقه معلوم شوند. بنابراین:

$y_A=f(0)=a \Rightarrow OA=a$ و $y_B=f(2)=a\times b^2 \Rightarrow BC=ab^2$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(OA+BC)\times OC}{2} \Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(a+ab^2)\times 2}{2}=a(1+b^2)=20$$

شیب خط AB برابر ۸ است، بنابراین:

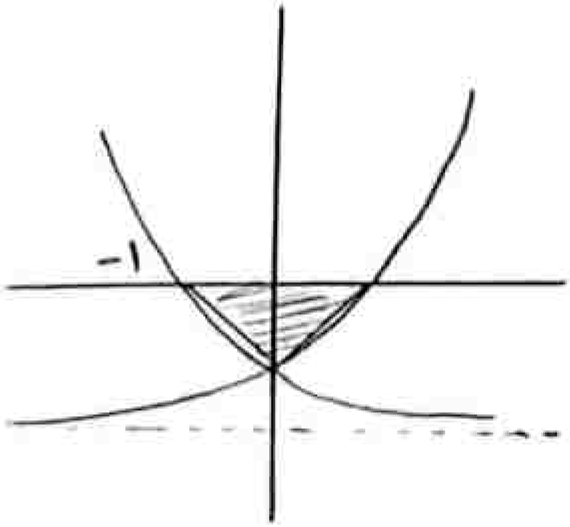
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{ab^2-a}{2-0}=\frac{a(b^2-1)}{2}=8 \Rightarrow a(b^2-1)=16$$

$$\frac{a(b^2+1)}{a(b^2-1)}=\frac{20}{16} \Rightarrow \frac{b^2+1}{b^2-1}=\frac{5}{4} \Rightarrow 5b^2-5=4b^2+4 \Rightarrow$$

$$b^2=9 \xrightarrow{b>0} b=3 \to a=2 \Rightarrow f(x)=2\times 3^x \Rightarrow f(-2)=\frac{2}{9}$$

تذکر: دقت شود که $x(-3)$ نداریم پس b باید ۳ باشد.

تست: شکل زیر مربوط به نمودار تابع های $f(x)=2^{-x}+b$ و $g(x)=4^{x}+c$ است، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۱) با توجه به تعریف تابع نمایی مشخص است که تابع $f(x)$ اکیداً نزولی و تابع $g(x)$ اکیداً صعودی است.

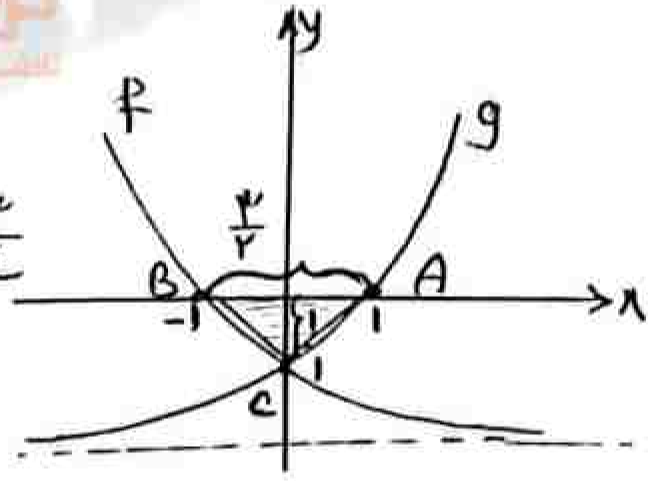
$f(0)=g(0) \rightarrow 1+b=1+c \Rightarrow b=c$

$f(-1)=0 \rightarrow 0=2^{1}+b=0 \rightarrow b=-2=c$

$g(x)=4^{x}-2=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{1}{2},0\right), B(-1,0)$

$g(0)=4^{0}-2=-1 \rightarrow C(0,-1)$

$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}=\frac{\frac{3}{2}\times 1}{2}=\frac{3}{4}$



مولف رحیم قهرمان

توان رسانی با توان حقیقی: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت $(a,b\neq 1)$ و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

۱) $a^0=1$ ۲) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ ۳) $a^x a^y=a^{x+y}$

۴) $(a^x)^y=a^{xy}$ ۵) $(ab)^x=a^x b^x$ ۶) $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$

۷) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

تست: اگر تساوی $x^{2-\sqrt{3}}=2$ برقرار باشد، مقدار عددی x برابر است با:

۱) ۲) $2^{2+\sqrt{3}}$ ۳) $2^{2-\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{1}{2}$ پاسخ: گزینه ۲

طرفین رابطه‌ی $x^{2-\sqrt{3}}=2$ را به توان $2+\sqrt{3}$ می‌رسانیم.

$$x^{2-\sqrt{3}}=2 \Rightarrow \left(x^{2-\sqrt{3}}\right)^{2+\sqrt{3}}=2^{2+\sqrt{3}} \Rightarrow x^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2^{2+\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$x^{4-3}=2^{2+\sqrt{3}} \Rightarrow x=2^{2+\sqrt{3}}$$

تست: حاصل $B=(\sqrt{5}-1)^{\sqrt{7}+2}\times(\sqrt{5}+1)^{\frac{3}{\sqrt{7}-2}}\times 4^{1-\sqrt{7}}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶ پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مخرج کسر $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}=\sqrt{7}+2$$

بنابراین:

$$A=(\sqrt{5}-1)^{\sqrt{7}+2}\times(\sqrt{5}+1)^{\sqrt{7}+2}\times 4^{1-\sqrt{7}}=\left((\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right)^{\sqrt{7}+2}\times 4^{1-\sqrt{7}}$$
$$\Rightarrow A=(5-1)^{\sqrt{7}+2}\times 4^{1-\sqrt{7}}=4^{\sqrt{7}+2+1-\sqrt{7}}=4^3=64$$

تست: اگر $(a+b\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{5}-2)^{-2+\sqrt{3}}\times(\sqrt{5}+2)^{2+\sqrt{3}}$ آنگاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۷ پاسخ: گزینه ۱

ابتدا طرف راست تساوی را A نامیم و ساده‌تر می‌کنیم. داریم:

$$A=(\sqrt{5}-2)^{-2+\sqrt{3}}\times(\sqrt{5}+2)^{2+\sqrt{3}} \Rightarrow A=(\sqrt{5}-2)^{-2}\times(\sqrt{5}-2)^{\sqrt{3}}\times$$
$$\times(\sqrt{5}+2)^{2}\times(\sqrt{5}+2)^{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$A=\left((\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right)^{\sqrt{3}}\times\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{(\sqrt{5}-2)^2}\Rightarrow A=(5-4)^{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)^2\Rightarrow$$

$$A=(1)^{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}\right)^2\Rightarrow A=\left(\frac{5+4+4\sqrt{5}}{5-4}\right)^2\Rightarrow$$

$$A=(9+4\sqrt{5})^2\Rightarrow(a+b\sqrt{5})^2=(9+4\sqrt{5})^2\Rightarrow a+b=9+4=13$$

تست: اگر $x^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=3^{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ ، مقدار x کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) 3 ۴) 2

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$x^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=3^{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}\Rightarrow\left(\left(x^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\right)\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\left(3^{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=3^{\frac{(5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}\Rightarrow x=3^{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow x=3^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\Rightarrow x=3^{3-2}\Rightarrow x=3$$

(معادلات و نامعادلات نمایی)

معادلات نمایی: اگر $a>0$ و $a\neq 1$ آنگاه ... تساوی $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ نتیجه می‌دهد $f(x)=g(x)$ ...

نامعادلات نمایی: برای حل نامعادلات نمایی از قانون زیر پیروی می‌کنیم.

$$1)\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \xleftrightarrow[\text{حفظ جهت}]{a>1} f(x)\geq g(x)$$

$$2)\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \xleftrightarrow[\text{تغییر جهت}]{0<a<1} f(x)\leq g(x)$$

تست: از معادله‌ی زیر حاصل $\frac{x}{y}$ برابر با کدام گزینه می‌باشد؟

$$\frac{72^{x+y}}{27^{x}} = \left(\frac{1}{36}\right)^{3}$$

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) -4 ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

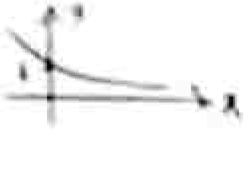
$$\frac{72^{x+y}}{27^{x}} = \left(\frac{1}{36}\right)^{3} \to \frac{(2^3\times 3^2)^{x+y}}{(3^3)^x} = \left(\frac{1}{2^2\times 3^2}\right)^{3} \to$$

$$\frac{2^{3x+3y}\times 3^{2x+2y}}{3^{3x}} = (2^2\times 3^2)^{-3} \to 2^{3x+3y}\times 3^{-x+2y} = 2^{-6}\times 3^{-6}$$

$$\to \begin{cases} 3x+3y=-6 \\ -x+2y=-6 \end{cases} \to x=\frac{2}{3},\ y=-\frac{8}{3} \to \frac{x}{y} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{4}$$

تست: نمودار تابع نمایی $f(x)=(2-2m)^x$ به صورت روبرو است. اگر $(m+1)^{x^2-x} \leq (m+1)^{8-2x}$ آنگاه x چند عدد صحیح را می‌تواند اختیار کند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۴



پاسخ: گزینه‌ی ۳) با توجه به نمودار رسم شده، تابع f نزولی است، لذا باید پایه‌ی آن بین صفر و یک قرار گیرد.

$$0<2-2m<1 \xrightarrow{\times(-1)} -1<2m-2<0 \to 1<2m<3 \to \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$$

$$\to 1+\frac{1}{2}<m+1<1+\frac{3}{2} \to \frac{3}{2}<m+1<\frac{5}{2}\ (*)$$

$$(m+1)^{x^2+x} \leq (m+1)^{12-2x} \xrightarrow[m+1>1]{(*)} x^2+x \leq 12-2x \rightarrow$$

$$x^2+x-12 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \leq 0 \rightarrow -4 \leq x \leq 3 \rightarrow x=1,2,3$$ ۳ عدد طبیعی ۱، ۲، ۳ را اختیار می‌کند

تست: از کدام گروه، نمودار تابع $f(x)=125^{x-1}$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x)=(0/2)^{2x+4}$ قرار ندارد؟

۱) $(-\frac{1}{5},+\infty)$ ۲) $(-5,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-\frac{1}{5})$ ۴) $(-\infty,-\frac{1}{5}]$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) باید نامعادله $f(x) \leq g(x)$ را حل کنیم، که داریم:

$$125^{x-1} \leq (0/2)^{2x+4} \Rightarrow (5^3)^{x-1} \leq (\frac{1}{5})^{2x+4} \Rightarrow 5^{3x-3} \leq (5^{-1})^{2x+4}$$

$$\rightarrow 5^{3x-3} \leq 5^{-2x-4} \xrightarrow{5>1} 3x-3 \leq -2x-4 \Rightarrow 5x \leq -1 \rightarrow x \leq -\frac{1}{5}$$

تست: اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{2}-1)^{x^2} \geq (\frac{1}{\sqrt{2}+1})^{3x-2}$ به صورت $[a,b]$ است، مقدار $[-\frac{x}{3}]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ است، پس نامعادله به صورت $(\sqrt{2}-1)^{x^2} \geq (\sqrt{2}-1)^{3x-2}$ می‌باشد

چون $0<\sqrt{2}-1<1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$x^2 \leq 3x-2 \Rightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \rightarrow 1 \leq x \leq 2 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq -\frac{x}{3} \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$[-\frac{x}{3}]=-1$$

تست: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{2}-1)^{-x^2+3x-2} > (7+5\sqrt{2})^2$ به صورت (a,b) باشد، $b+2a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۱) می‌دانیم $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2-1=1$ پس داریم:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

همچنین با توجه به اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{2}+1)^3=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2\times 1+3\times\sqrt{2}\times 1^2+1^3=7+5\sqrt{2}$$

حال این عبارات را در نامعادله سوال جایگزین می‌کنیم

$$((\sqrt{2}+1)^{-1})^{(-x^2+3x-2)} > ((\sqrt{2}+1)^3)^2 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^{x^2-3x+2} > (\sqrt{2}+1)^6$$

$\sqrt{2}+1>1$ است بنابراین:

$x^2-3x+2<6 \rightarrow (x-4)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<4 \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=-1 \end{cases} \rightarrow b+2a=2$

<u>تست</u>: اگر مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{10}-3)^{x-3} > (\sqrt{10}+3)^{x^2+x}$ به صورت (a,b) باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴) ابتدا $\sqrt{10}-3$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{10}-3 \times \frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3} = \frac{1}{\sqrt{10}+3} = (\sqrt{10}+3)^{-1}$$

اکنون داریم:

$$(\sqrt{10}-3)^{x-3} > (\sqrt{10}+3)^{x^2+x} \Rightarrow \left((\sqrt{10}+3)^{-1}\right)^{x-3} > (\sqrt{10}+3)^{x^2+x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{10}+3)^{-x+3} > (\sqrt{10}+3)^{x^2+x} \xrightarrow{\sqrt{10}+3>1} -x+3 > x^2+x$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3<0 \Rightarrow (x+3)(x-1)<0 \Rightarrow -3<x<1 \rightarrow b-a=1-(-3)=4$$

<u>تست</u>: در معادله $9^x - 4\times 3^{x+1} + a = 0$ حاصل جمع ریشه‌ها برابر ۳ است، حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -4 ۴) -2

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با فرض $3^x = k$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$9^x - 4\times 3^{x+1} + a = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 12\times 3^x + a = 0 \rightarrow k^2 - 12k + a = 0$$

اگر k_1 و k_2 ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 3^{x_1} \\ k_2 &= 3^{x_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow k_1k_2 = 3^{x_1}\times 3^{x_2} = 3^{x_1+x_2} = 3^3 = 27 \rightarrow k_1k_2 = a$$

$\rightarrow a=27$

بنابراین:

$$k^2-12k+27=0 \rightarrow (k-3)(k-9)=0 \rightarrow \begin{cases} k_1=3 \rightarrow 3^{x_1}=3 \rightarrow x_1=1 \\ k_2=9 \rightarrow 3^{x_2}=9 \rightarrow x_2=2 \end{cases}$$

$\rightarrow x_1x_2=2$

<u>تست</u>: اگر $-2<a<-1$، چند عدد طبیعی x در نامعادله $(-a-1)^{3x-1} < (-a-1)^{x+7}$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$-2<a<-1 \Rightarrow 1<-a<2 \Rightarrow 0<-a-1<1 \Rightarrow (-a-1)^{3x-1} < (-a-1)^{x+7}$$

$$\Rightarrow 3x-1 > x+7 \Rightarrow 2x>8 \rightarrow x>4$$

تست: مجموع مقادیری بدست آمده از x در معادله‌ی

$$\frac{9^{x^2}+3^{2x^2-1}}{2^{3x^2+1}+8\times 2^{3x^2}}=0/15$$

کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\frac{9^{x^2}+3^{2x^2-1}}{2^{3x^2+1}+8\times 2^{3x^2}}=0/15 \Rightarrow \frac{(3^2)^{x^2}+3^{2x^2}\times 3^{-1}}{2\times 8^{x^2}+8\times 8^{x^2}}=\frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{3^{2x^2}+3^{2x^2}\times 3^{-1}}{2\times 8^{x^2}+8\times 8^{x^2}}=\frac{15}{100} \Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{3})\times 3^{2x^2}}{(2+8)\,8^{x^2}}=\frac{3}{20} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}\times\left(\frac{9}{8}\right)^{x^2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{x^2}=\left(\frac{9}{8}\right)^1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

مجموع مقادیر x $=1-1=0$

تست: معادله‌ی $\sqrt{x}\,2^{x+1}-2^x=2$ چند ریشه دارد؟

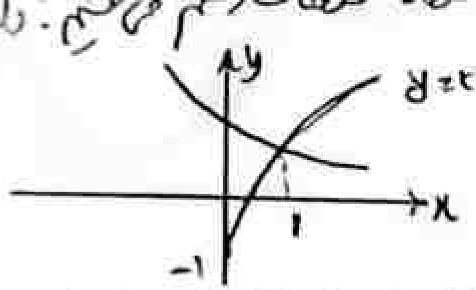
۱) دو ریشه ۲) یک ریشه مثبت ۳) ریشه ندارد ۴) یک ریشه منفی

پاسخ: گزینه‌ی ۲) معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\sqrt{x}\,2^{x+1}-2^x=2 \to 2^x(\sqrt{x}\times 2)-2^x=2 \to 2^x(2\sqrt{x}-1)=2 \to$$

$$2\sqrt{x}-1=2^{-x}\times 2 \to 2\sqrt{x}-1=2^{1-x}$$

نمودار دو تابع $y=2\sqrt{x}-1$ و $y=2^{1-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. داریم:



$y=2\sqrt{x}-1$ → همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله دارای یک ریشه مثبت است.

تست: مجموع جواب‌های معادله‌ی $(\sqrt{x})^x=(x)^{\sqrt{x+3}}$ کدام است؟ ($x\neq 0$)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۶/۱۳ ۴) ۷

پاسخ. گزینه‌ی ۴

سعی می‌کنیم طرفین تساوی را هم‌پایه کنیم.

$$(x^{\frac{1}{2}})^x=(x)^{\sqrt{x+3}} \to x^{\frac{x}{2}}=(x)^{\sqrt{x+3}}$$

یک جواب حتمی و واضح این معادله $x=1$ که به هر توانی برسد یک می‌شود. برای پیدا کردن سایر جواب‌ها، حالا که پایه‌ها در دو طرف یکسان است، کافی است

$$\frac{x}{2}=\sqrt{x+3} \rightarrow \frac{x^2}{4}=x+3 \rightarrow x^2-4x-12=0 \rightarrow x=6,-2$$

دقت کنید اگر بخواهیم راه‌حل‌ها را در معادله‌ی اولیه یعنی $\frac{x}{2}=\sqrt{x+3}$ چک کنیم واضح است که $x=-2$ غیرقابل قبول است پس مجموع جواب‌های این معادله برابر ۶ است

تست: طول بزرگترین بازه‌ای که در آن، نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}^{\,4x+2}-9^{\frac{3}{4}x}}{2^x-x^2}$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات واقع می‌شود، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ. گزینه ۲) برای آن که نمودار تابع در ناحیه چهارم دستگاه مختصات واقع شود، لازم است که:

$$\begin{cases} x>0 \\ f(x)<0 \end{cases}$$

پس باید نامعادله‌ی $f(x)<0$ را به ازای $x>0$ حل کنیم

$$\frac{\sqrt{3}^{\,4x+2}-9^{\frac{3}{4}x}}{2^x-x^2}<0$$

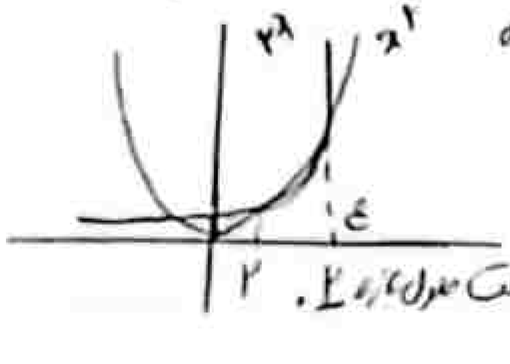
ابتدا عبارت $\sqrt{3}^{\,4x+2}-9^{\frac{3}{4}x}$ را تعیین علامت می‌کنیم و برای این منظور ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{3}^{\,4x+2}-9^{\frac{3}{4}x}=0 \rightarrow \sqrt{3}^{\,4x+2}=9^{\frac{3}{4}x} \Rightarrow 3^{2x+1}=3^{\frac{3}{2}x}$$

$$\Rightarrow 2x+1=\frac{3}{2}x \Rightarrow x=-2$$

	-2	
y	$-$ ۰ $+$	

پس در $x>0$ که مدنظر ماست صورت کسر همواره مثبت است و لذا کافی است که مخرج کسر منفی باشد نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در $x>0$ فقط در بازه‌ی $(2,4)$ نمودار x^2 بالاتر از نمودار 2^x است. پس بزرگترین بازه‌ای مورد نظر که در آن $\begin{cases} x>0 \\ f(x)<0 \end{cases}$ برقرار باشد بازه $(2,4)$ است طول بازه ۲.



مولف رحیم قهرمان

تست: مجموع جواب‌های معادله $9^{x+1} - 3^{x+4} + a = 0$ برابر $\frac{3}{2}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $9\sqrt{3}$ ۲) $27\sqrt{3}$ ۳) $81\sqrt{3}$ ۴) $243\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه (۲) ابتدا معادله را ساده می‌کنیم و سپس تغییر متغیر می‌دهیم:

$$9^{x+1} - 3^{x+4} + a = 0 \to 9^x \times 9 - 3^x \times 3^4 + a = 0 \xrightarrow{3^x = A > 0}$$

$$9A^2 - 81A + a = 0 \Rightarrow A_1A_2 = \frac{a}{9}$$

حاصلضرب همین A_1A_2 کار داریم، زیرا:

$$A_1A_2 = 3^{x_1} \times 3^{x_2} = 3^{x_1+x_2}$$

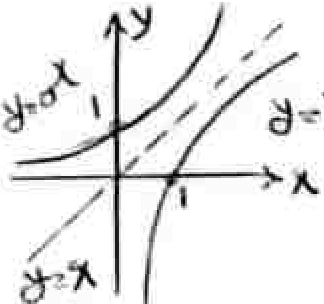
حال مجموع جواب‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

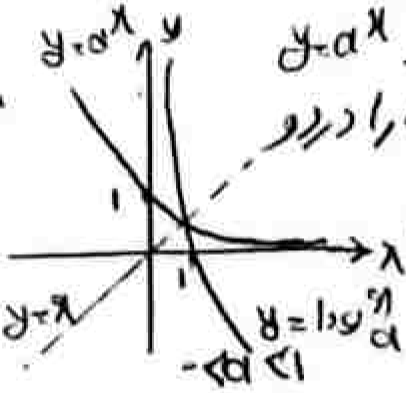
$$A_1A_2 = 3^{x_1+x_2} = 3^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 3^{\frac{7}{2}} = 27\sqrt{3}$$

شناخت تابع لگاریتمی: تابع $y=\log_a^x$ ($a>0, a\neq 1$) را یک تابع لگاریتمی می‌گوییم و آن را لگاریتم x در مبنای (پایه) a می‌خوانیم. تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است.

$$y=a^x \xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y]{\text{معکوس}} x=a^y \longleftrightarrow y=\log_a^x$$

رسم تابع لگاریتمی: تابع لگاریتمی وارون تابع نمایی است. بنابراین نمودار آن قرینه‌ی نمودار $y=a^x$ نسبت به خط $y=x$ می‌باشد. نمودار آن را در دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ رسم می‌کنیم.





ویژگی‌های تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a^x$

۱) دامنه‌ی تابع لگاریتم، مجموعه اعداد حقیقی مثبت $(0,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد. (لگاریتم برای صفر و اعداد منفی تعریف نمی‌شود.)

۲) این تابع همواره از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرد. طول از مبدا تابع لگاریتمی همواره برابر ۱ است بنابراین $\log_a 1=0$ است.

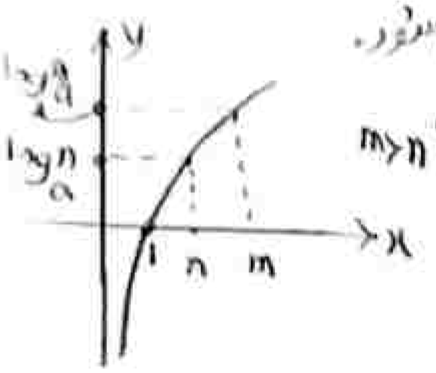
۳) این تابع همواره از نواحی اول و چهارم محورهای مختصات عبور می‌کند.

۴) این تابع در کل $\mathbb{R}$ همواره یک‌به‌یک است و در نتیجه وارون‌پذیر است.

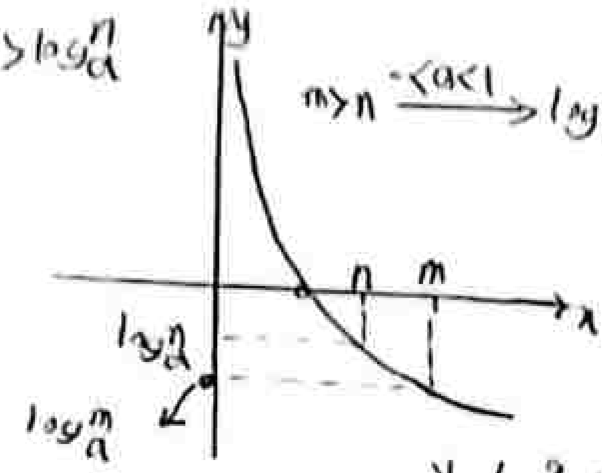
۵) با توجه به نمودارهای رسم شده، در حالت $0<a<1$، تابع لگاریتمی $y=\log_a^x$ وارونش (تابع نمایی $y=a^x$) را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و در حالت $a>1$ تابع لگاریتمی و وارونش هیچ نقطه برخوردی ندارند.

۶) محل تلاقی $y=a^x$ و $y=\log_a^x$ همان نقطه‌ی تلاقی این توابع با خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y=x$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه‌ی نقطه تلاقی توابع $y=a^x$ و $y=\log_a^x$ کافی است محل تلاقی آن‌ها را با خط $y=x$ محاسبه کنیم.

۷) در تابع $y=\log_a^x$ از این که $a>1$ تابع صعودی و $0<a<1$، تابع نزولی است



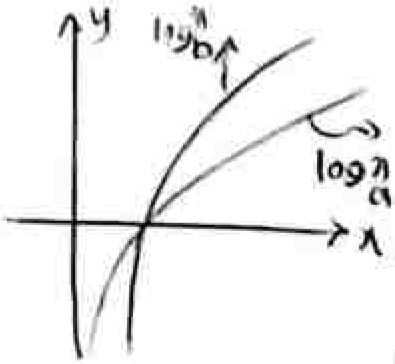
$m>n \xrightarrow{a>1} \log_a^m > \log_a^n$

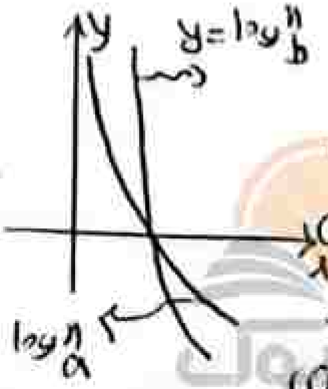


$m>n \xrightarrow{0<a<1} \log_a^m < \log_a^n$

$y=\log_a^x \quad (0<a<1)$

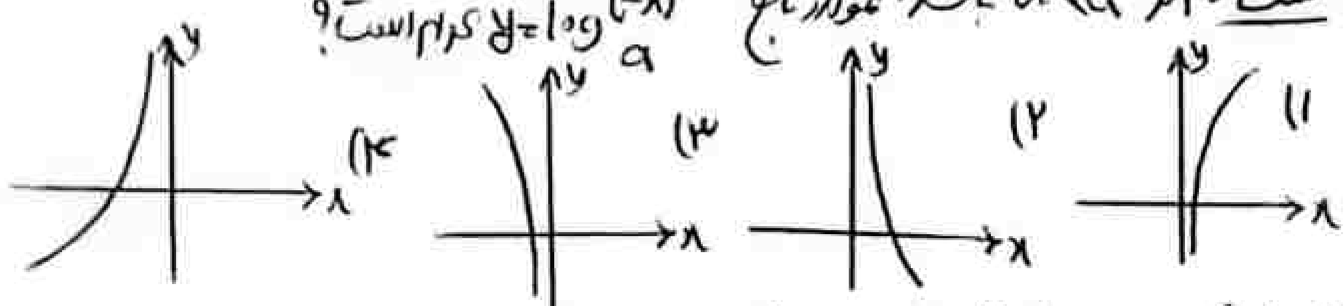
۸) مقایسه نمودارهای $y=\log_a^x$ و $y=\log_b^x$: در حالتی که $a>b>1$ یا $1>a>b>0$ باشد.



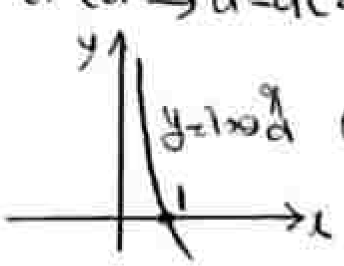


هر دو نمودار از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرند اما موقعیت آن‌ها نسبت به هم برای xهای بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از ۱ متفاوت است. برای xهای بزرگ‌تر از یک هرچه پایه بزرگ‌تر باشد نمودار آن پایین‌تر است و برای xهای کوچک‌تر از یک (و مثبت) هرچه پایه بزرگ‌تر باشد، نمودار بالاتر می‌باشد.

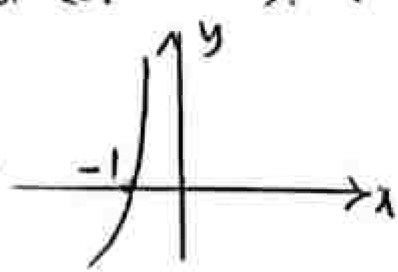
تست: اگر $a^2<a$ باشد، نمودار تابع $y=\log_a^{(-x)}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۴) ابتدا نامعادله $a^2<a$ را حل می‌کنیم: $0<a<1 \leftarrow a^2-a<0 \leftarrow a^2<a$

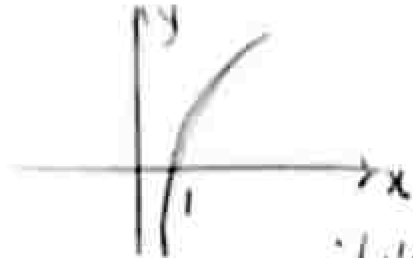


$\xrightarrow[\text{رسم می‌کنیم}]{\text{قرینه‌ی شکل را نسبت به محور yها}}$



تست: با توجه به نمودار تابع (۳۳) $y=\log_{m^2-4m+4} x$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور
مولف: رحیم قهرمان



حدود m کدام است؟ ۱) $m>3$ یا $m<1$ ۲) $m>2$
۳) $1<m<3$ ۴) $m\neq 1$

پاسخ: گزینه ی ۱) طبق نمودار با پیدا تابع $y=\log_a x$ ، $a>1$ باشد لذا:

$$m^2-4m+4>1 \to (m-2)^2>1 \to \begin{cases} m-2>1 \\ \text{یا} \\ m-2<-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>3 \\ \text{یا} \\ m<1\end{cases}$$

تست: شکل مقابل بیانگر نمودار تابع $y=\log_{\frac{\sqrt2}{2}}(x+a)$ می باشد. اگر معادله ی خط مجانب به صورت $x=b$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -6 ۳) 6 ۴) -3

پاسخ: گزینه ی ۳) می دانیم تابع از نقطه ی $(-2,0)$ می گذرد، بنابراین داریم:

$$y=\log_{\frac{\sqrt2}{2}}(x+a) \xrightarrow{(-2,0)\in f} 0=\log_{\frac{\sqrt2}{2}}(-2+a) \to -2+a=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^0 \to a=3$$

بنابراین ضابطه ی تابع به صورت $y=\log_{\frac{\sqrt2}{2}}(x+3)$ است و در نتیجه معادله ی خط مجانب به صورت $x=-3$ می باشد و دامنه ی تابع برابر $(-3,+\infty)$ می باشد. پس $b=-3$ و در نهایت $a-b=6$.

تست: تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=\log_{\frac12} x$ و $y=2^x$ کدام است؟

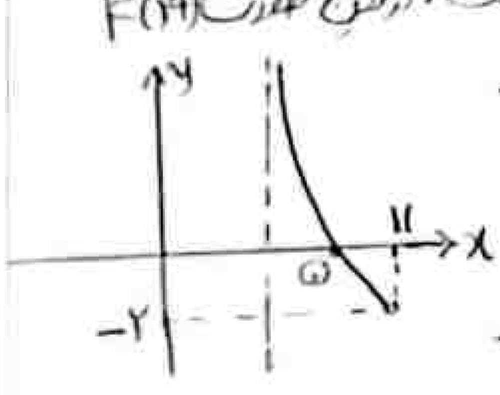
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۱)

همان طور که گفتیم اگر $a>1$ (در اینجا $a=2$)، آن گاه تابع نمایی و وارونش هیچ نقطه برخوردی ندارند. زیرا نمودار تابع $y=\log_{\frac12} x$ همواره زیر نیم ساز ربع اول و نمودار تابع $y=2^x$ همواره بالای نیم ساز ربع اول است. پس تعداد تلاقی آن ها صفر است.

