فصل ۱

تابع


عکاس: سیدمهدی حسینی

پل سفید ـ اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

درس اول

توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

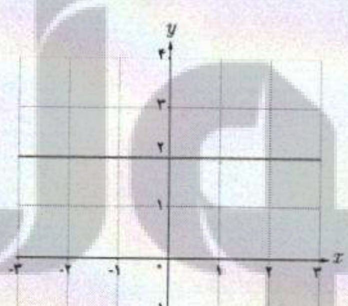
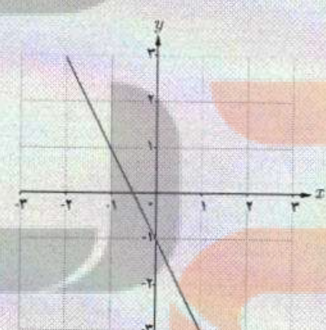
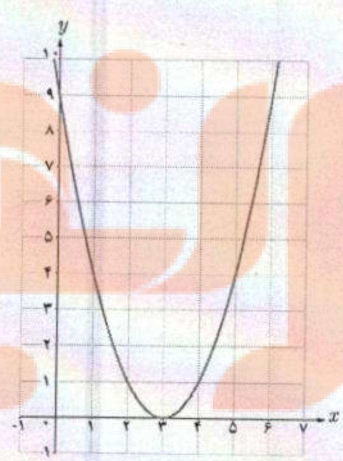
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n، a_{n-1}، … ، a_2، a_1، a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال : توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=3x+5\quad,\quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2}\quad,\quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x\quad,\quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

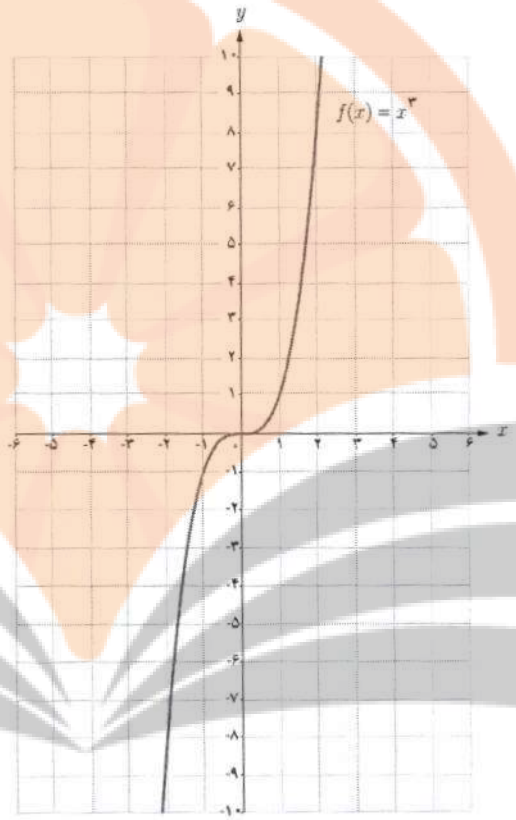
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است :

درجهٔ تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجهٔ دوم
ضابطهٔ کلی	$f(x)=b$	$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$	$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$
مثال	$f(x)=2$ 	$f(x)=-2x-1$ 	$f(x)=x^2-6x+9$ 

تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :

x	$f(x)=x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸



خواندنی

الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل به‌صورت یک شش‌ضلعی است که در دور اول با شش تا شش‌ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.
تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r)=۳r^2-۳r+۱$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r=۱،۲،۳$ به دست آورید؟

$f(1)=3(1)^2-3(1)+1=3-3+1=1$

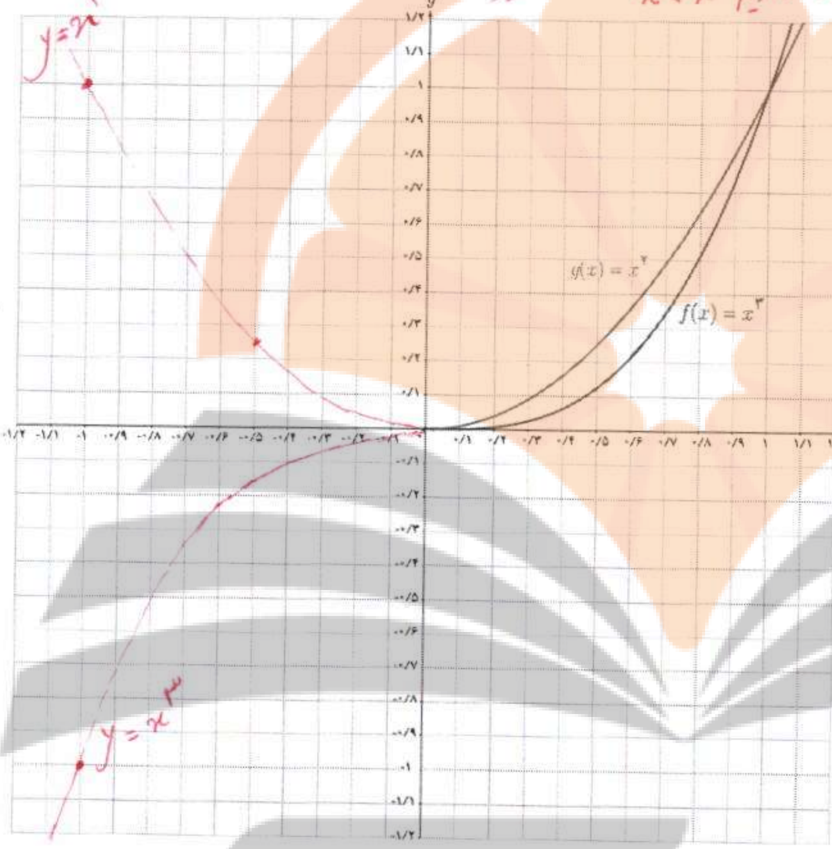
$f(2)=3(2)^2-3(2)+1=12-6+1=7$

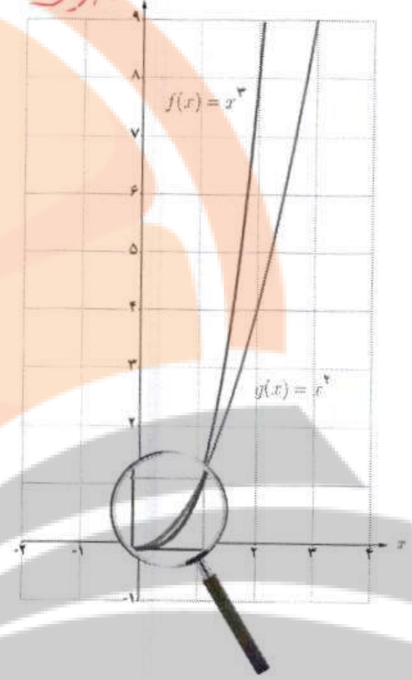
$f(3)=3(3)^2-3(3)+1=27-9+1=19$

فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^۳$ و $g(x) = x^۲$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $f(x) = x^۳$ بالای نمودار $g(x) = x^۲$ قرار دارد؟ خیر زیرا برای $۰ < x < ۱$ داریم $x^۳ < x^۲$ ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-۱, ۰]$ رسم کنید.

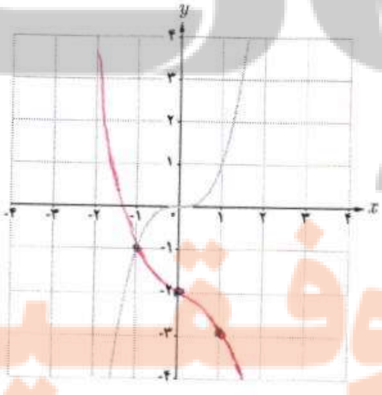


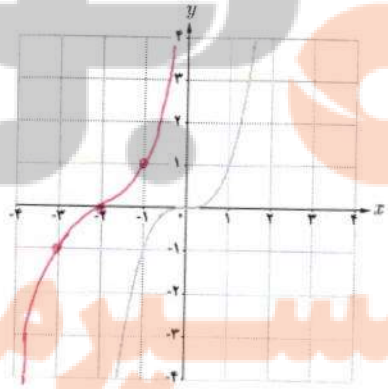


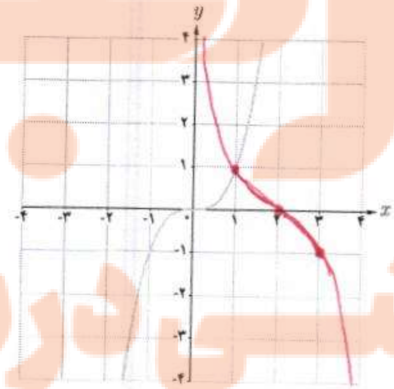
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۳$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = -x^۳ - ۲$ ب) $y = (x + ۲)^۳$ پ) $y = -(x - ۲)^۳$



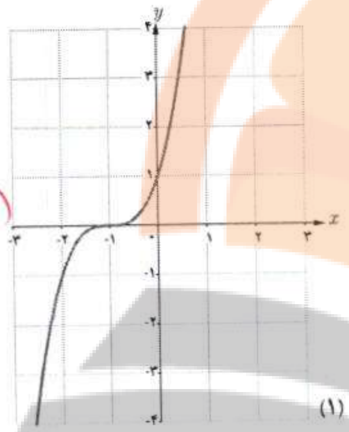


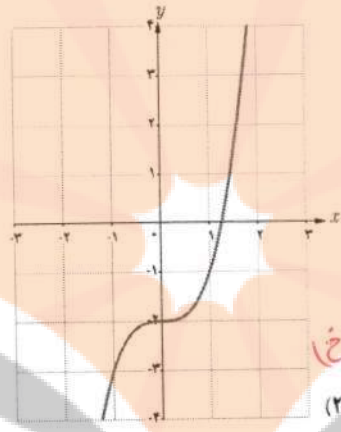


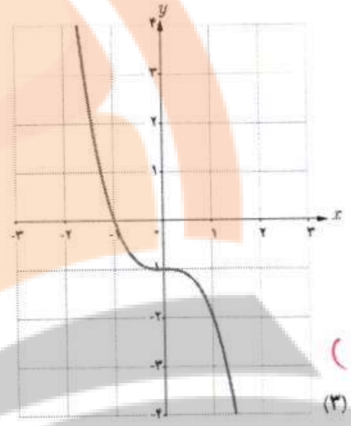
کار در کلاس

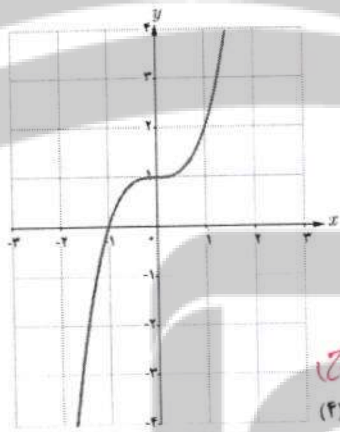
به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

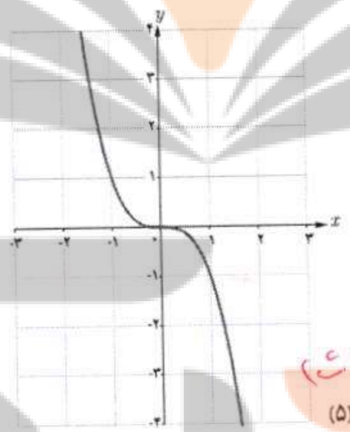
الف) $y=(x-1)^3+2$ ۶
ب) $y=(x-2)^3$ ۹
پ) $y=-x^3+1$ ۸
ت) $y=(x+1)^3-1$ ۷
ث) $y=-x^3$ ۵
ج) $y=(x+1)^3$ ۱
چ) $y=x^3+1$ ۴
ح) $y=-x^3-1$ ۳
خ) $y=x^3-2$ ۲

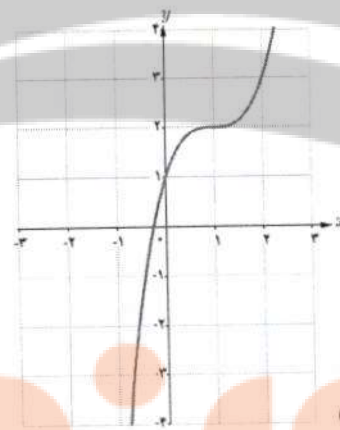

(ج)
(۱)

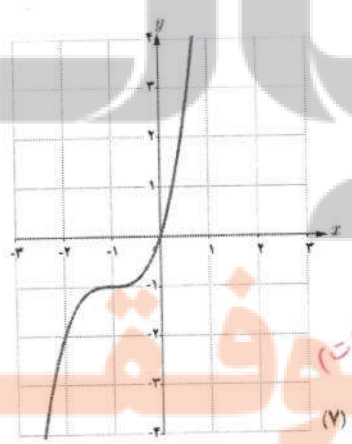

(خ)
(۲)

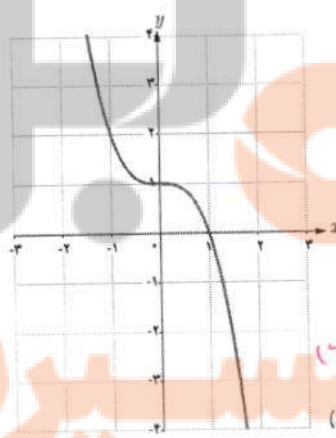

(ح)
(۳)

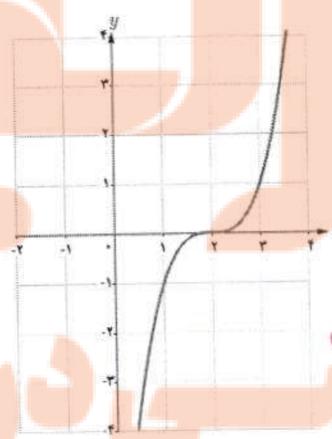

(چ)
(۴)


(ث)
(۵)


الف
(۶)


(ت)
(۷)


(پ)
(۸)


(ب)
(۹)

توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

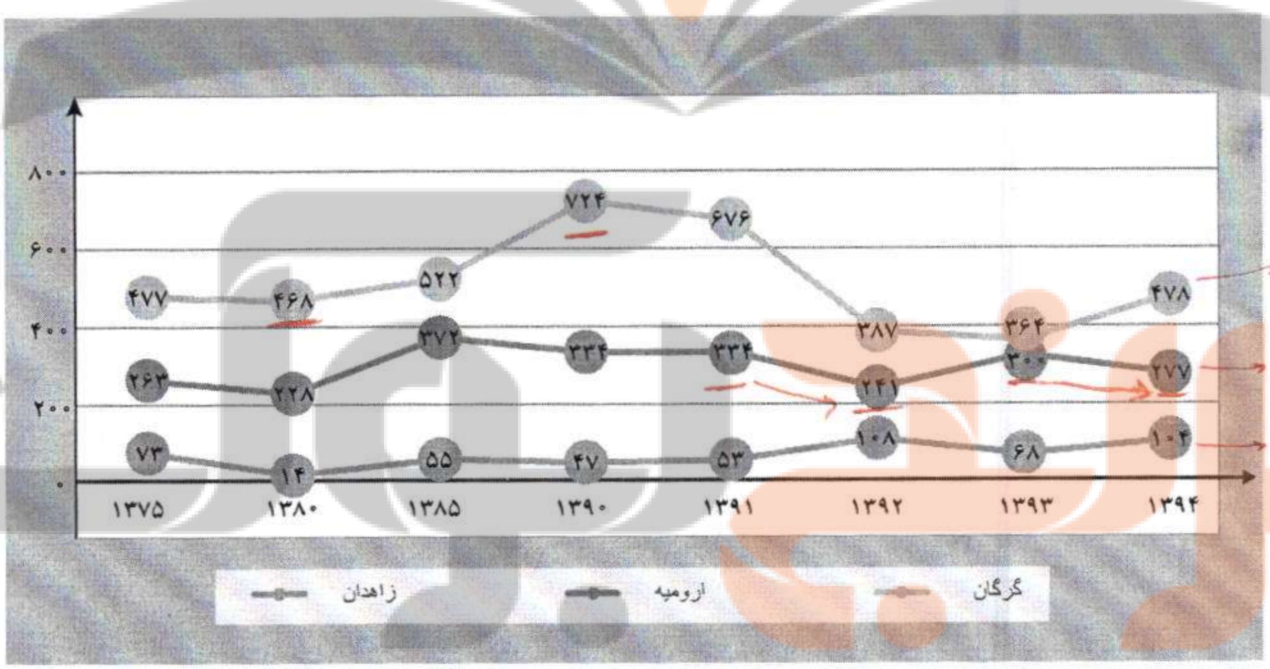
الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

از سال ۸۵ تا ۹۰ صعودی

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

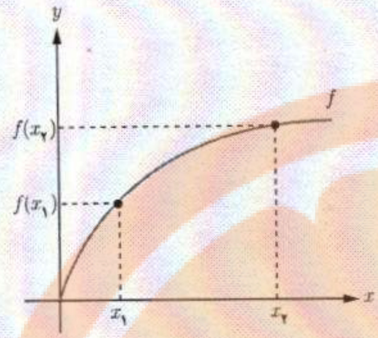
از سال ۹۱ تا ۹۳ روند نزولی

از سال ۹۳ تا ۹۴



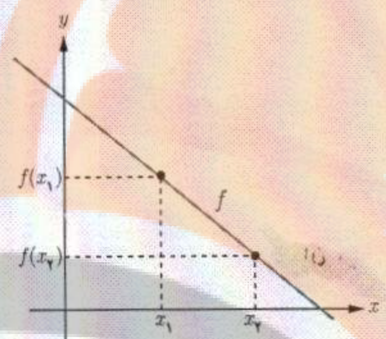
میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]

۱ـ منبع: سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir



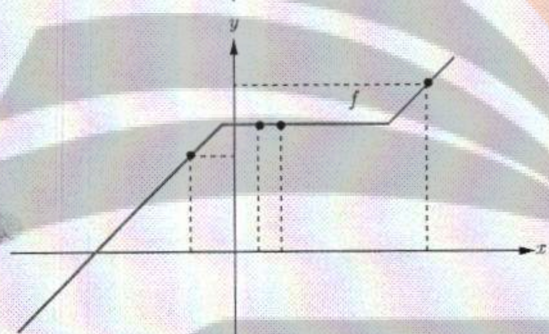
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



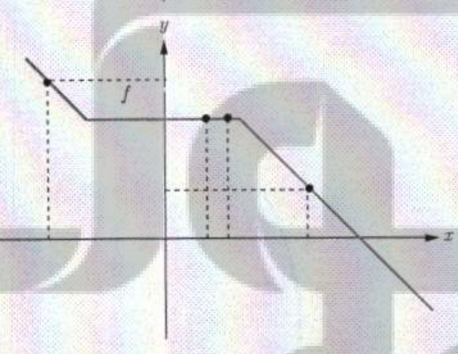
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

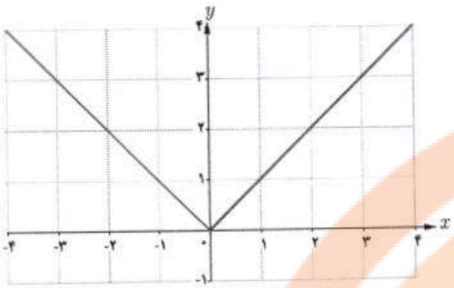
نکته : به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

خیر

مثال $y=|x+1|-|x-3|$

ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال : تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

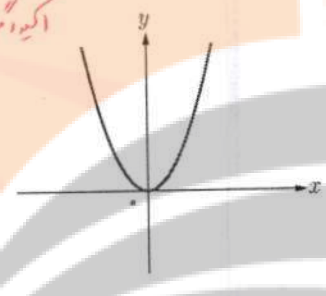


کار در کلاس

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

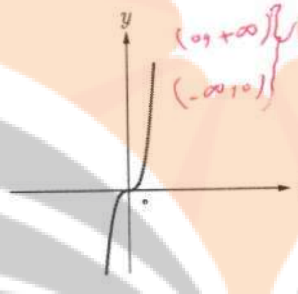
اکیداً صعودی $(0,+\infty)$

اکیداً نزولی $(-\infty,0)$



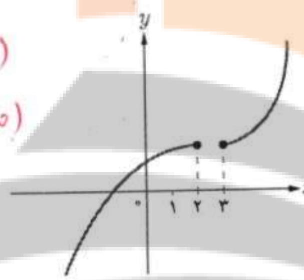
(پ)

اکیداً صعودی $(0,+\infty)$ $(-\infty,0)$



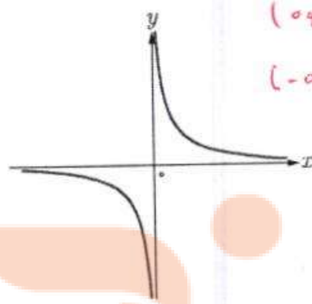
(ب)

اکیداً صعودی $(-\infty,2)$ $(3,+\infty)$



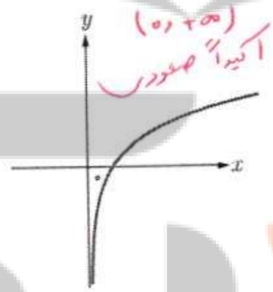
(الف)

اکیداً نزولی $(0,+\infty)$ $(-\infty,0)$



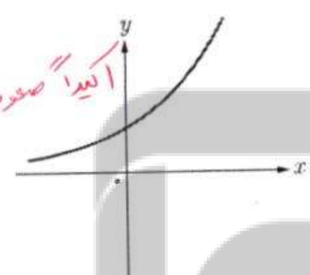
(ج)

$(0,+\infty)$ اکیداً صعودی

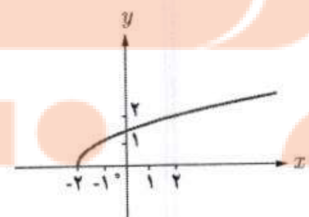


(ث)

اکیداً صعودی $\mathbb{R}$

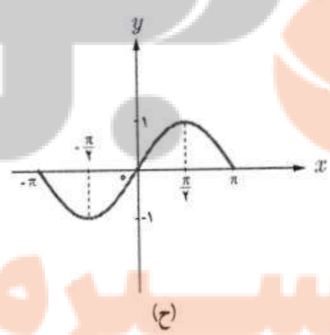


(ت)

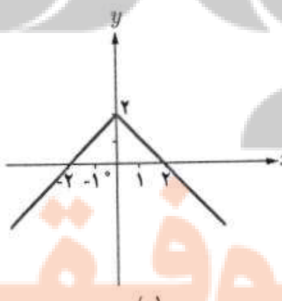


(خ)

$(-2,+\infty)$ اکیداً صعودی



(ح)



(چ)

اکیداً صعودی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

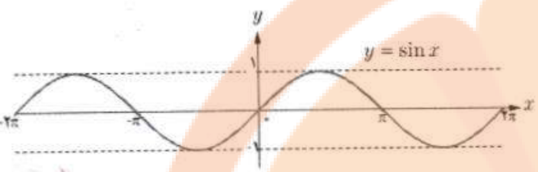
اکیداً نزولی $(0,+\infty)$

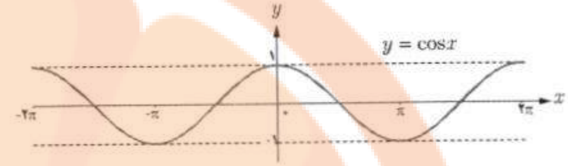
اکیداً صعودی $(-\infty,0)$

اکیداً نزولی $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ $(\frac{\pi}{2},\pi)$

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزول	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

کار در کلاس

x	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	۲π
$f(x)$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

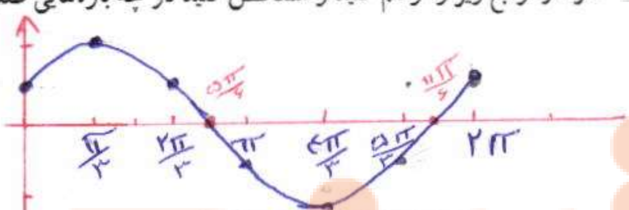
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ $\quad D_f=[۰,۲\pi]$

$[۰,\frac{\pi}{۳})$ صعودی $(\frac{۴\pi}{۳},۲\pi)$

نزولی $(\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳})$

$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۶} \\ x-\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۶} \end{cases}$