تست: نمودار تابع $f(x)=a-\log_2(x-b)$ به شکل مقابل است. در این صورت $f(19)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6



پاسخ: گزینه ی ۱) با توجه به نمودار صورت سوال $f(5)=0$ و $f(11)=-2$ است.

$$f(5)=0 \to a-\log_2(5-b)=0 \to \log_2(5-b)=a$$

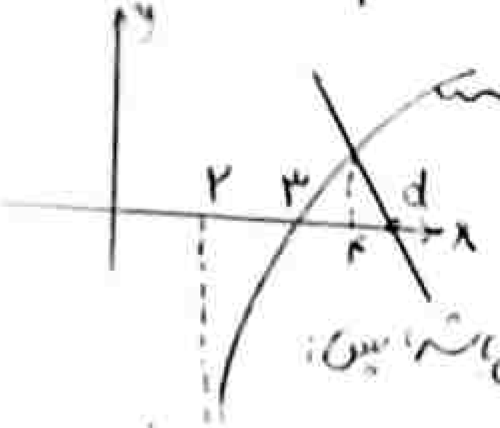
$$\to 5-b=2^b \Rightarrow 2^a+b=5 \quad (1)$$

$f(11) = a - \log_2(11-b) = -2 \Rightarrow \log_2(11-b) = a+2 \rightarrow$

$11-b = 2^{a+2} \rightarrow 4\times 2^a + b = 11 \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} 4\times 2^a + b = 11 \\ 2^a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow[\text{کم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را از هم}} (4-1)\times 2^a = 6 \rightarrow \begin{cases} 2^a = 2 \rightarrow a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$\rightarrow f(19) = 1 - \log_2(19-3) = 1-4 = -3$



تست: با توجه به شکل زیر، مقدار d چقدر است؟

$y = a + \log_2(x-b)$

۱) $\frac{14}{3}$ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) $\frac{15}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

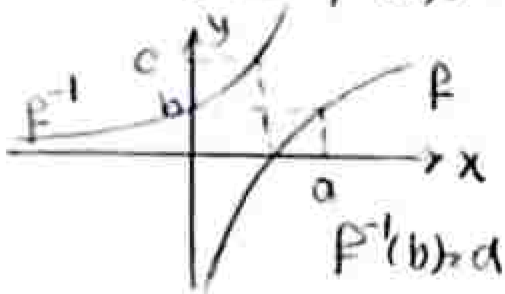
پاسخ: گزینه‌ی ۲) چون تابع $\log_2 x$ دو واحد به راست منتقل شده است پس $b=2$ است. از طرفی $f(3)=0$ می‌باشد پس:

$a + \log_2 1 = 0 \rightarrow a=0 \rightarrow f(x) = \log_2(x-2)$

خط $y=-3x+c$ و تابع $y=\log_2(x-2)$ در نقطه‌ای به طول $x=4$ متقاطع اند، بنابراین:

$-3x + c = \log_2(x-2) \xrightarrow{x=4} c=13 \Rightarrow y = -3x+13 \xrightarrow{y=0} x = \frac{13}{3}$

تست: در شکل زیر، نمودار $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x) = \log_2(x-1)$ و $f^{-1}(x)$ داده شده است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳) می‌دانیم که دامنه تابع f، برد تابع f^{-1} است. و بالعکس یعنی اگر $f(a)=b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b)=a$.

حال طول نقطه برخورد تابع $f(x)$ با محور x ها را بدست می‌آوریم.

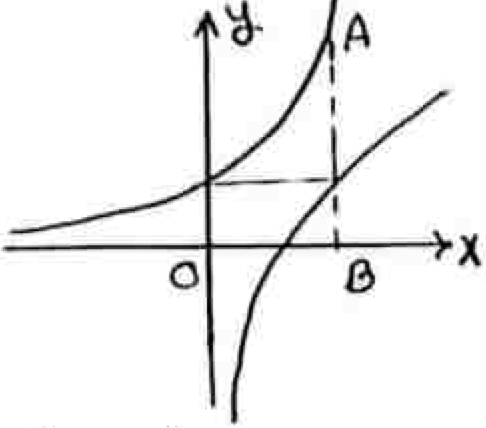
$f(x)=0 \rightarrow \log_2(x-1) = 0 \rightarrow x-1=1 \rightarrow x=2$

تابع $f(x)$ از نقطه‌ی $(2,0)$ عبور کرده است بنابراین طبق نکته گفته شده تابع f^{-1} از نقطه $(0,2)$ عبور کرده، بنابراین $b=2$ است. با توجه به شکل مشخص است که تابع $f(x)$ از نقطه $(a,2)$ عبور کرده است، پس:

$f(a) = 2 \Rightarrow \log_2(a-1) = 2 \rightarrow a=5$

از طرفی چون تابع f از نقطه‌ی $(5,2)$ عبور کرده است،
بنابراین می‌توان گفت که تابع f^{-1} باید از نقطه $(2,5)$ عبور کند، پس $c=5$ است.
در نتیجه مقدار $a+b+c$ برابر است با: $a+b+c=5+2+5=12$

تست: در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=a^x$ و وارون آن رسم شده است. اگر $S_{OAB}=4$ باشد، مقدار a کدام است؟



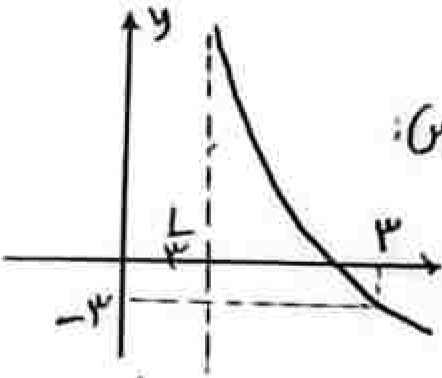
۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲) نمودار تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\log_a^x$ رسم شده است. عرض نقطه B برابر ۱ است.

$$f(0)=a^0=1 \Rightarrow y_B=1 \Rightarrow \log_a^x=1 \rightarrow x_B=a \quad \text{و} \quad x_A=a \Rightarrow y_A=a^a$$

$$S_{OAB}=\frac{OB\times AB}{2}=\frac{a\times a^a}{2}=4 \Rightarrow a^{a+1}=8 \Rightarrow a=2$$

تست: نمودار تابع $f(x)=\log_2\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-5)$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳) نمودار تابع $f(x)$ از نقطه $(3,-3)$ می‌گذرد، پس:

$$-3=\log_2\left(\frac{1}{3a+b}\right) \Rightarrow \frac{1}{3a+b}=\frac{1}{8} \rightarrow 3a+b=8 \quad (1)$$

از طرفی دامنه‌ی تابع $x>\frac{1}{3}$ است، پس:

$$\frac{1}{ax+b}>0 \rightarrow ax+b>0 \rightarrow x>-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{3} \rightarrow a=-3b \quad (2)$$

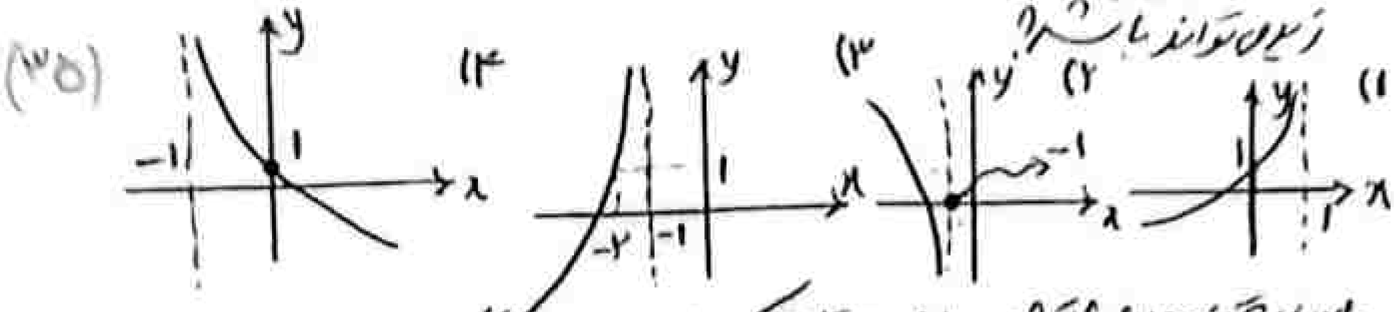
$$(1),(2) \Rightarrow 3(-3b)+b=8 \rightarrow b=-1 \rightarrow a=3$$

بنابراین $f(x)=\log_2^{\frac{1}{3x-1}}$ می‌باشد. با فرض $f^{-1}(-5)=m$ داریم:

$$f(m)=-5 \rightarrow \log_2^{\frac{1}{3m-1}}=-5 \rightarrow \frac{1}{3m-1}=2^{-5} \rightarrow m=11$$

(۳۵)

تست: نمودار تابع $y=1-\log_{0.2}(-x-1)$ کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

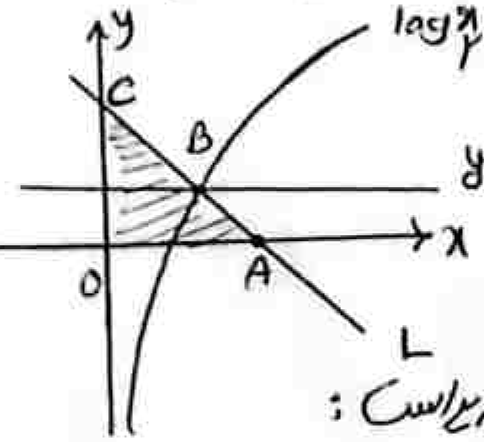


پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به دامنه‌ی تابع که $x<-1$ است، گزینه‌های ۲ یا ۳ صحیح می‌باشد.
صفر تابع را به دست می‌آوریم.

$$y=0 \to 1-\log_{0.2}(-x-1)=0 \to \log_{0.2}(-x-1)=1 \to -x-1=0.2 \to x=-1.2$$

با توجه به طول نقطه صفر تابع گزینه ۳ نمی‌تواند صحیح باشد زیرا مقدار طول نقطه برخورد تابع با محور xها عددی کمتر از ۲- است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست: اگر مثلث زیر متساوی الساقین باشد، مساحت آن چقدر است؟



۱) ۴٫۵ ۲) ۳٫۵ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱) ابتدا خط $y=1$ را با لگاریتم قطع می‌دهیم.

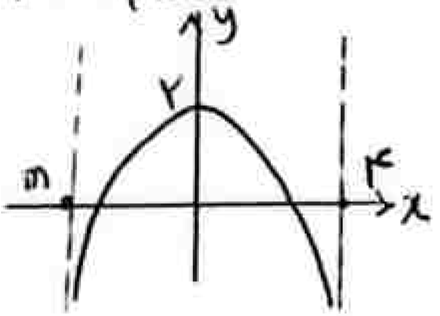
$$\log_2 x=1 \to x=2 \Rightarrow B(2,1)$$

چون مثلث OAC متساوی‌الساقین است، پس شیب خط L برابر ۱- است. پس معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$L: y-1=-1(x-2) \to y=3-x \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=0 \to y=3 \to y_C=3 \\ y=0 \to x=3 \to x_A=3 \end{cases} \to OA=OC=3$$

$$\Rightarrow S(O\hat{A}C)=\frac{1}{2}\times 3\times 3=4.5$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=\log_b(a-|x|)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $f(f(\frac{m}{2}))$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\log_3 4$ ۳) $\log_4 3$ ۴) $\log_3 2$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) با توجه به اینکه نمودار تابع $f(x)=\log_b(a-|x|)$ نسبت به محور yها قرینه است پس $m=-4$ می‌باشد، پس:

$$a-|4|=0 \to a=4 \Rightarrow f(x)=\log_b(4-|x|)$$

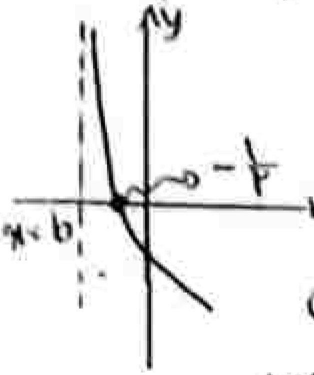
$\longrightarrow$

$f(1)=2 \to \log_b 4=2 \to b=2$

حال با توجه به ضابطه‌ی تابع f مقدار $f(f(-2))$ را به‌دست می‌آوریم.

$f(f(-2)) = f(1) = \log_2 4$

تست: شکل زیر مربوط به تابع $y=\log\frac{1}{x+a}$ می‌باشد. حاصل $a-b$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$y=\log\frac{1}{x+a}=-\log(x+a)$$

نمودار تابع فوق از انتقال $|a|$ واحدی نمودار $y=-\log x$ در راستای xها به دست می‌آید. از طرفی نمودار داده شده در صورت مسئله از انتقال نمودار $y=-\log x$ به اندازه‌ی $\frac{3}{2}$ واحد به چپ به دست آمده است، در نتیجه:

$a=\frac{3}{2} \to b=-\frac{3}{2} \Rightarrow a-b=3$

تست: اگر دامنه‌ی تابع $y=\log(ax+b)$ برابر $(4,+\infty)$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\log(bx+a)$ کدام است؟

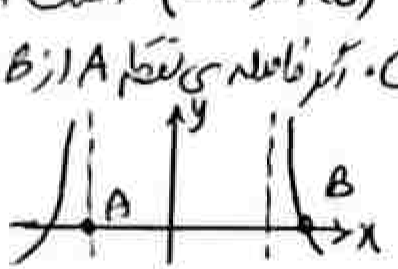
۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(-4,+\infty)$ ۳) $(0.25,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0.25)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) با توجه به دامنه‌ی تابع لگاریتم، عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax>-b$، اگر a مثبت باشد این نامعادله به $x>-\frac{b}{a}$ و اگر منفی باشد این نامعادله به صورت $x<-\frac{b}{a}$ ظاهر می‌شود. با توجه به سؤال که دامنه‌ی تابع $(4,+\infty)$ است، پس a مثبت است، پس a مثبت است و $-\frac{b}{a}=4$ یعنی $b=-4a$ و با توجه به مثبت بودن a، پس b علامتی منفی است. اکنون به تابع $y=\log(bx+a)$ می‌پردازیم، برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع باید نامعادله‌ی $bx+a>0$ را حل کنیم یعنی $bx>-a$، با توجه به منفی بودن b، این نامعادله به صورت روبرو است.

$$bx>-a \xrightarrow{b<0} x<-\frac{a}{b} \to x<-\frac{a}{-4a} \to x<\frac{1}{4}$$

یعنی دامنه تابع $y=\log(bx+a)$ به صورت $(-\infty,0.25)$ است.

تست: نمودار زیر متعلق به تابع $y=\log\frac{a}{|x|-a}$ است. اگر فاصله‌ی نقطه A از B برابر ۶ باشد، a کدام است؟



۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

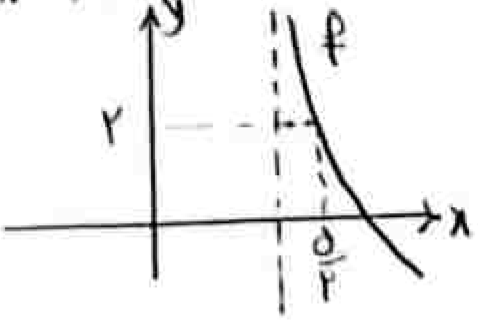
$y=0 \to \log \dfrac{a}{|x|-a}=0 \Rightarrow \dfrac{a}{|x|-a}=1$

$\Rightarrow |x|-a=a \to x=\pm 2a \xrightarrow{a>0} B=2a$

$\dfrac{a}{|x|-a}>0 \xrightarrow{a>0} |x|-a>0 \to |x|>a \Rightarrow \begin{cases} x>a \\ x<-a \Rightarrow A=-a \end{cases}$

$AB=2a-(-a)=6 \to a=2$

<u>تست</u>: نمودار تابع $f(x)=\log_a(x+b)$ به صورت مقابل است. اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ باشد، $\log_a(2b+4)$ کدام است؟



۱) ۲　　۲) ۱　　۳) ۱-　　۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی ۴) با توجه این که $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ می‌باشد. پس دامنه‌ی تابع $(2,+\infty)$ است. پس:

$x+b>0 \to x>-b \Rightarrow -b=2 \Rightarrow b=-2$

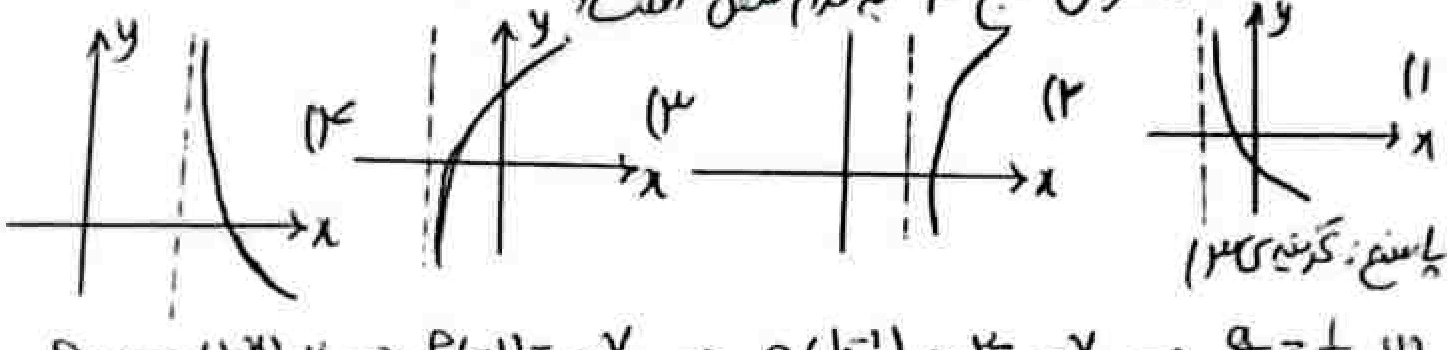
از طرفی $f(x)$ از نقطه $(\frac{5}{2},2)$ می‌گذرد، پس:

$2=\log_a(\frac{5}{2}-2) \Rightarrow 2=\log_a \frac{1}{2} \to a^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

بنابراین حاصل $\log_a(2b+4)$ برابر است با:

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2=-2$

<u>تست</u>: اگر نمودار تابع نمایی $f(x)=a(b^x)-2$ از دو نقطه‌ی $A(-1,-\frac{7}{4})$ و $B(1,2)$ عبور کند، نمودار معکوس تابع f به کدام شکل است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$f(x)=a(b^x)-2 \Rightarrow f(-1)=-\frac{7}{4} \to a(b^{-1})-2=-\frac{7}{4} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ (۱)

$f(1)=2 \to ab-2=2 \to ab=4$ (۲) ؛ (۱)،(۲): $a(4a)=4 \to a=\pm 1 \to$

$(a=1,\ b=-1)$ ؛ $(b=4,\ b=-4)$

چون در تابع نمایی پایه نمی‌تواند منفی باشد، پس $a=1$ و $b=4$ قابل قبول است، بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=4^x-2$ خواهد بود و داریم:

$y=4^x-2 \Rightarrow 4^x=y+2 \to x=\log_4(y+2) \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_4(x+2)$

با توجه به اینکه $f^{-1}(-1)=\log_4 1=0$ ، $f^{-1}(0)=\log_4 2=\frac{1}{2}$ می‌توان نتیجه گرفت که گزینه‌ی (۳) جواب است؟

<u>تست</u>: تساوی نمایی $\left(\frac{1}{\sqrt3-\sqrt2}\right)^{2m+1}=2(\sqrt3+\sqrt2)$ معادل کدام گزینه است؟

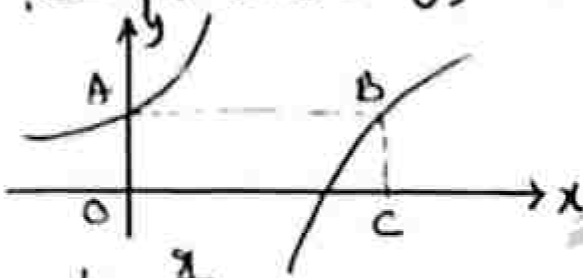
۱) $\log_2(5+2\sqrt6)=m$ ۲) $\log_2\frac{5-2\sqrt6}{2}=m$ ۳) $\log_{(5+2\sqrt6)}2=m$ ۴) $\log_{(5-2\sqrt6)}2=m$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$\left(\frac{1}{\sqrt3-\sqrt2}\right)^{2m+1}=2(\sqrt3+\sqrt2)\to\left(\frac{\sqrt3+\sqrt2}{(\sqrt3-\sqrt2)(\sqrt3+\sqrt2)}\right)^{2m+1}=2(\sqrt3+\sqrt2)\to$$

$$(\sqrt3+\sqrt2)^{2m}=2\to\left((\sqrt3+\sqrt2)^2\right)^m=2\to(5+2\sqrt6)^m=2\Rightarrow m=\log_{(5+2\sqrt6)}2$$

<u>تست</u>: در شکل مقابل، $f(x)=\log_3\left(\frac{x}{2}\right)$ باشد، مساحت مستطیل $OABC$ کدام است؟



۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینه‌ی (۳) طول نقطه تلاقی $f(x)$ با محور xها را می‌یابیم:

$$0=\log_3\frac{x}{2}\to\frac{x}{2}=1\to x=2$$

بنابراین عرض نقطه تلاقی f^{-1} با محور yها برابر ۲ است. حال طول نقطه‌ی B را می‌یابیم:

$$2=\log_3\frac{x}{2}\to\frac{x}{2}=9\to x=18\to$$

پس طول مستطیل برابر ۱۸ و عرض آن برابر ۲ است و داریم:

$$S=18\times2=36$$

<u>تست</u>: اگر $f(\log_5 x)=25x^2+1$ آنگاه ضابطه‌ی تابع f کدام است؟

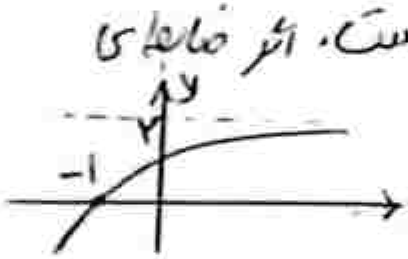
۱) $f(x)=5^{2x}+1$ ۲) $f(x)=5^{4x}+1$ ۳) $f(x)=5^{2x+2}+1$ ۴) $f(x)=5^{x^2+2}+1$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$\log_5 x=A\Rightarrow x=5^A\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ضابطه‌ی } f}f(A)=25\times(5^A)^2+1\Rightarrow$$

$$f(A)=5^2\times5^{2A}=5^{2A+2}+1\Rightarrow f(x)=5^{2x+2}+1$$

<u>تست</u>: نمودار تابع نمایی $f(x)=a-b\left(\frac12\right)^{x-1}$ در شکل زیر رسم شده است. اگر ضابطه‌ی تابع وارون f را به صورت $f^{-1}(x)=\log_2\frac{mx+n}{px+q}$ نمایش دهیم حاصل $m+n+p+q+2$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۸) پاسخ: گزینه ی ۲) مقدار ثابت a برابر ۲ است.

$f(-1)=0 \rightarrow 2-b(\frac{1}{2})^{-2}=0 \rightarrow b=\frac{1}{2}$

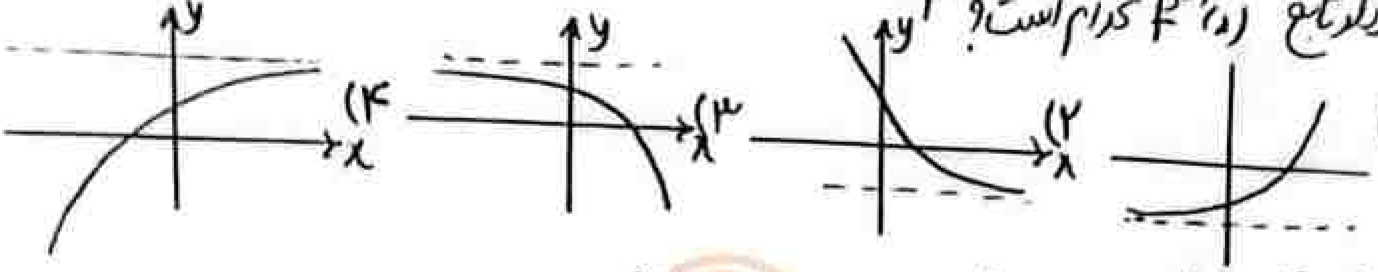
$f(x)=2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{x-1} \Rightarrow f(x)=2-(\frac{1}{2})^x \xrightarrow{\text{ضابطه وارون}} x=2-(\frac{1}{2})^y$

$\rightarrow (\frac{1}{2})^y=2-x \rightarrow 2^{-y}=2-x \Rightarrow \log_2 2^{-y}=\log_2(2-x) \rightarrow -y=\log_2(2-x)$

$\Rightarrow y=-\log_2(2-x) \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2(\frac{1}{2-x}) \xrightarrow{\text{مقایسه}} f^{-1}(x)=\log_z \frac{mx+n}{px+q}$

$\rightarrow m=0,\ n=1,\ p=-1,\ q=2,\ z=2 \Rightarrow m+n+p+q+z=0+1+(-1)+2+2=4$

تست: نمودار تابع $f(x)=\log_2(ax+b)$ خط $y=2x+4$ را روی محورهای مختصات قطع می‌کند. نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟



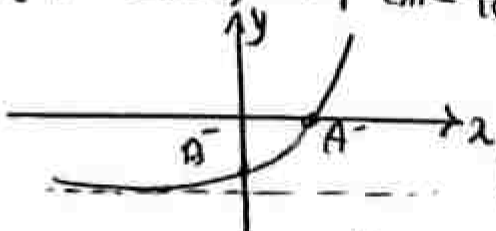
پاسخ: گزینه ی ۱)

$y=2x+4$ نقاط برخورد با محورهای مختصات $\Rightarrow \begin{cases} A(0,4) \Rightarrow 4=\log_2 b \rightarrow b=16 \\ B(-2,0) \Rightarrow 0=\log_2(-2a+16) \rightarrow a=\frac{15}{2} \end{cases}$

$f(x)=\log_2(\frac{15}{2}x+16) \xrightarrow{\text{ضابطه } f^{-1}} x=\log_2(\frac{15}{2}y+16) \Rightarrow 2^x=\frac{15}{2}y+16$

$\xrightarrow{\times 2} 2^{x+1}=15y+32 \rightarrow y=\frac{1}{15}(2^{x+1}-32) \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{15}(2^{x+1}-32)$

نقاط حذف نمودار: $A'(4,0),\ B'(0,-2)$



$y=-\frac{32}{15}$

تست: اگر $f(x)=\frac{10^x+15^x}{3^x+2^x}$ باشد، مقدار $\frac{f^{-1}(4)}{f^{-1}(9)}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\log_3 2$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\log_2 3$

پاسخ: گزینه ی ۲)

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{10^x+15^x}{3^x+2^x}=\frac{(2\times5)^x+(3\times5)^x}{3^x+2^x}=\frac{(2^x\times5^x)+(3^x\times5^x)}{3^x+2^x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{5^x(2^x+3^x)}{3^x+2^x}=5^x$$

با توجه به خواسته سوال کافیست وارون تابع یعنی f را به دست آوریم، بنابراین:

$$y=5^x \Rightarrow x=\log_5 y \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} f^{-1}(x)=\log_5 x$$

مقادیر $f^{-1}(4)$ و $f^{-1}(9)$ را می‌یابیم:

1) $f^{-1}(4)=\log_5 4$

2) $f^{-1}(9)=\log_5 9$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(4)}{f^{-1}(9)}=\frac{\log_5 4}{\log_5 9}=\log_9 4=\log_{3^2} 2^2=\log_3 2$$

تست: اگر $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ و $f^{-1}(x)=a\log_2\frac{bx-1}{bx+1}$ باشد، $a+b$ چه مقدار است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) -1

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{2^x+\frac{1}{2^x}}{2^x-\frac{1}{2^x}} \Rightarrow f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1} \rightarrow$$

$$2^{2x}+1=y\times 2^{2x}-y \Rightarrow 2^{2x}=\frac{y+1}{y-1} \Rightarrow \log_2 2^{2x}=\log_2\frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow 2x=\log_2\frac{y+1}{y-1} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\log_2\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=1 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

تست: با فرض $f(x)=\log_2^{x+1}-1$ تابع $y=|f^{-1}(x)|$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

1) 1 2) -1 3) 2 4) -2

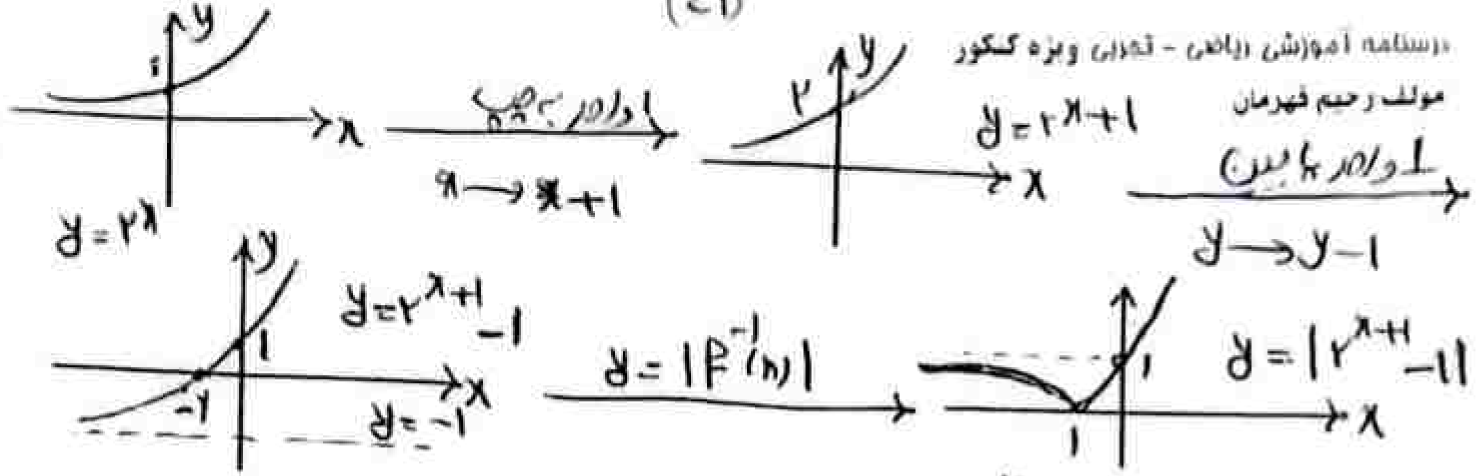
پاسخ: گزینه‌ی ۲

ابتدا وارون تابع $f(x)=\log_2^{x+1}-1$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$y=\log_2^{x+1}-1 \Rightarrow \log_2^{x+1}=y+1 \Rightarrow x+1=2^{y+1} \Rightarrow x=2^{y+1}-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=2^{x+1}-1$$

حالا نمودار تابع $y=|2^{x+1}-1|$ را رسم می‌کنیم. داریم:



تابع در بازه‌ی $[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است، بنابراین $a=-1$

تست: اگر نمودار توابع $y=a^{x-4}+b$ و $y=c+\log_3(x-2)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه باشند، آن‌گاه حاصل $2a+c-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

چون نمودار دو تابع نسبت به خط $y=x$ قرینه‌ی یکدیگر هستند، یعنی این دو تابع، وارون هم هستند، پس داریم:

$$y=c+\log_3(x-2) \Rightarrow \log_3(x-2)=y-c \Rightarrow x-2=3^{y-c} \Rightarrow x=2+3^{y-c}$$

$$\xrightarrow{\text{تابع وارون}} y=2+3^{x-c} \Rightarrow 3^{x-c}+2=a^{x-4}+b \to a=3,\ c=4,\ b=2$$

$$\Rightarrow 2a+c-b=2\times3+4-2=8$$

تست: وارون تابع $f(x)=2^{3x}+3(2^{2x}+2^x)$ کدام است؟

۱) $y=\log_2(\sqrt[3]{x}-1)$

۲) $y=\log_2(\sqrt[3]{x-1}+1)$

۳) $y=\log_2(\sqrt[3]{x+1}-1)$

۴) $y=\log_4(\sqrt[3]{x+1}-1)$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) ابتدا تابع f را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=2^{3x}+3(2^{2x})+3(2^x)+1-1=(2^x+1)^3-1 \to y=(2^x+1)^3-1$$

$$\to \sqrt[3]{y+1}=2^x+1 \to 2^x=\sqrt[3]{y+1}-1 \Rightarrow x=\log_2(\sqrt[3]{y+1}-1) \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt[3]{x+1}-1)$$

تست: اگر $f(x)=\log_3(x-1)$ آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{4-f^{-1}(x)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) ابتدا باید ضابطه‌ی تابع معکوس را پیدا کنیم، برای این منظور x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس y را به x و x را به $f^{-1}(x)$ تبدیل می‌کنیم:

$y=\log_2^{x-1} \xrightarrow{\text{تعریف}} x-1=2^y \Rightarrow f^{-1}(x)=2^x+1$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{4-f^{-1}(x)}$ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$4-f^{-1}(x)\ge 0 \to 4-(2^x+1)\ge 0 \Rightarrow 2^x\le 2^1 \Rightarrow x\le 1$

که این جواب شامل یک عدد طبیعی می‌باشد ($x=1$)

تست: تابع وارون تابع $f(x)=10^{x-1-3\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

1) $f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{\log x}+1)^3$ 2) $f^{-1}(x)=(\log x+1)^3$

3) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\log x}+x^3+1$ 4) $f^{-1}(x)=\log x+x^3+1$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$y=10^{x-1-3\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}=10^{x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}-1}=10^{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\Rightarrow$

$y=10^{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\xrightarrow{\text{تعریف}}\log_{10}^y=(\sqrt[3]{x}-1)^3 \xRightarrow{\text{رادیکال سوم}} \sqrt[3]{\log_{10}^y}=\sqrt[3]{x}-1$

$\to \sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{\log_{10}^y}\xrightarrow{\text{توان ۳}} x=(1+\sqrt[3]{\log_{10}^y})^3\to$

$f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{\log x}+1)^3$

تست: اگر $0<x\le 1$، آن گاه ضابطه‌ی تابع معکوس $y=(\log_2^x)^2-2\log_2^x+1$ کدام است؟

1) $2^{1+\sqrt{x}}$ 2) $2^{1-\sqrt{x}}$ 3) $1-\sqrt{2x}$ 4) $1+\sqrt{2x}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$y=(\log_2^x-1)^2 ;\ (0<x\le 1 ,\ y\ge 0) \xrightarrow{\text{جذر}} -\sqrt{y}=\log_2^x-1 \Rightarrow$

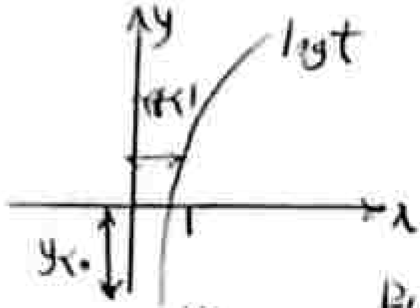
$\log_2^x=1-\sqrt{y} \xrightarrow{\text{تعریف}} x=2^{1-\sqrt{y}} \to h^{-1}(x)=2^{1-\sqrt{x}}$

تست: برد تابع $f(x)=\log(\frac{1}{2^x+1})$ کدام است؟

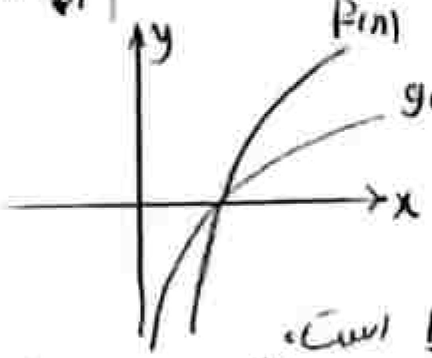
1) $(0,1)$ 2) $(0,+\infty)$ 3) $(-\infty,0)$ 4) $(-\infty,+\infty)$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) $2^x>0 \to 2^x+1>1 \to 0<\frac{1}{2^x+1}<1$

اگر $t=\frac{1}{2^x+1}$ قرار دهیم برای تابع $\log t$ را با شرط $t\in(0,1)$ می‌خواهیم. نمودار $\log t$ را باید ببینیم، برد تابع $(-\infty,0)$ می‌شود.



تست: با توجه به نمودار توابع $f(x)=\log x$ و $g(x)$، کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی تابع g باشد؟

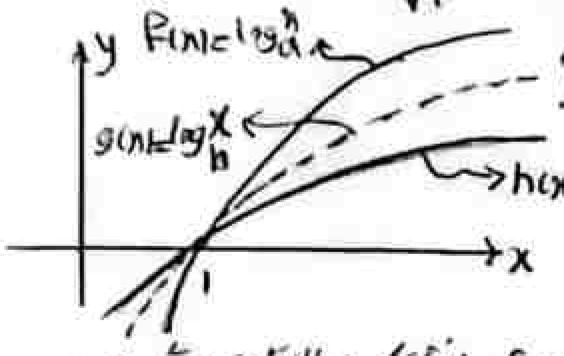


۱) $g(x)=\log_{16} x^2$ ۲) $g(x)=\log_{10} x^2$

۳) $g(x)=\log_{5} x$ ۴) $g(x)=\log_{12} x$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) با توجه به این که پایه‌ی لگاریتم در تابع $f(x)$ برابر ۱۰ است، تابع لگاریتمی $g(x)$ باید پایه‌ای بیشتر از ۱۰ داشته باشد، بنابراین تنها گزینه‌ی (۴) می‌تواند نمودار $g(x)$ باشد، توجه کنید که دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $(0,+\infty)$ است. گزینه‌های (۱) و (۲) با توجه به این که دامنه‌ی آن‌ها $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ است، نمی‌توانند جواب باشند. ضمن آن که ضابطه‌ی آن‌ها را می‌توان به صورت $y=\log_{\sqrt{10}}|x|$ و $y=\log_{4}|x|$ نوشت که پایه لگاریتم در آن‌ها کمتر از ۱۰ است.

تست: کدام نتیجه گیری درباره‌ی نمودار مقابل صحیح است؟



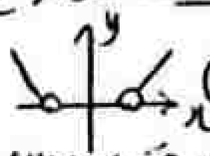
۱) $1<c<b<a$ ۲) $0<c<a<b<1$

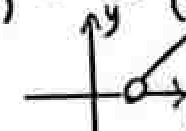
۳) $1<a<b<c$ ۴) $0<a<b<c<1$

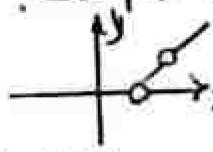
پاسخ: گزینه‌ی ۳) با توجه به این که هر ۳ تابع صعودی هستند، پس مبنای هر ۳ تابع بزرگتر از یک است.

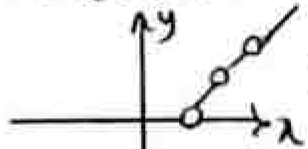
$$f(x)>g(x)>h(x) \Rightarrow \log_a x > \log_b x > \log_c x \Rightarrow a<b<c \to 1<a<b<c$$

تست: نمودار تابع $\log_{(x-2)} y = \log_{(x-2)} (|x|-2)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$\begin{cases} y>0 \quad \text{و} \quad x-2\neq 1 \\ x-2>0 \to x>2 \\ |x|-2>0 \Rightarrow x>2 \text{ یا } x<-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ x>2 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

((قواعد و قضایای لگاریتم))

مولف رحیم قهرمان

اگر $a>0$ و $a \neq 1$ باشد، داریم:

قاعده (۱): لگاریتم یک در هر مبنایی (که باشد)، برابر صفر است، یعنی $\log_a 1 = 0$

قاعده (۲): لگاریتم هر عدد مثبت مخالف یک در مبنای خودش، برابر یک است، یعنی: $\log_a a = 1$

قاعده ی (۳): $\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$ (قابل تعمیم است)

قاعده ی (۴): $\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$

قاعده ی (۵): $\log_a x^n = n\log_a x \; ; \; (x>0)$

قاعده ی (۶): $\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\log_a x \; ; \; (x>0)$

به عبارت دیگر طبق قاعده های (۵) و (۶)، توان عبارت جلوی لگاریتم و عکس توان مبنا را می توانیم به عنوان ضریب لگاریتم در نظر بگیریم، یعنی:

قاعده ی (۷):

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x \; ; \; (x>0)$$

دقت کنیم: اگر ضریب لگاریتم ضربی وجود داشته باشد، می توانیم مستقیما آن را به عنوان عبارت جلوی لگاریتم در نظر بگیریم و یا عکس آن را توان مبنا فرض کنیم:

$$n\log_a x = \log_a x^n = \log_{a^{\frac{1}{n}}} x$$

قاعده ی (۸):

$$\log_B A \times \log_A B = 1 \Rightarrow \log_B A = \frac{1}{\log_A B}$$

در حل بعضی از تست ها مجبور هستیم، جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را با هم عوض کنیم، برای این منظور کافی است، این نکته دقت کنیم که با این جابجایی، حاصل لگاریتم جدید، عکس لگاریتم قبلی است به عنوان مثال $\log_x a = 2$ باشد. حاصل $\log_a x$ برابر $\frac{1}{2}$ است، به خاطر بسپاریم:

$$\log_A B = k \Rightarrow \log_B A = \frac{1}{k}$$

قاعده ی (۹):

$$\log_B A \times \log_C B = \log_C A$$

مهم ترین کاربرد قاعده فوق، تغییر مبنا است. از رابطه فوق نتیجه می گیریم که:

$$\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}$$

$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$$

اگر در یک عبارت نمایی، توان، یک لگاریتم باشد، می‌توانیم جای پایه‌ی عبارت نمایی و عبارت جلوی لگاریتم توان را باهم جابجا کنیم.

تذکر مهم: قاعده‌ی (۱۰) یک حالت خاص مهم دارد. اگر در این قاعده، پایه‌ی عبارت نمایی و مبنای لگاریتم توان باهم برابر باشند، با جابجایی پایه و عبارت جلوی لگاریتم توان، حاصل بسیار ساده می‌شود. به قاعده‌ی زیر دقت کنیم:

$$a^{\log_a B} = B \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} a^{m\log_a \clubsuit} = \clubsuit^m$$

تست: اگر $\log \frac{a+b}{2} = \frac{\log a + \log b}{2}$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2+ab}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

از فرض سوال نتیجه می‌گیریم:

$$2\log \frac{a+b}{2} = \log a + \log b \Rightarrow \log \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log ab \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab \Rightarrow a^2+b^2 = 2ab$$

حال با جایگذاری $a^2+b^2 = 2ab$ در عبارت سوال داریم:

$$\frac{(a^2+b^2)-ab}{(a^2+b^2)+ab} = \frac{2ab-ab}{2ab+ab} = \frac{3}{4}$$

تست: حاصل $3^{\frac{\log(\log 4)}{\log 3}} + 11^{\frac{\log(\log 25)}{\log 11}}$ کدام است؟

۱) $\log 50$ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

طبق قانون تغییر مبنا در لگاریتم، یعنی $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$، عبارت به صورت زیر در می‌آید:

$$3^{\log_3(\log 4)} + 11^{\log_{11}(\log 25)} = \log 4 + \log 25 = \log^{(4\times 25)} = \log^{100} = 2$$

تست: لگاریتم x در مبنای $\sqrt[3]{y}$، دو برابر لگاریتم x^3 در مبنای $z\sqrt{2}$ است. در این صورت حاصل $(y^4+2-z^4)^4$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۶ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

فرض سوال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\log_{\sqrt[3]{y}} x = 2\log_{z\sqrt{2}} x^3 \Rightarrow \frac{\log x}{\log \sqrt[3]{y}} = \frac{2\log x^3}{\log \sqrt{2}z^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{\frac{1}{2}\log y}=\frac{4\log x}{\frac{3}{2}\log 2}\xrightarrow{\log x\neq 0}$$

$$2\log y=\frac{3}{2}\log 2\Rightarrow 4\log y=3\log 2\Rightarrow \log y^4=\log 2^3\Rightarrow y^4=2^3$$

با جایگذاری $y^4=2^3$ در عبارت $(y^4+2-2^3)^4$ داریم:

$$(y^4+2-2^3)^4=(2^3+2-2^3)^4=2^4=16$$

<u>تست</u>: حاصل $\frac{3}{3+\log_2^9}+\frac{3}{2+\log_3^8}+\frac{3}{1+\log_{12}^6}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۶ ۴) ۳ پاسخ: گزینه ی ۴)

می دانیم $1=\log_{12}^{12}$ و $2=\log_3^9$ و $3=\log_2^8$ استفاده میکنیم:

$$\frac{3}{1+\log_{12}^6}+\frac{3}{2+\log_3^8}+\frac{3}{3+\log_2^9}=\frac{3}{\log_{12}^{12}+\log_{12}^6}+\frac{3}{\log_3^9+\log_3^8}+$$

$$\frac{3}{\log_2^8+\log_2^9}=\frac{3}{\log_{12}^{72}}+\frac{3}{\log_3^{72}}+\frac{3}{\log_2^{72}}=3(\log_{72}^{12}+\log_{72}^{3}+\log_{72}^{2})$$

$$=3\log_{72}^{72}=3$$

<u>تست</u>: اگر $\log_3^2=a$ باشد حاصل $\frac{2\log 2+3\log 3}{\log 5-1}$ کدام است؟

۱) $3+\frac{2}{a}$ ۲) $-3-\frac{2}{a}$ ۳) $-2-\frac{3}{a}$ ۴) $2+\frac{3}{a}$

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$\log_3^2=a\Rightarrow \frac{\log 2}{\log 3}=a\Rightarrow \log 2=a\log 3$$

$$\frac{2\log 2+3\log 3}{\log 5-1}=\frac{2(a\log 3)+3\log 3}{1-\log 2-1}=\frac{\log 3(2a+3)}{-\log 2}$$

$$=\frac{\log 3(2a+3)}{-a\log 3}=\frac{2a+3}{-a}=-2-\frac{3}{a}$$

<u>تست</u>: اگر $\log_b^a=t$ باشد آنگاه حاصل $\log_{a^3b^4}a^4b^3$ کدام است؟

۱) $\frac{4+3t}{3+4t}$ ۲) $\frac{3+4t}{4+3t}$ ۳) $\frac{3+4t}{4+t}$ ۴) $\frac{4+3t}{3+t}$

پاسخ: گزینه ی ۲)

$$\log_{a^3b^4}^{a^4b^3}=\log_{a^3b^4}^{a^4}+\log_{a^3b^4}^{b^3}$$

$$=4\log_{a^3b^4}^{a}+3\log_{a^3b^4}^{b}=\frac{4}{\log_a^{a^3b^4}}+\frac{3}{\log_b^{a^3b^4}}$$

$$=\frac{4}{\log_a^{a^3}+\log_a^{b^4}}+\frac{3}{\log_b^{a^3}+\log_b^{b^4}}=\frac{4}{3\log_a^a+4\log_a^b}+\frac{3}{3\log_b^a+4\log_b^b}$$

$$=\frac{4}{3+\frac{4}{t}}+\frac{3}{3t+4}=\frac{4t+3}{3t+4}$$

<u>تست:</u> اگر n عددی طبیعی و دلخواه باشد، حاصل عبارت $\frac{n}{\log_3^2+n}+\frac{1}{1+n\log_2^3}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) n ۳) n^2 ۴) $\log_2^3$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\frac{n}{n+\log_3^2}+\frac{1}{1+n\log_2^3}=\frac{n}{n\times\log_3^3+\log_3^2}+\frac{1}{1+\log_2^{3^n}}$$

$$=\frac{n}{\log_3^{3^n}+\log_3^2}+\frac{1}{\log_2^2+\log_2^{3^n}}=\frac{n}{\log_3^{2\times3^n}}+\frac{1}{\log_2^{2\times3^n}}$$

$$=n\times\log_{2\times3^n}^{3}+\log_{2\times3^n}^{2}=\log_{2\times3^n}^{3^n}+\log_{2\times3^n}^{2}=\log_{2\times3^n}^{3^n\times2}=1$$

<u>تست:</u> اگر $\log_2^a+\log_2^b=4$ و $\log_2^{(a+b)}=3$ باشد، مقدار $\log_2(a^3+b^3)$ کدام است؟

۱) 100 ۲) 128 ۳) 256 ۴) 441

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\log_2^a+\log_2^b=4\Rightarrow\log_2^{ab}=4\rightarrow ab=16\rightarrow p=16$$

$$\log_2^{(a+b)}=3\Rightarrow a+b=8\rightarrow S=8$$

حال برای یافتن $\log_2^{a^3+b^3}$، ابتدا مقدار a^3+b^3 را می‌یابیم:

$$a^3+b^3=S^3-3pS\Rightarrow a^3+b^3=(8)^3-3(16\times8)=2^9-3\times2^4\times2^3$$

$$=2^9-3\times2^7=2^7(4-3)=128$$

مولف: رحیم قهرمان

تست: اگر $\log 64 + 2\log 5 - 3\log 2/5 = a$ آنگاه $\log 2$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{a-1}{10}$ ۲) $\frac{a-5}{10}$ ۳) $\frac{a+1}{10}$ ۴) $\frac{a+5}{10}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$\log 2^6 + 2\log 5 - 3\log\left(\frac{5}{2}\right) = a \Rightarrow 6\log 2 + 2(1-\log 2) - 3(\log 5 - \log 2) = a$$

$$\Rightarrow 6\log 2 + 2 - 2\log 2 - 3(1-\log 2 - \log 2) = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a+1}{10}$$

تست: اگر $\log_6 3 = 0/6$ باشد، حاصل $\log_{24} 9$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\log_{24} 9 = \frac{\log_6 9}{\log_6 24} = \frac{\log_6 3^2}{\log_6 6 + 2\log_6 2} = \frac{2\log_6 3}{1+2\log_6 2}$$

از طرفی می‌دانیم $\log_6 2 = \log_6 \frac{6}{3} = 1 - \log_6 3 = 0/4$ است، پس:

$$\frac{2\log_6 3}{1+2\log_6 2} = \frac{2\times(0/6)}{1+2(0/4)} = \frac{1/2}{1/8} = \frac{2}{3}$$

تست: اگر $\log 5 = 0/699$ آنگاه $\log \sqrt[5]{0/0008}$ چه قدر از عدد -1 بیشتر است؟

۱) $0/2298$ ۲) $0/3608$ ۳) $0/3806$ ۴) $0/2982$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای آن که بفهمیم $\log \sqrt[5]{0/0008}$ چه قدر از -1 بیشتر است، کافی است مقدار زیر را حساب کنیم:

$$\log \sqrt[5]{0/0008} - (-1) = \log (0/0008)^{\frac{1}{5}} + 1 = \frac{1}{5} \times \log 0/0008 + 1$$

$$= \frac{1}{5}\log \frac{8}{10000} + 1 = \frac{1}{5}\log \frac{2^3}{10^4} + 1 = \frac{1}{5}\left((3\log 2) - (4\log 10)\right) + 1$$

$$= \frac{1}{5}\left((3\log 2) - 4\right) + 1 = \frac{3}{5}\log 2 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(3\log 2 + 1) \xrightarrow{\log 2 = 1 - \log 5}$$

$$= \frac{1}{5}(3(1-\log 5)+1) \xrightarrow{\log 5 = 0/699} \frac{1}{5}(3(1-0/699)+1) = \frac{1}{5}(1/903) = 0/3806$$

تست: حاصل $\log_{\sqrt[4]{3}} (\sqrt{5}+\sqrt{2}) + \log_{\sqrt{3}} (7-2\sqrt{10})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\log_{\sqrt[4]{3}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\log_{\sqrt{3}}(7-2\sqrt{10})=\log_{3^{\frac{1}{4}}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\log_{3^{\frac{1}{2}}}(7-2\sqrt{10})$$

$$=4\log_3(\sqrt{5}+\sqrt{2})+2\log_3(7-2\sqrt{10})=2\left(\log_3(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2+\log_3(7-2\sqrt{10})\right)$$

$$=2\left(\log_3(7+2\sqrt{10})(7-2\sqrt{10})\right)=2\log_3 9=4$$

تست: اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ و $\log 7=c$ باشد، حاصل $\log_{84}\sqrt[5]{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{3b-a+c}{2a-b-c}$ ۲) $\frac{3a-2b}{2a+b-2c}$ ۳) $\frac{2a+b}{2a+b+c}$ ۴) $\frac{2a+b}{5(2a+b+c)}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\log_{84}\sqrt[5]{12}=\frac{\log\sqrt[5]{12}}{\log 84}=\frac{\frac{1}{5}\log 12}{\log 84}=\frac{\log(2^2\times 3)}{5\log(2^2\times 3\times 7)}$$

$$=\frac{2\log 2+\log 3}{5(2\log 2+\log 3+\log 7)}=\frac{2a+b}{5(2a+b+c)}$$

تست: اگر $4^a=96$ و $6^b=144$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{23}$ ۲) 1 ۳) $\log_6 4$ ۴) $\log_4 6$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$a=\log_4 96$ و $b=\log_6 144$

$$\text{عبارت}=\frac{1}{\log_4 96-\log_4 4}+\frac{1}{\log_6 144-\log_6 6}=\frac{1}{\log_4 24}+\frac{1}{\log_6 24}$$

$$=\log_{24}4+\log_{24}6=\log_{24}24=1$$

تست: اگر $\log 45=a$ و $\log 125=b$ باشد، آنگاه $\log_{81}8$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{9-3b}{6a-2b}$ ۲) $\frac{b-6}{3a-b}$ ۳) $\frac{9-2b}{3a-b}$ ۴) $\frac{6-b}{3a-b}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\log 125=\log 5^3=3\log 5=b \Rightarrow \log 5=\frac{b}{3}$$

$$\log 45=\log(3^2\times 5)=\log 3^2+\log 5=2\log 3+\frac{b}{3}=a \Rightarrow \log 3=\frac{3a-b}{6}$$

حال به محاسبه‌ی $\log_{81}8$ برحسب a و b می‌پردازیم:

$$\log_{81}8=\log_{3^4}2^3=\frac{3}{4}\log_3 2=\frac{3}{4}\times\frac{\log 2}{\log 3}=\frac{3}{4}\times\frac{1-\log 5}{\log 3}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{1-\frac{b}{3}}{\frac{3a-b}{4}}=\frac{9-3b}{4a-2b}$$

تست: اگر $6^a=2$ و $6^b=5$ باشد، حاصل $\log_{75} 40$ کدام است؟

۱) $\frac{3a+b}{2b-a+1}$ ۲) $\frac{2a+b}{2b+a+1}$ ۳) $\frac{3a+b}{2b+a-1}$ ۴) $\frac{2a+b}{2a-b+1}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\begin{cases} 6^a=2 \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \log_6 2=a \quad (1)\\ 6^b=5 \xrightarrow{\quad''\quad} \log_6 5=b \end{cases}$$

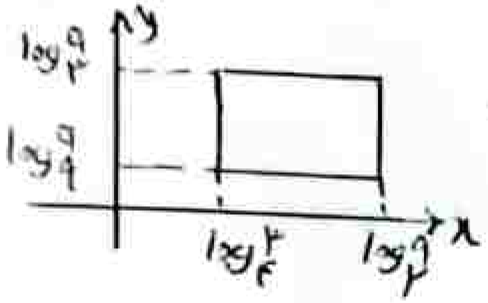
و $\log_{75} 40=\frac{\log_6 40}{\log_6 75}$

$$=\frac{\log_6(8\times5)}{\log_6(3\times25)}=\frac{\log_6 8+\log_6 5}{\log_6 3+\log_6 25}=\frac{\log_6 2^3+\log_6 5}{\log_6 3+\log_6 5^2}$$

$$=\frac{3\log_6 2+\log_6 5}{\log_6 3+2\log_6 5}\ (*) \qquad \log_6 3=\log_6\frac{6}{2}=\log_6 6-\log_6 2\overset{(1)}{=}1-a$$

$$\Rightarrow \log_{75} 40 \overset{(*)}{=} \frac{3a+b}{(1-a)+2b}=\frac{3a+b}{1-a+2b}$$

تست: در شکل مقابل، مساحت مستطیل برابر $\frac{21}{4}$ است. مقدار a کدام است؟



۱) ۶۴ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) ۱۲۸ ۴) $8\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) با توجه به شکل مساحت مستطیل برابر است با:

$$S=(\log_2 9-\log_4 3)\times(\log_3 a-\log_9 a)\Rightarrow$$

$$S=(2\log_2 3-\tfrac{1}{2}\log_2 3)(\log_3 a-\tfrac{1}{2}\log_3 a)=\frac{21}{4}\Rightarrow \frac{3}{2}\log_2 3\times\frac{1}{2}\log_3 a=\frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow \log_2 3\times\log_3 a=7\Rightarrow \log_2 3\times\log_3 a=7\Rightarrow a=2^7=128$$

تست: حاصل عبارت $A=\log_{25} 20\times\log_{27} 36\times\log_{36} 25\times\log_{20} 27$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ. گزینه‌ی ۳

اگر از ویژگی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ استفاده کنیم، حاصل عبارت A به صورت زیر خواهد بود:

$$A = \log_{25}^{30} \times \log_{27}^{36} \times \log_{36}^{25} \times \log_{30}^{27}$$

$$= \frac{\log 30}{\log 25} \times \frac{\log 36}{\log 27} \times \frac{\log 25}{\log 36} \times \frac{\log 27}{\log 30} = 1$$

تست: اگر $\log_{ab}^{a^2} = 4$ مقدار $\log_{b^4}^{ab}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 4 ۴) -4

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\log_{ab}^{a^2} = 2\log_{ab}^{a} \Rightarrow 2\log_{ab}^{a} = 4 \rightarrow \log_{ab}^{a} = 2$$

از طرفی:

$$\log_{ab}^{a} + \log_{ab}^{b} = \log_{ab}^{ab} = 1$$

پس:

$$2 + \log_{ab}^{b} = 1 \Rightarrow \log_{ab}^{b} = -1 \Rightarrow 4\log_{ab}^{b} = -4 \Rightarrow \log_{ab}^{b^4} = -4$$

$$\Rightarrow \log_{b^4}^{ab} = -\frac{1}{4}$$

تست: اگر لگاریتم عدد $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7)$ در پایه‌ی ۲ برابر ۳ باشد، بزرگترین مقدار x کدام است؟

۱) $4-\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{5}$ ۳) $-2+\sqrt{5}$ ۴) $2+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) بنابه تعریف لگاریتم:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7 = 2^3 \rightarrow (x^2-4x)^2 = 1 \rightarrow (x^2-4x=1 \text{ و } x^2-4x=-1)$$

$$\Rightarrow x^2-4x-1=0 \rightarrow x = 2\pm\sqrt{5} \quad ; \quad x^2-4x+1=0 \rightarrow x = 2\pm\sqrt{3}$$

پس بزرگترین مقدار x برابر است با: $2+\sqrt{5}$

تست: جواب معادله‌ی $\frac{8^{2x}-3}{16^x+3} = 4^x - 1$ کدام است؟

۱) $\log_2^3$ ۲) $\frac{1}{2}\log_2^3$ ۳) $2\log_2^3$ ۴) $\frac{1}{3}\log_2^3$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$8^{2x}-3 = (4^x-1)(16^x+3) \rightarrow 2^{6x}-3 = (2^{2x}-1)(2^{4x}+3) \Rightarrow$$

$$2^{6x}-3 = 2^{6x}+3\times 2^{2x}-2^{4x}-3 \Rightarrow 2^{2x}(3-2^{2x}) = 0 \rightarrow 2^{2x} = 3 \Rightarrow$$

$$2x = \log_2^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_2^3$$

تست: جواب معادله‌ی $\frac{2^x+2^{x-1}}{3^{x-1}+3^x} = \frac{3^x+3^{x-1}}{2^x-2^{x-1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}\log_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$ ۲) $\frac{2}{3}\log_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}}$ ۳) $3\log_2^3$ ۴) $2\log_3^2$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

مؤلف: رحیم قهرمانی

ابتدا معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{2^x+2^{x-1}}{3^{x-1}+3^x}=\frac{3^x+3^{x-1}}{2^x-2^{x-1}} \Rightarrow \frac{2^{x-1}(2+1)}{3^{x-1}(1+3)}=\frac{3^{x-1}(3+1)}{2^{x-1}(2-1)}$$

$$\Rightarrow 3\times 2^{x-1}\times 2^{x-1}=4\times 4\times 3^{x-1}\times 3^{x-1} \Rightarrow 2^{2x-2}\times 3=2^4\times 3^{2x-2}$$

$$\Rightarrow 2^{2x-6}=3^{2x-3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2^6}{3^3}=\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow$$

$$2x=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow 2x=3\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{3}{2}\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}$$

تست: اگر $a=\log_2 3$ و $\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)$ باشد، مقدار $\log(3b-8)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳

حل: می‌دانیم $\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)$ و $a=\log_2 3$ است، پس:

$$\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a) \xrightarrow{a=\log_2 3} \log_8 b=\frac{2}{3}(1+\log_2 3) \Rightarrow \log_8 b=\frac{2}{3}(\log_2 2+\log_2 3)$$

$$\Rightarrow \log_8 b=\frac{2}{3}\log_2 6 \Rightarrow \log_8 b=\log_{2^3} 6^2 \Rightarrow \log_8 b=\log_8 36 \rightarrow b=36$$

$$\Rightarrow \log(3b-8)=\log((3\times 36)-8)=\log 100=2$$

تست: اگر $\log_6 3=a$ و $\log_6 5=b$ باشد، $\log 5$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{1+a-b}$ ۲) $\frac{b}{1+a-b}$ ۳) $\frac{a}{1-a+b}$ ۴) $\frac{b}{1-a+b}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} \log 5=\dfrac{\log_6 5}{\log_6 10}=\dfrac{b}{\log_6 2+\log_6 5}=\dfrac{b}{\log_6 2+b} \\ 1=\log_6 6=\log_6 3+\log_6 2 \Rightarrow \log_6 2=1-\log_6 3=1-a \end{cases} \Rightarrow \log 5=\frac{b}{1-a+b}$$

تست: اگر $x=\log(2\sqrt{2}-1)+\log(\sqrt{2}+1)$ و $y=10^x-3$ باشد، حاصل $\log_2 y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$10^x=10^{\log(2\sqrt{2}-1)}\times 10^{\log(\sqrt{2}+1)}=(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \Rightarrow 10^x=3+\sqrt{2}$$

$$y=10^x-3=\sqrt{2} \Rightarrow \log_2 y=\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$$

تست: حاصل عبارت $\log_{25}^{2} \times \log_{2\sqrt[3]{4}}^{125} + 4^{\log_{\sqrt{2}}^{2}}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۱۱ ۴) ۷

پاسخ: گزینه (۱)

$$2\log_5^2 \times \log_{2^{\frac{4}{3}}}^{5^3} + 4^{\log_4^{2^2}} = 2 \times \frac{3\times3}{2}\left(\log_5^2 \times \log_2^5\right) + 4$$

$$= 9 + 4 = 13$$

تست: اگر $a = \log_{45}^{75}$ باشد، آنگاه $\log_{75}^{15}$ کدام است؟

۱) $\frac{a-2}{2a}$ ۲) $\frac{a-2}{2a-1}$ ۳) $\frac{3a-1}{a-1}$ ۴) $\frac{a+1}{3a}$

پاسخ: گزینه (۴)

$$a = \frac{\log_5^{75}}{\log_5^{45}} = \frac{2+\log_5^3}{1+2\log_5^3} \Rightarrow \log_5^3 = \frac{2-a}{2a-1} = x \Rightarrow$$

$$\log_{75}^{15} = \frac{\log_5^{15}}{\log_5^{75}} = \frac{1+x}{2+x} = \frac{2a-1+2-a}{4a-2+2-a} = \frac{a+1}{3a}$$

تست: حاصل عبارت $3^{\log_9^{25}} - \log_8^{\sqrt{5}} \times \log_{25}^{\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{89}{18}$ ۲) $\frac{91}{18}$ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) $\frac{19}{3}$

پاسخ: گزینه (۱)

ابتدا $\log_9^{25}$ را ساده‌تر کنیم:

$$\log_9^{25} = \frac{\log 25}{\log 9} = \frac{\log 5^2}{\log 3^2} = \log_3^5$$

بنابراین:

$$3^{\log_3^5} - \log_8^{\sqrt{5}} \times \log_{25}^{\sqrt[3]{4}} = 5 - \frac{\log\sqrt{5}}{\log 8} \times \frac{\log\sqrt[3]{4}}{\log 25} = 5 - \frac{\log 5^{\frac{1}{2}}}{\log 2^3} \times \frac{\log 2^{\frac{2}{3}}}{\log 5^2}$$

$$= 5 - \frac{\frac{1}{2}\log 5}{3\log 2} \times \frac{\frac{2}{3}\log 2}{2\log 5} = 5 - \frac{\log 5}{6\log 2} \times \frac{\log 2}{3\log 5} = \frac{89}{18}$$

تست: اگر $\log_b^{ab} = A$، مقدار $\log_{ab}^{a}$ کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{A}$ ۲) $1+\frac{1}{A}$ ۳) $\frac{A}{A+1}$ ۴) $\frac{A}{A-1}$

پاسخ: گزینه (۱)

$$\log_b^{ab} = A \Rightarrow \log_b^a + \log_b^b = A \Rightarrow \log_b^a = A-1$$

$$\log_{ab}^a = \frac{1}{\log_a^{ab}} = \frac{1}{\log_a^a + \log_a^b} = \frac{1}{1+\frac{1}{A+1}} = 1-\frac{1}{A}$$

تست: هرگاه $(\log_{15}5)^2 + (\log_{15}\alpha)(\log_{15}75) = 1$ ، مقدار α کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۳

$$\log_{15}\alpha \times \log_{15}75 = (1-\log_{15}5)(1+\log_{15}5) \Rightarrow$$

$$\log_{15}\alpha \times \log_{15}75 = (\log_{15}15 - \log_{15}5)(\log_{15}15 + \log_{15}5) = \log_{15}3 \times \log_{15}75 \Rightarrow$$

$\alpha = 3$

تست: اگر $\log_{60}6 = a$ و $\log\frac{9}{4} = b$ ، مقدار $\log 3$ برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{b+2a-ab}{4-4a}$ ۲) $\frac{b+a+ab}{4-4a}$ ۳) $\frac{b+2a-ab}{2-2a}$ ۴) $\frac{b+a+ab}{2-2a}$

پاسخ: گزینه ی ۱

$$\log\frac{9}{4} = b \rightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right)^2 = b \rightarrow \log\frac{3}{2} = \frac{b}{2} \rightarrow$$

$$\log 3 - \log 2 = \frac{b}{2} \quad (1)$$

$$\log_{60}6 = a \rightarrow \log_6 60 = \frac{1}{a} \rightarrow \log_6 6 + \log_6 10 = \frac{1}{a} \rightarrow 1 + \frac{1}{\log_{10}6} = \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\log 6} = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log 6 = \frac{a}{1-a} \rightarrow \log 3 + \log 2 = \frac{a}{1-a} \quad (2)$$

اگر طرفین تساوی (۱) و (۲) را جمع کنیم ، نتیجه می شود:

$$\log 3 - \log 2 + \log 3 + \log 2 = \frac{b}{2} + \frac{a}{1-a} \rightarrow \log 3 = \frac{b+2a-ab}{4-4a}$$

تست: حاصل عبارت $A = \log_{\sqrt5+\sqrt3}\frac{2}{\sqrt5-\sqrt3} + \log_{(5\sqrt2-7)}(3-2\sqrt2)^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ی ۳

$(\sqrt2-1)^3 = 5\sqrt2-7$ و $(\sqrt2-1)^2 = 3-2\sqrt2$ ؛ $A = \log_{\sqrt5+\sqrt3}(\sqrt5+\sqrt3) + \log_{(\sqrt2-1)^3}(\sqrt2-1)^4 = 1+\frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

تست: برای هر $x\in(a,+\infty)$ رابطه ی $\log_2 x^{\log_2 x} = (\log_2 x)^2$ برقرار است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۱

با توجه به دامنه $x\in(0,+\infty)$

$$\log_2 x^{(\log_2 x)} = (\log_2 x)(\log_2 x) = (\log_2 x)^2$$

پس تساوی همواره برقرار است ، در نتیجه $x\in(0,+\infty)$ و بنابراین $a=0$ است.