ب) $g(x)=x+|x|$

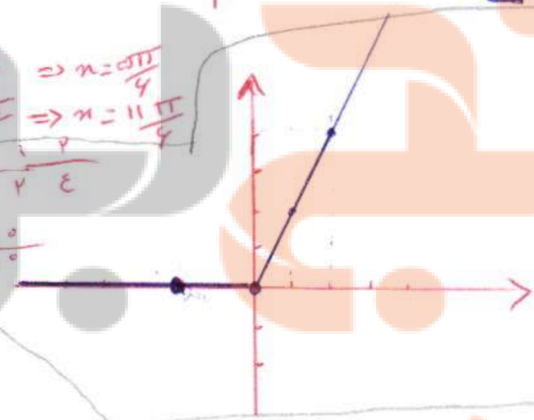
$\begin{cases} ۲x & x\geq ۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases}$

x	۰	۱	۲
y	۰	۲	۴

x	-۱	۰
y	۰	۰

ثابت: صعودی و نزولی $(-\infty,۰]$

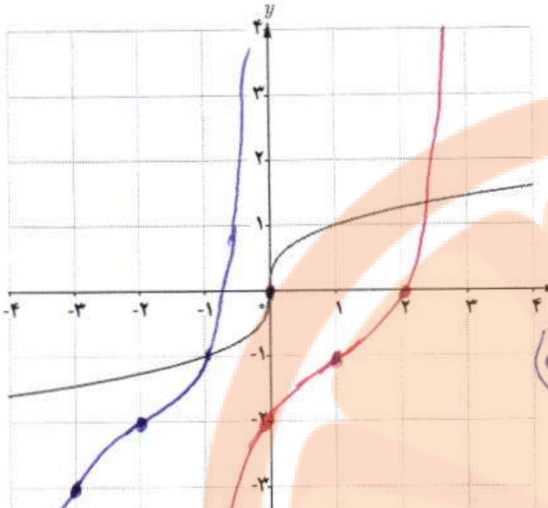
صعودی $(۰,+\infty)$



پ) $t(x)=-x^۳-۱$

x	y
-۲	۷
-۱	۰
۰	-۱
۱	-۲
۲	-۹

در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است



فعالیت

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ اکیداً صعودی

ب) این تابع یک به یک است؟ بله

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟ خیر. طبق تعریف اکیداً صعودی (نزولی) داریم:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$

در نتیجه طول های نابرابر عرض های نابرابر دارند.

x	y
-3	-3
-2	-2
-1	-1

(ب) تمرین (۱)

تمرین (۱) قسمت الف

-1	-9
0	-2
1	-1
2	0
3	7

تمرین

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-1)^3-1$ ب) $y=(x+2)^3-2$

دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است

دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است

۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\le x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

x	-5	-4
y	7	5

x	-4	2
y	3	3

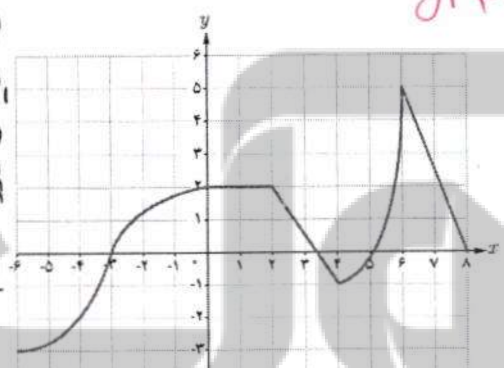
x	2	3
y	4	7

$(-\infty, -4)$ نزولی

$(-4, 2)$ ثابت

$(2, +\infty)$ صعودی

۳) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



$(-6, 0)$ صعودی

$(0, 2)$ ثابت {صعودی / نزولی}

$(2, 4)$ نزولی

$(4, 6)$ صعودی

$(6, +\infty)$ نزولی

شکل (۲)

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

۴) تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵) تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

$|x|=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\begin{cases}x^2(x) & x\ge 0\\ x^2(-x) & x<0\end{cases} \Rightarrow$ حداکثر $a=0$

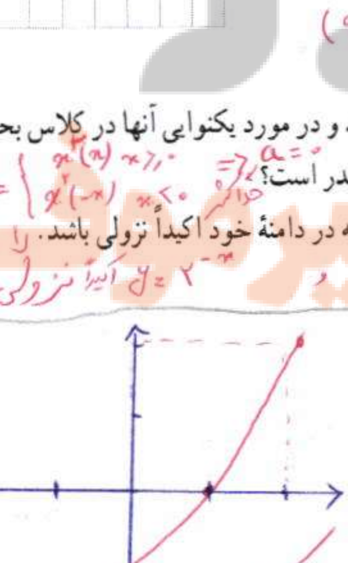
۶) تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

$y=\sqrt{x} \to [0, +\infty)$ اکیداً صعودی و $y=2^{-x}$ اکیداً نزولی است

(۴)

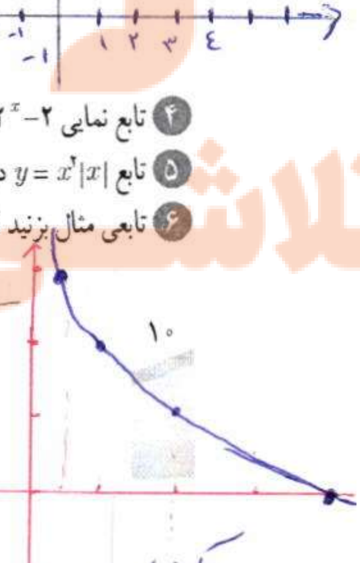
$y=2^x-2$

x	y
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-1



$y=-\log_2^x+2$

x	y
$\frac{1}{2}$	3
1	2
2	1



درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t)=۴t+۲ \quad ; \quad ۰\leq t\leq ۳$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(۲)=۱۰$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(۱)=$ $۴(۱)+۲=۶$

$d(۳)=$ $۴(۳)+۲=۱۴$

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰; \quad ۲\leq d\leq ۱۴$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(۱۰)=۲۰(۱۰)^۲-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(۲)=$ $۲۰(۲)^۲-۸۰(۲)+۵۰۰=۸۰-۱۶۰+۵۰۰=۴۲۰$

$n(۳)=$ $۲۰(۳)^۲-۸۰(۳)+۵۰۰=۱۸۰-۲۴۰+۵۰۰=۴۴۰$

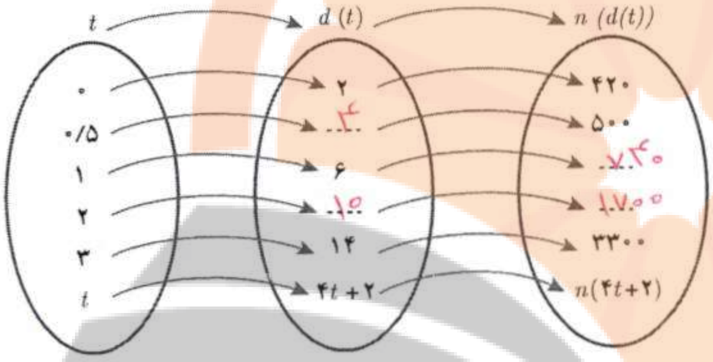
به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t)=4t+2$	$n(d(t))=n(4t+2)$
0	$d(0)=2$	$n(d(0))=n(2)=420$
$0/5$	$d(0/5)=4$	$n(d(0/5))=n(4)=500$
1	$d(1)=6$	$n(d(1))=n(6)=740$
2	$d(2)=10$	$n(d(2))=n(10)=1700$
3	$d(3)=14$	$n(d(3))=n(14)=3300$



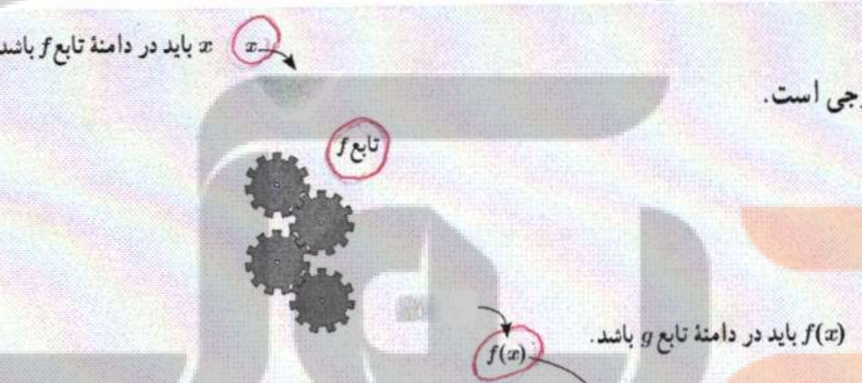
همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.
آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟
به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟
برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$n(d(t))=n(4t+2)=20(4t+2)^2-80(4t+2)+500=320t^2+320t+80\underbrace{-320t}_{-160+500}=320t^2+420 \qquad 0\leq t\leq 3$$

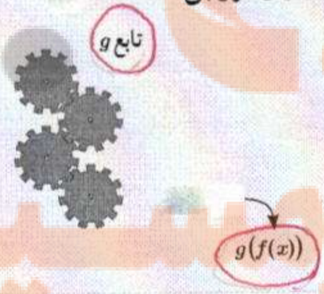
$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است.



مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.



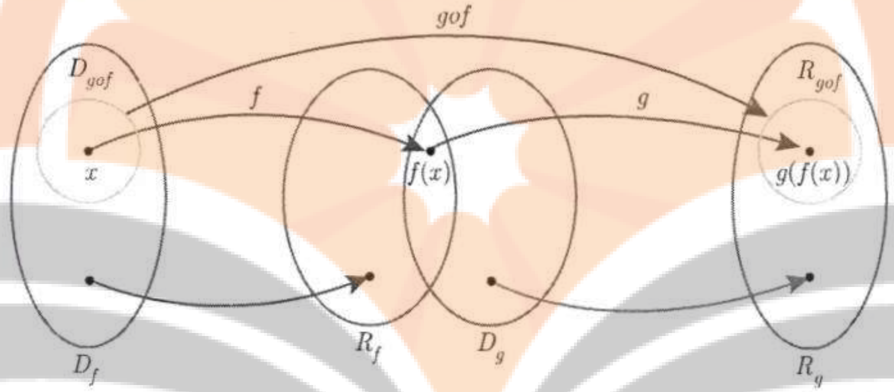
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر : $(gof)(x) = g(f(x))$

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

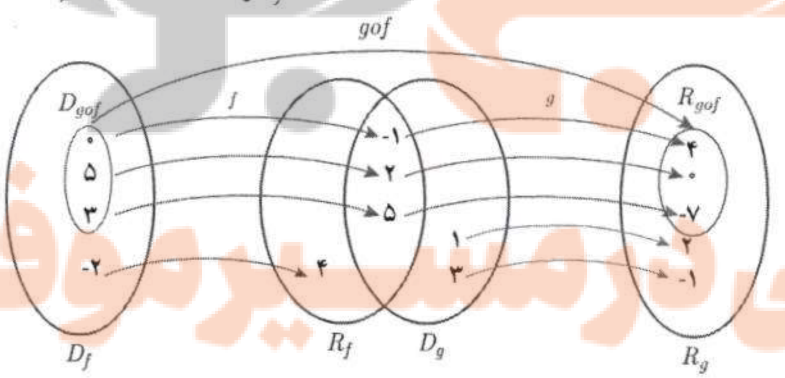
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

مثال : اگر $f = \{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ و $g = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{aligned}
&(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۴\\
&(gof)(۵) = g(f(۵)) = g(۲) = ۰\\
&(gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۵) = -۷\\
&(gof)(-۲) = g(f(-۲)) = g(۴) : \text{تعریف نشده}
\end{aligned}\right\} \rightarrow gof = \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	$f(x)$
-3	-7
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	3
2	5
3	5

x	$g(x)$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

الف) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(0) = -1$

ب) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

پ) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

ت) $(gog)(-2) = g(g(-2)) = g(3) = 8$ تعریف نشده است

ث) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) =$

ج) $(fof)(1) = f(f(1)) = f(3) = 5$

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x - 1 \geq 0$ که بازهٔ $[1, +\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازهٔ $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$، بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ لزوماً با هم برابر نیستند.

تذکر: دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع gof با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{3}{x} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$\frac{3}{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

$fog(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2x}{3 - x}$

$fof(x) = \frac{2}{\frac{2}{x-1} - 1} = \frac{2x-2}{3-x}$

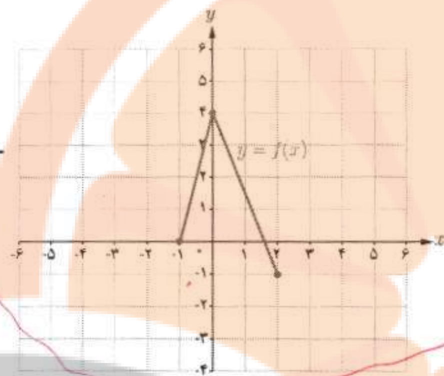
$\ldots \mathbb{R} - \{1\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

«تبدیل نمودار توابع»

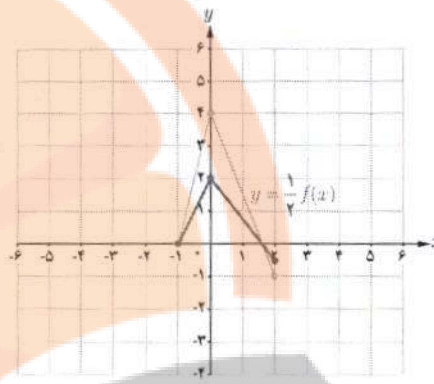
یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.

x	$f(x)$
−۱	۰
۰	۴
۲	−۱



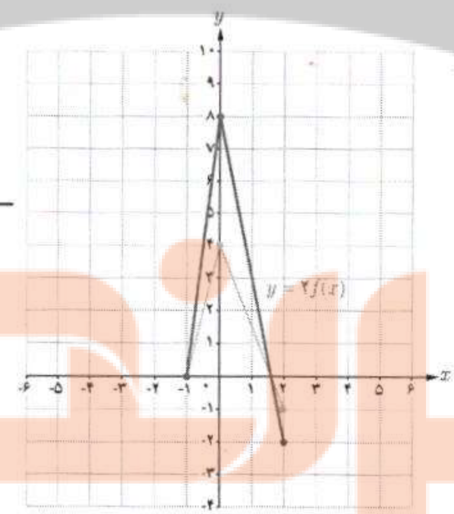
x	$\frac{1}{2}f(x)$
−۱	۰
۰	۲
۲	$-\frac{1}{2}$



برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

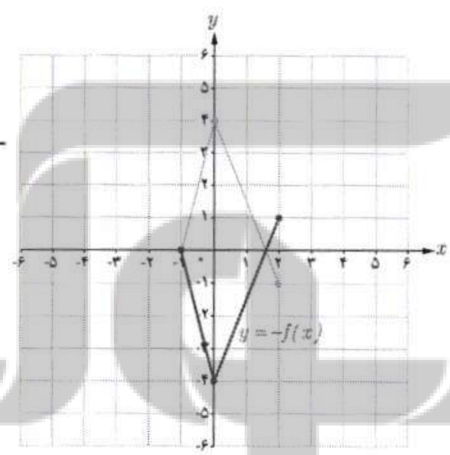
از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.

x	$2f(x)$
−۱	۰
۰	۸
۲	−۲



برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم.

x	$-f(x)$
−۱	۰
۰	−۴
۲	۱

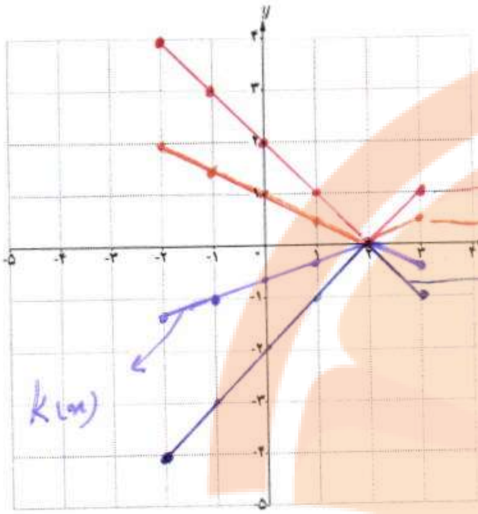


برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۱− ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

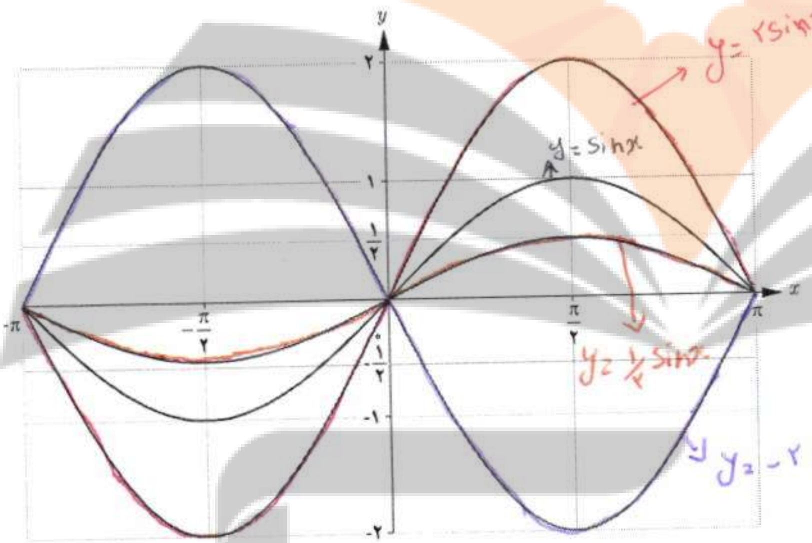
کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را در بازهٔ $[-2,3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-2|$ و $h(x)=\frac{1}{2}|x-2|$ و $k(x)=-\frac{1}{3}|2-x|$ را رسم کنید.

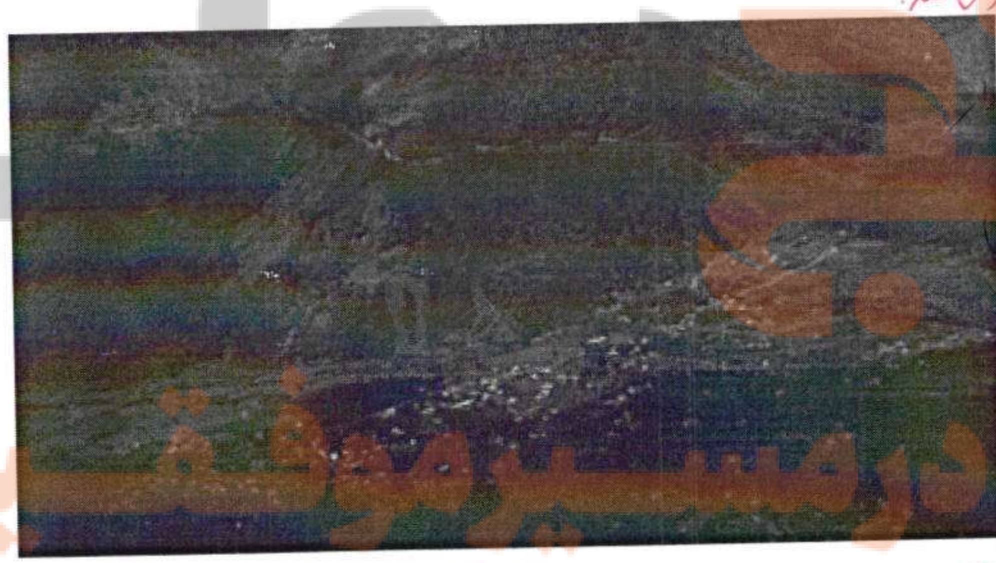


کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ ، $y=2\sin x$ ، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



دامنه هیچ کدام تغییر نمی‌کند.
توابع $y=2\sin x$ ، $y=-2\sin x$ ، $y=\frac{1}{2}\sin x$
برای رسم عرض هر نقطه از نمودار تابع $y=\sin x$ را با حفظ طول آن نقطه (۲ یا ۲- یا ½) برابر می‌کنیم.



ییلاقات تالش

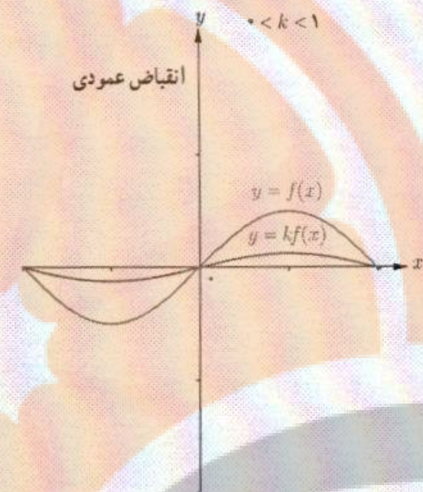
$y=2\sin x \rightarrow$ برد $=[-2,2]$
$y=-2\sin x$

$y=\frac{1}{2}\sin x$ برد $=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$
$y=\sin x$ برد $=[-1,1]$

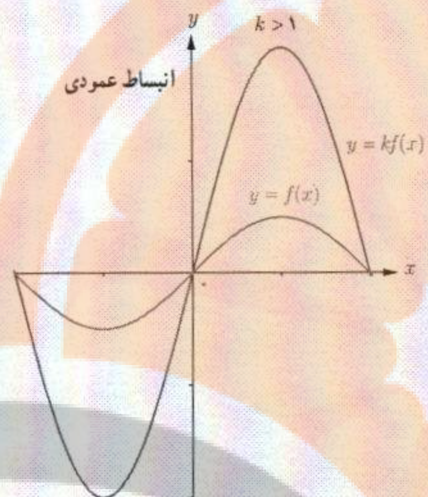
می‌توان گفت نمودار تابع $y=kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y=f(x)$ دارد:

اگر $k>0$، نمودار $y=kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

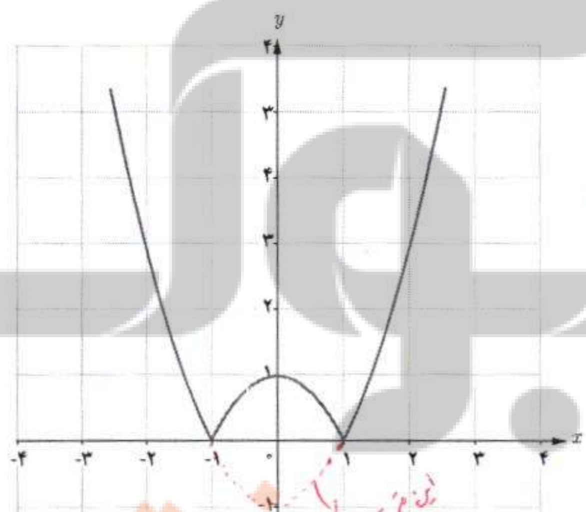


اگر $k>1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال: در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=|x^2-1|$ رسم شده است.