تست: اگر $A = (\log 2)^3 + (\log 8)(\log 5) + (\log 5)^3$ باشد ، حاصل عبارت $\log_{(3A+5)}(3A+11)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

مولف رحیم شهرماس

پاسخ: گزینه ۴) از اتحاد مکعب دو جمله‌ای کمک می‌گیریم $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

می‌توان نوشت:

$$A = (\log 2)^3 + (\log 5)^3 + 3\log 2 \log 5 \,(\underbrace{\log 2 + \log 5}_{1})$$

$$\Rightarrow A = (\log 2 + \log 5)^3 = 1 \Rightarrow \log_{3A+5}^{3A+1} = \log_{8}^{4} = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}\log_2^2 = \frac{2}{3}$$

تست: اگر $A = \dfrac{(4)^{0.75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 9^{0.25}$ باشد، $\log_A^{\sqrt{2}-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم.

$$A = \frac{(2^2)^{\frac{3}{4}}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + (3^2)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$$

$$\rightarrow A = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{1+2\sqrt{2}+2-3} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2(\sqrt{2}+2)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

$$\log_A^{\sqrt{2}-1} = \log_{1+\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \log_{1+\sqrt{2}}^{(\sqrt{2}+1)^{-1}} = -1$$

تست: اگر $\log 72 = a$ و $\log 30 = b$ باشد، آنگاه $\log 45$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{5+8b+a}{3}$

۲) $\dfrac{-5+b-8a}{3}$

۳) $\dfrac{8-b+5a}{3}$

۴) $\dfrac{-5+8b-a}{3}$

پاسخ: گزینه ۴) خواسته سوال را ساده می‌کنیم:

$$\log 45 = \log 9\times 5 = \log 9 + \log 5 = \log 9 + 1 - \log 2 = 2\log 3 - \log 2 + 1$$

حال با استفاده از داده‌هایی که در صورت سوال داریم:

$$\log 72 = \log 8 + \log 9 = 3\log 2 + 2\log 3 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a - 2\log 3}{3}$$

$$\log 30 = \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3 = b \rightarrow \log 3 = b-1$$

$$\log 45 = 2\log 3 - \log 2 + 1 = 2(b-1) - \frac{a - 2\log 3}{3}$$

$$= 2(b-1) - \frac{a - 2(b-1)}{3} = \frac{-8 + 8b - a}{3}$$

تست: اگر $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ باشد، $\log x + \log(x^2 - 3)$ چند برابر $\log 2$ است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۴) می‌توان نوشت:

$$\log x + \log(x^2 - 3) = \log x(x^2 - 3) = \log(x^3 - 3x)$$

فرض می‌کنیم:

$$b = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}, \quad a = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$$

$$x = a - b \rightarrow x^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$x^3 = (1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}) - 3\underbrace{(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{1-\sqrt{2}})}_{\sqrt[3]{1-2} = -1} \times \underbrace{(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}})}_{x} \rightarrow$$

$$x^3 = 2\sqrt{2} + 3x \rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \log(x^3 - 3x) = \log 2\sqrt{2} = \log 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\log 2$$

تست: اگر $\frac{\log_x a}{\log_{xy} a} = 5$ باشد، حاصل $\log_y x^2 + \log_{x^2} y$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۴)

$$\frac{\log_x a}{\log_{xy} a} = 5 \Rightarrow \frac{\frac{\log a}{\log x}}{\frac{\log a}{\log xy}} = 5 \Rightarrow \frac{\log xy}{\log x} = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x + \log y}{\log x} = 5 \Rightarrow \frac{\log x}{\log x} + \frac{\log y}{\log x} = 5 \rightarrow 1 + \log_x y = 5$$

$\log_x y = 4 \Rightarrow \log_y x = \frac{1}{4}$

حاصل عبارت $= \log_y x^2 + \log_{x^2} y = 2\log_y x + \frac{1}{2}\log_x y = 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}(4) = \frac{5}{2}$

تست‌های کاربردی قضایای لگاریتم ۱۱

تست: اگر $3^{f(x)}=25x$ و $5^{g(x+1)}=27^{x+2}$ باشد، مقدار $f(1)g(2)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳) با جایگذاری $x=1$ در تابع‌های $3^{f(x)}=25x$ و $5^{g(x+1)}=27^{x+2}$ داریم:

$$3^{f(1)}=25 \Rightarrow f(1)=\log_3 25=\log_3 5^2=2\log_3 5$$

$$5^{g(2)}=27^3=3^9 \Rightarrow g(2)=\log_5 3^9=9\log_5 3$$

$$\Rightarrow f(1)g(2)=2\log_3 5\times 9\log_5 3=18\log_3 5\times\log_5 3=18\times1=18$$

تست: در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2+3\log_2 x$، وقتی مقدار x را چهار برابر می‌کنیم، مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟

۱) ۴ برابر می‌شود. ۲) ۹ برابر می‌شود. ۳) ۳ واحد افزایش می‌یابد ۴) ۶ واحد افزایش می‌یابد

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

$$f(x)=2+3\log_2 x \Rightarrow f(4x)=2+3\log_2 4x=2+3(\log_2 4+\log_2 x)\Rightarrow$$

$$f(x)=2+3(2+\log_2 x)=2+3\log_2 x+3\times2=f(x)+6$$

یعنی مقدار تابع ۶ واحد افزوده می‌شود.

تست: نمودار $y=f(4x)$ بر نمودار تابع $y=2+f(x)$ منطبق است. ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\log_4 x$ ۲) $\log_2 x$ ۳) 2^{x+1} ۴) 4^{x-1}

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(4x)=\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x=2+f(x)$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=\log_2 x$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم و طول محل برخورد آن با نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ برابر a باشد، نمودار تابع $f(x)$ را باید چند واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا مقدار آن به ازای $x=a-\frac{\sqrt5}{2}$ برابر ۳ شود؟

۱) ۶/۵ ۲) ۲ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$f(x)=\log_2 x \xrightarrow{\text{انتقال یک واحد به سمت راست}}$$

$$y=\log_2 (x-1) \Rightarrow \log_2 (x-1)=\log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \log_2 (x-1)=-\log_2 x \Rightarrow \log_2 (x-1)+\log_2 x=0$$

$$\Rightarrow \log_2 x(x-1)=0 \to x(x-1)=2^0=1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x>1}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=a$$

اگر نمودار $f(x)$ را a واحد به سمت چپ انتقال دهیم خواهیم داشت:

$$\log_2 (x+b) \xrightarrow[x=\frac{1}{2}]{x=a-\frac{\sqrt{5}}{2}} \log_2 \left(\frac{1}{2}+b\right)=2 \to \frac{1}{2}+b=2^2 \to b=\frac{7}{2}$$

تست: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\log_2(2x+4)$، به ترتیب باید چه انتقال هایی را روی تابع $y=\log_2(x-1)$ انجام دهیم:

۱) ۵ واحد در راستای افقی به چپ، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۲) ۳ واحد در راستای افقی به چپ، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

۳) ۵ واحد در راستای افقی به راست، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۴) ۳ واحد در راستای افقی به راست، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

پاسخ: گزینه‌ی ۲) اول ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2(2(x+2))=\log_2 2+\log_2(x+2)=\log_2(x+2)+1$$

برای آن که از روی نمودار تابع $y=\log_2(x-1)$، بتوانیم نمودار تابع $f(x)=\log_2(x+2)+1$ را رسم کنیم، به ترتیب باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y=\log_2(x-1) \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x\to x+3} \log_2(x+2) \xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{y\to y+1} y=\log_2(x+2)+1$$

تست: اگر نمودار تابع $y=\log_2(x-2)$ را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۳ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\log_2(ax+b)$ به دست می‌آید. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{5}{8}$ ۴) $-\frac{7}{8}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) ابتدا باید نمودار تابع اولیه را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۳ واحد

(۹)

$y=\log_2(x-2) \xrightarrow{x \to x-2} y=\log_2(x-2-2) \xrightarrow{\text{۳ واحد به سمت پایین}}$

$y=\log_2(x-4)-3$ حال سعی می‌کنیم با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، رابطه به دست آمده را به فرم $y=\log_2(ax+b)$ تبدیل کنیم

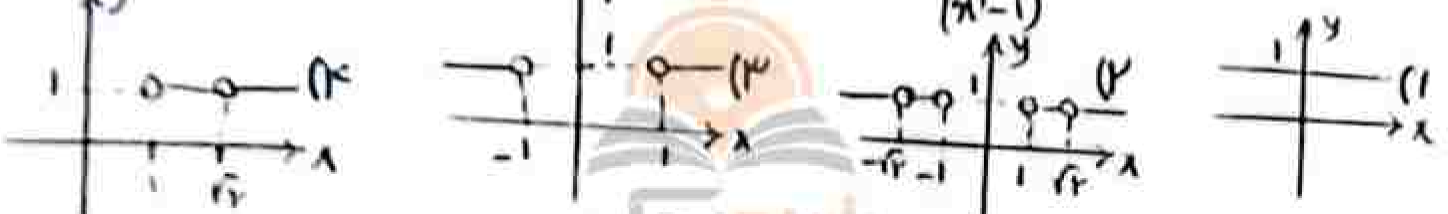
$$y=\log_2(x-4)-3=\log_2(x-4)-3\log_2 2=\log_2(x-4)-\log_2 2^3$$

$$=\log_2\frac{x-4}{8} \Rightarrow y=\log_2\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)$$

با مقایسه دو تابع $y=\log_2(ax+b)$ و $y=\log_2\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)$ داریم:

$$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{1}{2} \rightarrow a+b=-\frac{3}{8}$$

تست: نمودار تابع $y=\log_{(x^2-1)}(x^2-1)$ کدام است؟

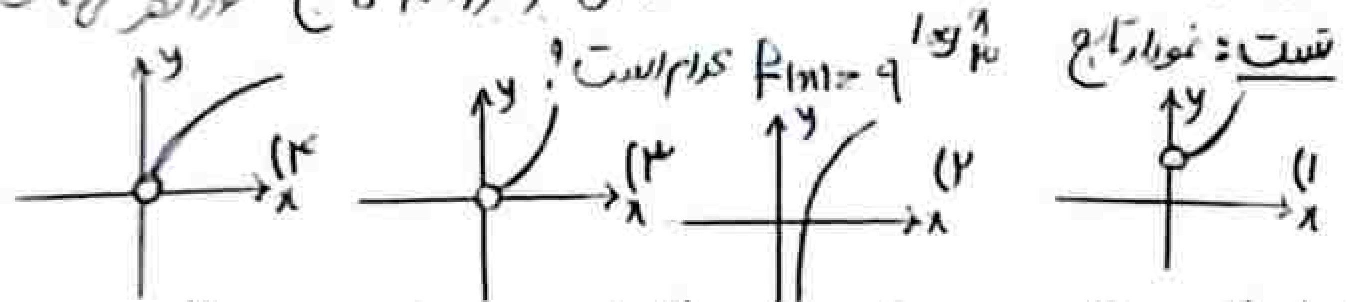


پاسخ: گزینه‌ی ۲) دامنه‌ی تابع $y=\log_{g(x)}f(x)$ شامل اعداد حقیقی می‌شود که به ازای آن‌ها $f(x)>0$ و $g(x)>0$ و $g(x)\neq 1$. بنابراین دامنه‌ی تابع $y=\log_{(x^2-1)}(x^2-1)$ برابر است با:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \rightarrow x^2>1 \Rightarrow (x>1)\cup(x<-1) \\ x^2-1\neq 1 \Rightarrow x^2\neq 2 \Rightarrow x\neq \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow D_f=\left((-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\right)-\{\pm\sqrt{2}\}$$

در بین گزینه‌ها فقط نمودار گزینه‌ی (۲) دامنه‌اش برابر دامنه‌ی تابع مورد نظر می‌باشد.

تست: نمودار تابع $f(x)=9^{\log_3 x}$ کدام است؟



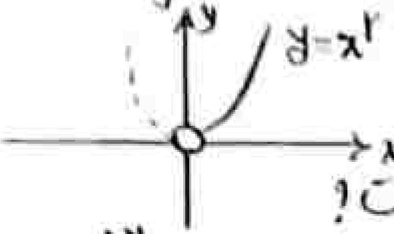
پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$f(x)=9^{\log_3 x}=\left(3^{2\log_3 x}\right)=3^{2\log_3 x}=3^{\log_3 x^2}=x^2$$

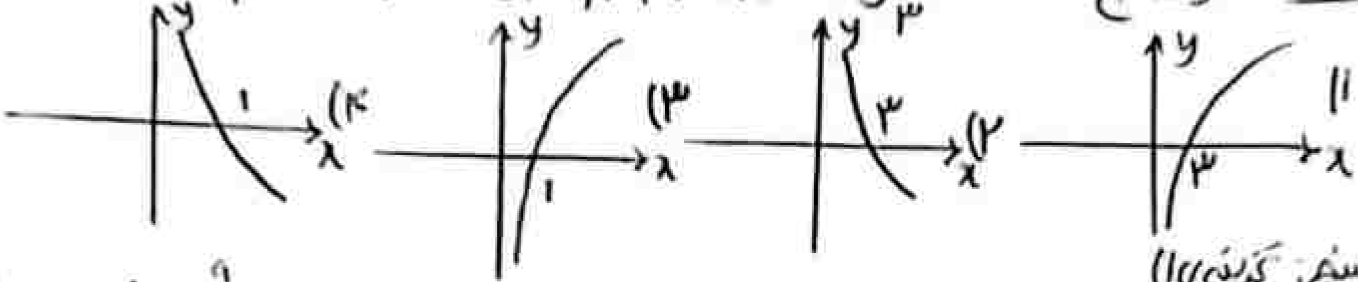
مولف رحیم فهرمان

دامنه ی تابع $f(x)$ به صورت $D_f=(0,+\infty)$ است، بنابراین

نمودار این تابع $f(x)=x^2$ در بازه ی $(0,+\infty)$ است.

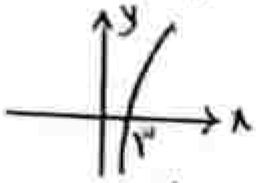


تست: نمودار تابع $f(x)=1-\log_3 \frac{9}{x}$ چه کدام صورت است؟



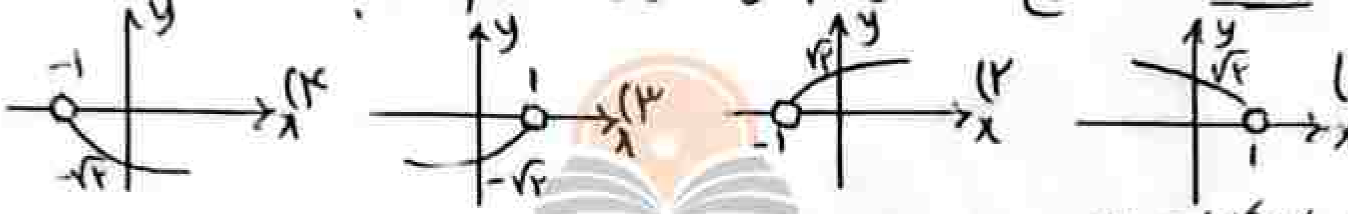
پاسخ: گزینه ی ۱

$$f(x)=1-\log_3 \frac{9}{x} = 1-(\log_3 9-\log_3 x) = 1-(2-\log_3 x)=\log_3 x-1$$



بنابراین نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است:

تست: نمودار تابع $2\log y=\log 2+\log(x+1)$ کدام است؟

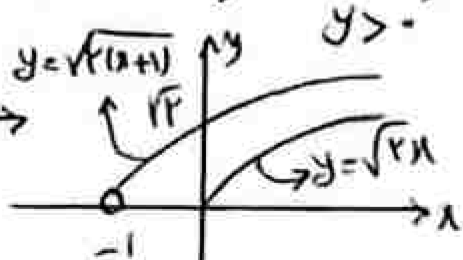


پاسخ: گزینه ی ۲

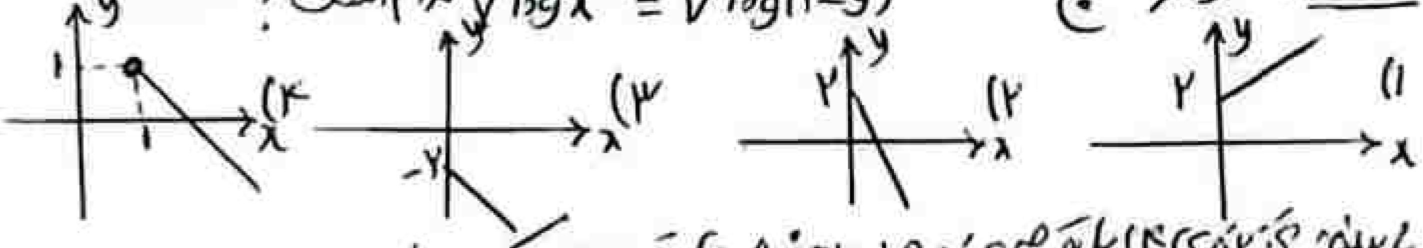
$$2\log y=\log 2+\log(x+1) \Rightarrow x>-1 ,\ y>0$$

$$2\log y=\log 2+\log(x+1) \Rightarrow \log y^2=\log 2(x+1) \rightarrow y^2=2(x+1) \xrightarrow[y>0]{\text{جذر}}$$

$y=\sqrt{2(x+1)}$ ؛ حال کافی است نمودار $y=\sqrt{2x}$ را رسم کنیم سپس آن را به اندازه ی یک واحد به سمت چپ روی محور x ها انتقال دهیم.



تست: نمودار تابع $\sqrt[4]{\log x}=\sqrt[4]{\log(2-y)}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ی ۴ با توجه به زوج بودن فرجه ها قبل از اینکه طرفین معادله را به توان ۴ برسانیم باید دو مطلب زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \log x \geq 0 \rightarrow x\geq 1 \\ \log(2-y)\geq 0 \rightarrow 2-y\geq 1 \rightarrow y\leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

 با توجه به دامنه‌ی تابع لگاریتم باید:

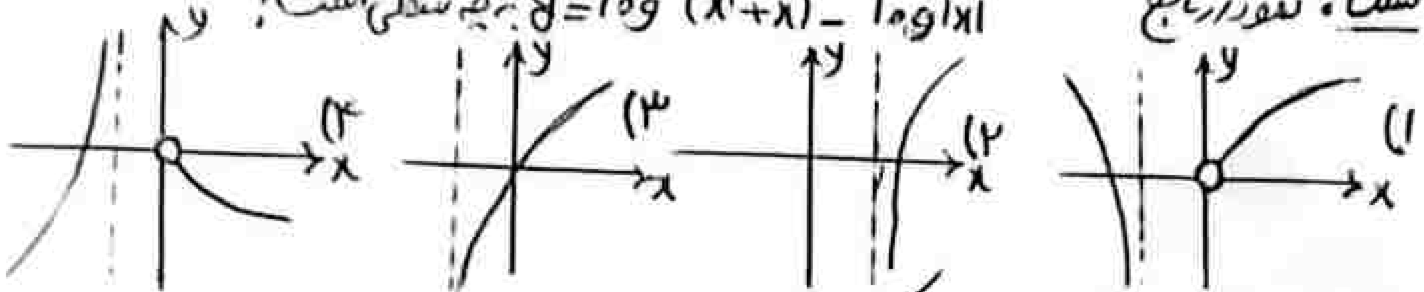
$$\begin{cases} x>0 \\ 2-y>0 \to y<2 \end{cases} \quad (2) \qquad x\geq 1 \text{ و } y\leq 1 \Leftarrow (1)\cap(2) \Rightarrow$$

حال طرفین معادله را به توان ۴ می‌رسانیم که در این صورت داریم:

$$\log x=\log(2-y) \Rightarrow x=2-y \xrightarrow{x\geq 1 \text{ و } y\leq 1} \begin{cases} y=-x+2 \\ x\geq 1 \text{ و } y\leq 1 \end{cases}$$

پس باید نمودار $y=-x+2$ را در فاصله‌ی $x\geq 1$ رسم کنیم که همان نمودار گزینه‌ی (۲) می‌شود.

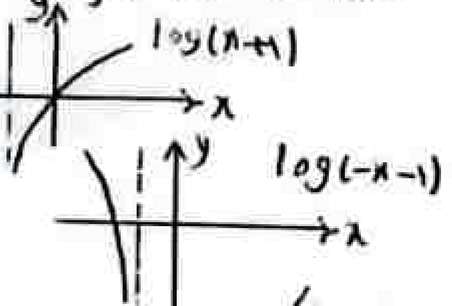
تست: نمودار تابع $y=\log(x^2+x)-\log|x|$ به چه شکلی است؟



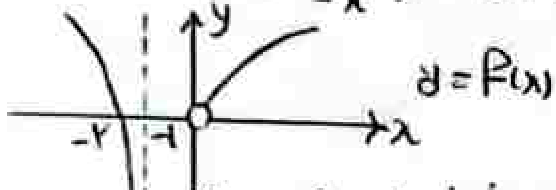
پاسخ: گزینه‌ی ۱) دامنه‌ی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+x>0 \to x(x+1)>0 \to x<-1 \text{ یا } x>0 \\ |x|>0 \Rightarrow \quad x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f: x<-1 \text{ یا } x>0$$

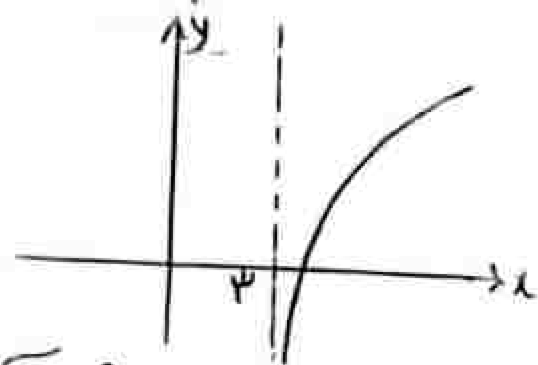
$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow \log\left(\dfrac{x^2+x}{x}\right)=\log(x+1) \\ x<-1 \Rightarrow \log\left(\dfrac{x^2+x}{-x}\right)=\log(-x-1) \end{cases}$$



نمودار $f(x)$ به شکل زیر است:



تست: کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند معادله‌ی نمودار روبه‌رو باشد؟



۱) $y=\log_x(x-2)\ \log x$

۲) $y=\frac{1}{2}\log(x^2-4x+4)$

۳) $y=\log(x-2)^3$

۴) $y=\log(x^2+x-6)-\log(x+3)$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) نمودار داده شده می‌تواند $y=\log(x-2)$ یا ضریب مضربی از آن باشد، بررسی گزینه‌ها:

$1)\ \log_x^{(x-2)} \log_{10} x = (\log_x^x)(\log_{10}^{(x-2)}) = \log(x-2)$

همچنانکه می‌دانیم $(\log_b^a)\times(\log_c^b)=\log_c^a$ اما ادامه‌ی جواب بررسی می‌شود.

$(x-2>0 \Rightarrow x>2,\ x>0,\ x\neq 1) \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>2$

پس این گزینه می‌تواند ضابطه‌ی نمودار داده شده باشد.

$2)$ دامنه: $x^2-4x+4>0 \Rightarrow (x-2)^2>0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{2\}$

در نتیجه این ضابطه، نمی‌تواند ضابطه‌ی نمودار داده شده باشد.

$3)\ y=\log(x-2)^3=3\log(x-2)\ :\ D:\ (x-2)^3>0 \Rightarrow x>2$

این گزینه هم نمی‌تواند ضابطه‌ی نمودار داده شده باشد.

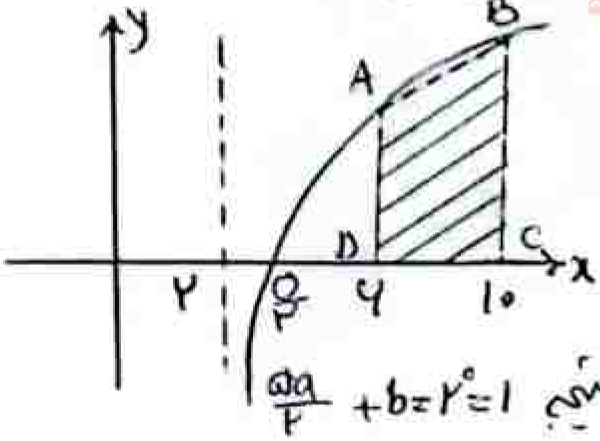
$4)\ y=\log\frac{x^2+x-6}{x+3}=\log\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}=\log(x-2)$

ضابطه که می‌تواند درست باشد، دامنه را هم چک می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x-6>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & -3 & & 2 & \\ \hline & + & & - & & + \end{array} \Rightarrow (x>2)\cup(x<-3) \\ x+3>0 \to x>-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=(2,+\infty)$$

در نتیجه این گزینه هم می‌تواند ضابطه آن باشد.

تست: بخشی از نمودار تابع $f(x)=\log_2(ax+b)$ مطابق شکل است. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه (۲) $x=2$ خط مجانب است، پس عبارت جلوی لگاریتم را صفر می‌کند، $2a+b=0 \to b=-2a$

لذا $f(\frac{5}{2})=0$ در نتیجه $\log_2(\frac{5a}{2}+b)=0$ ، $\frac{5a}{2}+b=2^0=1$

حال در تساوی به دست آمده داریم:

$$\frac{5a}{2}+b=1 \xrightarrow{b=-2a} \frac{a}{2}=1 \to a=2 \to b=-4$$

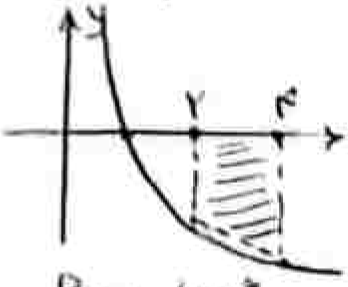
با جایگذاری a و b در ضابطه تابع داریم:

$f(x)=\log_2(2x-4)$ ؛ $AD=f(6)=\log_2^8=\log_2 2^3=3\log_2^2=3\times1=3$

$BC=f(10)=\log_2^{16}=\log_2 2^4=4$ ؛ $S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(AD+BC)\times CD}{2}=\frac{(3+4)4}{2}=14$

مولف رحیم قهرمان

تست: نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=\log_a x$ است. اگر مساحت ذوزنقه‌ی هاشورخورده برابر ۳ باشد، مقدار $f(64)$ کدام است؟



$f(x)=\log_a x$

۱) ۶ ۲) -6 ۳) ۵ ۴) -5

پاسخ: گزینه‌ی ۲) اندازه‌ی قاعده‌های ذوزنقه‌ی هاشورخورده برابر با $f(2)$ و $f(4)$ می‌باشد که هر دو منفی هم هستند. با توجه به این که مساحت ذوزنقه برابر ۳ است، داریم:

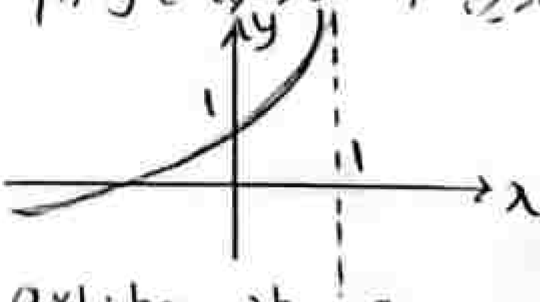
$$\text{ارتفاع ذوزنقه} = 4-2=2 \Rightarrow S=\frac{|f(2)+f(4)|\times 2}{2}=3 \Rightarrow |f(2)+f(4)|=3$$

با توجه به این که $f(2)$ و $f(4)$ هر دو منفی هستند داریم:

$$f(2)+f(4)=-3 \Rightarrow \log_a 2+\log_a 4=-3 \Rightarrow \log_a (2\times 4)=-3 \rightarrow a^{-3}=8$$

$$\rightarrow a^3=\frac{1}{8} \rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow f(64)=\log_{\frac{1}{2}} 64=\frac{1}{-1}\times 6\log_2 2=-6$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=\log_c(ax+b)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(a+1)$ کدام است؟



$a\times 1+b=0 \rightarrow b=-a$

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۲) دامنه‌ی تابع f با توجه به نمودار بازه‌ی $D=(-\infty,1)$ است، پس عبارت داخل لگاریتم یعنی $ax+b$ به ازای $x=1$ برابر صفر است.

همچنین نمودار تابع f محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع کرده است، یعنی $f(0)=1$، پس داریم:

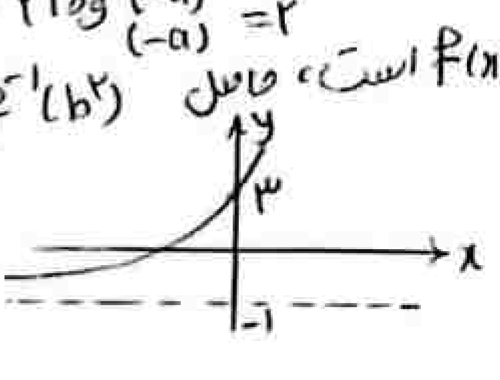
$$f(0)=1 \Rightarrow 1=\log_c(0+b) \rightarrow b=c$$

بنابراین $b=c=-a$، یعنی تابع f به صورت $f(x)=\log_{(-a)}(ax-a)$ می‌باشد و داریم:

$$f(a+1)=\log_{(-a)}(a(a+1)-a)=\log_{(-a)}(a^2+a-a)=\log_{(-a)}a^2=\log_{(-a)}(-a)^2$$

$$=2\log_{(-a)}(-a)=2$$

تست: شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x)=a+2^{x-b}$ است، حاصل $f^{-1}(b^2)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\log_2 3$ ۴) $\log_2 \frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱۴) مولفه منفی به 2^x ، و الزاماً ... رفته است. پس $a=-1$ می‌شود.

$f(x)=2^{x-b}-1 \Rightarrow f(0)=3 \Rightarrow 2^{-b}-1=3 \to$

$2^{-b}=4 \to 2^{-b}=2^2 \to b=-2$

بنابراین $f(x)=2^{x+2}-1$ است. حاصل $f^{-1}(4)=f^{-1}(b^2)$ را می‌خواهیم، پس باید $f(x)$ را برابر ۴ قرار دهیم:

$f(x)=4 \Rightarrow 2^{x+2}-1=4 \to 2^{x+2}=5 \to x+2=\log_2^5 \to x=\log_2^5-2$

$\Rightarrow x=\log_2^5-\log_2^4=\log_2^{\frac{5}{4}}$

تست: ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\log_2^x-\log_3^x$ به صورت $f^{-1}(x)=a^{x\log_{\frac{b}{2}}^{3}}$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶ پاسخ: گزینه‌ی ۴)

از تساوی $y=\log_2^x-\log_3^x$ مقدار x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$y=\log_2^x-\log_2^x\cdot\log_3^2=\log_2^x(1-\log_3^2)=\log_2^x(\log_3^3-\log_3^2) \to$

$y=\log_2^x\log_3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{y}{\log_3^{\frac{3}{2}}}=\log_2^x \Rightarrow y\log_{\frac{3}{2}}^{3}=\log_2^x \Rightarrow$

$x=2^{y\log_{\frac{3}{2}}^{3}} \Rightarrow f^{-1}(x)=2^{x\log_{\frac{3}{2}}^{3}} \Rightarrow a=2,\ b=3 \Rightarrow ab=6$

تست: اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=10^x+b$ باشد و دامنه‌ی تعریف تابع $h(x)=\sqrt{a-g(x)}$ به صورت $(2,12]$ است، مقدار $h^2(7)$ چند برابر $\log_{10}^2$ است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴) ابتدا وارون تابع $f(x)=10^x+b$ را بدست می‌آوریم:

$y=10^x+b \Rightarrow 10^x=y-b \to x=\log(y-b) \to y=f^{-1}(x)=\log(x-b)$

$\Rightarrow g(x)=\log(x-b)$

بنابراین تابع $h(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$h(x)=\sqrt{a-\log(x-b)}$

برای ی... دامنه‌ی تابع $h(x)$ خواهیم داشت:

$(1): x-b>0 \rightarrow x>b \qquad (2): a-\log(x-b)\geq 0 \Rightarrow \log(x-b)\leq a$

$\Rightarrow x-b\leq 10^a \Rightarrow x\leq 10^a+b \Rightarrow (1),(2) \Rightarrow D_h=(b,10^a+b]=(2,12]$

$\Rightarrow b=2, a=1$

$h(x)=\sqrt{1-\log(x-2)} \rightarrow h^2(7)=1-\log 5=\log 10-\log 5=\log\frac{10}{5}=\log 2$

بنابراین نسبت $h^2(7)$ به $\log 2$ برابر یک است.

تست: اگر $f(x)=\frac{100^x-100^{-x}}{100^x+100^{-x}}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0/3)$ چقدر است؟ ($\log 13=1/11$ و $\log 7=0/8$)

۱) $0/04$ ۲) $0/032$ ۳) $0/05$ ۴) $0/075$

پاسخ: گزینه‌ی (۴) تابع را برابر $0/3$ قرار می‌دهیم و x را حساب می‌کنیم:

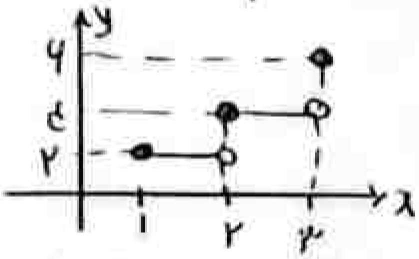
$\frac{100^x-100^{-x}}{100^x+100^{-x}}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{100^{2x}-1}{100^{2x}+1}=\frac{3}{10} \xrightarrow{100^{2x}=t} \frac{t-1}{t+1}=\frac{3}{10} \rightarrow$

$t=\frac{13}{7}$; $100^{2x}=\frac{13}{7} \Rightarrow 2x\log 100=\log 13-\log 7 \Rightarrow 4x=1/1-0/8$

$\rightarrow x=0/075$

تست: نمودار تابع با ضابطه‌ی $\log y=\log[x]+\log 2$ را در بازه‌ی $1\leq x\leq 3$ در نظر می‌گیریم. مساحت ناحیه‌ی بین نمودار تابع و محور xها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸



$\log y=\log[x]+\log 2 \Rightarrow \log y=\log 2[x] \rightarrow y=2[x]$

$\begin{cases} 1\leq x<2 \rightarrow [x]=1 \rightarrow y=2 \\ 2\leq x<3 \rightarrow [x]=2 \rightarrow y=4 \\ x=3 \rightarrow [x]=3 \rightarrow y=6 \end{cases} \Rightarrow S=(2-1)(2-0)+(3-2)(4-0)=6$

تست: اگر $\log\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\log(3-4\cos x+\cos 2x)$ کدام است؟

۱) $1-3\log 2$ ۲) $-2+3\log 2$ ۳) $-1+3\log 2$ ۴) $1+3\log 2$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$\log(3-4\cos x+\cos 2x)=\log(3-4\cos x+2\cos^2 x-1)$

$=\log(2\cos^2 x-4\cos x+2)=\log(2(\cos^2 x-2\cos x+1))=\log(2(1-\cos x)^2)$

$=\log 2+\log(2\sin^2\frac{x}{2})^2$

$=\log 2+2\log(2\sin^2\frac{x}{2})=\log 2+2\log 2+4\log(\sin\frac{x}{2})$

$=3\log 2+4(-\frac{1}{4})=3\log 2-1$

<u>تست</u>: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2-5x+1=0$ و $\log 2=k$ حاصل $5\log\alpha+5\log\beta-3\log(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $-3k-3$ ۲) $3k-3$ ۳) $3k+3$ ۴) $3k$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ هستند.