این قسمت حذف میشود و قرینه آن نسبت به محور xها رسم میشود

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x)=x+3$ را با دامنه $[-4,0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(2x)$ به صورت $f(2x)=2x+3$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-4\le 2x\le 0 \rightarrow -2\le x\le 0 \rightarrow f(2x) \text{ دامنهٔ } : D=[-2,0]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به صورت $f(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}+3$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

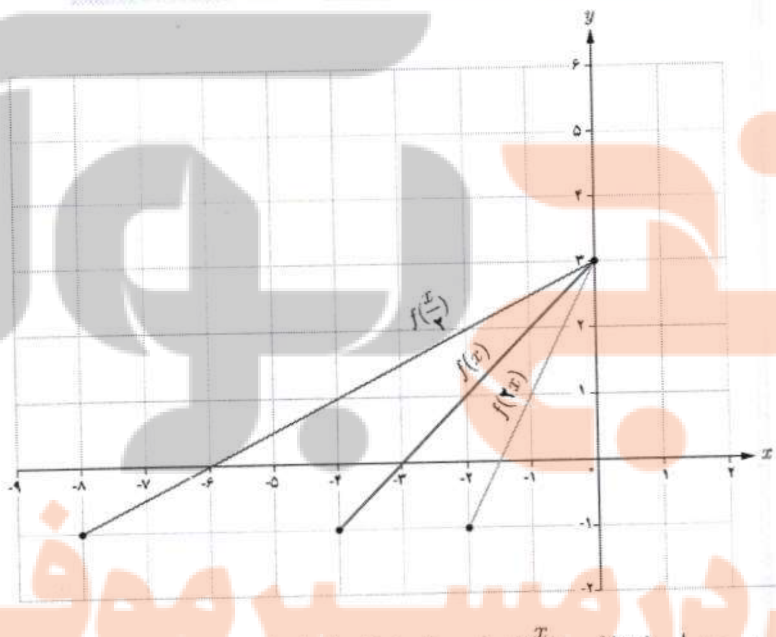
$$-4\le \frac{x}{2}\le 0 \rightarrow -8\le x\le 0 \rightarrow f(\frac{x}{2}) \text{ دامنهٔ } : D=[-8,0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)=x+3$	-1	0	1	2	3

x	-2	$-1/5$	-1	$-0/5$	0
$f(2x)=2x+3$	-1	0	1	2	3

x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}+3$	-1	0	1	2	3

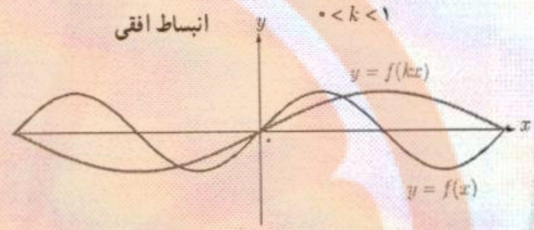


همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

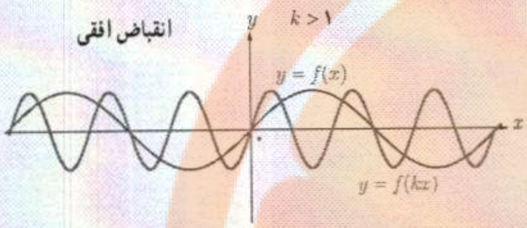
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

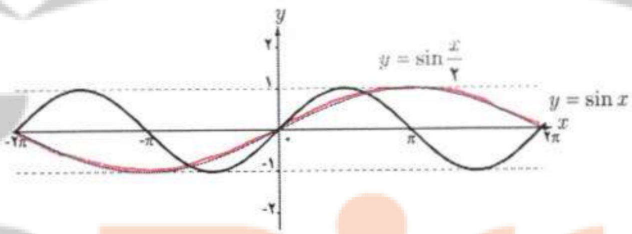


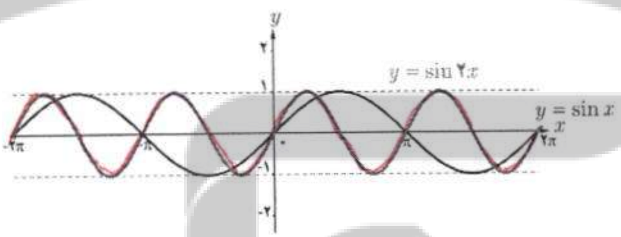
اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.



اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها به‌دست آمده است.





کار در کلاس

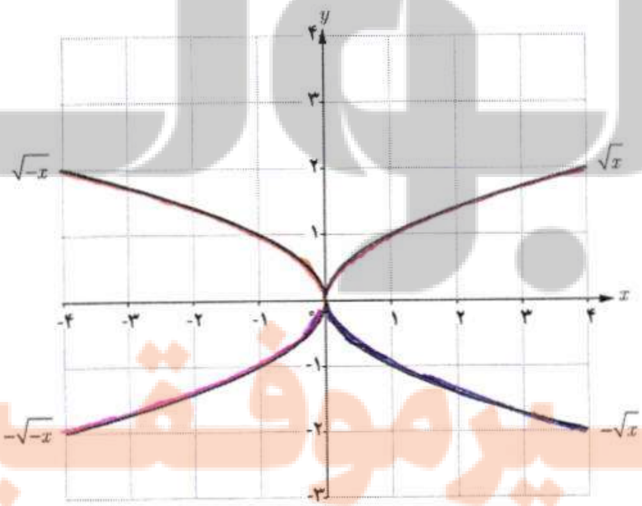
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

$y=\sqrt{x}$ $D=[0,+\infty)$ $R=[0,+\infty)$

$y=-\sqrt{x}$ $D=[0,+\infty)$ $R=(-\infty,0]$

$y=\sqrt{-x}$ $D=(-\infty,0]$ $R=[0,+\infty)$

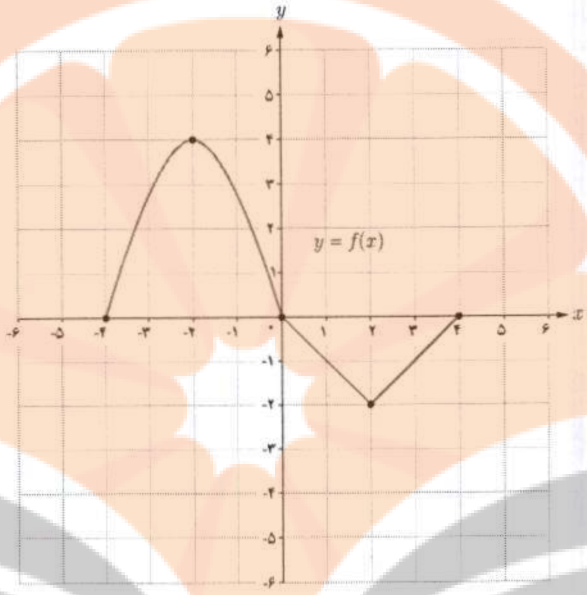
$y=-\sqrt{-x}$ $D=(-\infty,0]$ $R=(-\infty,0]$



کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

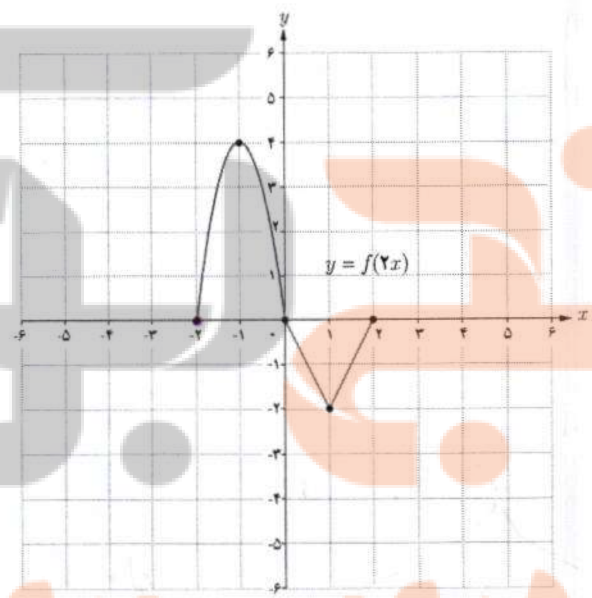


الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \to -۲ \le x \le ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.
برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.

x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
-۱	-۲	۴	$(-۱,۴)$
۰	۰	۰	$(۰,۰)$
۱	۲	-۲	$(۱,-۲)$
۲	۴	۰	$(۲,۰)$

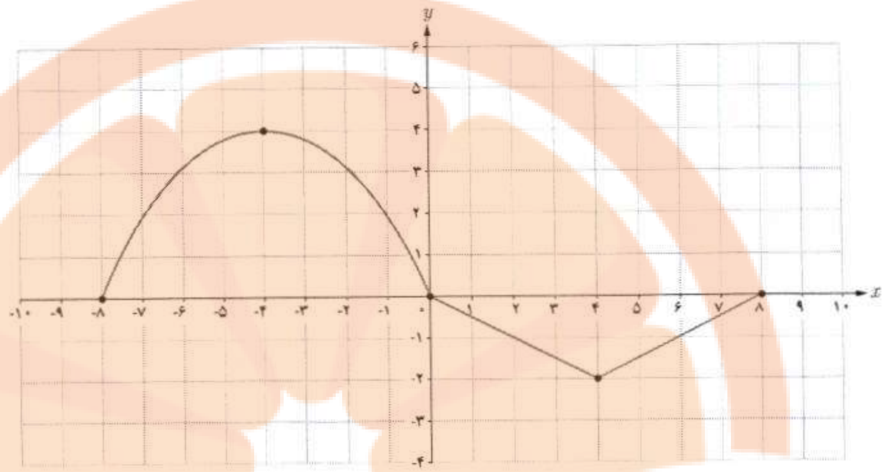


ب) برای تعیین دامنهٔ $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \to -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ بازهٔ $[-8,8]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

$\frac{1}{2}x$	x	$f(\frac{1}{2}x)$
−۴	−۸	۰
−۲	−۴	۴
۰	۰	۰
۲	۴	−۲
۴	۸	۰

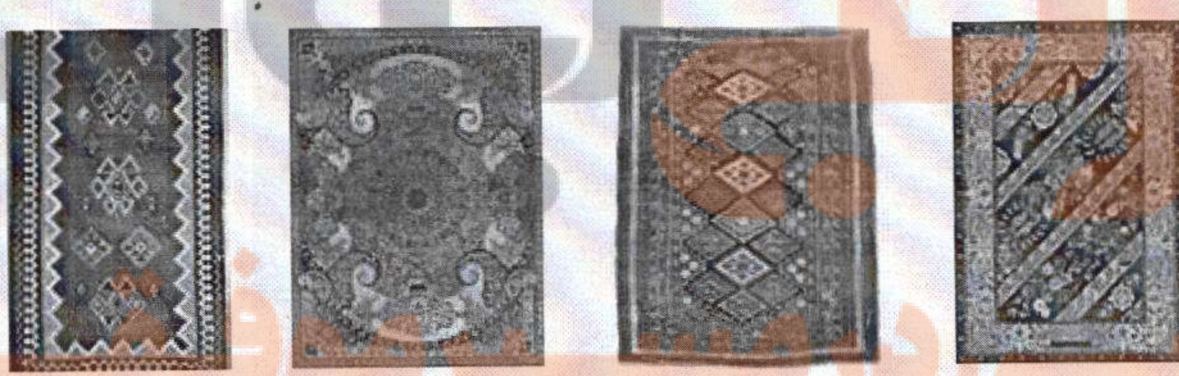


همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش‌بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری‌که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.



تمرین

۱) اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲) در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^2-5 \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+6} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{6}{3x-5} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+2} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^2-16} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

۳) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ ؛ آنگاه $(fog)(5)=-25$. نادرست

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. نادرست

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ ، آنگاه $(fog)(4)=5$. درست

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$، آنگاه $(fog)(5)=g(2)$. درست

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶) تابع $h(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[5]{x} \quad ; \quad g(x)=3x^2-4x+1$ $\quad fog(x)=\sqrt[5]{3x^2-4x+1} \quad gof(x)=3(\sqrt[5]{x})^2-4(\sqrt[5]{x})+1$

ب) $k(x)=x^5 \quad ; \quad l(x)=3x^2-4x+1$ $\quad kol(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ✓ $\quad lok(x)=3(x^5)^2-4(x^5)+1$

۷) هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[3]{x^2+1}=fog(x)$ $\boxed{f(x)=\sqrt[3]{x+1} \quad g(x)=x^2}$ یا $\boxed{f(x)=\sqrt[3]{x} \quad g(x)=x^2+1}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^2+5}$

$\boxed{f(x)=\sqrt{x+5} \quad g(x)=x^2}$ یا $\boxed{f(x)=\sqrt{x} \quad g(x)=x^2+5}$ $\quad fog(x)=\sqrt{x^2+5}$

⋮

۲۴|۲ ادامه سوال (۲)

ت) $f(x)=\sin(x)$ $\quad g(x)=\sqrt{x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\quad D_g=[0,+\infty)$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin(x)\in[0,+\infty)\}=[2k\pi,(2k+1)\pi] \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\sin(x)\geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x\in[2k\pi,(2k+1)\pi] \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$gof(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sin x}$$

---

(۳)

$f(x)=3x-4 \qquad f(g(x))=3x^2-6x+14 \qquad g(x)=?$

برابر

$$f(g(x))=3(g(x))-4$$

$$3(g(x))-4=3x^2-6x+14 \qquad 3(g(x))=3x^2-6x+18 \xrightarrow{\div 3}$$

$$\boxed{g(x)=x^2-2x+6}$$

---

(۴)

الف) نادرست

$fog(5)=f(g(5))$
$=f(\sqrt{21})$
$=17$

ب) نادرست

مثال

$f(x)=3x$
$g(x)=2x$
$fog(x)=gof(x)=6x$

پ) درست

$fog(4)=f(g(4))=$
$=f(7)=5$

ت) درست

$fog(5)=f(g(5))$
$=f(9)=3$
$g(2)=2(2)-1=3$

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

---

(۵)

$f(x)=x-0.2x=0.8x$ (تخفیف ۲۰ درصد) $\qquad g(x)=x-200000$ (تخفیف نقدی)

الف) $gof(x)=g(f(x))=0.8x-200000$

$$gof(2000000)=0.8(2000000)-200000=1600000-200000=1400000$$

ب) $fog(x)=f(g(x))=0.8(x-200000)=0.8x-160000$

$$fog(2000000)=0.8(2000000)-160000=1600000-160000=1440000$$

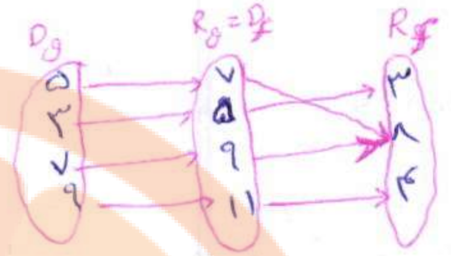
در حالت الف نفع الناز بیشتر است.

تمرین های صفحه های ۲۲ , ۲۳ فصل (۱) ریاضی (۳)

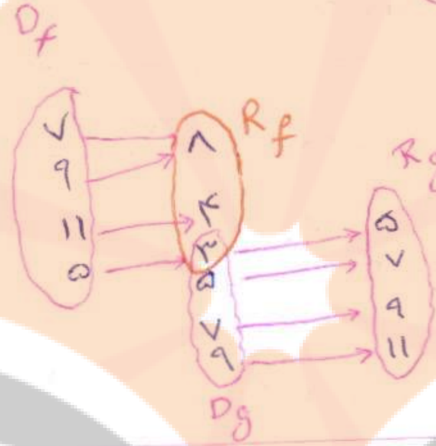
ص ۲۲ , ۱

$f = \{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ $\quad g = \{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$

$f \circ g = \{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\}$



$g \circ f = \{(5,5)\}$



گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان

(۲)

الف) $f(x) = x^2 - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x+6} \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = [-6, +\infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in [-6, +\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x+6} \in \mathbb{R}}_{\text{با توجه به دامنه برقرار است}} \} = [-6, +\infty)$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+6})^2 - 5 = x + 6 - 5 = x + 1$

ب) $f(x) = \sqrt{3 - 2x} \qquad g(x) = \frac{6}{3x - 5} \qquad D_f = (-\infty, \frac{3}{2}] \qquad D_g = \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$

$D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\} \mid \frac{6}{3x-5} \in (-\infty, \frac{3}{2}] \} = [3, +\infty)$

$\frac{6}{3x-5} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x-5} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x-5}{2} \geq 2 \Rightarrow 3x \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$

$x \in [3, +\infty)$

$f \circ g(x) = \sqrt{3 - 2\left(\frac{6}{3x-5}\right)} = \sqrt{\frac{9x - 15 - 12}{3x - 5}} = \sqrt{\frac{9x - 27}{3x - 5}}$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 16} \qquad D_f = [-2, +\infty) \qquad D_g = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$D_{g \circ f} = \{ x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \} = [14, +\infty)$

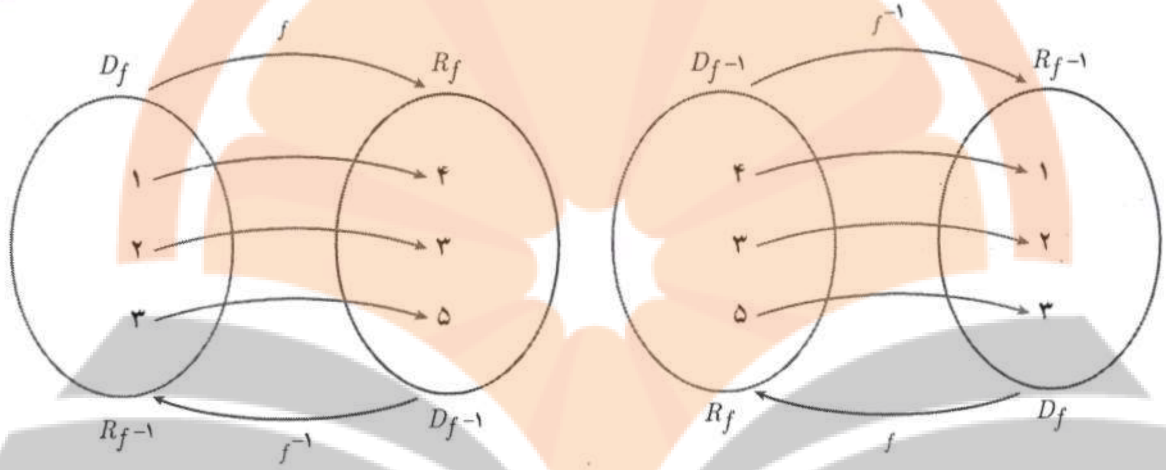
$\sqrt{x+2} \leq -4$ همواره نادرست است

$g \circ f(x) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} = \sqrt{x + 2 - 16} = \sqrt{x - 14}$

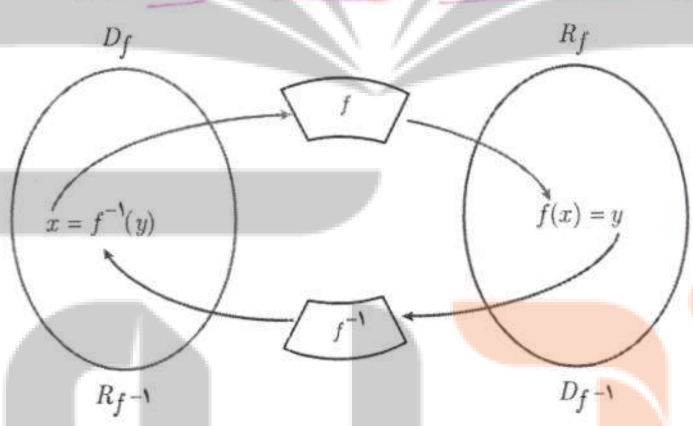
همچنین :

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱) = f^{-1}(f(۱)) = f^{-1}(۴) = ۱ \\ (f^{-1}of)(۲) = f^{-1}(f(۲)) = f^{-1}(۳) = ۲ \rightarrow f^{-1}of = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} \\ (f^{-1}of)(۳) = f^{-1}(f(۳)) = f^{-1}(۵) = ۳\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم : $(f^{-1}of)(x) = x$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

توجه به تفاوت دامنه ها

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \; ; \; x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \; ; \; x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$f(x) = ۳x - ۴$

$g(x) = \dfrac{x + ۴}{۳}$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

کار در کلاس

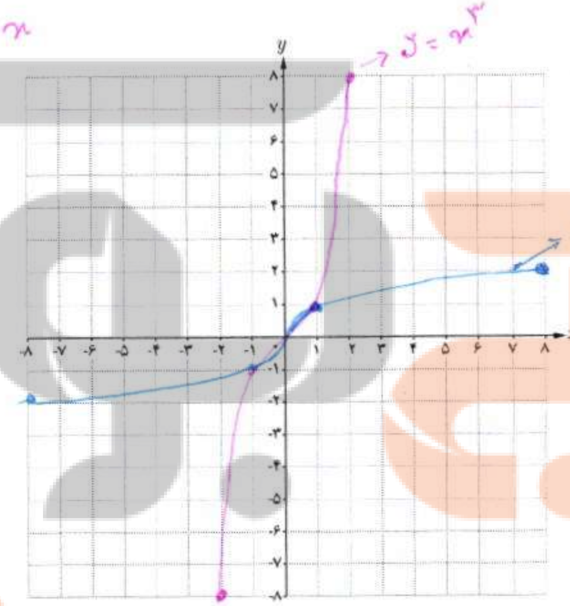
آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟

بله

$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$

$D_f = IR$

$R_f = IR$

$D_{f^{-1}} = IR$

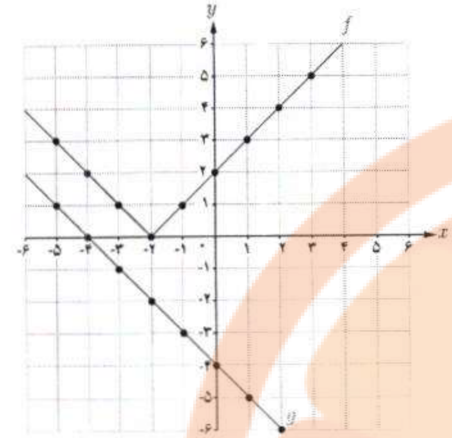
$R_{f^{-1}} = IR$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x_1 = x_2$

پس این تابع یک به یک است

۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$ و $\sqrt[۳]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱) = f(-۳) = ۱$

ب) $(gof)(۰) = g(۲) = ۴$

پ) $(fog)(۱) = f(۳) = ۵$

ت) $(gof)(-۱) = g(۱) = -۵$

$gof(۴)$ وجود ندارد

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = ۲x-۵ \quad , \quad g(x) = x^۲-۳x+۸ : (fog)(x) = ۷$

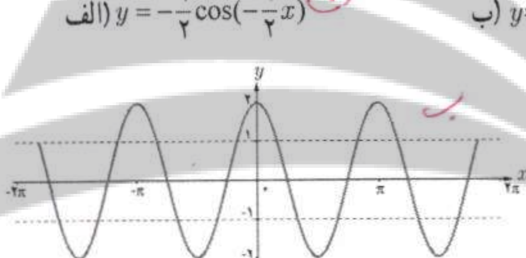
$۲(x^۲-۳x+۸)-۵ = ۷ \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۴=۰ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \quad (x-۱)(x-۲)=۰ < \begin{matrix} x=۱ \\ x=۲ \end{matrix}$

ب) $f(x) = ۳x^۲+x-۱ \quad , \quad g(x) = ۱-۲x \quad : (gof)(x) = -۵$

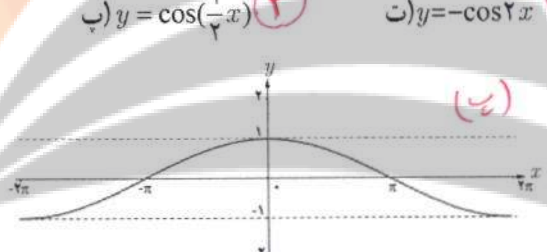
$۱-۲(۳x^۲+x-۱) = -۵ \Rightarrow -۶x^۲-۲x+۸=۰ \xrightarrow{\div(-۲)} ۳x^۲+۴x-۴=۰$ *

۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

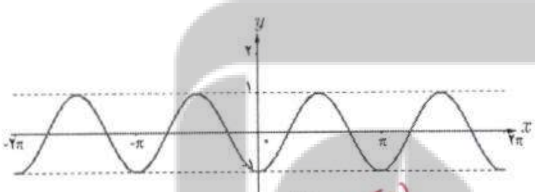
الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ (۴)   ب) $y=۲\cos ۲x$ (۱)   پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ (۲)   ت) $y=-\cos ۲x$ (۳)



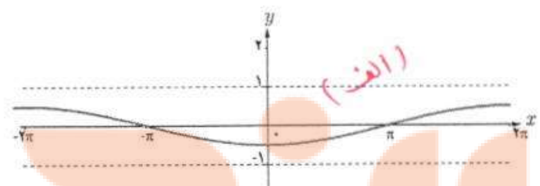
(۱)



(۲)



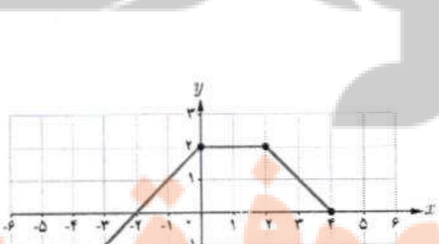
(۳)



(۴)

۱۱ نمودار توابع $y = -\sin ۲x - ۱$ و $y = ۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

ب) $y = -f(-x) + ۲$

پ) $y = ۲f(x-۱) - ۳$

ت) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

ادامه سوال ۹ قسمت (ب

$\Delta = (۱)^۲ - ۴(۳)(-۴) = ۱ + ۴۸ = ۴۹$

$x_۱ = \frac{-۱+\sqrt{۴۹}}{۲(۳)} = \frac{-۱+۷}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱$

درس سوم

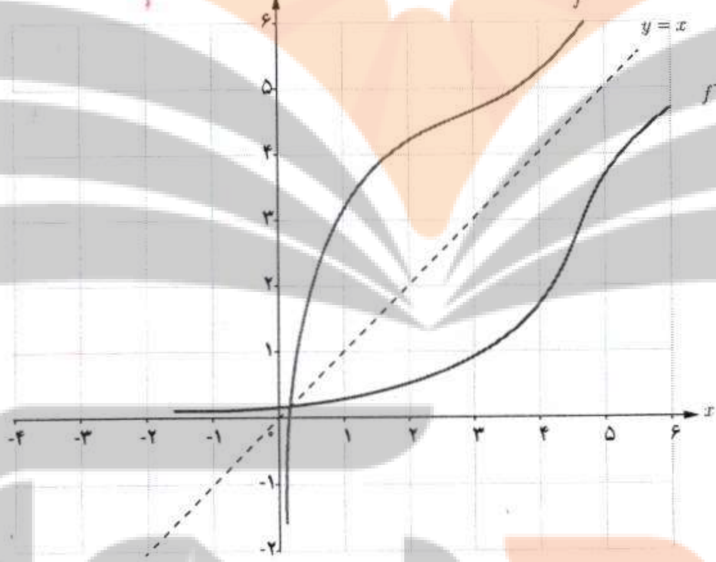
تابع وارون

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a\,,b)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b\,,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a\,,b)\in f \Leftrightarrow (b\,,a)\in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases} \rightarrow fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x)=x$$

۲۹/۲

(ب) $g(x)=-x^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=-x^2 & x\geq 0 \to [0,+\infty) \\ \text{یا} \\ g(x)=-x^2 & x\leq 0 \to (-\infty,0] \end{cases}$ ۴

(پ) $h(x)=x^2+4x+3 \Rightarrow h(x)=(x+2)^2-1$, $x=-2$

یا $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{2(1)}=-2$

$$\begin{cases} h(x)=x^2+4x+3 & x\leq -2 & (-\infty,-2] \\ \text{یا} \\ h(x)=x^2+4x+3 & x\geq -2 & [-2,+\infty) \end{cases}$$

بازه‌های نوشته شده بزرگترین بازه برای یک به یک بودن توابع است می‌توان زیرمجموعه‌ای از هرکدام از این بازه‌ها را نیز به عنوان دامنه معرفی کنید.