$S=-\frac{b}{a}=5$ و $P=\frac{c}{a}=1$

از طرفی

$\log 10=\log(2\times5)=1\Rightarrow\log 2+\log 5=1\to\log 5=1-\log 2\ (*)$

$5\log\alpha+5\log\beta-3\log(\alpha+\beta)=5(\log\alpha+\log\beta)-3\log(\alpha+\beta)$

$=5\log(\underbrace{\alpha\beta}_{P})-3\log(\underbrace{\alpha+\beta}_{S})=5\log 1-3\log 5=-3\log 5\xrightarrow{(*)}-3(1-\log 2)$

$=-3+3\log 2=3k-3$

<u>تست</u>: دنباله‌ی هندسی a_n با جمله اول مثبت a_1 و قدر نسبت $q=9$ و تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\log_3^{x}$ مفروض است. اگر $f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_5)=30$ مقدار a_1 کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه‌ی ۳) $f(a_1)+f(a_1q)+f(a_1q^2)+f(a_1q^3)+f(a_1q^4)$

$=\log_3^{a_1}+\log_3^{a_1q}+\log_3^{a_1q^2}+\log_3^{a_1q^3}+\log_3^{a_1q^4}=\log_3^{a_1^5q^{10}}=30\Rightarrow$

$5\log_3^{a_1}+10\log_3^{q}=30\xrightarrow{q=9}5\log_3^{a_1}+10(2)=30\to\log_3^{a_1}=2\to a_1=9$

<u>تست</u>: حاصل عبارت

$A=\log(\tan\frac{3\pi}{24})+\log(\tan\frac{3\pi}{24})+\log(\tan\frac{15\pi}{24})+\log(\tan\frac{9\pi}{24})$

کدام است؟ ۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) صحیح است.

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\cot\beta$

داریم:

$A=\log(\tan\frac{3\pi}{24}\times\tan\frac{15\pi}{24}\times\tan\frac{3\pi}{24}\times\tan\frac{9\pi}{24})$

$=\log(\tan\frac{3\pi}{24}\cot(\frac{\pi}{2}-\frac{15\pi}{24})\tan(\frac{3\pi}{24})\cot(\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{24}))$

$=\log(\tan\frac{3\pi}{24}\cot\frac{3\pi}{24}\tan\frac{3\pi}{24}\cot\frac{3\pi}{24})=\log(1\times1)=\log(1)=0$

تست: اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $a^x+27\times a^{-x}-12=0$ برابر ۳- باشد، حاصل $\log_{81}a^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

با فرض $a^x=t$ داریم: $t+\frac{27}{t}-12=0 \to \frac{t^2-12t+27}{t}=0 \to$

$t=3, t=9 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1}=3 \\ a^{x_2}=9 \end{cases} \longrightarrow a^{x_1+x_2}=27 \to a^{-3}=27 \to a=\frac{1}{3}$

بنابراین حاصل $\log_{81}a^2$ به ازای $a=\frac{1}{3}$ برابر است با: $\log_{81}\frac{1}{9}=\log_{9^2}9^{-1}=-\frac{1}{2}$

تست: در یک دستگاه تصفیه آب، داخل فیلتر، لایه‌ی تمیز کننده قرار دارد که حدود ۶۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند. با قرار دادن حداقل چند لایه در فیلتر می‌توان حداقل ۹۸ درصد ناخالصی آب را از بین برد؟ ($\log 5 \simeq 0.7$)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

هر لایه تمیز کننده ۶۰ درصد ناخالصی‌ها را حذف می‌کند پس ۴۰ درصد ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.
بنابراین با قرار دادن n لایه تمیز کننده $(0.4)^n$ درصد ناخالصی باقی می‌ماند. پس داریم:

$(0.4)^n \le 0.02 \Rightarrow (\frac{2}{5})^n \le \frac{1}{50} \to n \ge \log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{50}$ و $\log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{50}=-\log_{\frac{2}{5}}50$

$=-\frac{\log 50}{\log\frac{2}{5}}=-\frac{\log 5+\log 10}{\log 2-\log 5}=-\frac{\log 5+1}{1-\log 5-\log 5}=\frac{1+\log 5}{2\log 5-1}$

$=\frac{1+0.7}{2\times0.7-1}=4.25 \to$ بنابراین $n\ge 5$ است و حداقل ۵ لایه نیاز داریم.

تست: به ازای تمام اعداد حقیقی x، نقاط $(x, 3^{-x+1})$ را روی دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. خط y=6 این نمودار را در چه طولی قطع می‌کند؟

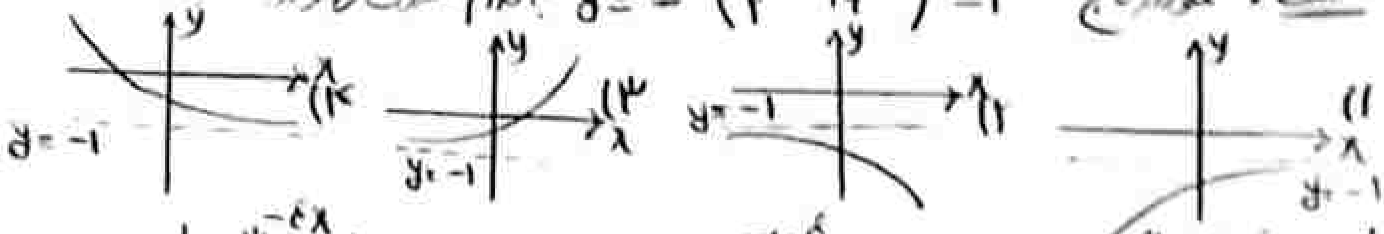
۱) $\log_3 2$ ۲) $\log_3\frac{1}{2}$ ۳) $2+\log_3 2$ ۴) $-2-\log_3\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) نمودار مورد نظر، نمودار تابع $y=3^{-x+1}$ است اکنون طول نقطه‌ی تقاطع این نمودار با خط y=6 را به دست می‌آوریم.

$3^{-x+1}=7 \to \log_3 3^{-x+1} = \log_3 7 \to -x+1=\log_3 7 \to$

$-x=\log_3 7 -1 \Rightarrow \log_3 7 - \log_3 3 = \log_3 \frac{7}{3} \Rightarrow -x=\log_3 \frac{7}{3} \to x=\log_3 \left(\frac{7}{3}\right)^{-1}=\log_3 \frac{3}{7}$

تست: نمودار تابع $y=-\left(2^{\log_{16} 3^{-4x}}\right)-1$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

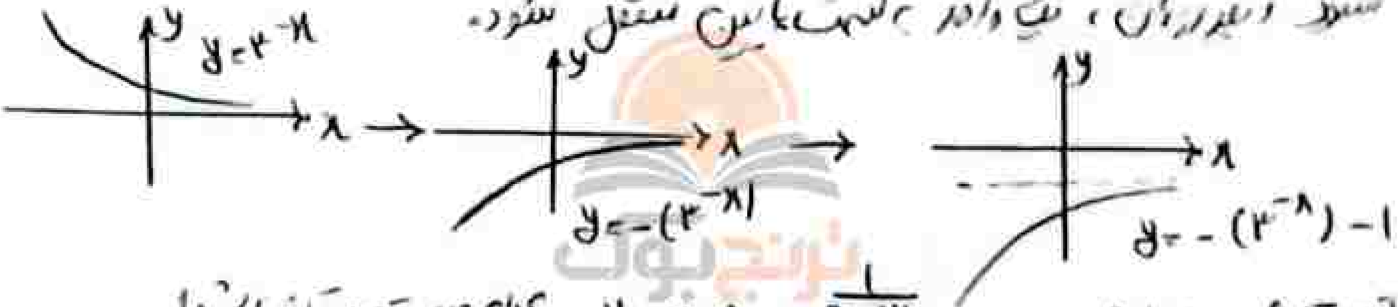


پاسخ: گزینه ی (1)

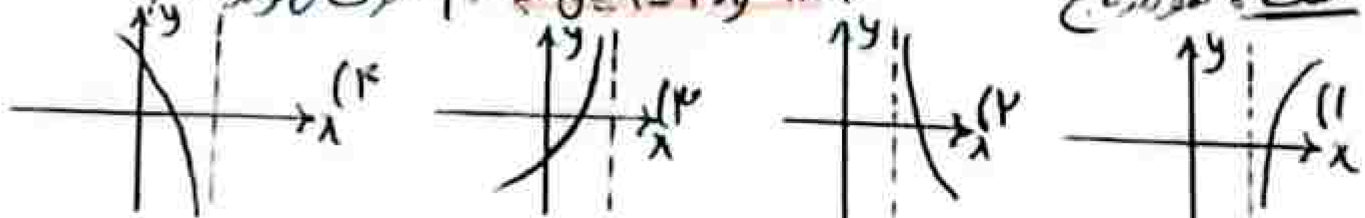
$y=-\left(2^{\log_{16} 3^{-4x}}\right)-1=-\left(2^{\log_{2^4} (3^{-x})^4}\right)-1 \to$

$y=-\left(2^{\frac{4}{4}\log_2 3^{-x}}\right)-1=-\left(2^{\log_2 3^{-x}}\right)-1 \to y=-(3^{-x})-1$

حال برای رسم $y=-(3^{-x})-1$ ابتدا نمودار $y=3^{-x}$ به دست، نسبت به محور xها قرینه شود و سپس آن، یک واحد به سمت پایین منتقل شود.



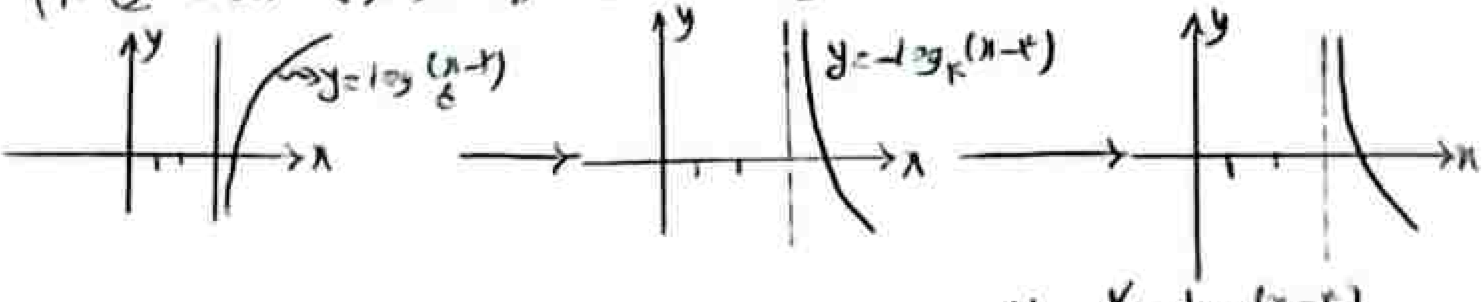
تست: نمودار تابع $y=2-\log_{0.25}\frac{1}{x-3}$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟



پاسخ: گزینه ی (2)

$y=2-\log_{0.25}\frac{1}{x-3}=2-\log_{4^{-1}}(x-3)^{-1}=2-\log_4 (x-3) \Rightarrow y=-\log_4 (x-3)+2$

نمودار $\log_4 x$ را ابتدا باید ۳ واحد به سمت راست منتقل شود (به دلیل این که $x-3$ جایگزین شده) سپس نسبت به محور xها قرینه شود (به دلیل علامت منفی) و سپس ۲ واحد بالا رود (به دلیل $+2$)



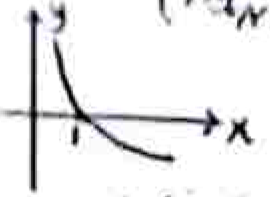
$y=2-\log_4 (x-3)$

دامنه $f:(-1,2] \longrightarrow R$

۸) $f(x) = (\log_{0/2}^{0/4})^x$ بیشترین مقدار تابع کدام است؟

۱) ۱   ۲) $0/5$ ۳) $(\log_{0/2}^{0/4})^2$ ۴) $\log_{0/4}^{0/2}$

پاسخ : گزینه (۴) می‌دانیم $\log_x^a = \dfrac{1}{\log_a^x}$



$y = \log_a^x \;\; ; \;\; 0 < a < 1 \rightarrow$

از روی شکل واضح است که $0 < \log_{0/2}^{0/4} < 1$ است بنابراین تابع $f(x) = (\log_{0/2}^{0/4})^x$ نزولی است (تابع $y = a^x$ وقتی $0 < a < 1$ است نزولی است) بیشترین مقدار آن به ازای نقطه ابتدایی یعنی $x = -1$ بدست می‌آید $(f:[-1,2] \longrightarrow R)$

$$y_{max} = (\log_{0/2}^{0/4})^{-1} = \frac{1}{\log_{0/2}^{0/4}} = \log_{0/4}^{0/2}$$

تست : تابع $f(x) = \log_4^{(ax^2+bx+c)}$ فقط در بازه $(-2,1)$ دارای تعریف است. اگر $f(0) = \frac{3}{2}$ باشد، $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1-\log 2}{2\log 2}$ ۲) $\dfrac{1}{1+\log 2}$ ۳) $\dfrac{1+\log 2}{2\log 2}$ ۴) $\dfrac{1-\log 2}{\log 2}$

پاسخ : گزینه (۱)

$f(0) = \frac{3}{2} = \log_4^c \Rightarrow c = 2^{2(\frac{3}{2})} = 8$

از طرفی دامنه‌ی تابع $(-2,1)$ است یعنی وقتی تعیین علامت عبارت داخل لگاریتم انجام شود بصورت زیر باشد. واضح است که $x = -2$ و $x = 1$ باید ریشه‌ی عبارت $ax^2+bx+8 = 0$ باشند بنابراین داریم:

x		-2		1	
ax^2+bx+8	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\begin{cases} a(-2)^2 + b(-2) + 8 = 0 \rightarrow 4a - 2b = -8 \rightarrow 2a - b = -4 \\ a(1)^2 + b(1) + 8 = 0 \rightarrow a + b = -8 \end{cases}$$

$$f(x) = \log_4^{-4(x^2+x-2)} \rightarrow f(\tfrac{1}{2}) = \log_4^{(-4(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2))} = \log_4^5 = \frac{1}{2}\log_2^5$$

$$\rightarrow f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\log_2^{10} - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2} - 1\right) = \frac{1-\log 2}{2\log 2}$$

تست: در تابع $f(x)=\log_2 x$ طول‌های $1, x_2, x_3, \dots$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $f(1), f(x_2), f(x_3), \dots$ تشکیل دنباله‌ی حسابی غیرثابت بدهند، شیب خط گذرنده از نقطه‌هایی به طول x_3 و x_4 بر روی منحنی نصف شیب خط گذرنده از نقاط x_2 و x_3 بر روی منحنی باشد، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی کدام است؟

۱) $\log_2 3$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\log_2 5$

پاسخ: گزینه‌ی (۲) اگر دنباله‌ی $f(1), f(x_2), f(x_3), \dots$ دنباله‌ی حسابی باشد، داریم:

$$2f(x_2)=f(1)+f(x_3) \to 2\log_2 x_2=\log_2 1+\log_2 x_3 \to$$

$$\log_2 x_2^2=\log_2 x_3 \Rightarrow x_2^2=x_3$$

دنباله‌ی $\{1, x_2, x_3, \dots\}$ دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q است. نسبت شیب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}}=\frac{x_3-x_2}{x_4-x_3}=\frac{q^2-q}{q^3-q^2}=\frac{q^2-q}{q(q^2-q)}$$

$$=\frac{1}{q}=\frac{1}{2} \to q=2$$

قدرنسبت دنباله حسابی:

$$d=\log_2 x_2-\log_2 1=\log_2 q-\log_2 1=\log_2 2-0=1$$

تست: فرض کنید $f(x)=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$ و مقدار $f(\log_3^{\sqrt{2}+1})\times f(\log_9^{\sqrt{2}-1})$ را برابر A بگیریم. حاصل $\log_2^{A+1}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ. گزینه‌ی ۴) ابتدا مقادیر داده شده را به دست آوریم.

$$f(\log_3^{\sqrt{2}+1})=\frac{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}}-1}{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}}+1}=\frac{3^{\log_3^{(\sqrt{2}+1)^2}}-1}{3^{\log_3^{(\sqrt{2}+1)^2}}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{(\sqrt{2}+1)^2+1}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+4}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\log_9^{\sqrt{2}-1})=\frac{3^{2\log_9^{\sqrt{2}-1}}-1}{3^{2\log_9^{\sqrt{2}-1}}+1}=\frac{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1}}-1}{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1}}+1}=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$$

بنابراین:

$$A=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

درنتیجه:

$$\log_2^{A+1}=\log_2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\log_2^{2^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}$$

تست: از جملات دنباله‌ی $t_n=0/64(5)^n$ لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم، در دنباله‌ی جدید مجموع هشت جمله‌ی اول کدام است؟

۱) $2\log 2$ ۲) $2\log 5$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ. گزینه‌ی ۳) ابتدا جملات دنباله‌ی $t_n=0/64(5)^n$ را می‌نویسیم:

$0/64\times5^1,\ 0/64\times5^2,\ 0/64\times5^3,\ ...$

درسنامه آموزشی (ریاضی - تجربی) ویژه کنکور از جملات لگاریتم دنباله‌ی حسابی حاصل شود.

مولف رحیم قهرمان

$\log(0/4\times 5)$, $\log(0/4\times 5^2)$ و $\log(0/4\times 5^3)$, ... (۱)

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم جملات دنباله (۱) را ساده می‌کنیم:

$$\log 0/4+\log 5,\ \log 0/4+\log 5^2,\ \log 0/4+\log 5^3,\ \dots$$

$$\Rightarrow \log 0/4+\log 5 \xrightarrow{+\log 5} \log 0/4+2\log 5 \xrightarrow{+\log 5} \log 0/4+3\log 5,\ \dots$$

همانطور که دیده می‌شود جملات دنباله (به جز جمله اول) با افزودن $\log 5$ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید، بنابراین یک دنباله حسابی با قدر نسبت $d=\log 5$ و جمله اول $a_1=\log 0/4+\log 5$ داریم، خواسته سوال را به دست می‌آوریم:

$$a_1+d=\log 0/4+\log 5+\log 5=\log(0/4\times 5\times 5)=\log 10=1$$

تست: اگر $f(x)=\log_7 x$ باشد، حاصل $2^{\frac{f(f(2))}{f(2)}}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $f(2)$ ۳) 7 ۴) $f(7)$

پاسخ: گزینه ۲) ابتدا $f(2)$ و $f(f(2))$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\log_7 x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(2)=\log_7 2 \\ f(f(2))=f(\log_7 2)=\log_7(\log_7 2) \end{cases}$$

حالا با استفاده از خاصیت $\frac{\log_c a}{\log_c b}=\log_b a$ داریم:

$$\frac{f(f(2))}{f(2)}=\frac{\log_7(\log_7 2)}{\log_7 2}=\log_2(\log_7 2)$$

ونهایتاً با استفاده از خاصیت $a^{\log_a b}=b$ داریم:

$$2^{\frac{f(f(2))}{f(2)}}=2^{\log_2(\log_7 2)}=\log_7 2=f(2)$$

تست: اعداد مثبت a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. حاصل

$$\frac{(\log_a 100)(\log_a 10-\log_b 10)}{(\log_c 100)(\log_b 10-\log_c 10)}$$

کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\log_c b \log_c a$ ۳) $\log_b c \log_a c$ ۴) $(\log_a c)^2$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{(2\log_a 10)\left(\frac{1}{\log_{10} a}-\frac{1}{\log_{10} b}\right)}{(2\log_c 10)\left(\frac{1}{\log_{10} b}-\frac{1}{\log_{10} c}\right)}=\frac{(\log_a 10)\left(\frac{\log_{10} b-\log_{10} a}{\log_{10} a\,\log_{10} b}\right)}{(\log_c 10)\left(\frac{\log_{10} c-\log_{10} b}{\log_{10} b\,\log_{10} c}\right)}$$

$$=\frac{(\log_a 10)^2(\log_{10}\frac{b}{a})}{(\log_c 10)^2(\log_{10}\frac{c}{b})}$$

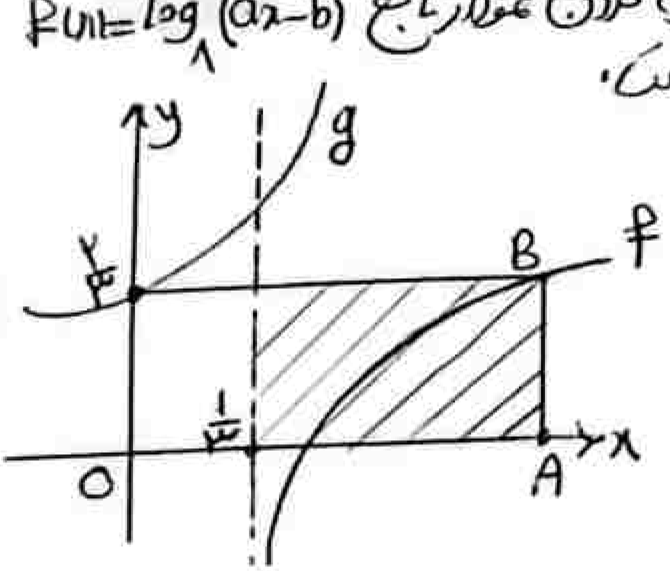
حال چون a و b و c دنباله هندسی تشکیل داده‌اند $b^2=ac$ و در نتیجه $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ است پس

$$\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right)=\log_{10}\left(\frac{c}{b}\right)$$

و جواب برابر است با:

$$\left(\frac{\log_a 10}{\log_c 10}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{\log_{10} a}}{\frac{1}{\log_{10} c}}\right)=\left(\frac{\log_{10} c}{\log_{10} a}\right)=(\log_a c)^2$$

تست: با توجه به شکل زیر، نمودار تابع g از قرینه کردن نمودار تابع $f(x)=\log_8(ax-b)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم به دست آمده است. مساحت مستطیل رنگی کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{8}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۴) با مقایسه نمودار تابع لگاریتمی f از روی ضابطه و نمودار داریم:

$f(x)=\log_8(ax-b) \Rightarrow ax-b>0 \to x>\frac{b}{a} \xrightarrow{x>\frac{1}{3}} \frac{b}{a}=\frac{1}{3}$
$\to a=3b$

نمودار f و g وارون یکدیگر هستند چون $(0,\frac{2}{3})\in g$ است بنابراین $(\frac{2}{3},0)\in f$ است، پس:

$f(\frac{2}{3})=0 \to \log_8(\frac{2}{3}a-b)=0 \to \frac{2}{3}a-b=8^0=1 \xrightarrow[a=3b]{}$

$\frac{2}{3}(3b)-b=1 \to b=1 \to a=3$

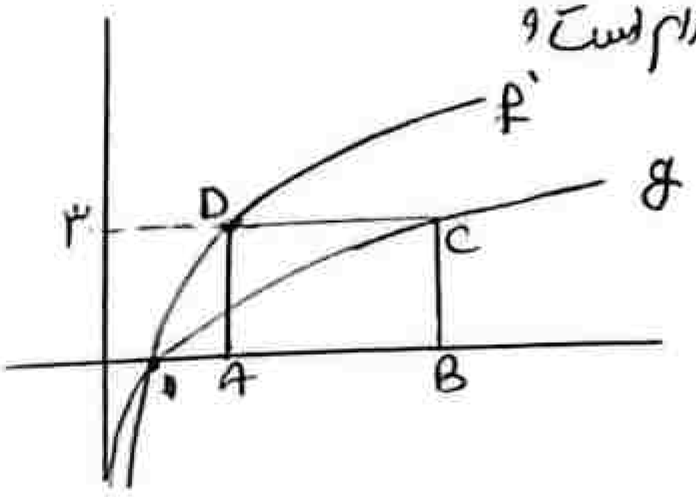
پس ضابطه f به صورت $f(x)=\log_8(3x-1)$ است. برای به دست آوردن نقطه ی B باید معادله $f(x)=\frac{2}{3}$ را حل کنیم و داریم چون نقاط A و B هم طول هستند، مختصات A نیز به دست می آید.

$f(x)=\frac{2}{3} \Rightarrow \log_8(3x-1)=\frac{2}{3} \to 3x-1=8^{\frac{2}{3}} \to 3x-1=4 \to x=\frac{5}{3}$

پس $B(\frac{5}{3},\frac{2}{3})$ و $A(\frac{5}{3},0)$ پس با توجه به نمودار مساحت مستطیل برابر:

$S=(\frac{5}{3}-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

تست: نمودار دو تابع $f(x)=\log_a x$ و $g(x)=\log_b x$ به صورت مقابل است و مساحت مستطیل $ABCD$ برابر ۲۷ واحد مربع است، اگر $A(8,0)$ و $\log_a(2b+c)=3$ باشد، مقدار c کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۳)

چهارضلعی ABCD مستطیل است در نتیجه نقاط A و D طول یکسان دارند در نتیجه مختصات نقطه‌ی D برابر $(8,3)$ می‌باشد نقطه‌ی D روی تابع f قرار دارد.

$f(8)=3 \Rightarrow \log_a 8 = 3 \rightarrow a=2$

مساحت مستطیل ABCD برابر $|AD|\times|AB|$ می‌باشد.

$S_{ABCD}=57=|AB|\times|AD| \rightarrow 3\times|AB|=57 \rightarrow |AB|=19 \rightarrow$

$|AB|=|x_B-x_A|=19 \Rightarrow |x_B-8|=19 \rightarrow x_B=27$

نقاط B و C طول یکسان دارند پس مختصات نقطه‌ی C برابر $(27,3)$ می‌باشد. همچنین نقطه‌ی C روی تابع g قرار دارد.

$g(27)=3 \Rightarrow \log_b 27=3 \rightarrow b=3$

حال مقادیر a و b را در عبارت $\log_a^{2b+c}=3$ جایگذاری می‌کنیم.

$\log_a^{2b+c}=3 \Rightarrow \log_2^{6+c}=3 \rightarrow 8=6+c \rightarrow c=2$

<u>تست</u>: اگر $3^x=0/216$ و $5^{f(x)}=625$ باشد، آنگاه $f(2)-f(6)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$3^x=0/216 \rightarrow 3^x=\frac{216}{1000} \Rightarrow 3^x=\frac{2^3\times3^3}{10^3}$

$\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم}} \log_3 3^x=\log_3 \frac{2^3\times3^3}{10^3} \rightarrow$

$x=3\log_3 2-3\log_3 10+3\log_3 3 \rightarrow x=3+3\log_3 \frac{1}{5} \rightarrow$

$x=3-3\log_3 5 \rightarrow \log_3 5=\frac{3-x}{3} \rightarrow \boxed{\log_5 3=\frac{-3}{x-3}}$ (1)

$5^{f(x)}=625 \xrightarrow[\text{در مبنای ۵ می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \log_5 5^{f(x)}=\log_5 625$

$f(x)=\log_5 5^2\times 3^3 \rightarrow f(x)=2+3\log_5 3 \xrightarrow{\text{طبق (1)}}$

$f(x)=2+3\left(\frac{-3}{x-3}\right) \rightarrow f(x)=\frac{2x-15}{x-3} \Rightarrow$

$f(2)-f(4)=11-(-7)=18$

تست: نمودار تابع $f(x)=\log_2(ax+b)$ خط $y=x+1$ را روی محورهای مختصات قطع می‌کند. ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=2^x+2$ ۲) $f^{-1}(x)=2^x-3$

۳) $f^{-1}(x)=2^x+3$ ۴) $f^{-1}(x)=2^{x-2}$

پاسخ: گزینه ۲)

$$y=x+1 \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{محل برخورد با محورها}} A(-1,0) \rightarrow 0=\log_2(b-a) \rightarrow b-a=1 \\ \xrightarrow{\text{محل برخورد با محورها}} B(0,1) \rightarrow 1=\log_2 b \rightarrow b=2 \rightarrow a=1 \end{cases}$$

$f(x)=\log_2(x+2) \Rightarrow y=\log_2(x+2) \Rightarrow 2^y=x+2 \rightarrow 2^y-2=x \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=2^x-2$

حل معادلات لگاریتمی ۱)

مولف رحیم قهرمان

برای حل معادلات شامل لگاریتم، باید لگاریتم را ببرداریم. برای این منظور دو روش کلی زیر وجود دارد:

روش اول: شکل معادله را به صورت $\log_a f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$ تبدیل می‌کنیم، حال بنا به تعریف و مفهوم حاصل لگاریتم، نتیجه می‌گیریم که $f(x) = a^k$ می‌باشد. از حل این معادله، جواب‌های معادله لگاریتمی را مشخص می‌کنیم $(k \in \mathbb{R})$

$\log_a f(x) = k \leftrightarrow a^k = f(x)$. شرط استفاده از این روش آن است که یک طرف تساوی یک لگاریتم (بدون ضریب) و طرف دیگر تساوی یک عدد حقیقی داشته باشیم.

<u>روش دوم:</u> شکل معادله را به صورت $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ تبدیل می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها با هم برابرند، یعنی $f(x) = g(x)$ است. از حل این معادله، جواب‌های معادله لگاریتمی را مشخص می‌نماییم.

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$. شرط استفاده از این روش آن است که در دو طرف تساوی دو لگاریتم هم مبنا (بدون ضریب) داشته باشیم.

تذکر بسیار مهم: اگر به ازای این جواب‌ها، جلوی لگاریتم‌ها مثبت و مبناها مثبت و مخالف یک باشند، آن‌ها را می‌پذیریم، اگر یکی از این موارد نقض شود، جواب به دست آمده غیر قابل قبول است.

<u>تست:</u> مجذور لگاریتم عدد x با لگاریتم مجذور آن عدد برابر است. مجموع مقادیر x کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰۰۱ پاسخ: گزینه ۲)

$(\log x)^2 = \log x^2 \to (\log x)^2 - 2\log x = 0 \to \log x(\log x - 2) = 0 \to$

$$\begin{cases} \log x = 0 \to x = 1 \\ \log x = 2 \to x = 100 \end{cases} \to x_1 + x_2 = 101$$

<u>تست:</u> لگاریتم مجذور عددی در مبنای ۱۴، از لگاریتم جذر معکوس آن عدد در همان مبنا به اندازه‌ی ۲٫۲۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲)

$\log_{14}(x^4)^2 = \log_{14}\sqrt{\frac{1}{x}} + 2.25 \to \log_{14}x^4 - \log_{14}\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{9}{4} \to$

$$\log_{16}\frac{x^4}{x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{9}{4}\rightarrow x^{4+\frac{1}{2}}=16^{\frac{9}{4}}\rightarrow$$

$$x^{\frac{9}{2}}=(2^4)^{\frac{9}{4}}\rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^9=2^9\rightarrow x^{\frac{1}{2}}=2\rightarrow x=4$$

تست: معادله‌ی لگاریتمی

$$\log(3x+1)+2\log\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2-2x+1)+\log(x+2)$$

را در نظر بگیرید، اگر α ریشه‌ی این معادله باشد حاصل $\log_5(4\alpha+13)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\log(3x+1)+2\log\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2-2x+1)+\log(x+2)\rightarrow$$

$$\log(3x+1)+\log(\sqrt{x-2})^2=\frac{1}{2}\log(x-1)^2+\log(x+2)\rightarrow$$

$$\log(3x+1)+\log(x-2)=\log(x-1)+\log(x+2)\rightarrow\log(3x+1)(x-2)=\log(x-1)(x+2)$$

$$\rightarrow(3x+1)(x-2)=(x-1)(x+2)\rightarrow 2x^2-6x=0\rightarrow(x=0 \times \text{ و } x=3 \checkmark)$$

$$\log_5 4\alpha+13 \xrightarrow{\alpha=3} \log_5 25=2$$

تست: اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $\log_3(9^x+18)=2+x$ باشند مقدار $|x_2-x_1|$ کدام است؟

۱) $\log_3 2$ ۲) $\log_2 6$ ۳) $1-\log_3 6$ ۴) $1+\log_3 6$

پاسخ: گزینه‌ی ۱) می‌باشد. $\log_b a=c\rightarrow a=b^c$ و $\log_k a-\log_k b=\log_k\frac{a}{b}$ است. داریم:

$$\log_3(9^x+18)=2+x\longrightarrow 9^x+18=3^{2+x}\rightarrow(3^2)^x+18=3^2\times3^x$$

$$\rightarrow(3^x)^2+18=3^2\times3^x\xrightarrow{3^x=A}A^2+18=9A\rightarrow(A-3)(A-6)=0\rightarrow$$

$$\begin{cases}A=3\rightarrow 3^x=3\rightarrow x_1=1\\ A=6\rightarrow 3^x=6\xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۳}}\log_3 3^x=\log_3 6\rightarrow x_2=\log_3 6\end{cases}$$

$$|x_2-x_1|=|\log_3 6-1|=|\log_3 6-\log_3 3|=|\log_3 2|=\log_3 2$$

تست: از معادله‌ی لگاریتمی $\log_3(2x^2+1)-\log_3(x+2)=1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ. گزینه‌ی ۴)

$$\log_3(2x^2+1)-\log_3(x+2)=1\rightarrow\log_3\left(\frac{2x^2+1}{x+2}\right)=\log_3 3$$

$$\rightarrow\frac{2x^2+1}{x+2}=3\longrightarrow$$

$2x^2-3x-5=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 & (\text{غ ق ق}) \\ x=-\frac{c}{a}=\frac{5}{2} & (\text{ق ق}) \end{cases}$ (77)

درسنامه آموزش ریاضی (عادی و ویژه تیزهوشان)
مولف: رحیم شهرامی

الف) $\log_8(2x-1) = \log_8(2\times\frac{5}{2}-1) = \frac{2}{3}$

تست: تابع $f(x)=\log_2(x-\sqrt{20})$ مفروض است. اگر $x=k$ ریشه ی معادله $\log(x^2-4x+8) - \log(x-1) = \log(2x-10)$ باشد، آنگاه نقطه ی $(k, f(k))$ در کدام ناحیه مختصاتی قرار دارد؟

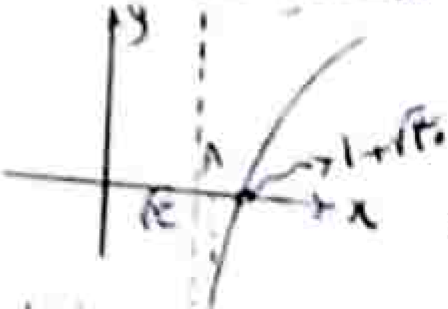
۱) دوم　　۲) چهارم　　۳) اول　　۴) سوم

پاسخ: گزینه ۲)

$\log\frac{x^2-4x+8}{x-1} = \log(2x-10) \xrightarrow{x\neq 2}$

$\log\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)} = \log(x-10) \to x-4=2x-10 \to x=6$ ق ق

نمودار تابع $f(x)=\log_2(x-\sqrt{20})$ از انتقال نمودار $y=\log_2 x$ به سمت راست به اندازه $\sqrt{20}$ واحد بدست می آید. می دانیم $4<\sqrt{20}<5$ و نمودار تابع f به صورت زیر است.



چون $\sqrt{20}<k=6<1+\sqrt{20}$ لذا مقدار $f(k)$ منفی است، بنابراین نقطه $(k, f(k))$ با طول مثبت و عرض منفی در ناحیه چهارم محور مختصات قرار دارد.

تست: معادله ی $2\log_8 2x + \log_8(x^2+1-2x) = \frac{4}{3}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱)

$2\log_8(2x) + \log_8(x^2-2x+1) = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_8(2x)^2 + \log_8(x^2-2x+1) = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \log_8(4x^2)(x^2-2x+1) = \frac{4}{3} \Rightarrow (4x^2)(x^2-2x+1) = 8^{\frac{4}{3}} \to$

$4x^2(x-1)^2=(2^3)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 4x^2(x-1)^2=16 \to x^2(x-1)^2=4 \to$

$x(x-1)=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \to x=2 ✓, x=-1 ✗ \\ x^2-x+2=0 \to \Delta<0 \end{cases} \to$ معادله یک جواب دارد.

تست: معادله ی $\log_{\sqrt[3]{2}}(4x^2-4x+1) \times \log_{(2x-1)} 16 = 12x^2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

$\log_{\sqrt[3]{2}}(4x^2-4x+1) \times \log_{(2x-1)} 16 = 12x^2 \longrightarrow$

$\log_{2^{\frac{1}{3}}}(4x^2-4x+1) \times \log_{(2x-1)} 2^4 = 12x^2 \rightarrow 3\times 4\log_{2}(4x^2-4x+1) \times \log_{(2x-1)} 2 = 12x^2$

$\Rightarrow \cancel{12}\log_{2}(4x^2-4x+1) \times \log_{(2x-1)} 2 = \cancel{12}x^2 \xrightarrow{\log_a b \times \log_b c = \log_a c}$

$\log_{2x-1}(4x^2-4x+1) = x^2 \longrightarrow \log_{2x-1}(2x-1)^2 = x^2 \rightarrow 2\log_{2x-1}(2x-1) = x^2$

$\rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ که فقط $x=\sqrt{2}$ قابل قبول می‌باشد.

تست: اگر $x=m$ جواب معادله $2^{1+\log_3 2} = 36^{\log_3 x}$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[12]{4}} m^3$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲)

$2^{\log_3 3+\log_3 2} = 6^{2\log_3 x} \longrightarrow 2^{\log_3 6} = 6^{\log_3 x^2} \longrightarrow 6^{\log_3 2} = 6^{\log_3 x^2}$

$\rightarrow x^2=2 \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}=m \checkmark \\ x=-\sqrt{2} \times \end{cases} \Rightarrow \log_{\sqrt[12]{4}} m^3 = \log_{\sqrt[12]{4}} (\sqrt{2})^3 = 9$

تست: اگر x_1 جواب معادله $\log_4(2+\sqrt{x+3}) = 2\cos\frac{5\pi}{3}$ باشد، آنگاه مجموعه جواب نامعادله $|x-x_1| < [\frac{3x_1}{2}]$ شامل چند عدد طبیعی می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴)

$\log_4(2+\sqrt{x+3}) = 2\cos(\frac{6\pi-\pi}{3}) \longrightarrow$

$\log_4(2+\sqrt{x+3}) = 2\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \log_4(2+\sqrt{x+3}) = 2\times\frac{1}{2} \rightarrow$

$\log_4(2+\sqrt{x+3}) = 1 \longrightarrow 2+\sqrt{x+3} = 4^1 \rightarrow \sqrt{x+3}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$x+3=4 \rightarrow x=1 \xrightarrow{x_1=1} |x-1| < [\frac{3}{2}] \rightarrow |x-1|<1 \rightarrow -1<x-1<1$

$\rightarrow 0<x<2 \rightarrow$ شامل یک عدد طبیعی می‌شود.

تست: اگر $x=a$ جواب معادله $2^{1+\log_3 2} = 36^{\log_3 x}$ باشد، حاصل $\log_4 a^3$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$2^{1+\log_3 2} = 36^{\log_3 x} \rightarrow 2^{\log_3 3+\log_3 2} = 36^{\log_3 x} \rightarrow 2^{\log_3 6} = 6^{2\log_3 x} \rightarrow$$

$$2^{\log_3 6} = 6^{\log_3 x^2} \rightarrow \log_3 2^{\log_3 6} = \log_3 6^{\log_3 x^2} \rightarrow \log_3 6 \times \log_3 2 = \log_3 x^2 \times \log_3 6$$

$$\rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x=\sqrt{2} \rightarrow a=\sqrt{2}$$

حال حاصل $\log_4 a^3$ به ازای $a=\sqrt{2}$ برابر است:

$$\log_4 (\sqrt{2})^3 = \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$$

تست: مجموع جواب‌های معادله $(\log_3 x)^2 - \log_3 45 \log_3 x + \log_3 25 = 0$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 45 \log_3 x + \log_3 25 = 0 \rightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 (9\times 5)\log_3 x + \log_3 5^2$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - (2+\log_3 5)\log_3 x + 2\log_3 5 = 0 \rightarrow$$

$$(\log_3 x - 2)(\log_3 x - \log_3 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \rightarrow x=9 \\ \log_3 x - \log_3 5 = 0 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

مجموع $= 14$

تست: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(2^x - 3^{\log_3 5})(4^x - 5^{\log_5 3}) = 0$ کدام است؟

۱) $\log_2 1$ ۲) $\log_2 5\sqrt{3}$ ۳) $\log_2 5\sqrt{2}$ ۴) $\log_2 3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) $3^{\log_3 5}=5$ و $5^{\log_5 3}=3$ با جایگذاری این مقادیر در معادله داریم:

$$(2^x-5)(4^x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} 2^x=5 \rightarrow x=\log_2 5 \\ 4^x=3 \rightarrow 2^x=\sqrt{3} \rightarrow x=\log_2 \sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\log_2 5 + \log_2 \sqrt{3} = \log_2 5\sqrt{3}$$

تست: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $\log_3 x + \log_{x^2} 3 = \frac{3}{2}$ باشند و $x' > x''$ باشد، مقدار $(x'')^{x'}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{11}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

$\log_2^x + \frac{1}{2}\log_{x^2}^4 = \frac{3}{2} \longrightarrow$

$\log_2^x + \frac{\frac{1}{2}}{\log_2^x} = \frac{3}{2} \longrightarrow 2(\log_2^x)^2 - 3\log_2^x + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \log_2^x = 1 \\ \log_2^x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 = x' \\ x = \sqrt{2} = x'' \end{cases} \Rightarrow (x'')^{x'} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

تست: معادله‌ی $\log_2^x + \log_4^x = \log_2^x \times \log_4^x$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر پاسخ: گزینه‌ی ۲)

با استفاده از فرمول تغییر مبنا $\log_b^a = \frac{\log_k^a}{\log_k^b}$ این تست را حل می‌کنیم:

$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{\log 2} \times \frac{\log x}{\log 4} \longrightarrow \frac{\log x \times \log 4 + \log x \times \log 2}{\log 2 \times \log 4} = \frac{(\log x)^2}{(\log 2)(\log 4)}$

$\longrightarrow \log x(\underbrace{\log 4 + \log 2}_{\log 12}) = (\log x)^2 \longrightarrow (\log x)(\log 12) = (\log x)^2 \longrightarrow$

$(\log x)(\log 12 - \log x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \log x = 0 \longrightarrow x = 1 ✓ \\ \log x = \log 12 \longrightarrow x = 12 ✓ \end{cases} \longrightarrow$ ۲ جواب

تست: اگر $4^{\log_2^x} - x\log_2^{\frac{1}{8}} = 10$ حاصل $\log_6^{(x^2+2)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵ پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$4^{\log_2^x} = 2^{2\log_2^x} = 2^{\log_2^{x^2}} = x^2$ و $\log_2^{\frac{1}{8}} = \log_2 2^{-3} = -3$

به‌جای گذاری این مقادیر در معادله داریم:

$x^2 + 3x - 10 = 0 \longrightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 ✓ \\ x = -5 ✗ \end{cases}$

به ازای $x = -5$ عبارت جلوی لگاریتم منفی می‌شود، پس فقط $x = 2$ قابل قبول است. بنابراین

$\log_6^{(x^2+2)} = \log_6^6 = 1$

جواب معادله‌ی $-\log_5\left(\frac{-1}{1-2x}\right) + \frac{1}{\log_5(2x-1)} = 2$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) (۰،۲) ۲) (۱،۴) ۳) (۲،۴) ۴) (۳،۵) پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$-\log_5\left(\frac{-1}{1-2x}\right) + \frac{1}{\log_5(2x-1)} = 2 \longrightarrow -\log_5\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \frac{1}{\log_5(2x-1)} = 2$

$\Rightarrow \log_5^{(2x-1)} + \frac{1}{\log_5(2x-1)} = 2 \Rightarrow (\log_5(2x-1))^2 - 2\log_5(2x-1) + 1 = 0$

$\Rightarrow \left(\log_5^{(2x-1)} - 1\right)^2 = 0 \to \log_5^{2x-1} = 1 \to$

$2x-1=5 \to x=3 \in (2,4)$

<u>تست</u>: اختلاف ریشه‌های معادله $\log_2 |x| + \log_2 (x+4) = 2$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴ پاسخ. گزینه ی ۲

$\log_2 |x|(x+4) = 2 \to |x|(x+4)=4 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \to x^2+4x-4=0 \to x=-2+\sqrt{8} \\ x<0 \to x^2+4x+4 \to x=-2 \end{cases}$

اختلاف ریشه‌ها برابر $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ است.

<u>تست</u>: اگر $\log_8 (x^2-2) = \log_4 \sqrt[3]{-x}$ باشد، حاصل 2^x کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$ پاسخ: گزینه ی ۳

$\log_8 (x^2-2) = \log_{2^3} (x^2-2) = \frac{1}{3}\log_2 (x^2-2) = \log_2 \sqrt[3]{x^2-2} = \log_4 \sqrt[3]{-x} \Rightarrow$

$\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt[3]{-x} \to x^2-2=-x \Rightarrow x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$

جواب $x=1$ غیر قابل قبول است، زیرا عبارت زیر رادیکال را منفی می‌کند، بنابراین جواب قابل قبول نیست.

$\to x=-2 \Rightarrow 2^x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

<u>تست</u>: مجموع جواب معادله‌ی $\log_x (x^2-2x) = 2 + x - [x]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار پاسخ: گزینه ی ۱

با توجه به اینکه x عددی صحیح است، پس $[x]=x$ است و داریم:

$\log_x (x^2-2x) = 2 + x - [x] \Rightarrow \log_x^{x^2-2x} = 2 \to x^2-2x = x^2 \to$

$x(x^2-x-2)=0 \to (x=0 \text{ و } x=-1 \text{ و } x=2)$

با توجه به اینکه مقادیر $x=0$ و -1 در دامنه عبارت لگاریتمی نیستند، پس تنها جواب صحیح معادله $x=2$ می‌باشد.

<u>تست</u>: اگر $x=a$ جواب معادله‌ی $\dfrac{1+\log_2 (x-4)}{2\log_2 (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})} = 1$ باشد، حاصل $\log_{(a-2)} \sqrt{a^2+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{7}{2}$ پاسخ. گزینه ی ۱

$1+\log_2 (a-4) = 2\log_2 (\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}) \longrightarrow$

$\log_2 2(a-4) = \log_2 (\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})^2 \rightarrow$

$2a-8 = (\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})^2 \rightarrow 2a-8 = 2a - 2\sqrt{a^2-16} \rightarrow a = \pm 5$

که $a=5$ قابل قبول است.

$= \log_{(a-4)} \sqrt{a^2+2} = \log_1 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

تست: جواب معادله‌ی $(\log 5)^2 + x\log 50 = 1$ برابر $\log a$ است. حاصل $\log_2 (2a+2)$ کدام است؟ ۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳) ابتدا از معادله داده شده x را طلب می‌کنیم:

$x = \frac{1-(\log 5)^2}{\log 50} = \frac{(1-\log 5)(1+\log 5)}{\log 50} = \frac{\log\frac{10}{5} \times \log 50}{\log 50} = \log 2$

دقت کنید که 1 را به صورت $\log 10$ نوشتیم پس:

$1 + \log 5 = \log 10 + \log 5 = \log 50$ و $1 - \log 5 = \log 10 - \log 5 = \log\frac{10}{5}$

با توجه به صورت سوال می‌توان نتیجه گرفت $\log a = \log 2$ ، $a=2$ است، بنابراین:

$\log_2 (2a+2) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$

تست: اگر $x=\alpha$ جواب معادله‌ی $\log_x (3x^2-4) = \frac{\log_5 15}{\log_{15} 5} - \frac{\log_5 75}{\log_3 5}$ حاصل $\log_{0/5} (\alpha + \frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

ابتدا طبق رابطه‌ی $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ داریم:

$\log_x (3x^2-4) = \frac{\log_5 15}{\log_{15} 5} - \frac{\log_5 75}{\log_3 5} \rightarrow$

$\log_x (3x^2-4) = (\log_5 15)(\log_5 15) - (\log_5 75)(\log_5 3) \rightarrow$

$\log_x (3x^2-4) = (\log_5 3\times 5)^2 - (\log_5 5^2\times 3)(\log_5 3) \rightarrow$

$\log_x (3x^2-4) = (1+\log_5 3)^2 - (2+\log_5 3)(\log_5 3) \rightarrow$

$\log_x (3x^2-4) = 1 + (\log_5 3)^2 + 2\log_5 3 - 2\log_5 3 - (\log_5 3)^2 = 1$

$\log_x (3x^2-4) = 1 \rightarrow 3x^2-4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow$

$\begin{cases} x=-1 \times \\ x=\frac{3}{2} \checkmark \end{cases} \to \log_{0.5}(a+\frac{1}{2}) \xrightarrow{a=x=\frac{3}{2}}$

$\log_{0.5}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) = \log_{0.5} 2 = -1$

تست: اگر $\log_2 x^2 - \log_{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{x} = 4\log_9 \sqrt{3}$ باشد، $\log_5 x^2$ تقریبا کدام است؟ ($\log 2 \approx 0.3$)

۱) $\frac{3}{14}$ ۲) $\frac{15}{14}$ ۳) $-\frac{4}{7}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱)

$\log_2 x^2 - \log_{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{x} = 4\log_9 \sqrt{3} \to 2\log_2 x - \log_{2^{\frac14}} x^{-1} = 4\log_{3^2} 3^{\frac12} \to$

$2\log_2 x - \frac{-1}{\frac14}\log_2 x = 4\,\frac{\frac12}{2}\log_3 3 \Rightarrow 2\log_2 x + 2\log_2 x = 4\times\frac14 \to$

$4\log_2 x = 1 \to x = 2^{0.25}$ و $\log_5 x^2 = \frac{2\log x}{\log 5} = \frac{2\log 2^{(0.25)}}{1-\log 2}$

$= \frac{2(0.25)\log 2}{1-\log 2} = \frac{(0.5)(0.3)}{(0.7)} = \frac{3}{14}$

تست: اگر x در معادله $2\log_2\sqrt{5} + \log_2(\frac{x-1}{x}) = 2$ صدق کند، حاصل $x^{\log_{25} 3}$ کدام است؟ ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲)

$2\log_2\sqrt{5} + \log_2(\frac{x-1}{x}) = 2 \Rightarrow \log_2(\sqrt{5})^2 + \log_2(\frac{x-1}{x}) = 2 \to$

$\log_2(\frac{5x-5}{x}) = 2 \to \frac{5x-5}{x} = 2^2 \Rightarrow x=5 \to x^{\log_{25}3} = 5^{\log_{25}3} =$

$= 5^{\frac{\log 3}{2\log 5}} = 5^{\frac12\times\frac{\log 3}{\log 5}} = 5^{\frac12\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^{\frac12} = 3^{\frac12} = \sqrt{3}$

تست: درصورتی که $\log_{3-2\sqrt{2}} x^4 + \log_{\sqrt{2}+1} x = -1$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{2}+1} x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $1+\sqrt{2}$ ۴) $1-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱)

$\log_{(\sqrt{2}-1)^2} x^4 + \log_{\sqrt{2}+1} x = -1 \Rightarrow \frac{4}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} x + \log_{\sqrt{2}+1} x = -1 \Rightarrow$

$-2\log_{\sqrt{2}+1} x + \log_{\sqrt{2}+1} x = -1 \Rightarrow -\log_{\sqrt{2}+1} x = -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} x = -1$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}+1 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}+1} x = 1$

تست: جواب معادله

$$\log(x+\sqrt{2x-1})+\log(x-\sqrt{2x-1})+2\log\sqrt{2}=0$$

کدام است؟ ۱) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ ۴) فاقد جواب

پاسخ: گزینه ی ۱

$$\log(x+\sqrt{2x-1})(x-\sqrt{2x-1})+\log 2=0 \to 2(x^2-2x+1)=1 \to$$

$$(x-1)^2=\frac{1}{2} \to x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$ (چون $x>\frac{1}{2}$ می باشد دامنه تعریف)

تست: تعداد جواب های حقیقی معادله

$$\log(x^3-3x^2-4)-2\log\sqrt{x+1}=2$$

کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۲

می دانیم $2\log\sqrt{x+1}=\log(x+1)$ می باشد.

$$\frac{x^3-3x^2-4}{x+1}=10^2 \Rightarrow x^2-4x-100=0$$

جواب معادله ی درجه دوم حاصل به صورت $x=2+\sqrt{104}$ و $x=2-\sqrt{104}$ است. جواب منفی مورد قبول نیست فقط یک جواب حقیقی دارد.

تست: مجموع جواب های معادله ی

$$(\log_3 x)^2-\log_3 45\log_3 x+\log_3 25=0$$

کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۶۲ ۴) ۱٤

پاسخ: گزینه ی ۴

$$(\log_3 x)^2-\log_3 45\log_3 x+\log_3 25=0 \to$$

$$(\log_3 x)^2-\log_3(9\times 5)\log_3 x+\log_3 5^2=0 \to$$

$$(\log_3 x)^2-(\log_3 3^2+\log_3 5)\log_3 x+2\log_3 5=0 \to$$

$$(\log_3 x-2)(\log_3 x-\log_3 5)=0 \to \begin{cases}\log_3 x-2=0 \Rightarrow x=9\\ \log_3 x-\log_3 5=0 \Rightarrow x=5\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب های معادله برابر ۱٤ است.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{2}^{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}$ باشد، مجموع ریشه‌های معادله $f^2(x)-3f(x)=-2$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{7}{12}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{2}^{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{2^{-1}}(x+1)}=2^{-\frac{1}{2}\log_2(x+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=2^{\log_2(x+1)^{-\frac{1}{2}}}=(x+1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f^2(x)-3f(x)=-2\Rightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{3}{\sqrt{x+1}}=-2\to\frac{1-3\sqrt{x+1}}{x+1}=-2$$

$$\Rightarrow\xrightarrow{\sqrt{x+1}=A}\frac{1-3A}{A^2}=-2\Rightarrow 2A^2-3A+1=0\to$$

$$\begin{cases}A=1\to\sqrt{x+1}=1\Rightarrow x+1=1\to x=0\\ A=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x+1=\frac{1}{4}\to x=\frac{-3}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

مجموع ریشه‌ها $=0-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}$

 حل معادلات به کمک تغییر متغیر لگاریتمی : در بعضی از معادلات

مولف رحیم قهرمان

لگاریتمی با انتخاب یک مجهول کمکی مناسب معادله لگاریتمی مفروض را به یک معادله درجه‌ی اول یا دوم تبدیل شده که با حل آن می‌توان جواب‌های معادله لگاریتمی را به راحتی به دست آورد.

تست : اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $\log_4^{2x} + \dfrac{2}{\log_4^{2x}} = 3$ باشند و $x_1 < x_2$ باشد، مقدار $\log_{x_1}^{8} + \log_{x_2}^{16}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{13}{3}$ پاسخ : گزینه‌ی ۴)

فرض می‌کنیم $\log_4^{2x} = A$

$$\frac{(\log_4^{2x})^2+2}{\log_4^{2x}} = 3 \rightarrow (\log_4^{2x})^2 + 2 = 3\log_4^{2x} \rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0 \rightarrow$$

$$(A-2)(A-1)=0 \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_4^{2x}=2 \rightarrow x=8 \\ \log_4^{2x}=1 \rightarrow x=2 \end{cases} \rightarrow x_1=2 , x_2=8$$

$$\log_{x_1}^{8} + \log_{x_2}^{16} = \log_2^{8} + \log_8^{16} = \frac{13}{3}$$

تست : اگر $\log_x^{(x+1)} = \frac{5}{2} - \log_{x+1}^{x}$ باشد، آن‌گاه x کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

پاسخ. گزینه‌ی ۱) ابتدا معادله داده شده $\log_x^{(x+1)} = A$ فرض کرده و طبق ویژگی $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ داریم :

$$\log_x^{(x+1)} = \frac{5}{2} - \log_{x+1}^{x} \xrightarrow{\log_x^{x+1} = A} A = \frac{5}{2} - \frac{1}{A}$$

$$\Rightarrow 2A^2 - 5A + 2 = 0 \rightarrow \left(A_1 = \frac{1}{2} , A_2 = 2\right)$$

با توجه به اینکه $\log_x^{x+1}$ را برابر A فرض کرده‌ایم و نیز با توجه به ویژگی $\log_b^a = c \rightarrow b^c = a$ داریم :

$$\log_x^{x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{x} = x+1 \rightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - t + 1 = 0$$

دلتای معادله $t^2 - t + 1 = 0$ منفی است ($\Delta < 0$) و معادله جواب ندارد. در نتیجه معادله‌ی $x - \sqrt{x} + 1 = 0$ نیز جواب نخواهد داشت.

$$\log_x^{x+1} = 2 \rightarrow x^2 = x+1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \left(x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 , x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0\right)$$

مولف: [illegible]

[illegible] $\log$ [illegible] $x>0$ باشد در نتیجه تنها جواب $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

تست: اگر $2^{-4a}+3\times4^{-a}=\frac{13}{16}$، معادلهٔ $\log_{-x}^{|x-a|}+\log_{-x}^{2}=2$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ (۲) است. ابتدا $t=2^{-2a}$ را متغیر جدید فرض کرده، t را به دست می‌آوریم:

$$t^2+3t-\frac{13}{16}=0 \to (4t)^2+12(4t)-13=0 \Rightarrow \begin{cases}4t=1 \to t=\frac{1}{4}\ \checkmark \\ 4t=-13 \to t=-\frac{13}{4}\ \times\end{cases}$$

$t=\frac{1}{4}$ قابل قبول است. a اینگونه محاسبه می‌شود:

$$2^{-2a}=\frac{1}{4}=2^{-2} \Rightarrow -2a=-2 \to a=1$$

با جایگذاری مقدار a، معادلهٔ لگاریتمی را حل کنیم:

$$\log_{-x}^{|x-1|}+\log_{-x}^{2}=2 \to \log_{-x}^{2|x-1|}=2$$

با توجه به شرط مربوط به مبنای لگاریتم، x منفی است و در نتیجه منفی خواهد بود. با منفی شدن $x-1$ نیز داریم $|x-1|=1-x$ و در نتیجه:

$$\log_{-x}^{2|1-x|}=2 \Rightarrow x^2=2-2x \to x=-1\pm\sqrt{3} \xrightarrow{x<0} x=-1-\sqrt{3}$$

تست: حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\log_2(48+4^x)=x+4$ برابر $\log_b^a$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینهٔ (۴)

$$\log_2(48+4^x)=x+4 \to 48+4^x=2^{x+4} \to 48+4^x=2^x\times2^4 \to$$

$$4^x-16\times2^x+48=0 \xrightarrow{2^x=A} A^2-16A+48=0 \to (A-12)(A-4)=0 \to$$

$$\begin{cases}A=12 \to 2^x=12 \to x_1=\log_2^{12} \\ A=4 \to 2^x=2^2 \to x_2=2\end{cases} \to x_1x_2=2\log_2^{12}=2(\log_2^{2^2\times3})=4+2\log_2^3$$

$$=\log_2^{2^4}+\log_2^{3^2}=\log_2^{2^4\times3^2}=\log_2^{144} \longrightarrow a=144,\ b=2 \to \frac{a}{b}=72$$

تست: نمودار تابع $y=3-\log_2(2^{2x}+5)$، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

۱) $\log_2^5$ ۲) $\log_2^{15}$ ۳) ۳ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases} y = 3 - \log_2 (2^{2x} + 15) \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = 3 - \log_2 (2^{2x} + 15)$$

$$\rightarrow -x = \log_2 8 - \log_2 (2^{2x} + 15) \Rightarrow -x = \log_2 \frac{8}{2^{2x}+15} \rightarrow 2^{-x} = \frac{8}{2^{2x}+15} \rightarrow$$

$$2^{2x} \times 2^{-x} + 15 \times 2^{-x} = 8 \rightarrow 2^x + 15 \times 2^{-x} = 8 \xrightarrow{2^x = A} A + \frac{15}{A} = 8 \rightarrow A^2 - 8A + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = 5 \rightarrow 2^x = 5 \rightarrow x_1 = \log_2 5 \\ A_2 = 3 \rightarrow 2^x = 3 \rightarrow x_2 = \log_2 3 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 15$$

تست: از معادله‌ی $\log_2 (2^{x+1} + 2) = 2x$ مقدار $\log_9 (2^x - 1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۱۲۵ ۴) ۰/۵ پاسخ. گزینه‌ی (۲)

با استفاده از تعریف لگاریتم داریم: $\log_2 (2^{x+1} + 2) = 2x \rightarrow 2^{x+1} + 2 = 2^{2x} \rightarrow$

$$(2^x)^2 - 2 \times 2^x - 2 = 0 \xrightarrow{2^x = A} A^2 - 2A - 2 = 0 \rightarrow A = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \rightarrow \begin{cases} A = 2^x = 1 + \sqrt{3} \\ A = 2^x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_9 (2^x - 1) = \log_9 (1 + \sqrt{3} - 1) = \log_9 \sqrt{3} = \log_{3^2} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0/25$$

تست: اگر $\log_3 (9^A - 10) = A + 1$ باشد، عدد 27^A چند واحد از مربع یک عدد طبیعی بزرگ‌تر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی (۳) به کمک تعریف لگاریتم داریم:

$$\log_3 (9^A - 10) = A + 1 \rightarrow 9^A - 10 = 3^{A+1} \rightarrow 3^{2A} - 3 \times 3^A - 10 = 0 \longrightarrow$$

با فرض $3^A = t$ داریم:

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \rightarrow (t-5)(t+2) = 0 \rightarrow (t = 5 \checkmark ; t = -2 \times)$$

$$\rightarrow 3^A = 5 \rightarrow A = \log_3 5$$

بنابراین عدد 27^A برابر $27^{\log_3 5} = 5^{\log_3 27} = 125$ است که مقدار ۴ واحد از $121 = 11^2$ بیشتر است.

تست: اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $3^{2x} - 13 \times 3^x + 36 = 0$ برابر $\log_3 A$ باشد، مقدار A کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$3^x = A , A^2 - 13A + 36 = 0 \rightarrow A = 4, 9 \rightarrow \begin{cases} 3^x = 4 \\ 3^x = 9 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3 4 \\ x_2 = \log_3 9 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 = \log_3 4 + \log_3 9 = \log_3 36 \rightarrow A = 36$$

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $\sqrt{\log 2x}=\log\sqrt{2x}$ باشند، حاصل $\log_{50}^{x_1x_2}$ کدام است؟ ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$\sqrt{\log 2x}=\log^{\sqrt{2x}} \Rightarrow \sqrt{\log 2x}=\log(2x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{\log 2x}=\frac{1}{2}\log 2x$$

اگر $\log 2x=t$ فرض کنیم آن گاه داریم:

$$\sqrt{t}=\frac{t}{2}\xrightarrow[t\geq 0]{\text{توان ۲}} t=\frac{t^2}{4} \Rightarrow \frac{t^2}{4}-t=0 \rightarrow t\left(\frac{t}{4}-1\right)=0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} t=0 \\ t=4 \end{cases} \xrightarrow{\log 2x=t} \begin{cases} \log 2x=0 \rightarrow x_1=\frac{1}{2} \\ \log 2x=4 \rightarrow x=5000 \end{cases} \Rightarrow \log_{50}^{x_1x_2}=\log_{50}^{50^2}=2$$

تست: اگر $x=10^{\log_2\frac{3+\sqrt{a}}{b}}$ جواب معادله‌ی $2^{\log x}-2^{\log\frac{1}{x}}=3$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$2^{\log x}-2^{\log x^{-1}}=3 \rightarrow 2^{\log x}-2^{-\log x}=3 \rightarrow 2^{\log x}-\frac{1}{2^{\log x}}=3 \xrightarrow{2^{\log x}=A>0}$$

$$A-\frac{1}{A}=3 \xrightarrow{A\neq 0} A^2-3A-1=0 \rightarrow A=2^{\log x}=\begin{cases} \frac{3+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \log x=\log_2\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=10^{\log_2\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \Rightarrow a+b=13+2=15$$

تست: اگر $0<y<1<x$ و $\log_y^x-6\log_x^y=5$

آن گاه مقدار $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) −۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱) در معادله‌ی $\log_y^x-6\log_x^y=5$ اگر $\log_y^x$ را

t قرار دهیم داریم:

$$t-\frac{6}{t}=5 \Rightarrow t^2-5t-6=0$$

حالا با شرط $y<1<x$ باید $\log_y^x$ منفی باشد پس -1 $t=\log_y^x=-1$ را قبول می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=\frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)}=\frac{\overset{xy=1}{2+x+y}}{1+x+y+\underset{1}{xy}}=1$$

تست ۵: اگر $2^{-2a}+4\times 4^{-a}=\frac{13}{16}$، معادله $\log_{-x}|x-a|+\log_{-x}2=2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲) ابتدا $t=2^{-2a}$ را متغیر جدید فرض کرده و a را به دست می‌آوریم:

$$t^2+4t-\frac{13}{16}=0 \to (4t)^2+16(4t)-13=0 \to \begin{cases} 4t=1 \to t=\frac{1}{4} \\ 4t=-13 \to t=-\frac{13}{4} \times \end{cases}$$

$t=\frac{1}{4}$ قابل قبول است و a این گونه محاسبه می‌شود:

$$2^{-2a}=\frac{1}{4}=2^{-2} \to -2a=-2 \to a=1$$

با بدست آمدن مقدار a، معادله لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\log_{-x}|x-1|+\log_{-x}2=2 \Rightarrow \log_{-x}2|x-1|=2$$

با توجه به شرط مثبت بودن مبنای لگاریتم، $-x$ مثبت و در نتیجه x منفی خواهد بود. با منفی شدن x، $x-1$ نیز منفی است، داریم: $|x-1|=1-x$ و در نتیجه:

$$\log_{-x}2(1-x)=2 \Rightarrow x^2=2-2x \to x^2+2x-2=0 \to x=-1\mp\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{x<0} x=-1-\sqrt{3}$$

تست: به ازای کدام مقدار x، اعداد $\log_2^{3(2^x+1)-1}$، $\log_4^{(2^{3-x}+4)}$ و ۱، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند؟

۱) $2-\log_2^3$ ۲) $\log_3^2$ ۳) $\log_2^3$ ۴) $2-\log_3^2$

پاسخ: گزینه ۱) می‌دانیم که اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $a+c=2b$ پس:

$$1+\log_2 3\left((2^{x+1})-1\right) = 2\log_4(2^{3-x}+4) \Rightarrow$$

$$\log_2 2+\log_2 3\left((2^x\times 2)-1\right) = \log_2(2^{3-x}+4) \Rightarrow$$

$$\log_2 6\left((2^x\times 2)-1\right) = \log_2\left((2^3\times 2^{-x})+4\right) \Rightarrow 6\left((2^x\times 2)-1\right) = \left((8\times 2^{-x})+4\right)$$

$$\Rightarrow 12\times 2^x - 6 = \frac{8}{2^x}+4 \Rightarrow (12\times 2^x) - \frac{8}{2^x} = 10 \xrightarrow{\div 2}$$

$$(6\times 2^x) - \frac{4}{2^x} = 5$$

حال اگر 2^x را برابر t فرض کنیم داریم:

$$6t-\frac{4}{t}=5 \to 6t^2-5t-4=0 \to \begin{cases} t=2^x=-\frac{1}{2} \times \; (2^x>0) \\ t=2^x=\frac{4}{3} \checkmark \end{cases}$$

$$2^x=\frac{4}{3} \longrightarrow \log_2 \frac{4}{3} = x \Rightarrow x = \log_2 4 - \log_2 3 = 2-\log_2 3$$

حل معادلات به کمک لگاریتم گیری: در حالت کلی برای معادله‌ی $a^x=b$ برحسب x، از دو طرف تساوی لگاریتم در مبنای a می‌گیریم.