---

۵) از روی نمودار

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-4	-2	2	3

$\Leftarrow$

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

$(x,y)\in f(x) \Rightarrow (y,x)\in f^{-1}(x)$

---

۶) $f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+4-4+5=(x-2)^2+1$

$R_f=[1,+\infty)$

دامنه باید مجموعه‌ها $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو مجموعه باشند.

$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow y-1=(x-2)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-1}=x-2 \Rightarrow$

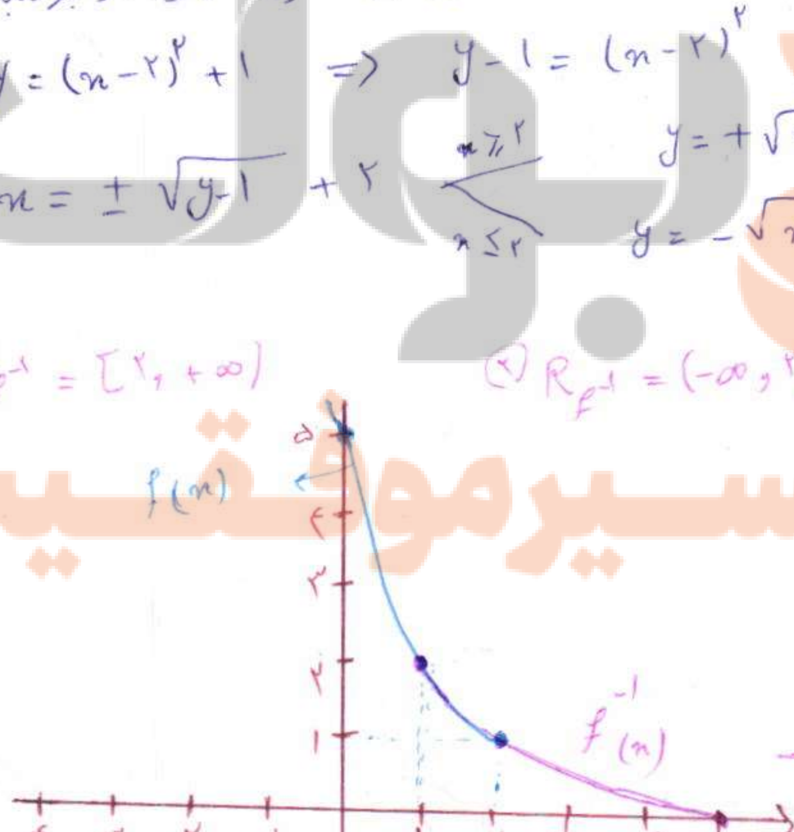
$x=\pm\sqrt{y-1}+2$

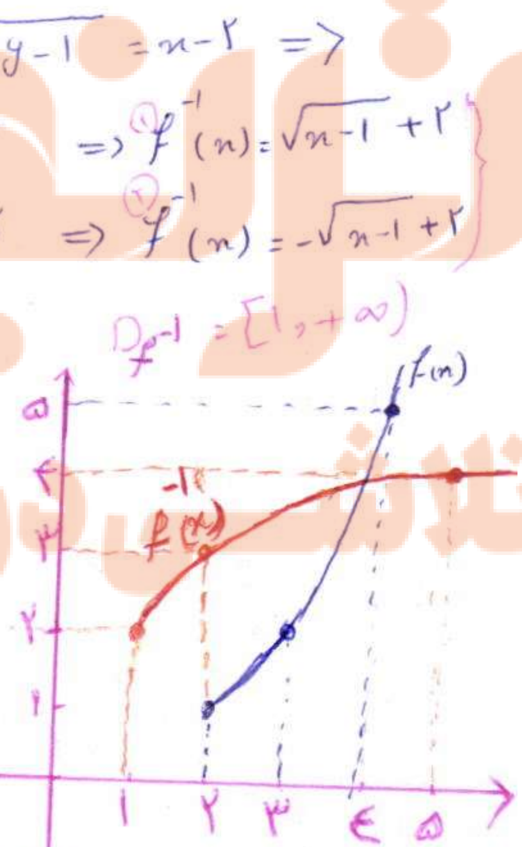
$x\geq 2$: $y=+\sqrt{x-1}+2 \Rightarrow$ ① $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$

$x\leq 2$: $y=-\sqrt{x-1}+2 \Rightarrow$ ② $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}+2$

$D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

① $R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$ ② $R_{f^{-1}}=(-\infty,2]$





تمرین های صفحه ۲۹ فصل یک کتاب ریاضی(۳)

① الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow 2y=-8x+3 \Rightarrow 2y-3=-8x$

$\frac{2y-3}{-8}=x \Rightarrow \frac{-2y+3}{8}=x \Rightarrow \frac{-2x+3}{8}=y \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x+3}{8}$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y+5=-\sqrt{3x+1} \Rightarrow$

$(y+5)^2=(-\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow (y+5)^2=3x+1 \Rightarrow (y+5)^2-1=3x \Rightarrow$

$\frac{(y+5)^2-1}{3}=x \Rightarrow \frac{(x+5)^2-1}{3}=y \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{(x+5)^2-1}{3}$

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

②

الف) $f(x)=-\frac{7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

$f\circ g(x)=f(g(x))=-\frac{7}{2}\left(-\frac{2x+6}{7}\right)-3=x+3-3=x$

$g\circ f(x)=g(f(x))=-\frac{2(-\frac{7}{2}x-3)+6}{7}=-\frac{-7x-6+6}{7}=x$

$g\circ f(x)=f\circ g(x)=x \Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \qquad g(x)=8+x^2 \quad x\leq 0$

$f\circ g(x)=f(g(x))=-\sqrt{(8+x^2)-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|=-(-x)=x$ ($x\leq 0$)

$g\circ f(x)=g(f(x))=8+(-\sqrt{x-8})^2=8+x-8=x$

$g\circ f(x)=f\circ g(x)=x \Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

③

$f(x)=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow y=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow y-32=\frac{9}{5}x \Rightarrow$

$(y-32)\frac{5}{9}=x \Rightarrow \frac{5}{9}y-\frac{160}{9}=x \Rightarrow \frac{5}{9}x-\frac{160}{9}=y \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9} \Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند

④

الف) $f(x)=|x| \Rightarrow \{ f(x)=|x| \quad x\geq 0$

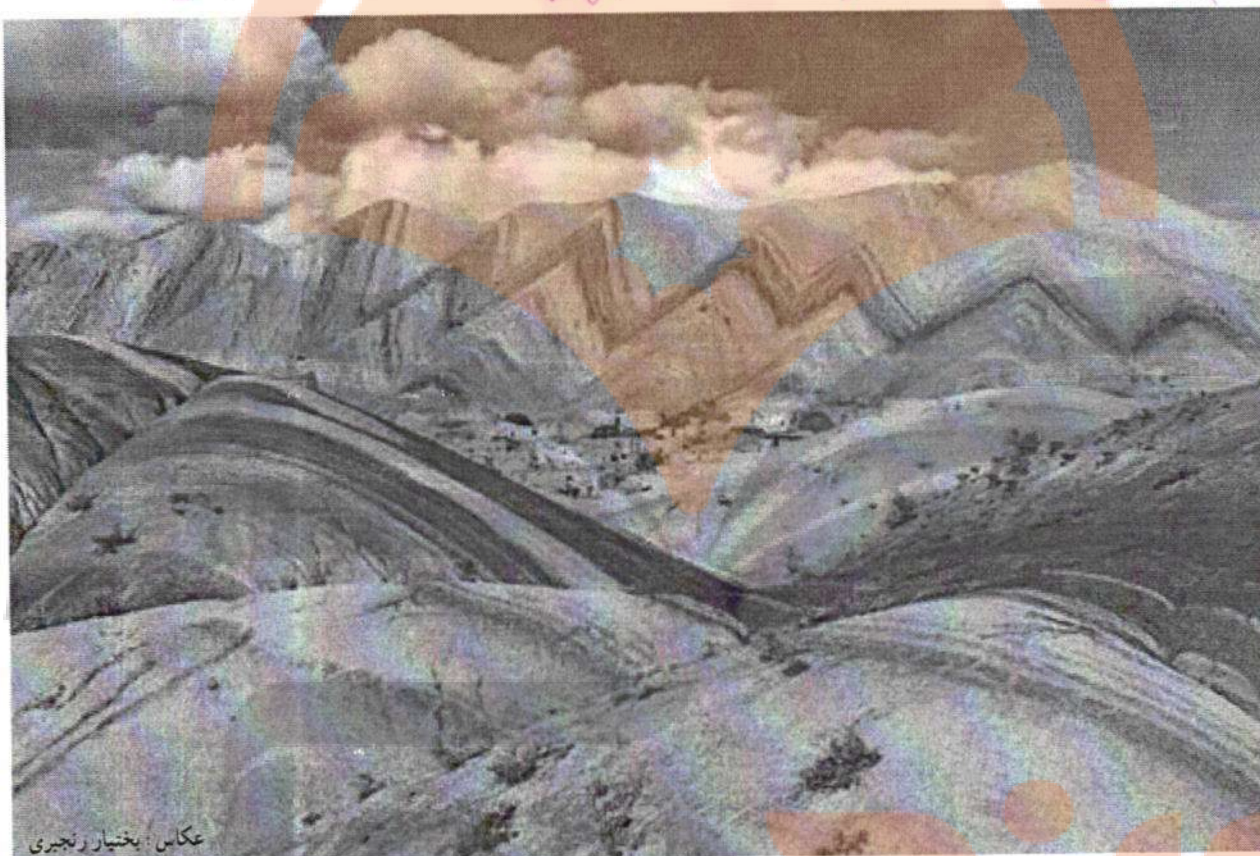
(ب) $g^{-1}\circ f^{-1}(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = 4$

$f(x) = 5 \Rightarrow \frac{1}{8}x - 3 = 5 \Rightarrow \frac{1}{8}x = 8 \Rightarrow x = 64 \Rightarrow f^{-1}(5) = 64$

$g(x) = 64 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$

(روش دوم) (الف) $f\circ g(x) = \frac{1}{8}x^3 - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^3 - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{8}x^3 \Rightarrow$

$8y + 24 = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8y+24} = x \Rightarrow \sqrt[3]{8x+24} = y \Rightarrow (f\circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{8x+24}$



عکاس: بختیار رنجبری

روستای رهلی داغلار ــ آذربایجان شرقی

(ادامه الف) $\Rightarrow (f\circ g)^{-1}(5) = \sqrt{8(5)+24} = \sqrt{64} = 4$

(ب) $f^{-1}(x) = 8x + 24 \qquad f^{-1}\circ f^{-1}(x) = 8(8x+24) + 24 = 64x + 216$

$f^{-1}\circ f^{-1}(6) = 64(6) + 216 = 384 + 216 = 600$

(پ) $g(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad f^{-1}(x) = 8x + 24$

$g^{-1}\circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt[3]{8x+24} \Rightarrow g^{-1}\circ f^{-1}(5) = \sqrt[3]{8(5)+24} = \sqrt[3]{64} = 4$

تمرین

۱ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\dfrac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\leq 0$

۳ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به‌صورت $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

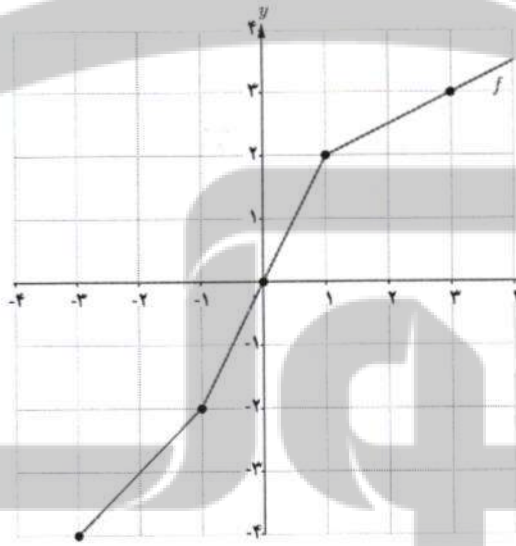
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x)=|x|$

ب) $g(x)=-x^2$

پ) $h(x)=x^2+4x+3$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-4x+5$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$\Rightarrow 8x+24=y \Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24$

۷ اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$y=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y+3=\frac{1}{8}x \Rightarrow 8y+24=x$

الف) $(fog)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)$

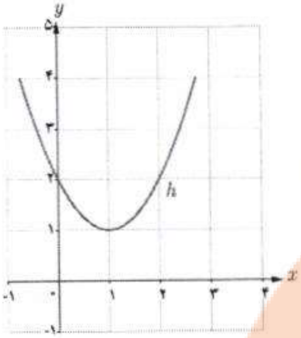
۲ روش حل می‌شود

روش اول

(الف) $fog^{-1}(5) \Rightarrow fog(x)=5 \qquad \frac{1}{8}x^3-3=5 \Rightarrow \frac{1}{8}x^3=8 \Rightarrow x^3=64$
$\Rightarrow x=4$

$fog^{-1}(5)=4$

(ب) $f^{-1}of^{-1}(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))=f^{-1}(72)=600$



مثال : نمودار تابع $h(x)=x^{2}-2x+2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$h(x)=x^{2}-2x+2=(x-1)^{2}+1$

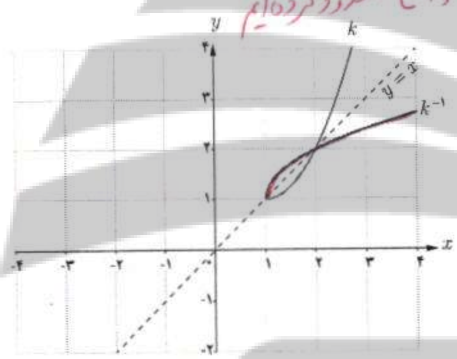
مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :

$$k(x)=(x-1)^{2}+1$$
$$y=(x-1)^{2}+1$$
$$(x-1)^{2}=y-1$$
$$x-1=\pm\sqrt{y-1}$$
$$x=\pm\sqrt{y-1}+1$$
$$k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟) چون دامنه h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود کرده‌ایم

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت زیر است :



باغ ارم شیراز

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ f^{-1} را نیز به‌دست آورید.
تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

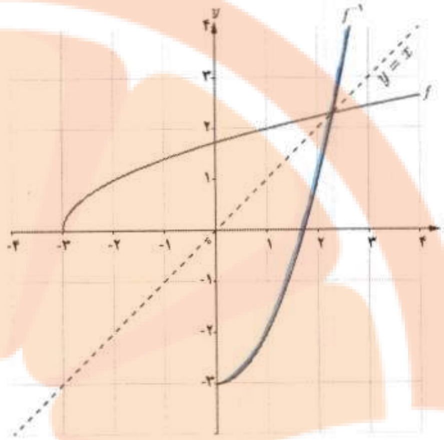
$y = \sqrt{x+3}$

$y^2 = x+3$

$x = y^2 - 3$

$f^{-1}(y) = y^2 - 3$

$f^{-1}(x) = x^2 - 3$



* $D_{g^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_{g^{-1}} = [2, +\infty)$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

کار در کلاس

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times -2} -2y + 6 = x \Rightarrow -2x + 6 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 6$

$D_g = [2, +\infty)$

$R_g = [1, +\infty)$

ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

$\Rightarrow y = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x-2} \xrightarrow{توان ۲} (y-1)^2 = x - 2 \Rightarrow (y-1)^2 + 2 = x \Rightarrow (x-1)^2 + 2 = y \Rightarrow g^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$

$R_h = [1, +\infty)$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

دامنه h یا $[0, +\infty)$ یا $[-\infty, 0]$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{y-1} = x \Rightarrow \sqrt{x-1} = y \qquad h^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad \begin{cases} D_{h^{-1}} = [1, +\infty) \\ R_{h^{-1}} = [0, +\infty) \end{cases}$

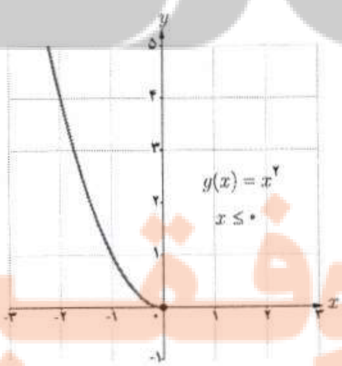
$\xrightarrow{x \leq 0} -\sqrt{y-1} = x \Rightarrow -\sqrt{x-1} = y \qquad h^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

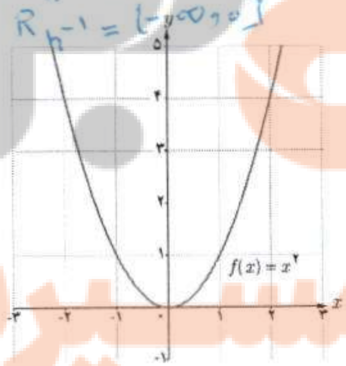
محدود کردن دامنه تابع

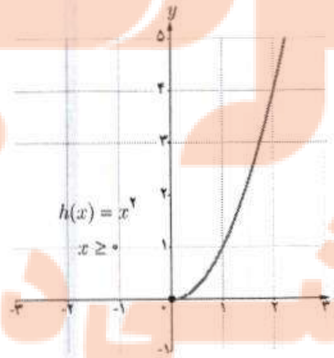
از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.

$D_{h^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_{h^{-1}} = (-\infty, 0]$

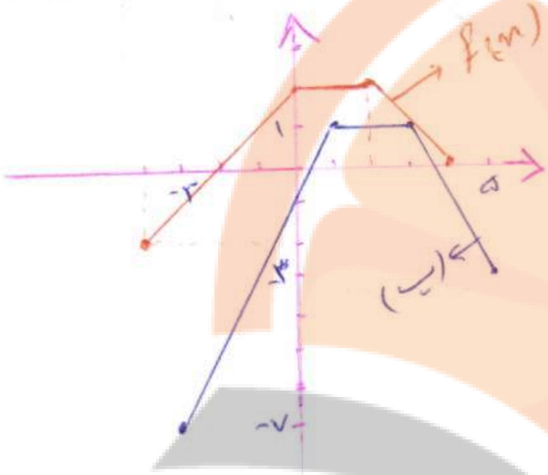






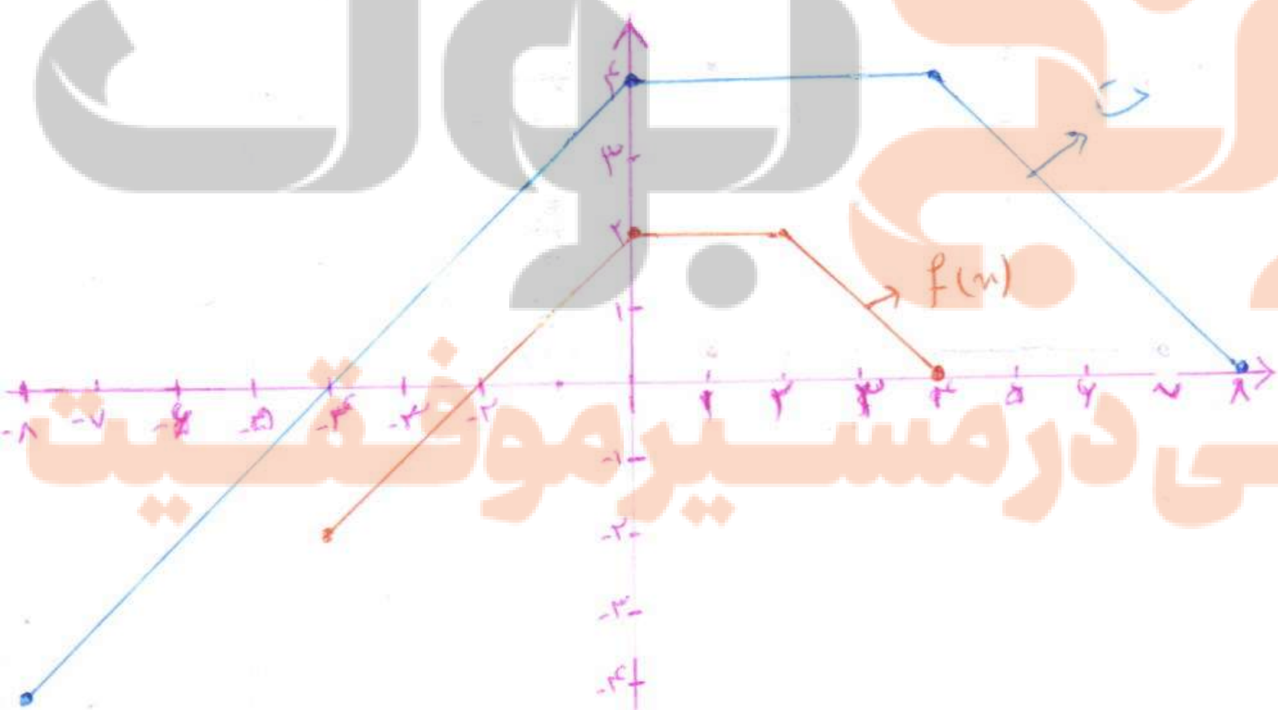
ب) $y = 2f(x-1) - 3$

$$y = \begin{cases} 2[-(x-1)+4] - 3 = -2x+7 & 3 \le x \le 5 \Leftarrow 2 \le x-1 \le 4 \\ 2(2) - 3 = 1 & 1 \le x < 3 \Leftarrow 0 \le x-1 < 2 \\ 2((x-1)+2) - 3 = 2x-1 & -3 \le x \le 1 \Leftarrow -4 \le x-1 \le 0 \end{cases}$$



ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

$$y = \begin{cases} 2(-\frac{1}{2}x + 4) = -x+8 & 4 \le x \le 8 \Leftarrow 2 \le \frac{1}{2}x \le 4 \\ 2(2) = 4 & 0 \le x < 4 \Leftarrow 0 \le \frac{1}{2}x \le 2 \\ 2(+\frac{1}{2}x + 2) = x+4 & -8 \le x \le 0 \Leftarrow -4 \le \frac{1}{2}x \le 0 \end{cases}$$

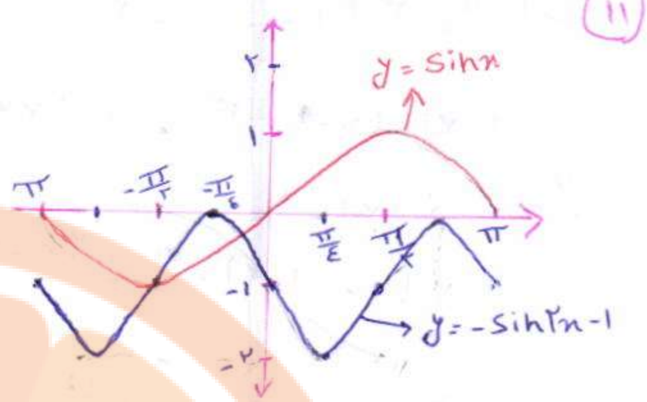


۲۳/۴

(۱۱)