تست: معادله‌ی $x^{\frac{7+\log x}{4}}=10^{1+\log x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$x^{\frac{7+\log x}{4}}=10^{1+\log x} \longrightarrow x^{\frac{7+\log x}{4}}=10\times 10^{\log x} \longrightarrow$$

$$x^{\frac{7+\log x}{4}}=10x \xrightarrow[\text{می‌گیریم.}]{\text{از طرفین در مبنای } x \text{ لگاریتم}} \log_x x^{\frac{7+\log x}{4}}=\log_x 10x$$

$$\longrightarrow \frac{7+\log x}{4}=\frac{1}{\log x}+1 \xrightarrow{\log x=A} \frac{7+A}{4}=\frac{1}{A}+1 \longrightarrow$$

$$A^2+3A-4=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} A=1 \to \log x=1 \\ A=-4 \to \log x=-4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=10 \checkmark \\ x=10^{-4} \checkmark \end{cases} \longrightarrow \text{۲ جواب}$$

تست: اگر ۱ و α ریشه‌های معادله‌ی $3^{x^2}=2^{x+m}$ باشند، مقدار 3^α کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$\log_3 3^{x^2}=\log_3 2^{x+m} \longrightarrow x^2=(x+m)\log_3 2 \longrightarrow x^2-x\log_3 2-m\log_3 2=0$$

$$\Longrightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=1+\alpha=\log_3 2 \Longrightarrow \alpha=\log_3 2-1=\log_3 \frac{2}{3} \longrightarrow 3^\alpha=\frac{2}{3}$$

تست: اگر $x^{(2-\frac{\log x}{2})}=100$ و $y=\log x$، آن‌گاه حاصل $\log_{4y} 8\sqrt{y}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{6}{7}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$x^{(2-\frac{\log x}{2})}=100 \Longrightarrow \log x^{(2-\frac{\log x}{2})}=\log 10^2 \longrightarrow (2-\frac{\log x}{2})\log x=2$$

$$\Longrightarrow \log x=y \longrightarrow (2-\frac{y}{2})y=2 \longrightarrow y^2-4y+4=0 \longrightarrow (y-2)^2=0 \longrightarrow y=2$$

$$\Longrightarrow \log_{4y} 8\sqrt{y}=\log_8 8\sqrt{2}=\frac{7}{6}$$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{\log x}=1000x^2$ باشند، آن‌گاه $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 10^{-3} ۳) ۲ ۴) 10^2

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

$$x^{\log x}=1000x^2 \longrightarrow \log(x^{\log x})=\log(1000x^2) \longrightarrow$$

$\log x \log x = 3 + 2\log x \rightarrow (\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0$

$\rightarrow (\log x - 3)(\log x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \log x = 3 \\ \log x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^3 = \alpha \\ x = 10^{-1} = \beta \end{cases} \rightarrow \alpha\beta = 10^2$

<u>تست ۵</u>: اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $10^{x^2-x} = 2$ باشند، $x_1 + x_1x_2 + x_2$ کدام است؟

۱) $\log 20$ ۲) $\log 50$ ۳) $\log 2$ ۴) $\log 5$ پاسخ: گزینه‌ی ۴)

از طرفین معادله $10^{x^2-x} = 2$ در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم. پس داریم:

$10^{x^2-x} = 2 \xrightarrow{\log} \log 10^{x^2-x} = \log 2 \rightarrow x^2 - x = \log 2 \rightarrow x^2 - x - \log 2 = 0$

می‌دانیم در معادله درجه دوم $(\Delta > 0)$ $ax^2+bx+c=0$، $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ هستند و در نتیجه برای عبارت خواسته شده داریم:

$(x_1+x_2) + x_1x_2 = S + P = 1 - \log 2 = \log 5$

<u>تست</u>: اگر $x^{6-\log_3 x} = 243$ باشند، حاصل ضرب جواب‌های این معادله کدام است؟

۱) 3^2 ۲) 3^6 ۳) 3^9 ۴) 3^8 پاسخ: گزینه‌ی ۲)

از طرفین تساوی در پایه ۳ لگاریتم می‌گیریم.

$\log_3 (x^{6-\log_3 x}) = \log_3 243 \rightarrow (6 - \log_3 x)\log_3 x = 5 \xrightarrow{\log_3 x = A}$ باشد داریم:

$(6-A)A = 5 \rightarrow A^2 - 6A + 5 = 0$

مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$A_1 + A_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 6 \rightarrow \log_3 (x_1x_2) = 6 \rightarrow x_1x_2 = 3^6$

<u>تست</u>: مجموع جواب‌های معادله‌ی $(\sqrt{x})^{(\log_5 x - 1)} = 5$ کدام است؟

۱) $\frac{121}{5}$ ۲) $\frac{126}{5}$ ۳) $\frac{131}{5}$ ۴) $\frac{136}{5}$ پاسخ: گزینه‌ی ۲)

از طرفین تساوی لگاریتم در مبنای ۵ می‌گیریم:

$(\log_5 x - 1) \times \log_5 \sqrt{x} = \log_5 5 \Rightarrow (\log_5 x - 1)(\frac{1}{2}\log_5 x) = 1 \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم}} (\log_5 x - 1)(\log_5 x) = 2 \Rightarrow (\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 = 0$

$\xrightarrow{\log_5 x = A} A^2 - A - 2 = 0 \rightarrow (A-2)(A+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -1 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} \log_5 x = 2 \rightarrow x = 25 \\ \log_5 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow$ مجموع جواب‌ها $= 25 + \frac{1}{5} = \frac{126}{5}$

تست: در معادله $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$ (۹۱)

ریشه‌ی مثبت چند برابر قدر مطلق ریشه‌ی منفی است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۰ ۴) ۸۰ پاسخ: گزینه‌ی ۱

ابتدا از طرفین معادله لگاریتم می‌گیریم.

$$\log(x+1)^{\log(x+1)} = \log(100(x+1)) \Rightarrow \log(x+1)\log(x+1) = \log 100 + \log(x+1) \xrightarrow{\log(x+1)=A} A^2 = A+2 \rightarrow (A=2,\ A=-1)$$

$$\begin{cases} A=2 \Rightarrow \log(x+1)=2 \rightarrow x+1=10^2 \rightarrow x=99 \\ A=-1 \Rightarrow \log(x+1)=-1 \rightarrow x+1=\frac{1}{10} \rightarrow x=-\frac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{99}{\left|-\frac{9}{10}\right|} = 110$$

تست: جواب معادله‌ی $2^{3+x} = 5^{2x+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\log 2-1}{2-4\log 2}$ ۲) $\frac{3\log 2+1}{2-4\log 2}$ ۳) $\frac{4\log 2+1}{2-3\log 2}$ ۴) $\frac{4\log 2-1}{2-3\log 2}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$2^{3+x} = 5^{2x+1} \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \log 2^{3+x} = \log 5^{2x+1} \rightarrow$$

$$(3+x)\log 2 = (2x+1)\log 5 \rightarrow 3\log 2 + x\log 2 = (2x+1)(1-\log 2)$$

$$\Rightarrow 3\log 2 + x\log 2 = 2x(1-\log 2) + (1-\log 2) \rightarrow x\log 2 - 2x(1-\log 2) = 1-4\log 2$$

$$\Rightarrow x(\log 2 - 2 + 2\log 2) = 1-4\log 2 \rightarrow x = \frac{4\log 2-1}{2-3\log 2}$$

تست: در معادله‌ی $100^x - 10^x = 2$، مقدار عبارت $\frac{x}{\log 4}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰.۵ پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$(10^x)^2 - (10^x) - 2 = 0 \rightarrow (10^x-2)(10^x+1) = 0 \rightarrow 10^x = 2 \rightarrow x = \log 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\log 4} = \frac{\log 2}{2\log 2} = \frac{1}{2}$$

تست: اگر $x>0$ و $(3x)^{\log_a^3} - (5x)^{\log_a^5} = 0$ باشد، آن گاه x کدام است؟ $(a>1)$

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۱۵ پاسخ: گزینه‌ی ۱

برای حل سوال از طرفین معادله $(3x)^{\log_a^3} = (5x)^{\log_a^5}$ در پایه a لگاریتم می‌گیریم

$$\log_a^3(\log_a^{3x}) = \log_a^5(\log_a^{5x}) \rightarrow$$

$\log_a^5(\log_a^x+\log_a^5)=\log_a^{3x}(\log_a^x+\log_a^{3x})$

$\Rightarrow (\log_a^5)^2+(\log_a^5)(\log_a^x)=(\log_a^{3x})^2+(\log_a^{3x})(\log_a^x)\longrightarrow$

$(\log_a^5)^2-(\log_a^{3x})^2=(\log_a^{3x}-\log_a^5)(\log_a^x)\longrightarrow$

$-(\log_a^5+\log_a^{3x})=\log_a^x\longrightarrow \log_a^{\frac{1}{15}}=\log_a^x\longrightarrow x=\frac{1}{15}$

<u>تست</u>: با توجه به تساوی $\dfrac{\log_x^{(xy)}}{\log_y^{(x\sqrt{y^5})}}=1$ کدام رابطه بین x و y می‌تواند درست باشد؟

۱) $y=x^3$ ۲) $y=\frac{1}{x^2}$ ۳) $y\sqrt[3]{x}=1$ ۴) $y\sqrt{x}=1$

پاسخ. گزینه ۴. ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم و عبارت را با خواص ساده می‌کنیم:

$\log_x^{(xy)}=\log_y^{(x\sqrt{y^5})}=\log_x^x+\log_x^y=\log_y^x+\log_y^{\sqrt{y^5}}$

$=1+\log_x^y=\log_y^x+\frac{5}{2}\longrightarrow \log_x^y=\log_y^x+\frac{3}{2}$

حال باید معادله را با فرض $\log_x^y=t$ حل کنیم. با استفاده از (۵) که است آمد
بنابراین داریم:

$t=\frac{1}{t}+\frac{3}{2}\xrightarrow{\times(t)} t^2-\frac{3}{2}t-1=0$

$\Delta=(-\frac{3}{2})^2-4(1)(-1)=\frac{25}{4}\rightarrow t_{1,2}=\dfrac{\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}}{2}$

$t_1=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=2\Rightarrow \log_x^y=2\longrightarrow y=x^2$

$t_2=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \log_x^y=-\frac{1}{2}\longrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow y\sqrt{x}=1$

تست: α و β جواب‌های معادله‌ی $10^{x^2-x}=5$ هستند. اگر $A=\alpha+\alpha\beta+\beta$ باشد، حاصل 100^A کدام است؟

۱) $\log 4$ ۲) $\log 5$ ۳) 4 ۴) $\log 5$

پاسخ. گزینه‌ی ۳) ابتدا از طرفین معادله‌ی داده شده در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم تا معادله درجه دوم بسازیم:

$x^2-x=\log_{10}5=\log 5 \Rightarrow x^2-x-\log 5=0$

در این معادله داریم $S=\alpha+\beta=1$ و $P=\alpha\beta=-\log 5$ است.

پس داریم: $A=(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)=S+P=1-\log 5=\log 2$

حال با استفاده از ویژگی $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ حاصل 100^A را حساب می‌کنیم.

$100^A=100^{\log 2}=2^{\log 100}=2^2=4$

مولف: رحیم قهرمان

دستگاه معادلات لگاریتمی: برای حل دستگاه معادلات ابتدا سمت معادلات را به وسیله‌ی قوانین لگاریتم، معادلات را ساده می‌کنیم سپس با حل دستگاه، مجهولات را به دست می‌آوریم.

تست: اگر $\begin{cases}\log x \times \log y = 1\\ \log xy^2 = 3\end{cases}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۰/۰۲

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$\log xy^2 = 3 \Rightarrow \log x + \log y^2 = 3 \Rightarrow \log x + 2\log y = 3 \Rightarrow \begin{cases}\log x \times \log y = 1\\ \log x + 2\log y = 3\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases}\log y = \frac{1}{\log x} \quad (1)\\ \xrightarrow{(1)} \log x + 2 \times \frac{1}{\log x} = 3 \rightarrow (\log x)^2 + 2 = 3\log x \rightarrow (\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\log x - 1)(\log x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases}\log x = 1 \rightarrow x = 10\\ \log x = 2 \rightarrow x = 100\end{cases}$$

$$\begin{matrix} x = 10 \xrightarrow{(1)} \log y = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = 1\\ x = 100 \xrightarrow{(2)} \log y = \frac{1}{2} = 0/5 \rightarrow y = \frac{1}{2}\end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases}\frac{x}{y} = 1\\ \frac{x}{y} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200\end{cases}$$

تست: با توجه به معادلات لگاریتمی $\begin{cases}\log_3 x + \log_9 y^2 = 2\\ \log_2 (x+y) = 3\end{cases}$، حاصل $|x-y|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{7}$ ۳) $7\sqrt{2}$ ۴) ۷

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

هر یک از معادلات را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$1)\ \log_3 x + \log_9 y^2 = 2 \rightarrow \log_3 x + \log_{3^2} y^2 = 2 \rightarrow \log_3 x + \log_3 y = 2 \rightarrow xy = 9$$

$$2)\ \log_2 (x+y) = 3 \rightarrow x + y = 2^3 = 8$$

پس می‌توان فرض کرد x و y ریشه‌های یک معادله درجه دوم هستند که از آن $\begin{cases}S = x + y = 8\\ P = xy = 9\end{cases}$ یعنی این معادله به صورت $A^2 - 8A + 9 = 0$ می‌باشد و منظور از $|x-y|$ هم تفاضل ریشه‌ها در این معادله درجه دوم است:

$$|\text{تفاضل ریشه‌ها}| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2\sqrt{7}$$

تست: از دستگاه معادلات زیر، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

$$\begin{cases}\log_y x + \log_x y = 2\\ x^2 - y = 20\end{cases}$$

۱) $x = 2y$ ۲) $x > y$ ۳) $x < y$ ۴) $x = y$

پاسخ: گزینه‌ی (۴) اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $a = 1$ باشد.

$$\begin{cases}\log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = 2 \\ x^2 - y = 20\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\log_y x = 1 \rightarrow x = y \\ x^2 - y = 20 \xrightarrow{(1)} x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow (x-5)(x+4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=5 \rightarrow y=5 \\ x=-4 \ \times \end{cases}\end{cases} \Rightarrow x=y=5$$

تست: اگر $2^{x-y} = \dfrac{1}{4^{x+y}}$ و $\log(x+2) + \log(3y-x) = 1$ ، حاصل $\dfrac{1}{xy}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$ پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$2^{x-y} \times 2^{2x+2y} = 2^{3x+y} = 2^0 \Rightarrow 3x+y=0 \rightarrow y=-3x$$

$$\log(x+2) + \log(3y-x) = 1 \rightarrow \log(x+2)(3y-x) = 1 \Rightarrow (x+2)(3y-x) = 10 \rightarrow$$

به جای y مقدار $-3x$ قرار می‌دهیم:

$$(x+2)(-10x) = 10 \rightarrow -10x^2 - 20x = 10 \xrightarrow{\div 10} -x^2 - 2x = 1 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$xy = 3 \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{-3}$$

تست: در دستگاه $\begin{cases} 3^{x-4y} = 9^x \\ \log_2(x^2+y) - \log_2(x-y) = \log_2 3 \end{cases}$ حاصل $\log_{y+5} 2x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳ پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$3^{x-4y} = 3^{2x} \Rightarrow x - 4y = 2x \rightarrow x + 4y = 0 \quad (1)$$

$$\log_2(x^2+y) - \log_2(x-y) = \log_2 3 \rightarrow \frac{x^2+y}{x-y} = 3 \rightarrow x^2 - 3x = -4y \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} x^2 - 3x = x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=4 \rightarrow y=-1 \end{cases}$$

با توجه به دامنه‌ی توابع لگاریتمی $x=4, y=-1$ صحیح هستند.

$$\log_{y+5} 2x = \log_4 8 \Rightarrow \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$$

تست: با توجه به دستگاه معادلات $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log\sqrt{\dfrac{xy}{10}} = 1 \end{cases}$ حاصل $\log_y x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$ پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$y^{\log x} = 100 \Rightarrow \log y^{\log x} = \log 100 \Rightarrow \log x \log y = 2 \quad (1)$$

$\log\sqrt{\frac{xy}{10}}=1 \Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{10}}=10 \Rightarrow \frac{xy}{10}=100 \Rightarrow$

$xy=1000 \Rightarrow \log(xy)=3 \Rightarrow \log x+\log y=3 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases}\log x\log y=2\\ \log x+\log y=3\end{cases} \rightarrow$ بنابراین $\log x$ و $\log y$ جواب‌های معادلهٔ $A^2-3A+2=0$ هستند یعنی $A=1,2$

$\Rightarrow \begin{cases}\log x=1\\ \log y=2\end{cases} \Rightarrow \log_y x=\frac{1}{2}$ یا $\begin{cases}\log x=2\\ \log y=1\end{cases} \Rightarrow \log_y x=2$

تست: اگر $\log(x-4y)=2\log 2$ و $\log(x+y-1)+\log(2y+3)=0$ باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینهٔ ۲

$\log(x-4y)=2\log 2$ و $\log(x-4y)=\log 4 \Rightarrow x-4y=4 \rightarrow$

$x=4y+4 \Rightarrow \log(x+y-1)+\log(2y+3)=0 \Rightarrow \log(x+y-1)(2y+3)=0$

$\Rightarrow (x+y-1)(2y+3)=1 \Rightarrow 2xy+3x+2y^2+3y-3-1=0 \xrightarrow{x=4y+4}$

$2(4y+4)y+3(4y+4)+2y^2+y-4=0 \rightarrow 10y^2+21y+8=0 \rightarrow \begin{cases}y=-\frac{8}{5}\\ y=-\frac{1}{2} \checkmark\end{cases}$

$x=4y+4=4(-\frac{1}{2})+4=2 \rightarrow xy=2\times(-\frac{1}{2})=-1$

تست: اگر $\log(x+y)+\log(x^2-xy+y^2)=\log 10$ و $\log(x^2+y^2)-\log(5+xy)=0$ باشد، حاصل لگاریتم $\sqrt[5]{x+y}$ در مبنای ۲ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

$\log(x+y)+\log(x^2-xy+y^2)=\log 10 \Rightarrow$

$\log(x+y)(x^2-xy+y^2)=\log 10 \Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)=10 \quad (1)$

$\log(x^2+y^2)-\log(5+xy)=0 \rightarrow \log(x^2+y^2)=\log(5+xy) \Rightarrow$

$x^2+y^2=5+xy \Rightarrow x^2-xy+y^2=5 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow \log_2\sqrt[5]{x+y}=\log_2\sqrt[5]{2}=\frac{1}{5}$

تست: از دستگاه $\begin{cases}x^2-y^2=16\\ \log_2 2x=\log_2(4-2y)\end{cases}$، حاصل لگاریتم $x-y$ در مبنای ۴ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

$x^2-y^2=16$ و $\log_2 2x=\log_2(4-2y)$ $\Rightarrow 2x=4-2y \Rightarrow x+y=2$

$x^2-y^2=16 \Rightarrow (x+y)(x-y)=16 \Rightarrow \begin{cases}x+y=2\\ x-y=8\end{cases}$

مولف: رحیم قهرمان

تست ۵: اگر a و b دو عدد مثبت باشند که در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \log_2 a + \log_2 b = 3 \\ 2^a \times 2^b = 256 \end{cases}$$

صدق کنند، حاصل $|a-b|$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{4}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$ پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله لگاریتمی را ساده می‌کنیم: $\log_2 a + \log_2 b = 3 \rightarrow \log_2 ab = 3 \rightarrow ab = 8$

اکنون به معادله نمایی می‌پردازیم: $2^a \times 2^b = 256 \rightarrow 2^{a+b} = 2^8 \rightarrow a+b = 8$

بنابراین a و b دو عدد با مجموع ۸ و حاصل ضرب آن نیز ۸ است. این اعداد از حل معادله زیر حاصل می‌شوند.

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{2} \rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4+2\sqrt{2} \\ b = 4-2\sqrt{2} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 4-2\sqrt{2} \\ b = 4+2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow |a-b| = |4+2\sqrt{2}-(4-2\sqrt{2})| = 4\sqrt{2}$$

تست ۶: اگر $\log_6 x + \log_6 y = 2$ و $x^2+y^2=97$ باشد، حاصل $|x-y|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳ پاسخ: گزینه ۲

$$\log_6 x + \log_6 y = 2 \Rightarrow \log_6 xy = 2 \rightarrow xy = 36 \ (*)$$

$$x^2+y^2 = 97 \Rightarrow (x-y)^2 + 2xy = 97 \xrightarrow{(*)} (x-y)^2 = 97 - 2(36) \rightarrow (x-y)^2 = 25$$

$$\rightarrow |x-y| = 5$$

تست ۷: از دستگاه

$$\begin{cases} 7^{\log_3 \sqrt{x}} - 3^{\log_{81} y} = 4 \\ 7^{\log_3 x} - 3^{\log_9 y} = 40 \end{cases}$$

حاصل $\log_x y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} 7^{\log_3 \sqrt{x}} - 3^{\log_{81} y} = 4 \Rightarrow 7^{\frac{1}{2}\log_3 x} \ldots = 4 \rightarrow 7^{\frac{1}{2}\log_3 x} - 3^{\log_3 \sqrt[4]{y}} = 4 \\ 7^{\log_3 x} - 3^{\log_9 y} = 40 \rightarrow 7^{\log_3 x} - 3^{\frac{1}{2}\log_3 y} = 40 \Rightarrow 7^{\log_3 x} - 3^{\log_3 \sqrt{y}} = 40 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 7^{\frac{1}{2}\log_3 x} - \sqrt[4]{y} = 4 \Rightarrow 7^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \sqrt[4]{y} + 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 7^{\log_3 x} = \sqrt{y} + 8\sqrt[4]{y} + 16 \ (1) \\ 7^{\log_3 x} - \sqrt{y} = 40 \ (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \sqrt{y} + 8\sqrt[4]{y} + 16 - \sqrt{y} = 40 \rightarrow 8\sqrt[4]{y} = 24 \rightarrow \sqrt[4]{y} = 3 \rightarrow y = 81$$

$$\xrightarrow{(2)} 7^{\log_3 x} - \sqrt{81} = 40 \rightarrow 7^{\log_3 x} = 49 \rightarrow \log_3 x = 2 \rightarrow x = 9 \Rightarrow$$

$$\log_x y = \log_9 81 = 2$$

مسائل کاربردی معادلات لگاریتمی

درسنامه آموزشی ریاضی - آمادگی ویژه کنکور
مولف: رحیم قهرمان

تست: جواب کلی معادله $\log_4(\sqrt{10}\cos x) = \log_{16}(\cos 2x + 7)$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه ی (۴) طرف راست معادله را ساده می کنیم:

$$\log_{4^2}(\cos 2x+7) = \frac{1}{2}\log_4(\cos 2x+7) = \log_4\sqrt{\cos 2x+7} \Rightarrow$$

$$\log_4(\sqrt{10}\cos x) = \log_4\sqrt{\cos 2x+7} \Rightarrow \sqrt{10}\cos x = \sqrt{\cos 2x+7} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$10\cos^2 x = \cos 2x + 7 \Rightarrow 8\cos^2 x = 6 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \to$$

چون در عبارت $\log_4(\sqrt{10}\cos x)$، $\sqrt{10}\cos x$ جزو لگاریتم قرار دارد، پس $\cos x$ باید مثبت باشد:

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \xrightarrow{\cos x>0} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \to x = 2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

تست: اگر ریشه‌های معادله $x^2-5x-2=0$ برابر $1+\log_2 A$ و $2+\log_2 B$ باشد، آنگاه مجموع ریشه‌های معادله $x^2-(\log_{\sqrt{2}}(AB+12))x=1$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) -8

پاسخ: گزینه ی ۲

$$\alpha=1+\log_2 A \ ,\ \beta=2+\log_2 B \Rightarrow \alpha+\beta=3+\log_2 AB=5 \to \log_2 AB=2$$

$$\to AB=4 \quad \text{و} \quad x^2-(\log_{\sqrt{2}}(AB+12))x-1=0 \to x^2-(\log_{2^{\frac12}}16)x-1=0 \to$$

$$x^2-8x-1=0 \Rightarrow x_1+x_2=8$$

تست: مجموعه جواب معادله $3^{[\log_2(x+\frac{1}{2})]} = \frac{1}{9}$ به صورت $[a,b)$ است، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ی ۴

$$3^{[\log_2(x+\frac12)]} = 3^{-2} \Rightarrow [\log_2(x+\tfrac12)] = -2 \to -2 \le \log_2(x+\tfrac12) < -1$$

$$\Rightarrow \log_2\tfrac14 \le \log_2(x+\tfrac12) < \log_2\tfrac12 \to \tfrac14 \le x+\tfrac12 < \tfrac12 \to -\tfrac14 \le x < 0$$

$$x\in[-\tfrac14,0) \to \begin{cases} a=-\frac14 \\ b=0 \end{cases} \to b-a=\frac14$$

تست: اعداد مثبت $\log_2 \frac{9}{2}$ و $\log_2(2a-1)$، $\log_4(4a-3)$ جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ و $\frac{3}{2}$ ۴) برای a مقداری وجود ندارد.

پاسخ: گزینه‌ی ۲) اگر سه عدد a، b و c جملات متوالی دنباله‌ی حسابی باشند $2b=a+c$ خواهد بود پس:

$$2\log_4(4a-3)=\log_2(4a-1)+\log_2\frac{9}{2} \Rightarrow 2\times\frac{1}{2}\log_2(4a-3)=\log_2(2a-1)$$

$$\Rightarrow \log_2(4a-3)=\log_2 a(2a-1) \Rightarrow 4a-3=2a^2-a \rightarrow \begin{cases} a=1 \ ✗ \\ a=\frac{3}{2} \ ✓ \end{cases}$$

تست: اگر $\log 2$، $\log 2^x$ و $\log(2^x+4)$ جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، مقدار عددی x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲ پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\log(2^x+4),\ \log 2^x,\ \log 2 \xrightarrow{\text{سه جمله متوالی دنباله ح.ب}} 2(\log 2^x)=\log 2+\log(2^x+4)$$

$$\Rightarrow \log 2^{2x}=\log(2(2^x+4)) \Rightarrow 2^{2x}=2(2^x+4) \rightarrow 2^{2x}=2\times 2^x+8$$

$$\Rightarrow (2^x)^2-2\times 2^x-8=0 \rightarrow (2^x-4)(2^x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x=4 \rightarrow x=2 \ ✓ \\ 2^x=-2 \ ✗ \end{cases}$$

تست: معادله‌ی $\sqrt{x^2+2x-3}\,\log_2(x^2-1)=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} x^2+2x-3=0 \rightarrow x=1,\ x=-3 \\ \log_2(x^2-1)=0 \rightarrow x^2-1=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

اما به ازای $x=1$ عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، به ازای $x=-\sqrt{2}$ زیر رادیکال منفی می‌شود. بنابراین $x=-3$ و $x=\sqrt{2}$ ریشه‌های معادله‌اند.

تست: اگر $\log_2 \sin x+\log_2 \cos x=-2$ باشد، حاصل $\log_4(\cos x-\sin x)$ کدام است؟ $0<x<\frac{\pi}{4}$

۱) صفر ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{4}$ پاسخ: گزینه‌ی ۴

معادله داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log_2 \sin x+\log_2 \cos x=-2 \Rightarrow \log_2 \sin x\cos x=-2 \Rightarrow \sin x\cos x=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{4} \rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$ و می‌دانیم: $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(چون $0<x<\frac{\pi}{4}$ است، $\cos x > \sin x$ پس $\cos x - \sin x$ مثبت است)

$$\Rightarrow \log_{2}(\cos x - \sin x) = \log_{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

<u>تست</u>: اگر $\log(\sin x) + \log(\cos x) = -1$ و $2\log(\sin x + \cos x) = -1 + \log n$ آن گاه مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ی ۳

$$\log(\sin x) + \log(\cos x) = -1 \Rightarrow \log(\sin x \cos x) = -1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{10}$$

$$2\log(\sin x + \cos x) = \log n - 1 \Rightarrow \log(\sin x + \cos x)^2 = \log\left(\frac{n}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \Rightarrow 1 + \frac{2}{10} = \frac{n}{10} \rightarrow n = 12$$

<u>تست</u>: مجموع جواب های معادله ی $\log_{2}(|x+a|-1) = \log_{\frac{1}{2}} 27$ برابر -4 است، مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۴

$$\log_{2}(|x+a|-1) = \log_{2^{-1}} 3^{3} \Rightarrow \log_{2}(|x+a|-1) = -3\log_{2} 3 \rightarrow$$

$$\log_{2}(|x+a|-1) = -3 \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} |x+a| - 1 = 2^{-3} = \frac{1}{8} \rightarrow |x+a| = \frac{9}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + a = \frac{9}{8} \rightarrow x = \frac{9}{8} - a \\ x + a = -\frac{9}{8} \rightarrow x = -\frac{9}{8} - a \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه ها} = -4} \left(\frac{9}{8} - a\right) + \left(-\frac{9}{8} - a\right) = -4 \rightarrow a = 2$$

<u>تست</u>: اگر معادله ی $x^2 - (\log m + 1)x + \log m = 0$ ریشه ی مضاعف داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ی ۲ می دانیم شرط آن که معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف باشد آن است که $\Delta = 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\log m + 1)^2 - 4\log m = 0 \rightarrow$$

$$(\log m)^2 + 2\log m + 1 - 4\log m = 0 \rightarrow (\log m - 1)^2 = 0 \rightarrow \log m = 1 \rightarrow m = 10$$

<u>تست</u>: اگر $\log a$ ، $\log b$ ریشه های معادله $3x^2 + 5x - 8 = 0$ باشند، آن گاه مقدار $\sqrt[5]{a^3 b^3}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{100}$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$\log a + \log b = -\frac{5}{3} \rightarrow \log ab = -\frac{5}{3} \rightarrow ab = 10^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow a^3 b^3 = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt[5]{a^3 b^3} = \sqrt[5]{10^{-5}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

تست: به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $\log(m-2)-\log x=\log(2m-x)$ دو جواب حقیقی دارد؟

۱) $m>2$ ۲) $m<-1$ ۳) $m>3$ ۴) $m<-1$ یا $m>2$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$\log\frac{m-2}{x}=\log(2m-x) \Rightarrow \frac{m-2}{x}=2m-x \to$

$x^2-2mx+(m-2)=0 \xrightarrow{\text{دو ریشه حقیقی}} \Delta>0 \Rightarrow 4m^2-4(m-2)=$

$4(m^2-m+2)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\in\mathbb{R}$ و شرایط دامنه: $m-2>0 \to m>2$

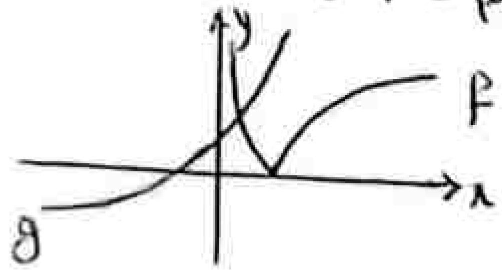
تست: معادله‌ی $|\log_3 x|=5^{x^2}-1$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

با توجه به دامنه‌ی لگاریتم، دامنه‌ی معادله می‌بایست $x>0$ باشد.

$x^2=t \Rightarrow x=\sqrt{t} \Rightarrow |\log_3 \sqrt{t}|=5^t-1 \Rightarrow |\log_3 t|=2\times5^t-2$



کافی است تعداد نقاط برخورد دو تابع $f(x)=|\log_3 x|$ و $g(x)=2\times5^x-2$ را بدست آوریم. پس یک ریشه دارد.

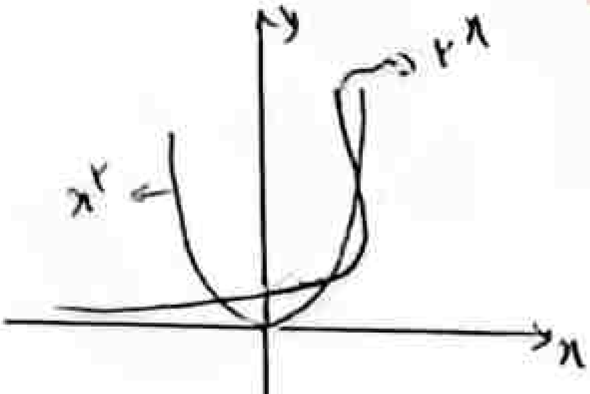
تست: معادله‌ی $\frac{x}{\log x}-\log_2 100=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

قبل از حل سوال، شرط دامنه را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{x}{\log x}=\log_2 100 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log x\neq0 \to x\neq1 \end{cases}$$



حالا معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{\log x}=\log_2 100 \Rightarrow \frac{x}{\log x}=\frac{\log100}{\log2} \to$$

$$\frac{x}{\log x}=\frac{2}{\log 2} \to x\log2=2\log x \to 2^x=x^2$$

نمودار تابع $y=2^x$ و $y=x^2$ در کتاب درسی رسم شده‌اند.

مطابق شکل در فاصله‌ی $x>0$ معادله ۲ جواب، جواب ۲ و ۴ دارد.