$y = -\sin 2x - 1 \qquad [-\pi, \pi]$

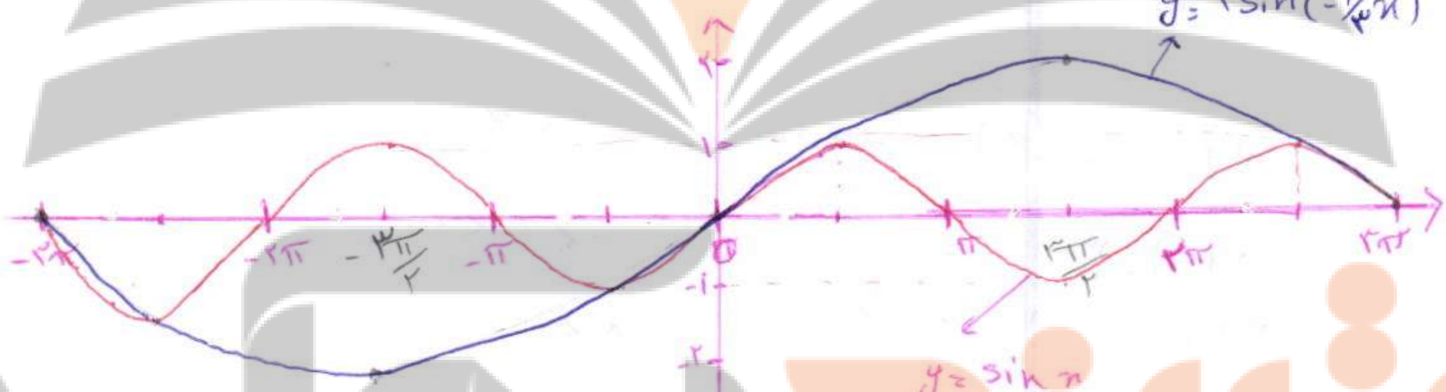
$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0	-1



$y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$

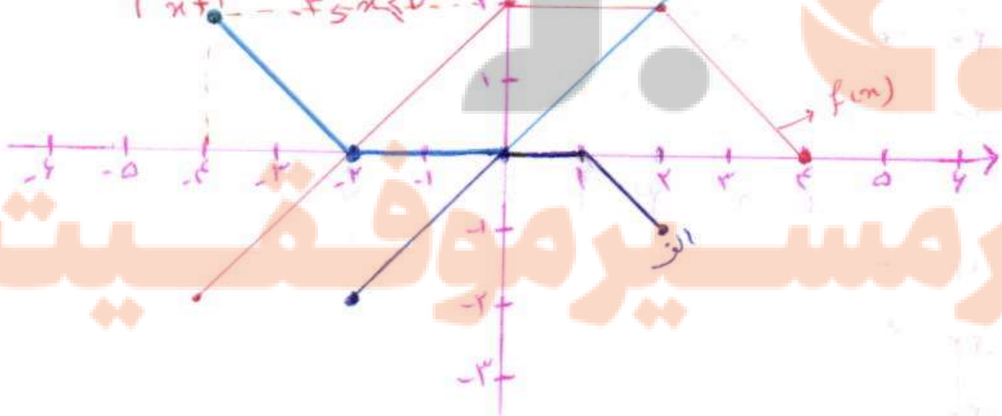
گروه ریاضی دوره‌ی دوم
استان خوزستان

x	-3π	$-\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π
$y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$	0	-2	0	2	0



(۱۲)

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & 2 \le x \le 4 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ x+2 & -4 \le x \le 0 \end{cases}$$



الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

$\frac{1}{2}(-2x+4) - 1$

$$y = \begin{cases} -x+1 & 1 \le x \le 2 \Leftarrow 2 \le 2x \le 4 \\ 1 & 0 < x < 1 \Leftarrow 0 < 2x < 2 \\ x & -2 \le x \le 0 \Leftarrow -4 \le 2x \le 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(2x+2) - 1$

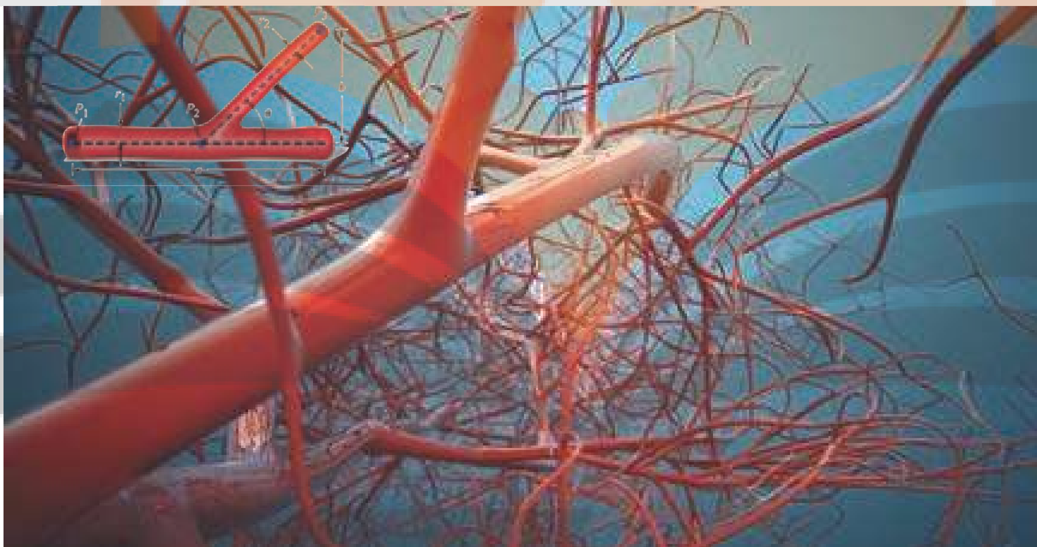
ب) $y = -f(-x) + 2$

$\{ -(-(-x)+4)+2 = -x-2 \qquad -4 \le x \le -2 \Longleftarrow 2 \le -x \le 4$

$\qquad -2 < x < 0 \Longleftarrow 0 < -x < 2$

فصل ۲

مثلثات



انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس اوّل — تناوب و تانژانت

درس دوم — معادلات مثلثاتی

درس اول

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است ($\sin(x\pm ۲k\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm ۲k\pi)=\cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.

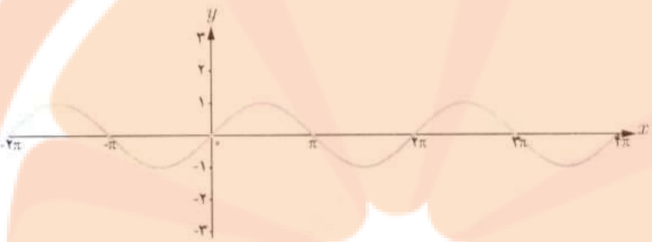
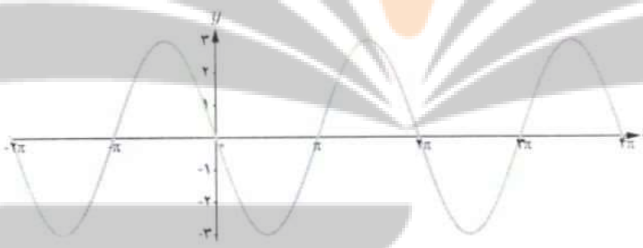
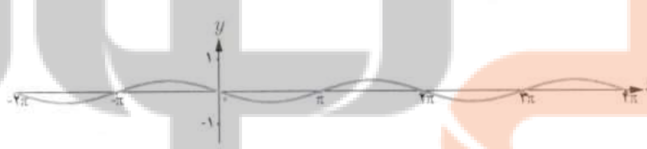
با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف : تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x$ $(f(x)=\cos x)$ برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

درس اول تناوب و تانژانت

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-1	2π
$y=2\sin x$		۲	-2	2π
$y=-3\sin x$		۳	-3	2π
$y=\frac{1}{2}\sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π
$y=-\frac{1}{3}\sin x$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2π

با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

$y = a\sin x$: $a>0 \rightarrow Max = a \,,\, Min = -a$; $a<0 \rightarrow Max = -a \,,\, Min = a$ در کل $\Rightarrow Max = |a| \,,\, Min = -|a|$, دوره تناوب $= T = 2\pi$

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است.

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

پس میدانیم در این معادلات { نمودار تابع به اندازه c واحد در راستای محور yها بالا یا پایین می‌رود } $\Rightarrow$ c روی مقادیر y تأثیر می‌گذارد و روی مقادیر دیگر تأثیر ندارد $\Rightarrow Max = |a| + c \,,\, Min = -|a| + c$, دوره تناوب $= T = 2\pi$

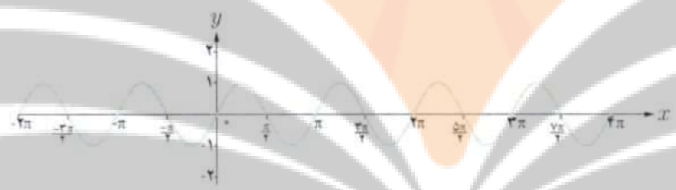
$y = a\cos x \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow max = a(1) = a \,,\, min = a(-1) = -a \\ a<0 \Rightarrow max = a(-1) = -a \,,\, min = a(1) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} max = |a| \\ min = -|a| \end{cases}$

دوره تناوب $= T = 2\pi$

$y = a\sin x + c \rightarrow Max = |a| + c \quad Min = -|a| + c$

فعالیت

با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=\sin ۲x$		1	-1	π
$y=\sin(-۳x)$		1	-1	$\frac{2\pi}{3}$
$y=\sin\frac{x}{۲}$		1	-1	4π
$y=\sin(-\frac{x}{۳})$		1	-1	6π

$y=\sin bx \Rightarrow max=1\ ,\ min=-1\ ,$ اگر $b>0$: دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{b}$ ، $b<0$: دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{-b}$ $\xrightarrow{\text{بطور کلی}}$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$

با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\cos bx$ و $y=\cos bx+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$y=\sin bx+c \longrightarrow$ مقدار c همانطور که قبلاً گفته شد روی y تأثیر می‌گذارد $\Rightarrow max=1+c\ ,\ min=-1+c$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y=\cos bx \Rightarrow max=1,\ min=-1,$ دوره تناوب $\Rightarrow \begin{cases} b>0 \rightarrow T=\frac{2\pi}{b} \\ b<0 \rightarrow T=\frac{2\pi}{-b} \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y=\cos bx+c \Rightarrow max=1+c\ ,\ min=-1+c\ ,$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$ ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + ۱$ ت) $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$

حل :

الف) $\max = |۳| - ۲ = ۱ \qquad \min = -|۳| - ۲ = -۵ \qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$

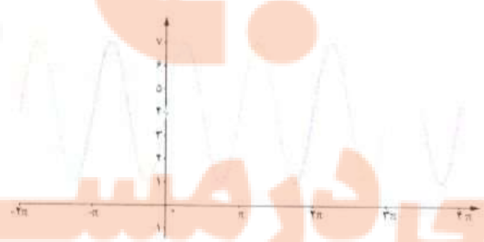
ب) $\max = \left|-\frac{۱}{۴}\right| = \frac{۱}{۴} \qquad \min = -\left|-\frac{۱}{۴}\right| = -\frac{۱}{۴} \qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

پ) $\max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱ \qquad \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi \qquad T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

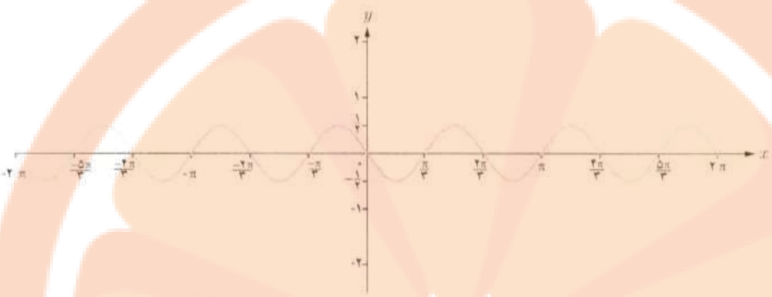
ت) $\max = |۸| = ۸ \qquad \min = -|۸| = -۸ \qquad T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|} = ۶\pi$

مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

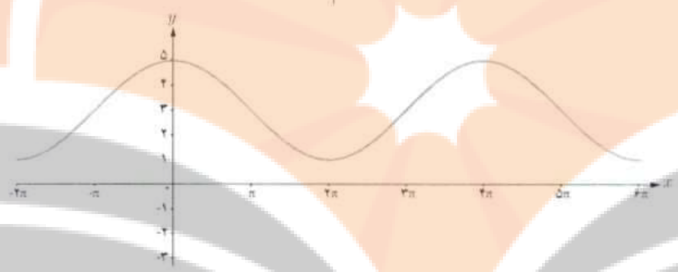
الف)



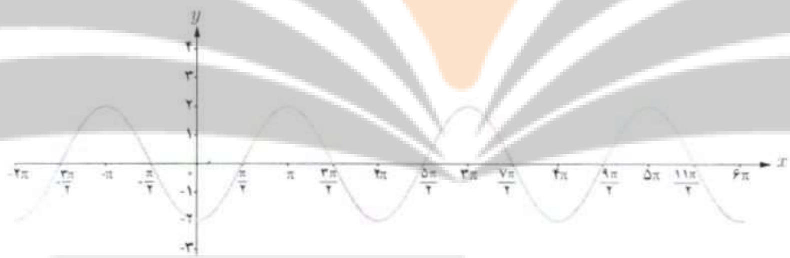
ب)



پ)



ت)



حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y=3\sin(2x)+4$

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

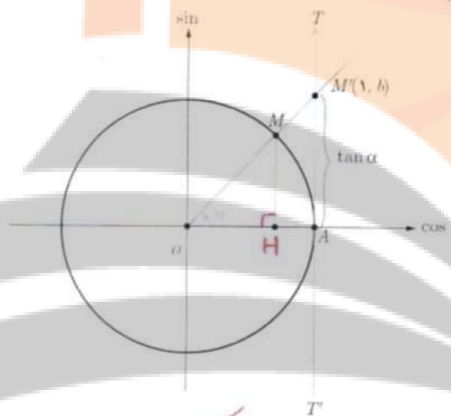
پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -۲\cos x$

تانژانت

$\triangle OMH \sim \triangle OM'A$ به حالت تشابه دو زاویه $\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{MH}{M'A} = \frac{OH}{OA} \xrightarrow{\text{و ترکیب نسبت}} \frac{MH}{OH} = \frac{M'A}{OA=1} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = M'A = b$

$\sin\alpha = MH$
$\cos\alpha = OH$



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟ زیرا امتداد ضلع دوم زاویه در ربع اول و سوم در بالای نقطه A، محور TAT' (جهت مثبت) قطع می‌کند ـ اما در ربع دوم و چهارم امتداد ضلع دوم زاویه در پایین نقطه A، محور TAT' (جهت منفی) را قطع می‌کند.

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ خیر $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ خیر به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

با توجه به شکل انتهای زاویه‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ روی محور sin قرار دارند که این محور با محور تانژانت موازی است پس همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس نمی‌توانند متناظر با عددی روی محور باشند.

تغییرات تانژانت

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = ۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟ بسیار بسیار بزرگ می‌شود $(+\infty)$

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

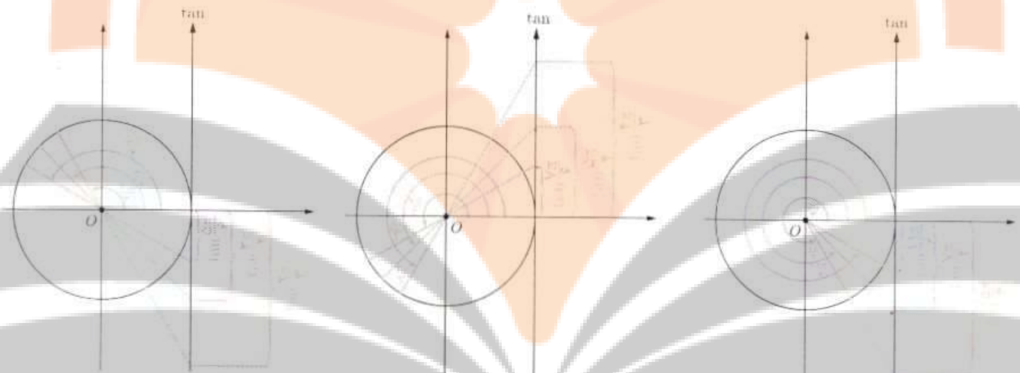
ابتدا عدد حقیقی و مثبت a که متناظر با نقطه‌ای روی محور است، را روی محور TAT' مشخص می‌کنیم سپس از آن نقطه به مبدأ مختصات (نقطه O) وصل می‌کنیم. محل تقاطع آن با دایره مثلثاتی، نقطه انتهایی زاویه‌ای است (M) که ضلع ابتدایی آن OA می‌باشد. لذا زاویه $A\hat{O}M = \alpha$، زاویه‌ای است که تانژانت آن برابر a می‌شود.

$\tan(A\hat{O}M) = \tan\alpha = a$

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.



ربع	چهارم	سوم	دوم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازهٔ تغییرات	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↘ به معنی کاهش یافتن است.)

	ربع اول				ربع دوم					ربع سوم				ربع چهارم			
زاویه	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tan	۰ ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۱ ↗	$\sqrt{3}$ ↗ $+\infty$	نامعین	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۱ ↗	$\sqrt{3}$	نامعین	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۰

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} , k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

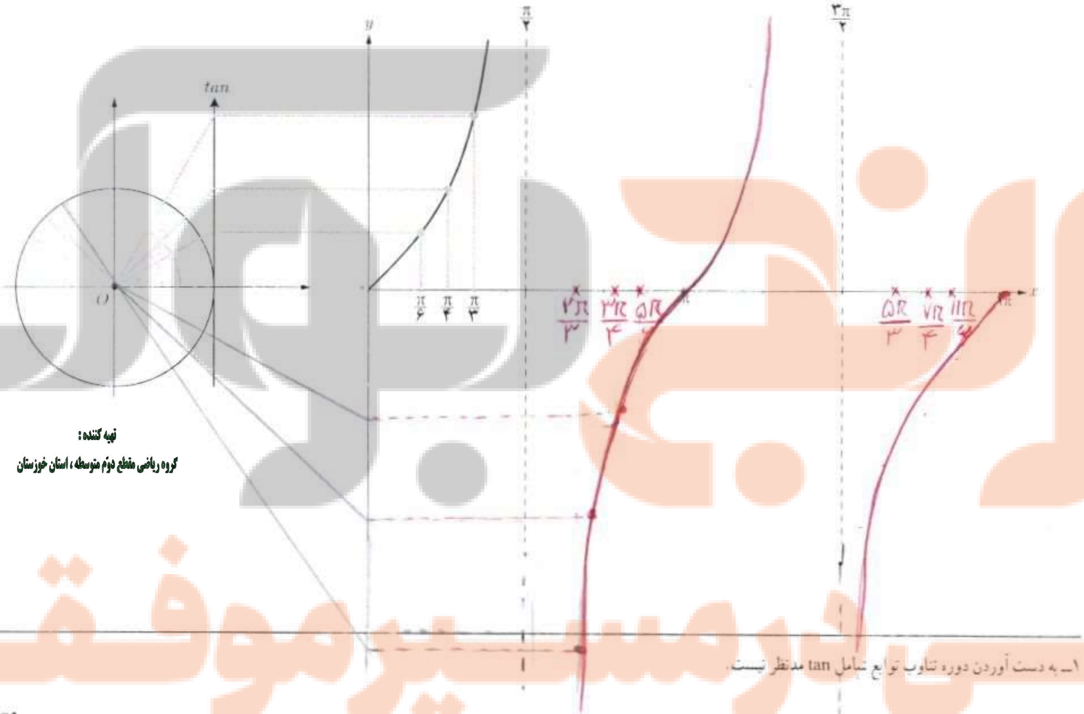
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[0 , 2\pi]$ بررسی کنید.

ربع مثلثاتی / تابع	۰	اول	$\frac{\pi}{2}$	دوم	π	سوم	$\frac{3\pi}{2}$	چهارم	2π
تابع تانژانت		↗ صعودی		↗ صعودی		↗ صعودی		↗ صعودی	

رسم تابع $y = \tan\alpha$

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x \longrightarrow Max = ۲+۱ = ۳,\ Min = -۲+۱ = -۱,\ T = \frac{۲\pi}{۷}$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \longrightarrow Max = \sqrt{۳}+۱,\ Min = \sqrt{۳}-۱,\ T = ۴$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲ \longrightarrow Max = \pi - ۲,\ Min = -\pi - ۲,\ T = ۴\pi$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x \longrightarrow Max = \frac{۳}{۴},\ Min = -\frac{۳}{۴},\ T = \frac{۲\pi}{۳}$

۲) هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

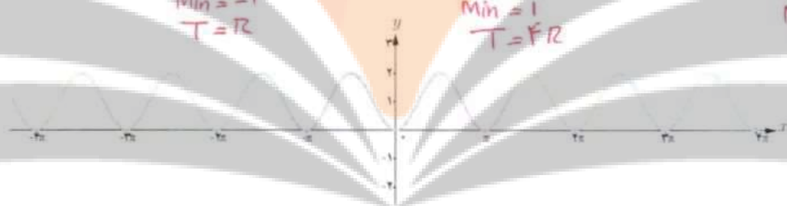
الف) $y = \sin\pi x$
$Max = ۱$
$Min = -۱$
$T = ۲$

ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$
$Max = ۳$
$Min = ۱$
$T = ۴\pi$

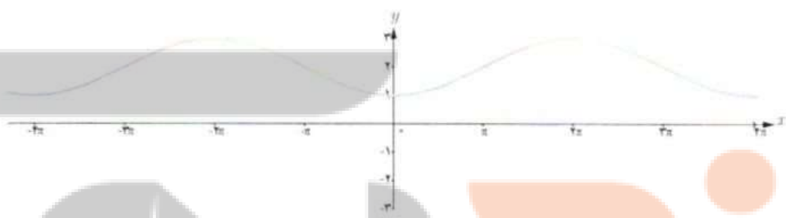
پ) $y = \sin ۲x$
$Max = ۱$
$Min = -۱$
$T = \pi$

ت) $y = ۱ - \cos ۲x$
$Max = ۲$
$Min = ۰$
$T = \pi$

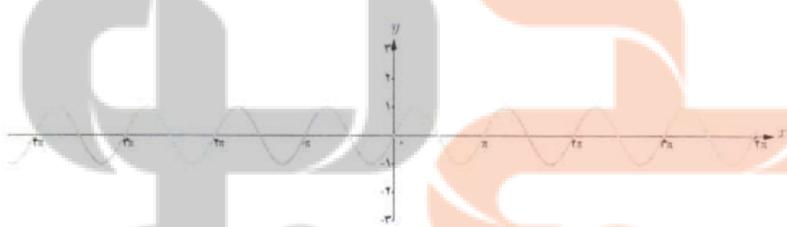
$y = ۱ - \cos ۲x \longleftarrow$ (۱



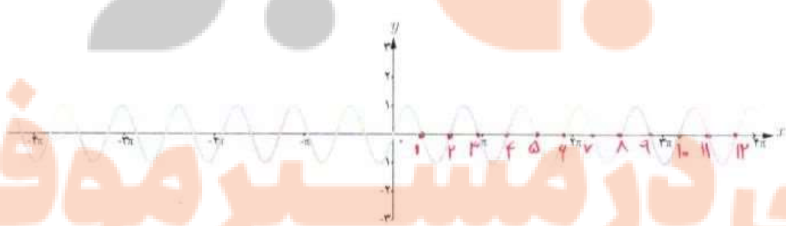
$y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x \longleftarrow$ (۲



$y = \sin ۲x \longleftarrow$ (۳



$y = \sin \pi x \longleftarrow$ (۴



تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

ب) $y = \pm 3\sin(\pm \frac{2\pi}{3}x) + 6$ ، $y = \pm 3\sin(\pm \frac{2\pi}{3}x) + 6$ ، یا $y = \pm 3\cos(\pm \frac{2\pi}{3}x) + 6$ ، $y = \pm 3\cos(\frac{2\pi}{3}x) + 6$

پ) $y = \pm 3\sin(\frac{\pm 1}{2}x) - 4$ ، $y = \pm 3\sin(\frac{1}{2}x) - 4$ ، یا $y = \pm 3\cos(\pm \frac{1}{2}x) - 4$ ، $y = \pm 3\cos(\frac{1}{2}x) - 4$

ت) $y = \pm \sin(\pm 4x)$ ، $y = \pm \sin(4x)$ ، یا $y = \pm \cos(\pm 4x) \Rightarrow y = \pm \cos(4x)$

در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

بهتر است برای سئوال قید می شد که معادله سینوسی مورد نظر است یا کسینوسی

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0$, $a = \pm 3$, $b = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 3\sin(\pm 2x) = \pm 3\sin(2x)$ یا $\pm 3\cos(\pm 2x) = \pm 3\cos(2x)$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 6$, $a = \pm 3$, $b = \pm \frac{2\pi}{3}$ (جواب در بالا صفحه)

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = -4$, $a = \pm 3$, $b = \frac{\pm 1}{2}$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1 \Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2} = 0$, $a = \pm 1$, $b = \pm 4$

قید یک جواب کافی است.

ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

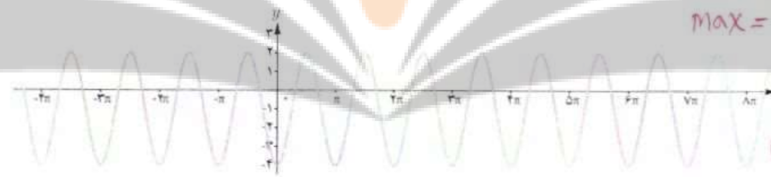
الف)

$\max = 3$, $\min = -1$, $T = 4\pi$

$c = \frac{\max + \min}{2} = 1$, $b = \frac{1}{2}$

$y = +2\sin(\frac{1}{2}x) + 1$

ب)



$\max = 2$, $\min = -4$, $T = \pi$

$c = \frac{\max + \min}{2} = -1$, $b = 2$

$y = -3\cos(2x) - 1$

کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست

با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: ربع اول $\Rightarrow$ سینوس در ربع اول صعودی است.

تانژانت در ربع اول صعودی است.

زاویه / نسبت مثلثاتی	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1
tan	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	تعریف نشده

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

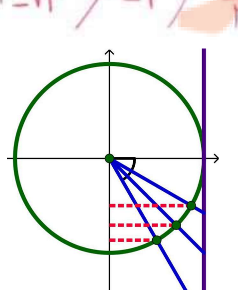
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$: ربع چهارم $\Rightarrow$ سینوس در ربع چهارم صعودی است.

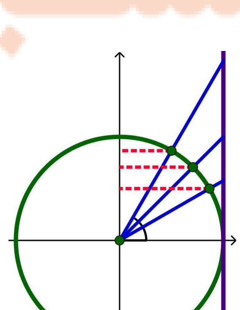
تانژانت در ربع چهارم صعودی است.

زاویه / نسبت مثلثاتی	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sin	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↗	0
tan	تعریف نشده ↗	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	0

$-\infty$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



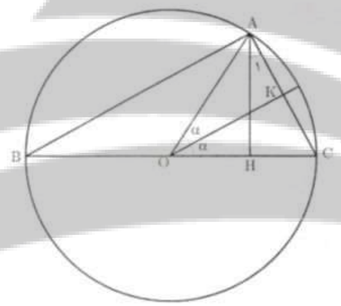


درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[1]



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $\overset{\Delta}{OAK}$ داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\hat{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\hat{B}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\hat{H}C$ داریم:

$$A\hat{H}C : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\hat{A}C$ و $A\hat{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}C : AH = \sin 2\alpha \\ A\hat{H}C : \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\hat{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\hat{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

[1] ـ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

مثال : مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \qquad \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

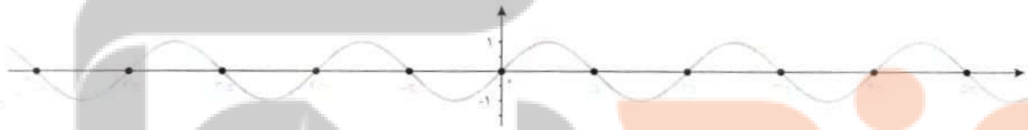
$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ \qquad \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (15° در ربع اول است.) $\qquad \sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (15° در ربع اول است.)

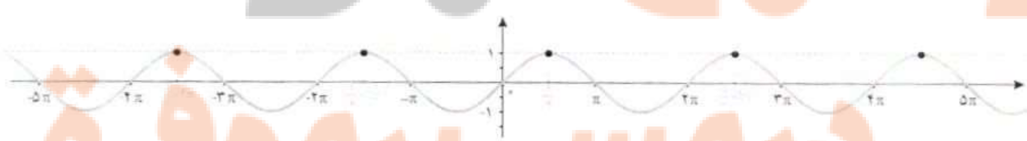
معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

مثال : تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x = \ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور xها) و تابع $y = \sin x$ است.
این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x = \dots , \frac{\pi}{2}-4\pi , \frac{\pi}{2}-2\pi , \frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}+2\pi , \dots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

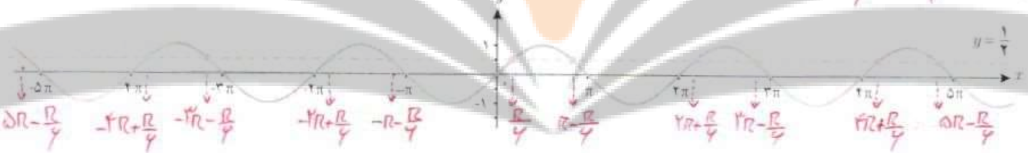
اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید. ← $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\underbrace{\pi-\frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \pi/6 , \frac{5\pi}{6} , \dots$

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله

$x = \frac{\pi}{6} , \pi-\frac{\pi}{6} , 2\pi+\pi/6 , 3\pi-\frac{\pi}{6} , \dots$

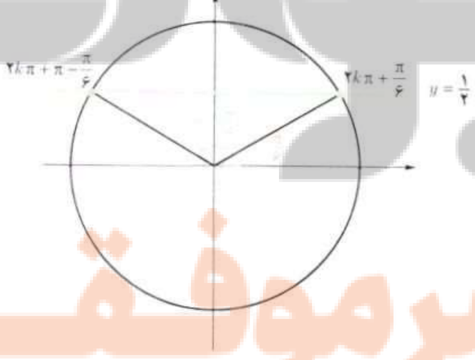


۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{1}{2}$ و $y = \sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **معادله ی $\sin x = \frac{1}{2}$ بی شمار جواب دارد.**

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ ✓

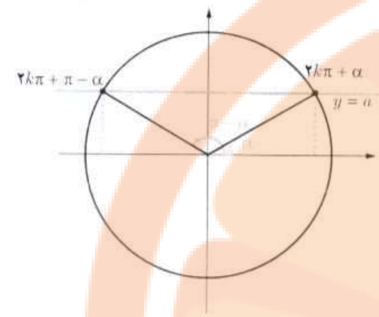
$x = \pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin(\pi-\pi/6) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓ , $x = -\pi-\pi/6 \Rightarrow \sin(-\pi-\pi/6) = -\sin(\pi+\pi/6) = +\sin\pi/6 = \frac{1}{2}$ ✓

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $-4\pi+\frac{\pi}{6} , -2\pi+\frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{6} , 2\pi+\frac{\pi}{6} , 4\pi+\frac{\pi}{6}$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $-3\pi-\frac{\pi}{6} , -\pi-\frac{\pi}{6} , \pi-\frac{\pi}{6} , 3\pi-\frac{\pi}{6} , 5\pi-\frac{\pi}{6}$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال : معادلهٔ $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

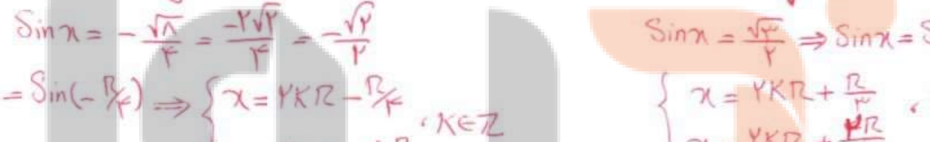
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

$\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

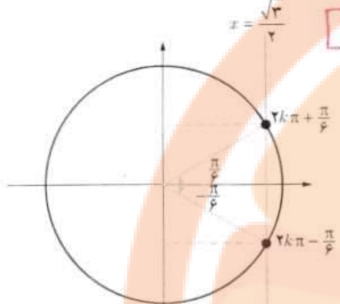
$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه‌های هم انتها با $\frac{\pi}{6}$ ⟸ $\frac{\pi}{6}$ ، $2\pi+\frac{\pi}{6}$ ، $-2\pi+\frac{\pi}{6}$ ، $4\pi+\frac{\pi}{6}$ ، ... $\xleftarrow{\text{بطور کلی}}$ $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

" " " " " " با $-\frac{\pi}{6}$ ⟸ $-\frac{\pi}{6}$ ، $-2\pi-\frac{\pi}{6}$ ، $2\pi-\frac{\pi}{6}$ ، $-4\pi-\frac{\pi}{6}$ ، ... $\xleftarrow{\text{بطور کلی}}$ $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

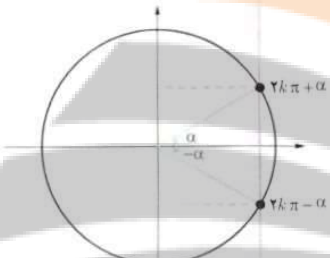


$x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=2\pi-\frac{\pi}{6}$ ، $x=2\pi+\frac{\pi}{6}$ ، $x=-\frac{\pi}{6}$ ، $x=-2\pi+\frac{\pi}{6}$ ، ...

الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=2k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x=\frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-2\pi-\frac{\pi}{3}, -2\pi+\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

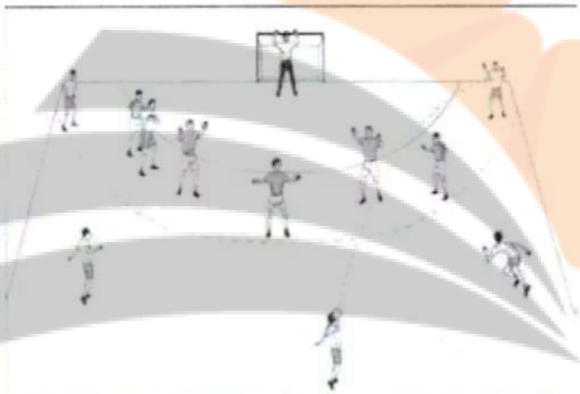
$$\begin{cases} 2x=2k\pi+3x \Rightarrow x=2k\pi & , \ k\in\mathbb{Z} \\ 2x=(2k+1)\pi-3x \Rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\pi}{5} & , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟



$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸ = \frac{(۱۶)^۲ \sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲\theta = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x \cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2(22/5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2(22/5^\circ) \Rightarrow \sin^2(22/5^\circ) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow[\text{حاده است}]{\alpha=22/5^\circ} \sin(22/5^\circ) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin 45^\circ = 2 \times \sin(22/5^\circ) \times \cos(22/5^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos(22/5^\circ) \Rightarrow \cos(22/5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

مثال : معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین $-1 \le \cos x \le +1$ قرار دارد.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

۱. فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{حاده}} \sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$

اول در بالا

$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

۲. نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

نرم : $2(22/5^\circ) = 45^\circ \Leftarrow$ اگر $\alpha = 22/5^\circ \Leftarrow 2\alpha = 45^\circ$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$	ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$
پ) $\cos x = \cos 2x$	ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$
ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$	ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

۴. مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ$ یا $\theta = 150^\circ$

پس دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

جواب (۳) :

الف) $\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$

پ) $2x = 2k\pi \pm x$

$x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 3}{-4}$

$\sin x = -1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$ ، $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 2}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$ غیرممکن ، $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ، $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ۳

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

عکاس: سیدمهدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهدهٔ دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهدهٔ طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

درس اوّل — حد بی‌نهایت

درس دوم — حد در بی‌نهایت

درس اوّل

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$:

فعالیت

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x) = ۲x^۲ - ۵x + ۱$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-۳)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید :

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲ - ۵x + ۱ & x-۳ \\ \hline -(\boxed{۲x^۲} - ۶x) & ۲x + \boxed{۱} \\ \hline \quad\quad x + ۱ & \\ \quad -(\boxed{x} - ۳) & \\ \hline \quad\quad\quad ۴ & \end{array}$$

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = ۴$.

پ) مقدار $f(۳)$ را محاسبه کنید. $f(۳) = ۲(۳)^۲ - ۵(۳) + ۱ = ۱۸ - ۱۵ + ۱ = ۴$

ت) $f(۳)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟ برابرند

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $۲x^۲ - ۵x + ۱ = (x-۳)(۲x + \boxed{۱}) + ۴$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیماندهٔ آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \hline & Q(x) \\ R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطهٔ فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = \underbrace{(a - a)\,Q(a)}_{۰} + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطهٔ اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجهٔ حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2-5x-2 & x-2 \\ \hline -(3x^2-6x) & 3x+1 \\ \quad x-2 & \\ \quad -(x-2) & \\ \hline \quad R=0 & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم: $f(x)=3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به‌صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده‌است.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

۲ چندجمله‌ای $g(x)=2x^3+x^2+1$ را در نظر بگیرید.

$g(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0$

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟ بله

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \hline -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید. $g(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-10$

$=-16+20+6-10=0 \Rightarrow R=0$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m\neq 0$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال[1]: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{12}{6}=2$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=0$، در این صورت دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a)=0$ و $g(a)=0$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-1)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

۱ــ در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجهٔ صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال : حد تابع $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم :

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \cline{2-2}
-(\cancel{2x^3}+4x^2) & 2x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
\cancel{-x^2}+4 & \\
-(\cancel{-x^2}-2x) & \\ \cline{1-1}
\cancel{2x}+\cancel{4} & \\
-(\cancel{2x}+\cancel{4}) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$. بنابراین :

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

تذکر : گاهی صورت یا مخرج تابع $\dfrac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\dfrac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2+\sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to 8} h(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

کار در کلاس

$\to \frac{+1-1}{-1+\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+\sqrt{2x+3}} \times \frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{\overbrace{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}^{A}}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{A}{(x+1)(x-3)}$

$= \frac{(-2)(-1-\sqrt{1})}{(-1-3)} = \frac{4}{-4} = -1$

ث) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

صورت و مخرج صفر شود

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

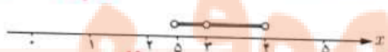
همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_\circ \in (a\,,\,b)$ آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_\circ$ می‌باشد.

مثال : بازهٔ $(2\,,\,5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازهٔ $(0\,,\,4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ بله شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

$\Rightarrow (1,4)$

همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی $x_\circ$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,\,b) - \{x_\circ\}$ یک همسایگی محذوف $x_\circ$ نامیده می‌شود.

$\to \frac{-1+1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$



مثال : مجموعهٔ $(\frac{5}{2}\,,\,4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)(x+2)} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$

$= \frac{1}{(1)(1+1+1)} = \frac{1}{3}$

حل کار در کلاس ۵۳/۱

الف) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+3x} \Rightarrow \dfrac{9-9}{9-9} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ هم صورت و مخرج صفر می‌شود

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \dfrac{-3-3}{-3} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

ب) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \dfrac{4(\frac{1}{2})^2-4(\frac{1}{2})+1}{2(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1-2+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x-2)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x+2)} = \dfrac{4(\frac{1}{2})-2}{2(\frac{1}{2})+2} = \dfrac{0}{3} = 0$

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-4x+1 & x-\frac{1}{2} \\ \hline (4x^2-2x) & 4x-2 \\ -2x+1 & \\ (-2x+1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+x-1 & x-\frac{1}{2} \\ \hline (2x^2-x) & 2x+2 \\ 2x-1 & \\ (2x-1) & \\ 0 & \end{array}$$

---

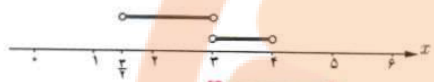
۲) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9} \Rightarrow \dfrac{9-15+6}{54-117+72-9} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x^2-7x+3)} = \dfrac{3-2}{18-14+3} = \dfrac{1}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-13x^2+24x-9 & x-3 \\ \hline -(2x^3-6x^2) & 2x^2-7x+3 \\ -7x^2+24x-9 & \\ -(-7x^2+21x) & \\ 3x-9 & \\ 3x-9 & \end{array}$$

> **همسایگی چپ و راست :** اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_\circ , x_\circ + r)$ یک همسایگی راست $x_\circ$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_\circ - r , x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

مثال : بازهٔ $(۳ , ۴)$ یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{۳}{۲} , ۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.



(۳ و ۵) ⇐ راست

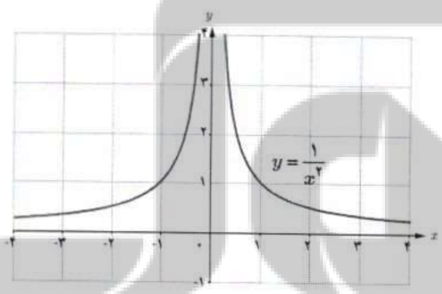
(۱ و ۳) ⇐ چپ

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{\circ\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	$-\circ/۲$	$-\circ/۱$	$-\circ/\circ۱$	$-\circ/\circ\circ\circ۱$	$\to \circ \leftarrow$	$\circ/\circ\circ\circ۱$	$\circ/\circ\circ۱$	$\circ/\circ۱$	$\circ/۱$	$\circ/۲$
$f(x) = \frac{۱}{x^۲}$	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار[۱] تابع $y = \frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$.



تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^۲}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱ـ رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

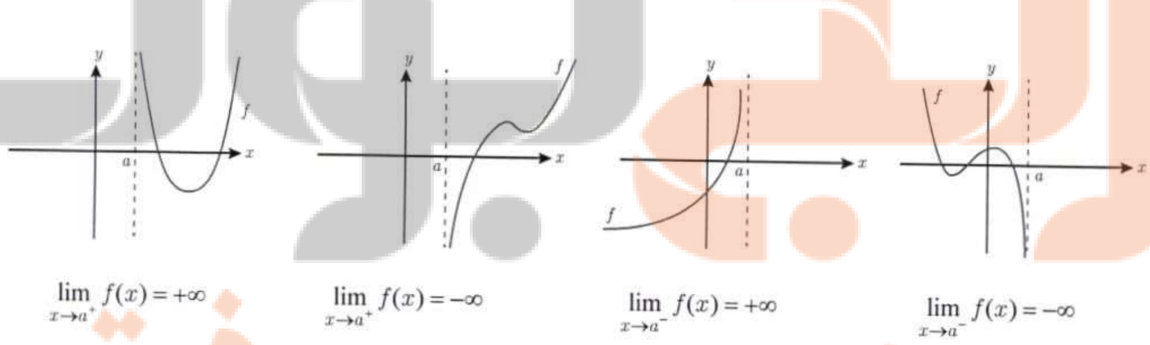
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواه کوچکتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

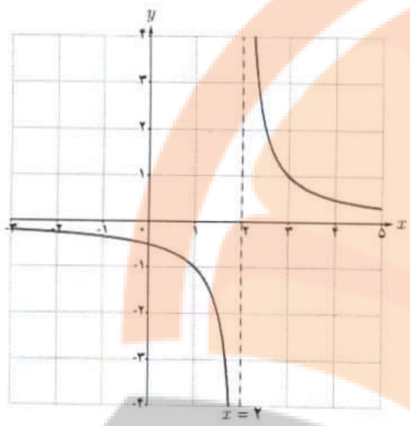
تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

مثال : حد چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.



حل : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \to 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\dfrac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \to 2^-$، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\dfrac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ در این صورت :

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید[1].

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنابر قسمت (پ) قضیهٔ قبل داریم :

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{[x]-3}{|2x-1|}=-\infty$$

مهم (۱ـ در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty\times 0$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.)

(الف) $\frac{2(5)}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$ | (ث) $\frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3})+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

(پ) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{2x}{x-5} \Rightarrow \frac{2(5)}{5^+-5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$

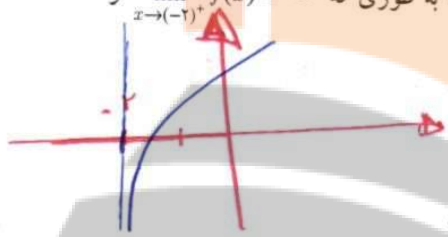
پ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{0} = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{0+1}{\sin^2 0} = \frac{1}{0} = +\infty$

۲ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله‌ای $x + 1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۳ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim\limits_{x\to -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -6} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-15}{9^+-9} = \frac{-14}{0^+} = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

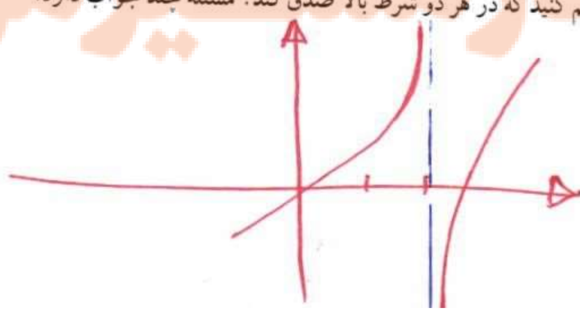
ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ر) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟



تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تمرین ۵۷ ← ۵۷/۱

تمرین ۱

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2+1+1 = 0 \Rightarrow R=0$

$2x^3 + x^2 + 1 \;|\; x+1$

$-(2x^3+2x^2) \quad\quad 2x^2 - x + 1$

$-x^2+1$

$-(-x^2-x)$

$x+1$

$x+1$

0

تمرین ۲

الف)

$$\frac{2(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}}{4(\frac{1}{2})^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x+2)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

ب)

$$\frac{125-100-20-5}{25-25} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+x-1)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{25+5-1}{5+5} = \frac{29}{10}$$

پ)

$$\frac{16-12-4}{-64+64-4+4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x^2+1)} = \frac{-5}{17}$$

از روش های تقسیم یا هورنر می توان استفاده کرد

تمرین ۳

الف)

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2x-1}}{x(x-1)} \times \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{2x-1})} = \frac{0}{1(1+1)} = 0$$

ب)

$$\frac{9-9}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1}$$

$-1\;\cancel{(3-x)}$

$$= \frac{6(4)}{-1} = -24$$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

حل تمرین ۵۷/۲

۳/۵۷

ب) $\frac{-16+16}{-2+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to -8} \frac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4}$

$= \lim_{x \to -8} \frac{2\cancel{(x+8)}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\cancel{(x+8)}} = \frac{2(4+4+4)}{1} = 8$

۴/۵۷

د) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ذ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ا) $\lim_{x \to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

الف) یعنی حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کمتر از 2 به عدد 2 نزدیک می‌شود، از ~~هر~~ عدد مثبتی (مثبت دلخواه) بزرگتر می‌شود

ب) حد تابع f وقتی که x از مقادیر بزرگتر از 2 به عدد 2 نزدیک می‌شود، از هر عدد منفی دلخواه، کوچکتر می‌شود.

درس دوم

حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحلهٔ اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۷}{۸}=۱-\frac{۱}{۲^۳}$	$\frac{۱۵}{۱۶}=۱-\frac{۱}{۲^۴}$	...

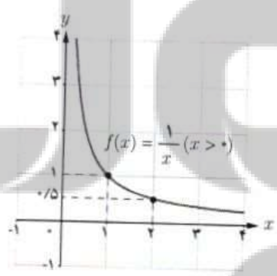
$۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}=۱-\frac{۱}{۱۰۲۸}=\frac{۱۰۲۷}{۱۰۲۸}$

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

$۱-\frac{۱}{۲^n}$

ب) در مرحلهٔ nاُم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nاُم چه می‌توان گفت؟



مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰\,,+\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\to+\infty$
$f(x)=\frac{۱}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\to ?$ ۰

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ باشد، لازم است x بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟

با این شرایط می‌گوییم **حد** تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. به‌طور کلی می‌توان گفت :

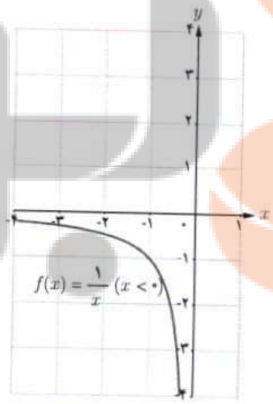
> اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

> فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

مثال : با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty\,,\,0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

x	$-\infty \leftarrow$	...	-1000000	-100000	-1000	-100
$f(x)=\frac{1}{x}$	۰ ؟ $\leftarrow$	...	$-0/000001$	$-0/00001$	$-0/001$	$-0/01$



$$\text{ب)}\ \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{3x}{x}\right)}=\frac{1}{0-3}=-\frac{1}{3}$$

در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند.