تست: معادله‌ی $|x|^{\log_{|x|}||x|-1|}=-x^2+100$ چند جواب دارد؟

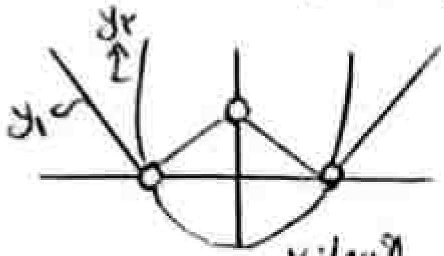
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

$\log_{|x|}^{||x|-1|}$

$|x| \qquad -x^2+1=0 \rightarrow \qquad \log_{|x|}^{||x|-1|}$

$$|x|^{\log_{|x|}^{||x|-1|}} = x^2-1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = |x|^{\log_{|x|}^{||x|-1|}} = ||x|-1| \quad (x \neq 0 \text{ و } x \neq \pm 1) \\ y_2 = x^2-1 \end{cases}$$



همانطور که از نمودار توابع مشخص است، معادله ریشه حقیقی ندارد.

تست: مقدار K برای آنکه جواب‌های معادله $2\log_4^x - \log_x^8 = 2$ و $2x^2+Kx+8=0$ یکی باشند، کدام است؟ 1) 9 2) -9 3) 17 4) -17

پاسخ: گزینه‌ی ۴) ابتدا معادله لگاریتمی را حل می‌کنیم. جواب‌های این معادله باید در معادله درجه دوم $2x^2+Kx+8=0$ صدق کنند.

$2\log_{2^2}^{x} - \log_x^{2^3} = 2 \rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\log_2^x - 3\log_x^2 = 2 \rightarrow$

$\log_2^x - 3\log_x^2 = 2 \longrightarrow \log_2^x - \dfrac{3}{\log_2^x} = 2 \xrightarrow{\log_2^x = A} A - \dfrac{3}{A} = 2 \xrightarrow{\times A}$

$A^2-2A-3=0 \rightarrow (A-3)(A+1)=0 \rightarrow A=3 \ , \ A=-1$

$\log_2^x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8 \ , \ \log_2^x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x=8$ و $x=\frac{1}{2}$ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+Kx+8=0$ هستند، با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{2}+8 = -\frac{K}{2} \rightarrow K=-17$

تست: اگر $a=\log_4^b$ آنگاه معادله‌ی $3^{x-a}=2^{x^2}$ فقط یک جواب دارد. b کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) 3 3) $\sqrt{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$3^{x-a} = 2^{x^2} \xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف در مبنای ۳}} \log_3^{3^{x-a}} = \log_3^{2^{x^2}} \rightarrow x-a = x^2\log_3^2 \rightarrow$

$(\log_3^2)x^2 - x + a = 0$

چون گفته شده این معادله یک جواب دارد (یک ریشه) است پس $\Delta=0$ می‌باشد.

$\Delta=0 \rightarrow 1-4a\log_3^2 = 0 \rightarrow 4a\log_3^2 = 1 \rightarrow a\log_3^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{4}\log_2^3$

$= \log_{2^4}^{3} = \frac{1}{2}\log_4^3 = \log_4^{\sqrt{3}} \rightarrow a = \log_4^b \rightarrow \log_4^{\sqrt{3}} = \log_4^b \rightarrow b=\sqrt{3}$

تست: اعداد $\log 18$ و $\log(a-4)$ و $2+\log 2$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، حاصل $\log_2^a$ کدام است؟ 1) 4 2) 6 3) 8 4) 9

پاسخ: گزینه‌ی ۲) $(2+\log 2)+\log 18 = 2\log(a-4) \rightarrow 2+\log 36 = 2\log(a-4)$

(۱۰۲)

$$2+2\log 7 = 2\log(a-4) \rightarrow \log(a-4) = 1+\log 7 \rightarrow a-4 = 70$$

پس $a = 74$ ، $\log_2^9 = 6$

تست: معادله $x^4 + 4x^2(\log x)^2 = (\log x)^4$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲) طرفین را بر $x^2(\log x)^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^4}{x^2(\log x)^2} + 4 = \frac{(\log x)^4}{x^2(\log x)^2} \Rightarrow \frac{x^2}{(\log x)^2} + 4 = \frac{(\log x)^2}{x^2}$$

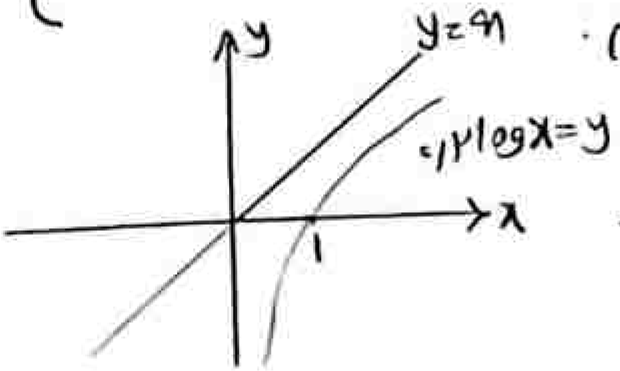
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{\log x}\right)^2 + 4 = \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \xrightarrow{\left(\frac{x}{\log x}\right)^2 = t}$$

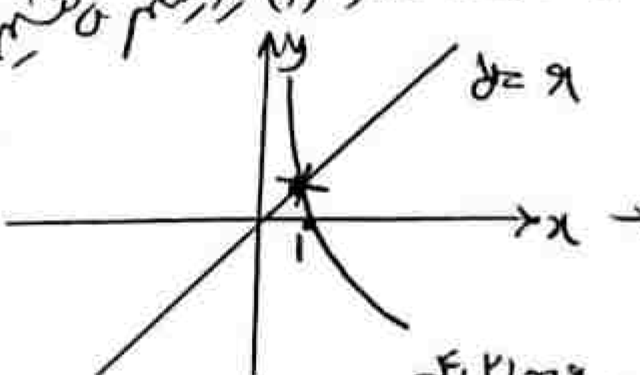
$$t+4 = \frac{1}{t} \xrightarrow{\times t} t^2+4t = 1 \xrightarrow{+4} t^2+4t+4 = 5$$

$$\rightarrow (t+2)^2 = 5 \rightarrow t = \pm\sqrt{5}-2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\log x} = \sqrt{5}-2 \\ \frac{x}{\log x} = -\sqrt{5}-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = (\sqrt{5}-2)\log x \\ x = (-\sqrt{5}-2)\log x \end{cases} \xRightarrow{\sqrt{5} \simeq 2.2} \begin{cases} x = 0.2\log x \quad (1) \\ x = -4.2\log x \quad (2) \end{cases}$$

نمودارهای معادلات (۱) و (۲) را رسم می‌کنیم.





→ معادله فقط یک ریشه دارد

تست: اگر $\log_4^{\alpha}$ و $\log_4^{\beta}$ صفرهای تابع $y=x^2+(m\sqrt{2})x-\frac{m}{2}$ باشند و بدانیم $\log_4^{\alpha\beta}=2\sqrt{2}$ است، حاصل $\frac{\log_2^{\beta}}{\log_{\alpha}^{2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳) در معادله درجه دوم مجموع ریشه‌ها $S=-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}$ است:

$$S=-\frac{b}{a} \Rightarrow -m\sqrt{2}=2\sqrt{2} \rightarrow m=-2 \Rightarrow y=x^2-2\sqrt{2}x+1 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=1$$

حال می‌فهمیم حاصل ضرب ریشه‌ها ۱ است پس ریشه‌ها معکوس یکدیگرند در نتیجه داریم:

$$\log_4^{\beta}=\frac{1}{\log_4^{\alpha}} \Rightarrow \log_4^{\beta}=\log_{\alpha}^{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^{\beta}=2\log_{\alpha}^{2} \Rightarrow$$

$\log_2^{\beta}=4\log_{\alpha}^{2} \rightarrow$ در نتیجه داریم: $\frac{\log_2^{\beta}}{\log_{\alpha}^{2}}=\frac{4\log_{\alpha}^{2}}{\log_{\alpha}^{2}}=4$ ✓

(۱۰۳)

نامساوی و نامعادلات لگاریتمی:

نامساوی های لگاریتمی: ۱) اگر a و b هر دو بزرگتر از 1 یا هر دو بین صفر و یک باشند آن گاه $\log_a b>0$. به عنوان مثال $\log_2 3>0$ و $\log_{\frac12}\frac14>0$

۲) اگر یکی از اعداد a یا b بین صفر و یک و دیگری بزرگتر از 1 باشد، آن گاه $\log_a b<0$

به عنوان مثال $\log_2\frac34<0$ و $\log_5 0/9<0$.

نامعادلات لگاریتمی: برای حل نامعادلات لگاریتمی از نکات زیر استفاده می کنیم:

۱) $\log_a f(x)>k \xrightarrow[\text{صعودی}]{a>1} f(x)>a^k$ و ۲) $\log_a f(x)>k \xrightarrow{0<a<1} f(x)<a^k$

۳) $\log_a f(x)>\log_a g(x) \xrightarrow[\text{صعودی}]{a>1} f(x)>g(x)$ و ۴) $\log_a f(x)>\log_a g(x) \xrightarrow[\text{نزولی}]{0<a<1} f(x)<g(x)$

<u>تست</u>: اگر $0<x<1$ باشد، کدام گزینه از بقیه بزرگتر است؟

۱) $\log_2 x$ ۲) $\log_{\frac12} x$ ۳) $\log_2 x^2$ ۴) $\log_{\frac12} x^2$ پاسخ: گزینه (۴)

$y=\log_2 x$: افزایشی $\xrightarrow[x^2<x]{0<x<1} \log_2 x^2<\log_2 x$

$y=\log_{\frac12} x$: کاهشی $\xrightarrow[x^2<x]{0<x<1} \log_{\frac12} x<\log_{\frac12} x^2$

حال باید دو مقدار $\log_2 x^2$ و $\log_{\frac12} x$ را مقایسه کنیم:

$\log_{\frac12} x=-\log_2 x=\log_2\frac1x$ ؛ $0<x<1 \Rightarrow \begin{cases}\frac1x>1\\ 0<x^2<1\end{cases} \rightarrow \frac1x>x^2$

$\rightarrow \log_2\frac1x>\log_2 x^2 \Rightarrow \log_{\frac12}x>\log_2 x^2 \rightarrow$ پس $\log_{\frac12}x^2$ از همه بزرگتر است.

<u>تست</u>: کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

۱) $-2<\log_{\frac12}3<-1$ ۲) $-1<\log_{0/5}0/5$ ۳) $0<\log_5 3<1$ ۴) $-1<\log_2\frac34<0$

پاسخ: گزینه (۲) بررسی گزینه ۱)

۱) $2<3<4 \Rightarrow (\frac12)^{-1}<3<(\frac12)^{-2}$

$\xrightarrow[\text{لگاریتم در پایه } \frac12 \text{ می گیریم}]{\text{از طرفین}} \log_{\frac12}(\frac12)^{-1}>\log_{\frac12}3>\log_{\frac12}(\frac12)^{-2} \Rightarrow -2<\log_{\frac12}3<-1$

۲) $1<1.5 \Rightarrow (\frac{1}{2})^0 < 1.5 < (\frac{1}{2})^{-1} \xrightarrow{\text{نزولی بودن}}$

$\log_{0.5}(\frac{1}{2})^0 > \log_{0.5} 1.5 > \log_{0.5}(\frac{1}{2})^{-1} \rightarrow -1 < \log_{0.5} 1.5 < 0 \rightarrow$

$\log_{0.5}(\frac{1}{2})^0 > \log_{0.5} 1.5 > \log_{0.5}(\frac{1}{2})^{-1} \Rightarrow -1 < \log_{0.5} 1.5 < 0$

۳) $1<3<5 \Rightarrow \log_5 1 < \log_5 3 < \log_5 5 \xrightarrow{\text{با توجه به صعودی بودن تابع لگاریتم در پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱}}$

$0 < \log_5 3 < 1$

۴) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \rightarrow 2^{-2} < \frac{1}{3} < 2^{-1} \xrightarrow{\text{با توجه به صعودی بودن تابع}}$

$\log_2 2^{-2} < \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 2^{-1} \longrightarrow -2 < \log_2 \frac{1}{3} < -1$

تست: چه تعداد از نامساوی‌های زیر درست است؟

الف) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{3} > \log_7 7$ ب) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 0.6 > \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 0.4$

ج) $\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{3}} 2$ د) $\log_{\frac{4}{3}} 2 > \log_{\frac{3}{4}} 2$ ه) $\log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) با بررسی نامساوی‌ها مشخص می‌شود که تنها نامساوی (ه) درست است.

الف) می‌دانیم $0.6 > 0.4$ و $1 >$ پایه $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$، بنابراین:

$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 0.6 < \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 0.4$

ب) می‌دانیم $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1 = \log_7 7$ و از طرفی

زیرا $\sqrt[3]{3} < \sqrt{5}$ و $1 <$ پایه $(\sqrt{5})$

$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{3} < \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = \log_7 7$

ج) می‌دانیم $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 = \log_{\frac{1}{3}} 1 > \log_{\frac{1}{3}} 2$ زیرا $1<2$ و از طرفی

$0 < ($پایه $\frac{1}{3}) < 1$.

د) $\log_{\frac{4}{3}} 2$ مثبت و $\log_{\frac{3}{4}} 2$ منفی است، بنابراین

ه) با توجه به اینکه پایه‌ی هر دو لگاریتم، عددی بزرگ‌تر از ۱ است، می‌توان نوشت

$\log_{\frac{3}{2}} 2 > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1 = \log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{3} > \log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{2}$

تست: در بازه‌ی (a,b) نمودار تابع $f(x)=\log_2(-x+1)$ بالای نمودار تابع $g(x)=\log_4(x+1)$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۱) با توجه به صورت سوال چه جوابی درست است؟

$$\log_4(-x+1) < \log_4(x+1) \Rightarrow \log_4(-x+1) - \log_4(x+1) < 0 \Rightarrow$$

$$\log_4 \frac{-x+1}{x+1} < 0 \to$$ پایه این لگاریتم از ۱ بزرگ تر است. پس برای اینکه حاصل این لگاریتم منفی شود، عبارت جلوی لگاریتم باید در بازه ی $(0,1)$ باشد، یعنی:

$$0 < \frac{-x+1}{x+1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 1 & \\ \hline \frac{-x+1}{x+1} & - & \text{ن} & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow x \in (-1,1)$$

$$\frac{-x+1}{x+1} < 1 \Rightarrow \frac{-2x}{x+1} < 0 \to \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 0 & \\ \hline \frac{-2x}{x+1} & - & \text{ن} & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$$

از طرفی دامنه ی تابع f به صورت $(-\infty,1)$ و دامنه ی تابع g به صورت $(-1,+\infty)$ است. از اشتراک این بازه ها، پاسخ بازه ی $(0,1)$ است، بنابراین $b-a=1$.

تست: چند عدد صحیح در رابطه ی $\log_{0.2}(7-x) < \log_{0.2}(x+1)$ صدق می کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$\log_{0.2}(7-x) < \log_{0.2}(x+1) \xrightarrow{0<0.2<1} 7-x > x+1 \to x<3 \quad (1)$$

$$\text{شرایط لگاریتم} \begin{cases} 7-x>0 \to x<7 \\ x+1>0 \to x>-1 \end{cases} \to -1<x<7 \xrightarrow{(1)} -1<x<3 \to$$ ۰,۱,۲ اعداد صحیح

تست: مجموعه جواب نامعادله $\log_{0.5}(x^2-6x) > -4$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ی ۳)

شرط دامنه: $x^2-6x>0 \to x(x-6)>0 \to x>6$ یا $x<0$ (1)

$$\log_{0.5}(x^2-6x) > -4 \to (x^2-6x) < (0.5)^{-4} \Rightarrow x^2-6x<16 \to x^2-6x-16<0$$

$\to (x-8)(x+2)<0 \to -2<x<8 \quad (2)$ و $\xrightarrow{(1)\cap(2)} -2<x<0$ یا $6<x<8 \xrightarrow{x\in Z} x=-1,7$

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $\log_{\frac12}\sqrt{3x-6} > \log_{\frac14}(2x-2)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(4,+\infty)$ ۳) $(1,4)$ ۴) $(2,4)$

پاسخ: گزینه ی ۴)

$$\log_{\frac12}\sqrt{3x-6} > \log_{(\frac12)^2}(2x-2) \to \log_{\frac12}(3x-6)^{\frac12} > \frac12\log_{\frac12}(2x-2)$$

$\to \log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-2) \to 3x-4 < 2x-2$

$\to x<4 \quad (1)$

دامنه‌ی تعریف:
$$\begin{cases} 2x-2>0 \to x>1 \quad (2) \\ 3x-4>0 \to x>2 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow[(1),(2),(3)]{\text{اشتراک}} 2<x<4$$

تست: به ازای چند عدد طبیعی a نامعادله‌ی
$$3+\sqrt[3]{\log_3(2a+1)-3} > \log_3(2a+1)$$
برقرار است؟ ۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳) می‌دانیم $0<a<1$ یا $a<-1$ آنگاه نامعادله‌ی $\sqrt[3]{a}>a$ برقرار است.

$$\sqrt[3]{\log_3(2a+1)-3} > \log_3(2a+1)-3 \quad \text{و} \quad a>-\frac{1}{2}$$

حالت اول: $\log_3(2a+1)-3<-1 \to \log_3(2a+1)<2 \to 2a+1<3^2 \to a<4$

$\to -\frac{1}{2}<a<4 \to$ ۳ عدد طبیعی

حالت دوم: $0<\log_3(2a+1)-3<1$

$$\begin{cases} \log_3(2a+1)-3>0 \\ \log_3(2a+1)-3<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3(2a+1)>3 \to 2a+1>27 \to a>13 \\ \log_3(2a+1)<4 \to 2a+1<81 \to a<40 \end{cases}$$

$\xrightarrow{a>-\frac{1}{2}} 13<a<40 \to$ ۲۶ عدد طبیعی

بنابراین نامعادله به ازای $26+3=29$ عدد طبیعی برقرار است.

تست: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $(\log(x-5))^2-3\log(x-5)<-2$ به صورت (a,b) باشد، حاصل $\log\frac{\frac{a+b}{10}}{\frac{b-a}{10}} - \log_3 2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$(\log(x-5))^2-3\log(x-5)<-2 \to$

با فرض $\log(x-5)=t$ خواهیم داشت:

$t^2-3t+2<0 \to 1<t<2 \to$

$1<\log(x-5)<2 \to 10^1<x-5<10^2 \to 15<x<105 \Rightarrow a=15,\ b=105$

$$\log\frac{\frac{a+b}{10}}{\frac{b-a}{10}} = \log\frac{\frac{120}{10}}{\frac{90}{10}} = \log_9 12 = \log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 3 = \log_3 2+\frac{1}{2} \to$$

$$\log\frac{\frac{a+b}{10}}{\frac{b-a}{10}} - \log_3 2 = \frac{1}{2}$$

$7^{2x} > 7^x + 2$ **تست ۸:** مجموعه جواب نامعادله

کدام است؟ ۱) $(\log_7 2, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -\log_7 2)$

۳) $(-\log_7 2, \log_7 2)$ ۴) $(-\log_7^2, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱) $7^x = a$ در نظر می‌گیریم، به وضوح $7^{2x} = a^2$ که با جایگذاری در نامعادله داریم: $a^2 > a+2 \to a^2-a-2>0 \to (a-2)(a+1)>0 \to a<-1$ یا $a>2$

با توجه به آن که مقدار 7^x همواره مثبت است، پاسخ $a<-1$ غیرقابل قبول است.

بنابراین: $a>2 \to 7^x>2 \to \log 7^x > \log 2 \Rightarrow x > \frac{\log 2}{\log 7} \to x > \log_7 2$

تست ۹: در پرتاب ۲ تاس اعداد a و b رو شده‌اند. با کدام احتمال نامساوی

$$\log_{\frac{1}{a+1}}(a+b) > \log_{\frac{1}{a+1}} 5$$ درست است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه ۱) a عددی طبیعی بین ۱ تا ۶ است، پس $\frac{1}{a+1}$ همواره بین صفر و یک است و داریم:

$$\log_{\frac{1}{a+1}}(a+b) > \log_{\frac{1}{a+1}} 5 \xrightarrow{0<\frac{1}{a+1}<1} a+b<5$$

پس در واقع مسئله این است با کدام احتمال در پرتاب ۲ تاس مجموع اعداد رو شده کمتر از ۵ است که حل آن با توجه به آنچه گفتیم به صورت زیر است:

$$P(A) = \frac{(4-1)+(3-1)+(2-1)}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

محاسبه‌ی مقدار تقریبی لگاریتم: برای محاسبه‌ی تقریبی $\log_a A$ کافی است ابتدا عبارت A را بین دو توان صحیح و متوالی a قرار دهیم، سپس از طرفین نامساوی نوشته شده در مبنای a لگاریتم بگیریم (دقت کنید اگر $a>1$ باشد، جهت نامساوی عوض نمی‌شود، ولی اگر $0<a<1$ باشد، جهت نامساوی عوض خواهد شد) با انجام این کار، مقدار تقریبی (بین دو عدد صحیح جواب) $\log_a A$ مشخص می‌شود.

تست: عدد $\log_{0.2} 12$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۳ و ۴ ۳) ۱- و ۲- ۴) ۳- و ۴- پاسخ: گزینه‌ی ۳)

باید دو عدد صحیح متوالی n و n+1 را طوری بیابیم که ۱۲ بین دو عدد $(0.2)^n$ و $(0.2)^{n+1}$ قرار بگیرد.

$$5<12<25 \to \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}<12<\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow (0.2)^{-1}<12<(0.2)^{-2}$$

$$\Rightarrow -2<\log_{0.2}12<-1 \Rightarrow$$

تست: حاصل جزء صحیح $[\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳ پاسخ: گزینه‌ی ۴)

برای از بین بردن هر دو رادیکال در $\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5}$، کافی است از $\log_b a=\log_{b^k}a^k$ استفاده کنیم، داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5}=\log_{(\sqrt[3]{2})^6}(\sqrt{5})^6=\log_4 125 \quad (*)$$

$$64<125<256 \to 4^3<125<4^4 \xrightarrow{4>1} \log_4 4^3<\log_4 125<\log_4 4^4$$

$$\to 3<\log_4 125<4 \Rightarrow [\log_4 125]=3 \overset{(*)}{=\!=} [\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{5}]=3$$

تست: حاصل $[\log_{\frac{1}{2}}3]+[\log_5 9]$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۳- ۴) ۴- پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<3<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow -2<\log_{\frac{1}{2}}3<-1 \Rightarrow [\log_{\frac{1}{2}}3]=-1$$

$$5^1<9<5^2 \Rightarrow 1<\log_5 9<2 \to [\log_5 9]=1$$

پس حاصل نهایی $-2+1=-1$ است.

تست: عدد $\log_{0/5}^{1/5}$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(-2,-1)$ پاسخ گزینه‌ی ۳

$1<1/5<2 \to (\frac{1}{2})^0 < 1/5 < (\frac{1}{2})^{-1} \Rightarrow 0 > \log_{\frac{1}{2}} 1/5 > -1$

$\Rightarrow -1 < \log_{0/5} 1/5 < 0 \to \log_{0/5} 1/5 \in (-1,0)$

تست: اگر $x=a$ جواب معادله $x=\log(4^x-90)+\log 5^x$ باشد، $[a]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۲) از آنجایی که $\log_b a^n = n\log_b a$ است داریم:

$x=\log(4^x-90)+x\log 5 \Rightarrow (1-\log 5)x=\log(4^x-90) \xrightarrow{\log 5+\log 2=1}$

$(\log 2)x=\log(4^x-90) \to \log 2^x=\log(4^x-90) \to 2^x=4^x-90 \to$

$4^x-2^x-90=0 \to (2^x-10)(2^x+9)=0 \xrightarrow{2^x>0} 2^x=10 \to x=\log_2 10$

یعنی $a=\log_2 10$ بین دو عدد صحیح متوالی ۳ و ۴ قرار دارد، پس $[a]=3$ است.

تست: اگر $\log 40=1/6020$، عدد 5^{18} چند رقمی است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱ پاسخ: گزینه‌ی ۲)

نکته: اگر $10^n \leq A < 10^{n+1}$ آنگاه عدد صحیح A، $n+1$ رقمی است.

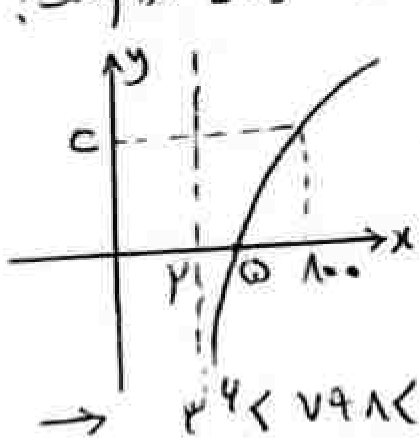
$\log 40=\log(\frac{1000}{25})=\log 1000-\log 25=\log 10^3-\log 5^2=3-2\log 5=1/6020$

$\to \log 5=\frac{3-1/6020}{2}=0/699 \Rightarrow x=10^{12/6} \Rightarrow 10^{12}<x<10^{13}$

پس عدد x، ۱۳ رقمی است.

تست: اگر نمودار تابع $a+\log_3(x-b)$ به شکل زیر باشد، $[c]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵



پاسخ: گزینه‌ی ۴) با توجه به انتقال افقی، دامنه‌ی تابع لگاریتم $b=2$ است. همچنین ریشه‌ی تابع $x=5$ است.

$a+\log_3(5-2)=0 \to a=-1 \to c=-1+\log_3 798$

$\to 3^6<798<3^7 \to 6<\log_3 798<7 \to [\log_3 798]=6$

$\Rightarrow [c]=[\log_3 798]-1=6-1=5$

$\log_x(x^2+6x)=[\log_2 9]$ باشد و x یکی از ریشه‌های معادله $x^2+2mx-1=0$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) -3 ۴) $\frac{1}{3}$ پاسخ: گزینه ی ۲

$2^3<9<2^4 \xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از طرفین در مبنای ۲}} \log_2 2^3<\log_2 9<\log_2 2^4 \to$

$3<\log_2 9<4 \to [\log_2 9]=3 \Rightarrow \log_x(x^2+6x)=3 \to x^2+6x=x^3$

$\to x(x^2-x-6)=0 \to x(x+2)(x-3)=0 \to x=0$ ✗ و $x=-2$ ✗ و $x=3$ ✓

از معادله $x^2+2mx-1=0$ داریم: $x_1x_2=\frac{c}{a}=-1$ و چون $x_1=3$ لذا $x_2=-\frac{1}{3}$

تست ۵: اگر $f(x)=\log_{\frac{1}{x-2}}(x^3-6x^2+12x+8)$ مقدار عبارت حاصل $f(2.1)$ در کدام بازه‌ی زیر قرار دارد؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-2,-1)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(1,2)$ پاسخ: گزینه ی ۴

ابتدا تابع f را به کمک روابط جبری ساده می‌کنیم و سپس مقدار x را جای‌گذاری می‌کنیم:

$f(x)=\log_{(x-2)^{-1}}((x-2)^3+16) \xrightarrow{x=2.1} f(2.1)=\log_{10}((2.1-2)^3+16)$

$\to f(2.1)=\log 16.001$ با توجه به $10<16.001<100$ در نتیجه

$1<\log(16.001)<2$

تست ۶: اگر $3^{\sqrt{4x+4}}=54-3^{1+\sqrt{x+1}}$ باشد، حاصل عبارت $[\sqrt{x+1}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ پاسخ: گزینه ی ۲

با فرض $3^{\sqrt{x+1}}=t$ داریم:

$3^{2\sqrt{x+1}}+3^1\times 3^{\sqrt{x+1}}-54=0 \to t^2+3t-54=0 \to (t+9)(t-6)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} t=-9 & \text{غ ق ق} \\ t=6 & 3^{\sqrt{x+1}}=6 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\log_3 6 \Rightarrow [\sqrt{x+1}]=[\log_3 6]=1 \end{cases}$

دقت شود که: $3^1<6<3^2 \Rightarrow \log_3 3^1<\log_3 6<\log_3 3^2 \to 1<\log_3 6<2$

تست ۷: حاصل $[\log_2(2+\sqrt{3})-\log_2(2-\sqrt{3})]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ پاسخ: گزینه ی ۳

$\log_2^{2+\sqrt3}-\log_2^{2-\sqrt3}=\log_2\frac{2+\sqrt3}{2-\sqrt3}=\log^{(2+\sqrt3)^2}$

$=\log^{(4+3+4\sqrt3)}=\log^{(7+\sqrt{48})}$

از طرفی داریم: $6<\sqrt{48}<7 \Rightarrow 13<7+\sqrt{48}<14 \rightarrow [\log_2^{(7+\sqrt{48})}]=3$

<u>تست</u>: حاصل $[x]+[2x]+[3x]$ به ازای $x=\log 8$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ پاسخ: گزینه ی ۳

$x=\log 8 \Rightarrow 0<x<\log 10 \rightarrow 0<x<1 \Rightarrow [x]=0$

$2x=\log 64 \Rightarrow \log 10<2x<\log 100 \rightarrow 1<2x<2 \Rightarrow [2x]=1$

$3x=\log 512 \Rightarrow \log 100<3x<\log 1000 \rightarrow 2<3x<3 \rightarrow [3x]=2$

$\Rightarrow [x]+[2x]+[3x]=3$

<u>تست</u>: ماکزیمم $(\log_7^4)^{\sin x}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\log_7^4$ ۴) $\log_4^7$ پاسخ: گزینه ی ۴

ابتدا مشخص می کنیم که $\log_7^4$ در چه محدوده ای قرار دارد:

$1<4<7 \Rightarrow \log_7^1<\log_7^4<\log_7^7 \Rightarrow 0<\log_7^4<1$

و می دانیم اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بیشتری برسند، کوچک تر و هر چه به توان کمتری برسند، بزرگ تر می شوند. پس برای آن که $(\log_7^4)^{\sin x}$ ماکزیمم مقدار خود را داشته باشد، کافی است $\sin x=-1$ بوده، در نتیجه:

$(\log_7^4)^{-1}=\frac{1}{\log_7^4}=\log_4^7$

<u>تست</u>: حاصل $\log_9^{(-[\log_5^{\frac{1}{80}}])}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $\frac12$ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) $\log_9^2$ پاسخ: گزینه ی ۱

ابتدا سعی می کنیم $\frac{1}{80}$ را بین دو توان متوالی ۵ قرار دهیم، اما برای سادگی کار ابتدا ۸۰ را بین دو توان متوالی ۵ قرار می دهیم، داریم:

$5^2<80<5^3 \Rightarrow 5^{-3}<\frac{1}{80}<5^{-2} \rightarrow \log_5^{5^{-3}}<\log_5^{\frac{1}{80}}<\log_5^{5^{-2}} \rightarrow$

$-3<\log_5^{\frac{1}{80}}<-2 \rightarrow [\log_5^{\frac{1}{80}}]=-3 \Rightarrow \log_9^{(-[\log_5^{\frac{1}{80}}])}=\log_9^3=\frac12$

مولف رحیم قهرمان

کاربرد لگاریتم در انرژی آزاد شده در زلزله:

ریشتر مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه و نمادی میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده E بر حسب ارگ (Erg) از رابطه‌ی $\log E = 11.8 + 1.5M$ به دست می‌آید.

<u>تست</u>: شدت زلزله‌ای ۷/۵ ریشتر و شدت بزرگترین پس لرزه آن برابر ۴ ریشتر است. میزان انرژی آزاد شده توسط زلزله چند برابر میزان انرژی آزاد شده توسط بزرگترین پس لرزه آن بر حسب ارگ است؟

۱) $10^{7.25}$ ۲) $10^{20.25}$ ۳) $10^{2.25}$ ۴) $10^{1.25}$

پاسخ: گزینه ۳) $\log E_1 - \log E_2 = (11.8 + 1.5\times 7.5) - (11.8 + 1.5\times 4) = 2.25$

$$\Rightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = 2.25 \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{2.25}$$

<u>تست</u>: رابطه‌ی $\log E = 11.8 + 1.5M$ رابطه‌ی بین بزرگی زمین لرزه (M) در مقیاس ریشتر و مقدار انرژی آزاد شده (E) است. اگر زمین لرزه در شهر A، ۱۰۰ برابر شهر B، انرژی آزاد کند، بزرگی زمین لرزه در شهر A چند ریشتر از شهر B بیشتر است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$ پاسخ: گزینه ۲)

$$\frac{E_A}{E_B} = 100 \Rightarrow \log \frac{E_A}{E_B} = \log 100 = 2 \Rightarrow \log E_A - \log E_B = 2$$

$$\Rightarrow (11.8 + 1.5M_A) - (11.8 + 1.5M_B) = 2 \rightarrow M_A - M_B = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$$

<u>تست</u>: اگر انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای ۱۰۰۰ برابر شود، قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چند واحد اضافه می‌گردد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$ پاسخ: گزینه ۲)

اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله را با E نمایش دهیم، آن گاه:

$$\log E = 11.8 + 1.5M \rightarrow M = \frac{2}{3}(\log E - 11.8)$$

در مرحله اول قدرت زلزله برابر است با:

$$M_1 = \frac{2}{3}(\log E - 11.8)$$

در مرحله دوم قدرت زلزله برابر است با:

$$M_2 = \frac{2}{3}(\log 1000E - 11.8)$$

$$M_2 = \frac{2}{3}(\log 1000 + \log E - 11.8) = 2 + M_1 \rightarrow$$

پس ۲ واحد ریشتر، قدرت آن اضافه می‌شود.

[illegible] بزرگی زلزله [illegible]

$\log E = 11.8 + 1.5M$ [illegible] انرژی زلزله اول

$\sqrt{1000}$ برابر انرژی آزاد شده زلزله دوم است، اختلاف بزرگی دو زلزله چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}\log E_1 = 11.8 + 1.5M_1\\ \log E_2 = 11.8 + 1.5M_2\end{array}\right\} \rightarrow \log E_1 - \log E_2 = 1.5(M_1 - M_2) \Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1.5(M_1 - M_2)$$

طبق صورت سوال: $E_1 = \sqrt{1000}\, E_2$ پس داریم:

$$\log\left(\frac{\sqrt{1000}\, E_2}{E_2}\right) = 1.5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log(10^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}(M_1 - M_2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(M_1 - M_2) \rightarrow M_1 - M_2 = 1$$