قضیه ۱ : فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این‌صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

قضیه ۲ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=m$. در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\frac{l}{m}\ (m\neq 0)$

تذکر : قضیهٔ ۲ برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبهٔ این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2\neq 0$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7x^2-4x+1}{x^2}}{\frac{3x^2+5x-6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}7-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}=\frac{7-0+0}{3+0-0}=\frac{7}{3}$$

$$\text{الف)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

$$\text{ب)}\ \lim_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}=\frac{\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{5t^2}{t^2}\right)}{\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{t^2}{t^2}+\frac{3t}{t^2}\right)}=\frac{0-5}{1+0}=-5$$

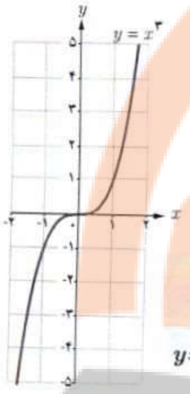
$$\text{الف)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x+2}=-1$$

$$\text{ب)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{100x^2-2x}{x^2}=100$$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این‌گونه تابع‌ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال : تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\rightarrow +\infty$
$y=x^3$	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می‌دهند که با افزایش مقدار x، مقدار x^3 هم افزایش می‌یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم :

> **تعریف :** فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a \ , \ +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می‌شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می‌توان گفت :

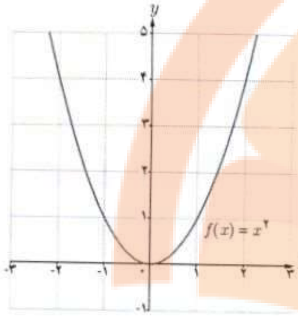
> **تعریف :** فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty \ , \ b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱ : رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تذکر ۲ : رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان‌که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چراکه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

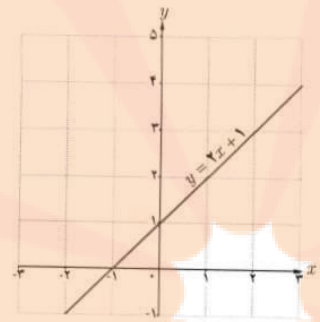
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



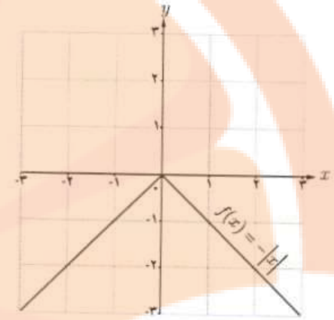
الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



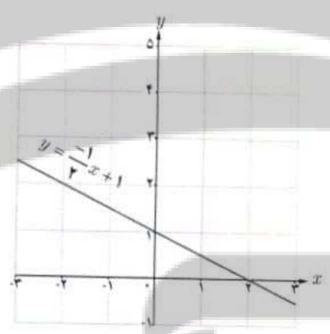
ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty$



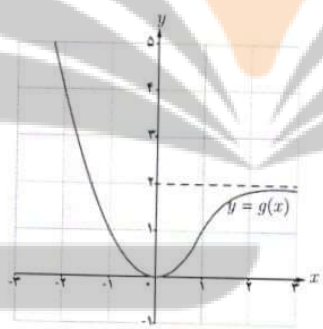
پ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



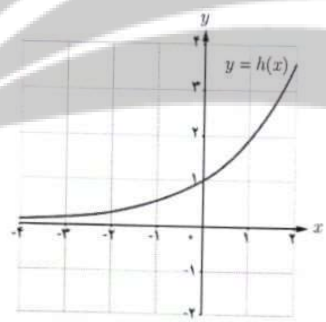
ت) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = -\infty$



ث) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک‌جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه : فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(0-0+5)=\lim\limits_{x\to+\infty}5x^2=+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+0)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جملهٔ با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی :

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5+7x^3-2x-9}{3x^2-8x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)=+\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{7x^3}=\frac{2}{7}$, (ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{+\infty}=0$

تمرین

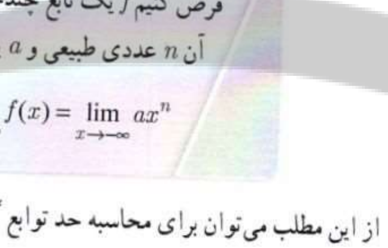
۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ ندارد

ب) $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\-1 & x<0\end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$

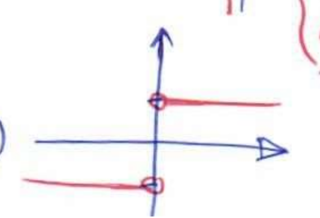
(الف)

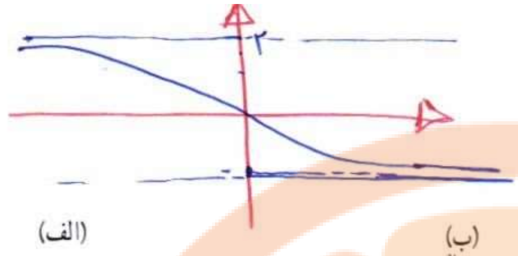


$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty\end{cases}$

(پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^7}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4)=-2(+\infty)=-\infty$

(ب)

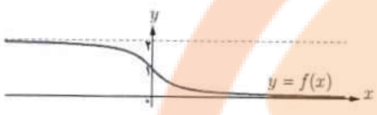




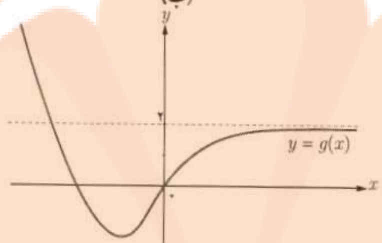
رسم تمرین ۵

۲) با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

(الف)



(ب)



(پ)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

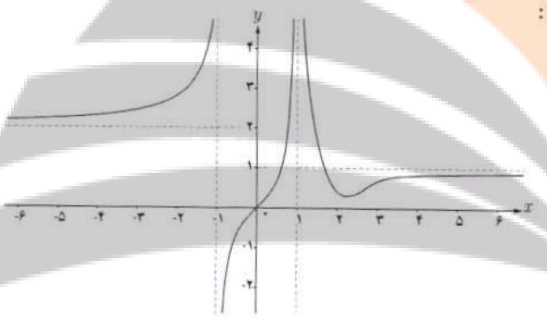
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2$

$\lim_{x\to(-1)^+} h(x) = +\infty$

۳) نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید :



الف) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

۴) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty} (9+\frac{7}{x^3}) = 9+0 = 9$

ب) $\lim_{x\to+\infty} (-\frac{1}{2}x^3+7x^2-6) = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}x^3) = -(+\infty) = -\infty$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

ت) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5} = \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$

ث) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

ج) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

چ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{x^2} = (-\infty)^3 = -\infty$

ح) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

خ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$

د) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{4} = 2(+\infty) = +\infty$

۵) الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

الف) $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه می‌توان به ۱- نزدیک کرد، مشروط به اینکه x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود.

ب) $f(x)$ را به اندازه کافی می‌توان به عدد ۲ نزدیک کرد، مشروط به اینکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

فصل ۴

مشتق


ماهواره طلوع

ماهواره امید

ماهواره صدا

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ - پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق‌پذیری و پیوستگی

آهنگ تغییر

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

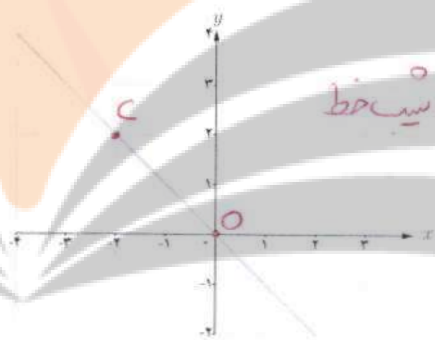
درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

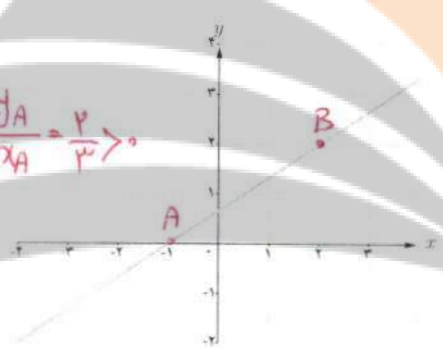
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = -1 < 0$$

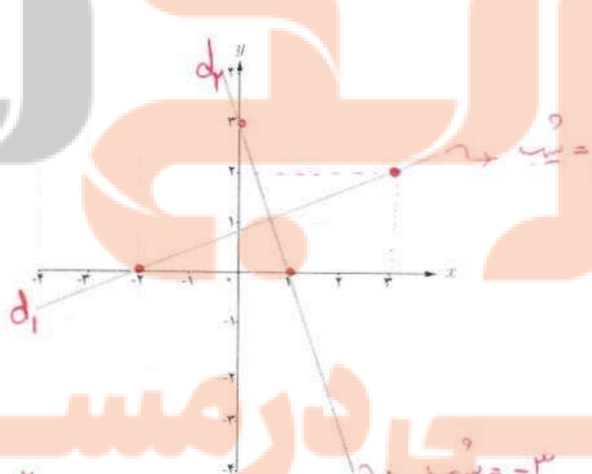


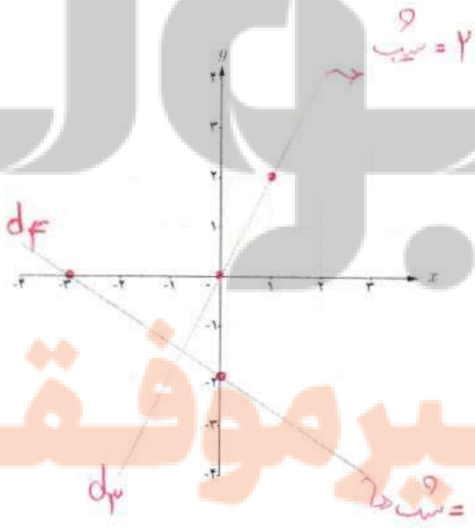
$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲}{۳} > ۰$$



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$





خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_2 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.

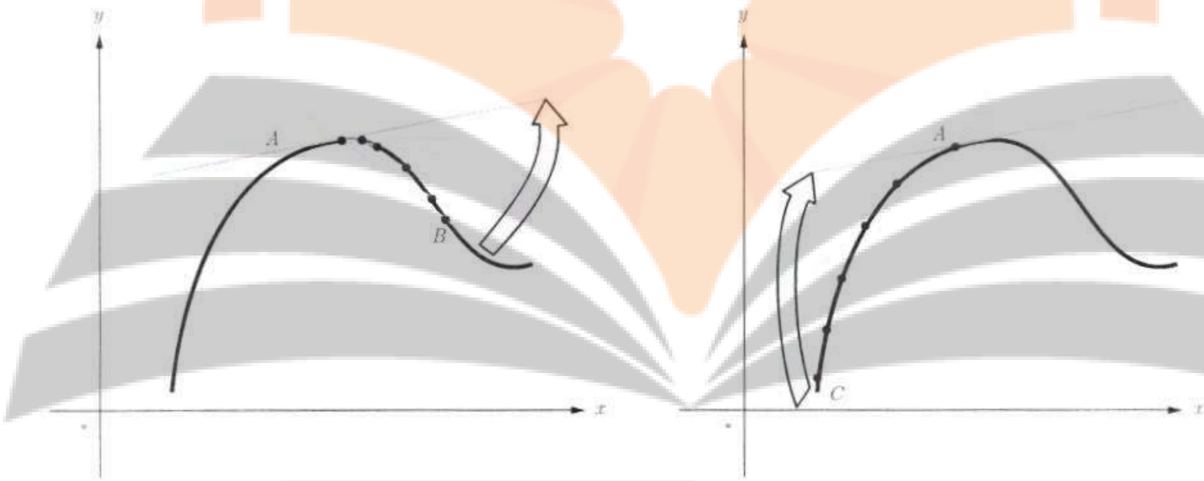
خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این‌رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به خط مماس در نقطه A نزدیک می‌شود به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ به خط مماس بر منحنی در نقطه A

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت :

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

الف) تابع $f(x)=-x^2+10x$ داده شده است. اگر $0\leq x\leq 10$ نقاط $A(2,f(2))$، $B(6,f(6))$، $C(5,f(5))$، $D(4,f(4))$ و $E(3,f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید :

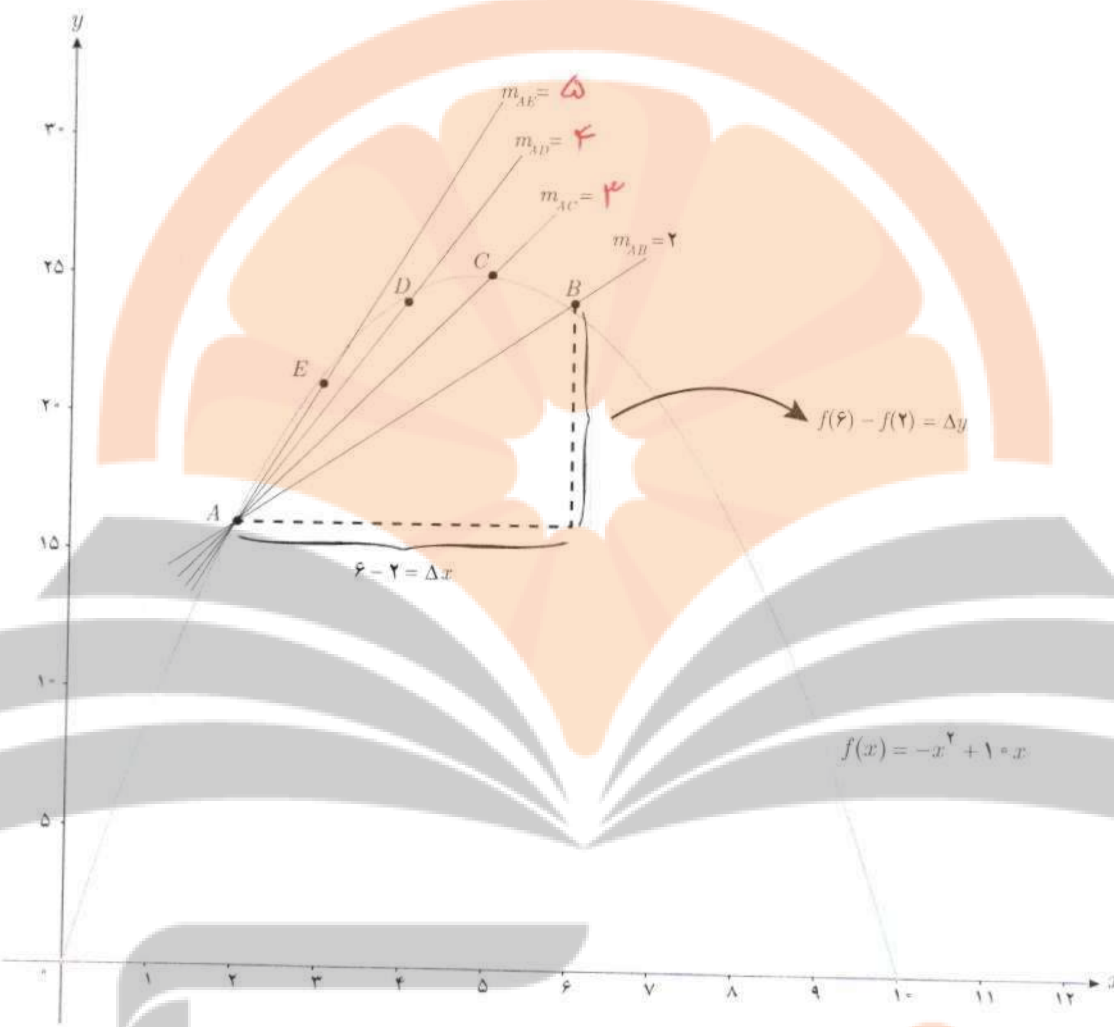
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{24-16}{4}=\frac{8}{4}=2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{25-16}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{24-16}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{21-16}{1}=5$$



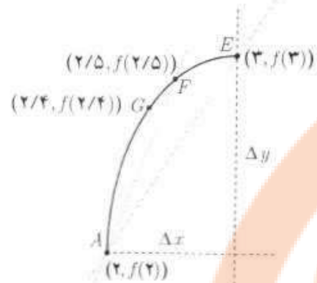
همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

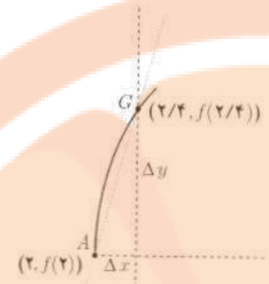
$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟ کوچک و کوچک‌تر می‌شوند

[۲,۶]	۲ ______ ۶	Δx=۶−۲=۴	Δy=۲۴−۱۶=۸
[۲,۵]	۲ _____ ۵	Δx=۵−۲=۳	Δy=۲۵−۱۶=۹
[۲,۴]	۲ ____ ۴	Δx=۴−۲=۲	Δy=۲۴−۱۶=۸
[۲,۳]	۲ ___ ۳	Δx=۳−۲=۱	Δy=۲۱−۱۶=۵

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^۲+۱۰x$ در فاصله $[۲,۳]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[۲,۲/۴]$ رسم شده است.





$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۴-۱۶}{۰,۴}=\frac{۲,۲۴}{۰,۴}=۵,۶$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.
$[۲,۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۴-۱۶}{۰,۴}=\frac{۲,۲۴}{۰,۴}=۵/۶$
$[۲,۲/۳]$	$\frac{f(۲,۳)-f(۲)}{۲,۳-۲}=\frac{۱۷,۷۱-۱۶}{۰,۳}=\frac{۱,۷۱}{۰,۳}=۵,۷$
$[۲,۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
$[۲,۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
$[۲,۲/۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
$[۲,۲/۰۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$
⋮	⋮ ⋮
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ ——— ؟ ۶

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۲+h)^۲+۱۰(۲+h)-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(h^۲+۴h+۴)+۲۰+۱۰h-۱۶}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲-۴h-\cancel{۴}+\cancel{۴}+۱۰h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲+۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(-h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۶)=۶$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۱/۵,۲]، [۱/۶,۲]، [۱/۷,۲]، [۱/۸,۲] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ ، ۶/۳، ۶/۲، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(۲)=۶$. در ادامه $f'(۳)$ برای $f(x)=-x^۲+۱۰x$ محاسبه شده است :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۳+h)^۲+۱۰(۳+h)-۲۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹-۶h-h^۲+۳۰+۱۰h-۲۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲+۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۴)=۴$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل : با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد :

$f'(۲)=۶=$ شیب خط مماس در نقطه A

$A(۲,f(۲))=(۲,۱۶)$

$y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

کار در کلاس

$$\text{شیب خط} = f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^۲+۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^۲+۳-۷}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۴-۴h+h^۲-۴}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-۴+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۴+h)=-۴ \xrightarrow{\text{معادله خط}} y-۷=-۴(x+۲)\Rightarrow y=-۴x-۱$$

تذکر : با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

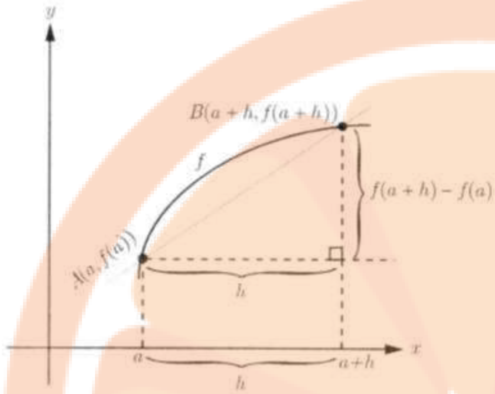
مثال : اگر $f(x)=-x^۲+۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

$$f'(۲)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^۲+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x}$$

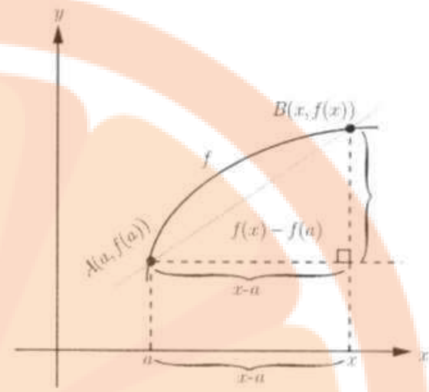
$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^۲-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^۲+۶\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(-\Delta x+۶)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}(-\Delta x+۶)=۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ به‌صورت : $f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



(الف)



(ب)

با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال : اگر $f(x)=x^۲$، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(۳) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{(h+۳)^۲-۹}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{h(h+۶)}{h} = \lim_{h\to ۰} (h+۶) = ۶$$

روش دوم :

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} (x+۳) = ۶$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-\cancel{(x-8)}(x-2)}{\cancel{x-8}}=\lim_{x\to 8}-(x-2)=-6$$

کار در کلاس

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. نقاط F و A

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

در نقاط A ، E و D شیب (مشتق) مثبت است، اما در نقاط B ، G و F شیب (مشتق) منفی است

$f'(3) > f'(4)$ یا $m_E > m_D$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+10x-21}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-7)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}-(x-7)=4$$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-x^2+10x-24}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-6)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}-(x-6)=2$$

نتیجه : $f'(4) < f'(3)$

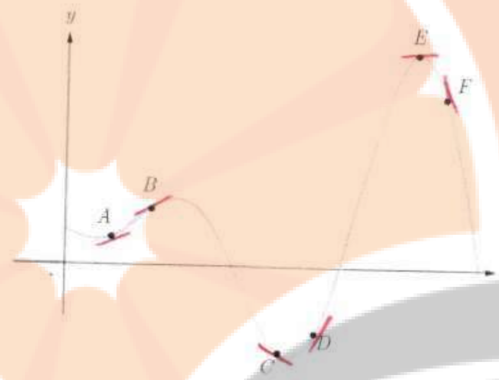
$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x+1-9}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(3x+4) = 10$$

$$y-9 = 10(x-2) \Rightarrow y = 10x-11$$ معادله خط مماس

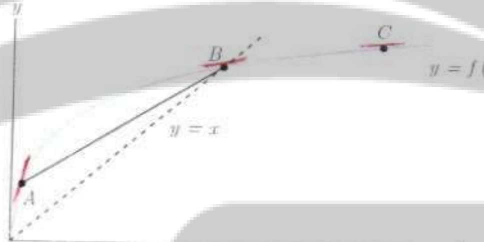
۱) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲) نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-3	F
-1	C
0	E
$\frac{1}{2}$	A
1	B
2	D



۳) برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



m_1 الف) شیب نمودار در نقطه A

m_2 ب) شیب نمودار در نقطه B

m_3 پ) شیب نمودار در نقطه C

m_4 ت) شیب خط AB

$m_5 = 0$ ث) شیب خط $y=2$

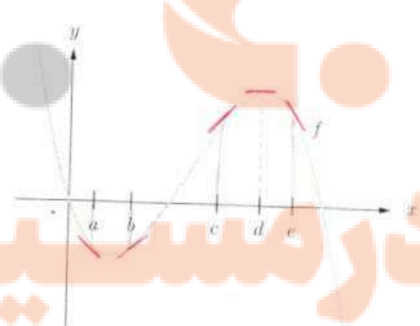
$m_6 = 1$ ج) شیب خط $y=x$

$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

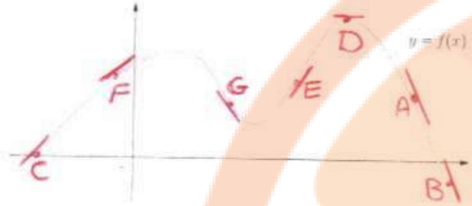
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1، m_2، ... و m_6 در نظر بگیرید.

۴) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	0
b	$0/5$
c	2
a	$-0/5$
e	-2



۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که:



الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x)=0\ ,\ f'(x)>0$

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x)=0$

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1)=f'(x_2)$

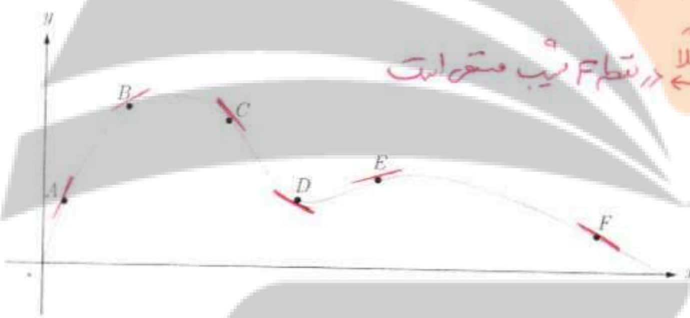
ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

$f(x)>0\ ,\ f'(x)<0$

۶ اگر $f(x)=x^3-2$، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست ← مثلاً در نقطه F شیب منفی است

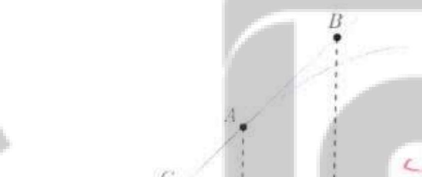
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست

پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط D، F و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ نادرست $m_C<m_D<m_F$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.

$$\text{شیب}=\frac{f(B)-f(A)}{x_B-x_A}=\frac{f(C)-f(A)}{x_C-x_A}=f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B)-25}{1}=\frac{f(C)-25}{-1}=1/5 \quad f(B)=26/5 \Rightarrow B(5, 26/5) \quad f(C)=23/5 \Rightarrow C(3, 23/5)$$

۹ در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j>s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

ثانیه	۱	۲	۳	k
علی	j	$2j$	$3j$	kj
رضا	s	$2s$	$3s$	ks

نسبت سرعت علی به رضا ثابت $\frac{j}{s}$ است. لذا علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

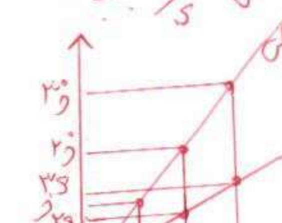
الف) علی $j-s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



درس دوم

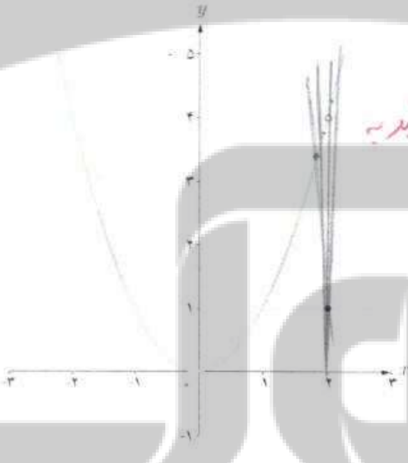
مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق‌پذیر است.
در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.
در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟ زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه $x=2$ می‌گذرند به عدد حقیقی و مشخص به‌خصوصی میل نمی‌کنند
اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به‌کار گیریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x\to 2$، داریم :

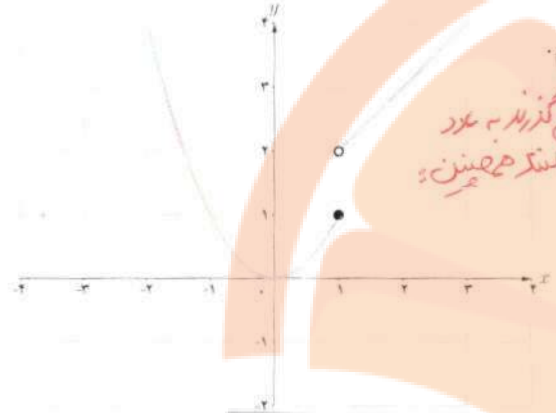
$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-1}{x-2}=+\infty$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x-2}=-\infty$$

بنابراین $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x=2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ بله پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس



تابع g (شکل روبه‌رو) را به‌صورت $g(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟ زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه $x=1$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کند همچنین:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x+1-1}}{x-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^۲-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=۲ \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=۲$ و $x=۱$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(۲)$ و $g'(۱)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=\circ.f'(a)=\circ$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\circ$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

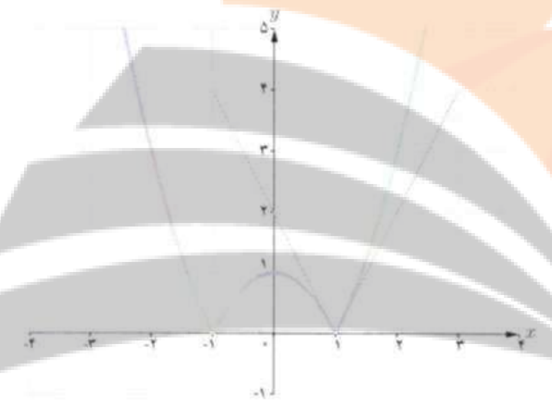
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت :

$f'_-(1)=$ شیب نیم‌مماس چپ

$f'_+(1)=$ شیب نیم مماس راست

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از :

نیم مماس راست $y-0=2(x-1)$ یا $y=2x-2 \ ,\ x\geq 1$

نیم مماس چپ $y-0=-2(x-1)$ یا $y=-2x+2 \ ,\ x\leq 1$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-1|-f(-1)}{x+1} \ \to \ ①\ ,\ ②$$

$$① \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}-(x-1)=2 \Rightarrow f'_+(-1)=2 \to y-0=2(x+1) \Rightarrow y=2x+2 \ ,\ x>-1$$

$$② \lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2 \Rightarrow f'_-(-1)=-2 \Rightarrow y-0=-2(x+1) \Rightarrow y=-2x-2 \ ,\ x<-1$$

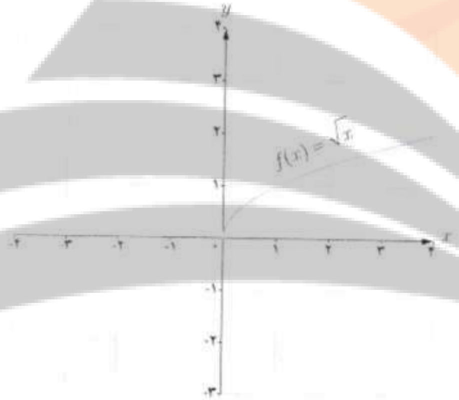
تعریف : مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

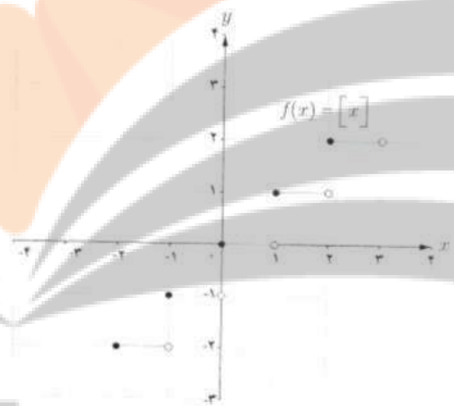
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل :

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال : توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.

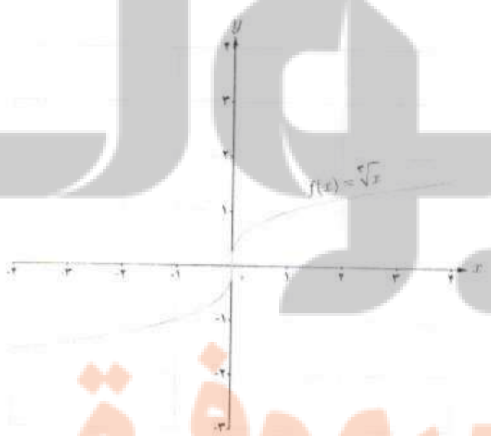




اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

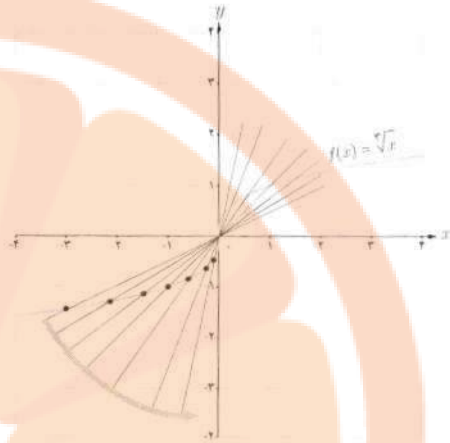
مثال : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

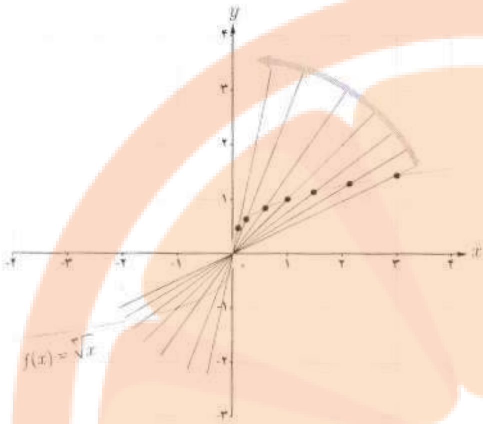
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$



بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.





اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1]:

۱ــ f در a پیوسته نباشد.

۲ــ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

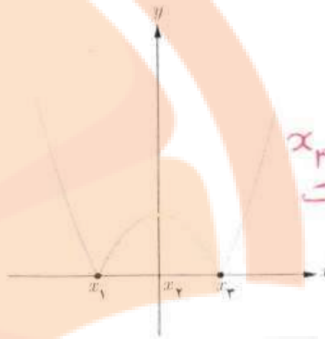
پ) هر دو نامتناهی باشند.

تهیه کننده :

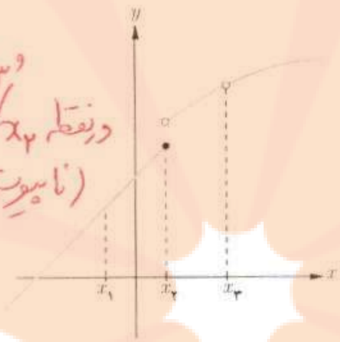
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

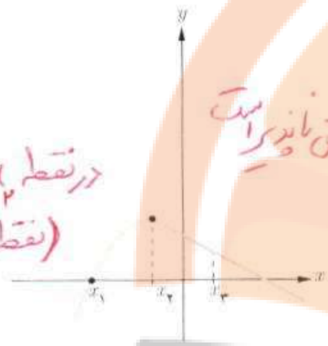
در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



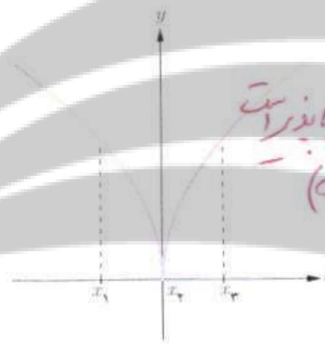
در نقاط x_1 و x_3 مشتق ناپذیر است (نقاط گوشه‌ای)



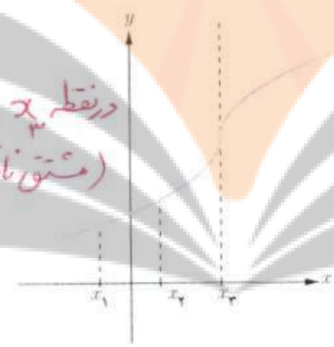
در نقطه x_2 و x_3 مشتق ناپذیر است (ناپیوسته)



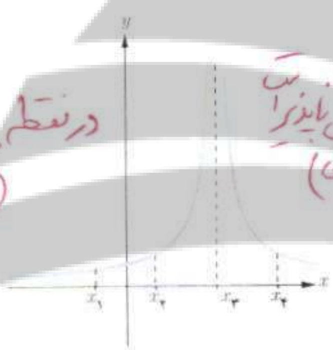
در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (نقطه گوشه‌ای)



در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)



در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)

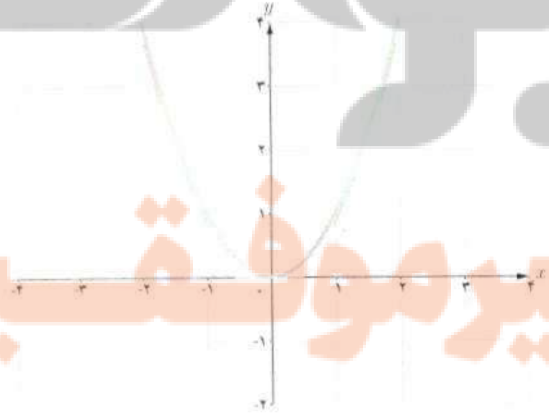


در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است (نقطه ناپیوسته)

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

تابع $f(x) = x^2$ را درنظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

$$f'(\sqrt{3})=\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^2$ وجود دارد؟ در تمام نقاط

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^2$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

بنابراین $f'(x)=2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

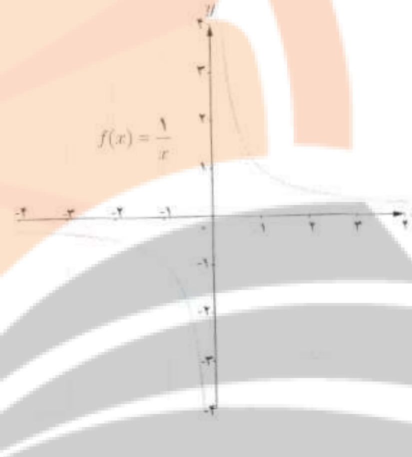
$$f'(-\frac{1}{5})=-\frac{2}{5}\ ,\ f'(\sqrt{7})=2\sqrt{7}\ \text{و}\ f'(50)=100$$

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل : $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اگر $x\neq 0$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$



با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(3)=\frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x\neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{5})=\frac{-1}{5}$ و $f'(-2)=-\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\frac{3-x}{3x}}{\frac{x-3}{1}}}{}=\lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}}=-\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

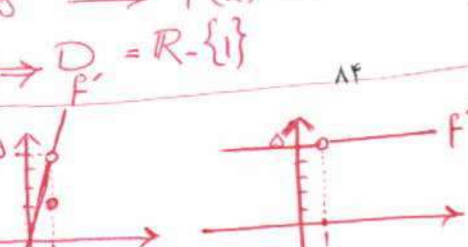
$D_f=(x\neq 1)\cup(x=1)=\mathbb{R}$

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

اگر $x\neq 1 \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)-5x}{h}=5 \Longrightarrow f'(x)=5$

$\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

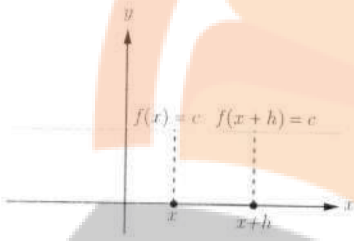
اگر $x=1 \Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5x-2}{x-1}=\infty$



محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ــ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=0$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$



به‌طور مثال اگر $f(x)=7$ و $g(x)=-\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x)=0$ و $g'(x)=0$.

۲ــ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x)=x^2$، آن‌گاه $f'(x)=2x$. همچنین اگر $f(x)=x^3$، به‌کمک این دستور نشان می‌دهیم که : $f'(x)=3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x)=x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)=x^3$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]=x^2+x^2+x^2=3x^2$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ به‌دست آمده است.

در حالت کلی می‌توان نشان داد که : $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$ $(n\in\mathbb{N})$ از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x)=x^n$ استفاده شده‌است.

اکنون اگر $f(x)=x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{ بار}}=nx^{n-1}$$

۳ــ به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم : $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

*۴ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۵ــ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ــ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷ــ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال : مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

شایسته است که این تمرین در صفحات بود باشد .

۱ــ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(x)=\frac{1}{x-4}$ ب) $g(x)=(\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$ پ) $h(x)=\frac{x}{2x^2+x-1}$

الف) $f'(x)=\frac{-1}{(x-4)^2}$

ب) $g'(x)=8\times(\frac{-3x-1}{x^2+5})^7\times\frac{-3(x^2+5)-2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$

پ) $h'(x)=\frac{1\times(2x^2+x-1)-(4x+1)\times x}{(2x^2+x-1)^2}$

۲ــ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به‌دست آورید.

$(fg)'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)=5\times 8+(-6)\times 3=22$

$(\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2)\times g(2)-g'(2)\times f(2)}{(g(2))^2}=\frac{5\times 8-(-6)\times 3}{(8)^2}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

مثال : اگر $h(x) = (x^2+3x+1)^7$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x) = x^7$ و $g(x) = x^2+3x+1$، آن‌گاه : $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)\,f'(g(x))$$

اگر $u = g(x)$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)= u^7 \Rightarrow f'(u) = 7u^6 = 7(g(x))^6 = 7(x^2+3x+1)^6$$

بنابراین :

$$h'(x) = (2x+3)(7)(x^2+3x+1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد،

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y = (\frac{x^2}{3x-1})^5$ را به دست آورید.

حل : با فرض $u = \frac{x^2}{3x-1}$ داریم : $y = u^5$ و از آنجا :

$$y' = u'.5u^4 = \frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}.5(\frac{x^2}{3x-1})^4 = 5(\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2})(\frac{x^2}{3x-1})^4$$

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

$$f'(x) = ((x^2+1)^3)' \times (5x-1) + (5x-1)' \times (x^2+1)^3$$

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 \times 2x \times (5x-1) + 5\times(x^2+1)^3$$

$$f'(x) = (x^2+1)^2 \times (35x^2-6x+5)$$

ب) $g(x) = (\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$

$$g'(x) = 8\times\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7 \times \frac{-3(x^2+5)-2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$$g'(x) = 8\times\frac{(-3x-1)^7(3x^2+2x-15)}{(x^2+5)^9}$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه $(a\,,\,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

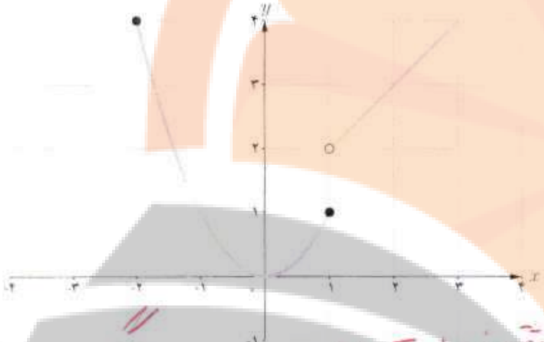
تابع f روی بازه $[a\,,\,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\,,\,b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a , b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a , b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty , +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

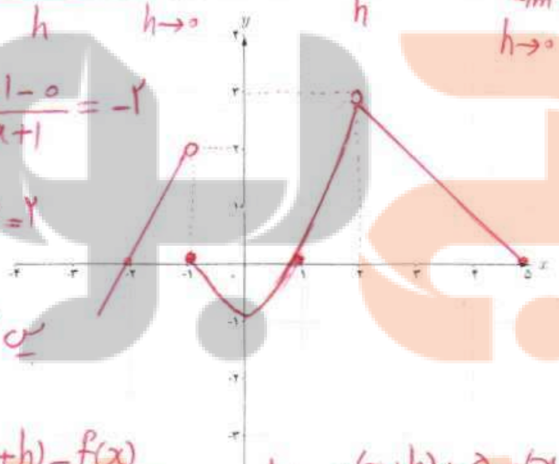
f روی بازه‌های $[-2 , 1]$ و $(1 , \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[1 , 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟) اولاً f روی بازه $(1,2)$ مشتق‌پذیر است اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد لذا در $x=1$ مشتق راست ندارد.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1 , 1]$، $(2 , 5)$ و $[-2 , 0]$ بررسی کنید.

اگر $x \in (-1,1) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-1-(x^2-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

$f'_+(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2-1-0}{x+1} = -2$



$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1-0}{x-1} = 2$

پس f روی بازه $[-1,1]$ مشتق‌پذیر است.

اگر $x \in (2,5) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)+5-(-x+5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$

پس f روی بازه $(2,5)$ مشتق‌پذیر است.

چون طبق نمودار، f در $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست و $-1 \in [-2,0]$ پس f روی بازه $[-2,0]$ مشتق‌پذیر نیست.

$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x=0$

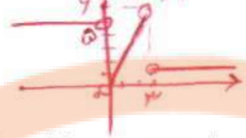
$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{5x-4-0}{x-0}=\infty$ $\rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$

$f'_-(3)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3^-}(x+3)=6$

$f'_+(3)=\lim_{x\to3^+}\frac{x+6-9}{x-3}=1$ $\rightarrow f'_-(3)\neq f'_+(3)$

جواب (۳)

(پ) $\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$

(ت) $\Rightarrow$ 

نمودار f'

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

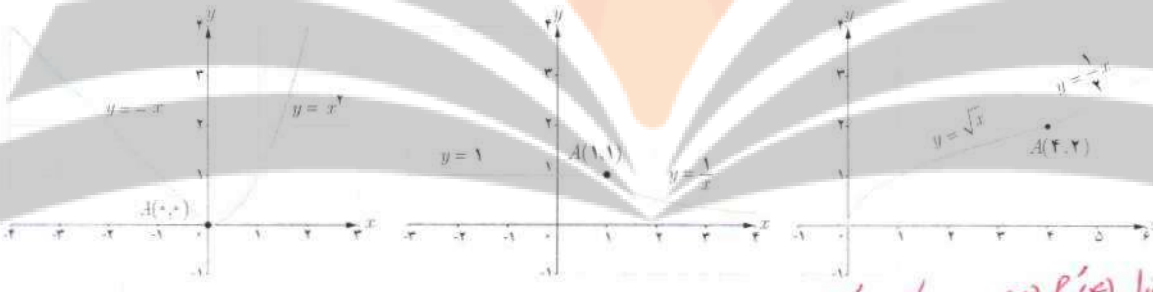
مثال: اگر $y=3x^4+2x^2-1$ آن‌گاه:

$$y'=12x^3+4x \quad , \quad y''=36x^2+4$$

۱. دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

$f(x)=|x-2| \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & x<2\\ x+2 & x\geq 2\end{cases}$

۲. با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف) (ب) (پ)

(الف) $f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$

$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=0$ $\rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$

(ب) $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$

$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$ $\rightarrow f'_-(1)\neq f'_+(1)$

(پ) $f'_-(4)=\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}$

$f'_+(4)=\lim_{x\to4^+}\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-4}=\frac{1}{2}$ $\rightarrow f'_-(4)\neq f'_+(4)$

۳. تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\leq x\leq 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

ادامه جواب در بالا

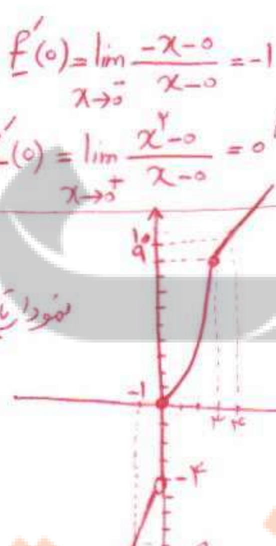
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

نمودار تابع f



با توجه به نمودار تابع f، تابع f در $x=0$ ناپیوسته است.

۴. نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

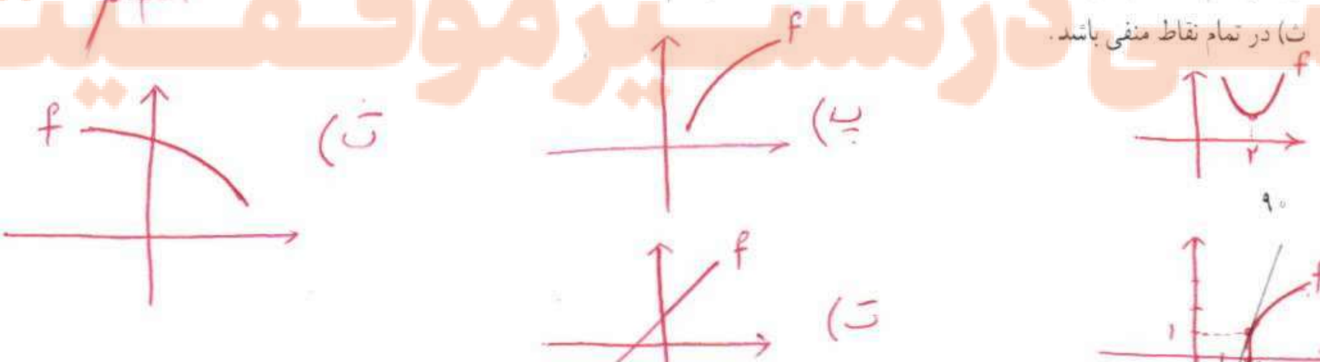
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

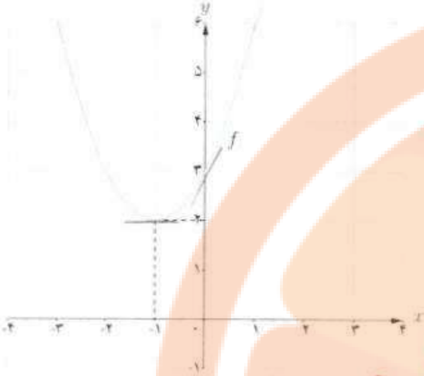
ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.





۵ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

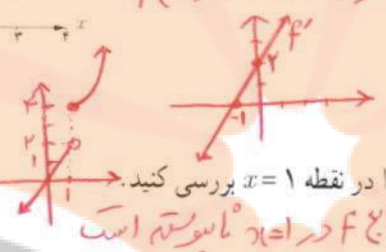
$۰=f'(-۱)<f'(۰)<f'(۲)<f'(۳)$

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ بررسی کنید.

$f'(x)=۲x+۲ \Rightarrow f'(۲)=۶,\ f'(-۱)=۰,\ f'(۰)=۲,\ f'(۳)=۸$

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

توضیح: تابع f در $x=۱$ ناپیوسته است

$f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۴}{x-۱}=\infty$

$f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۳-۴}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

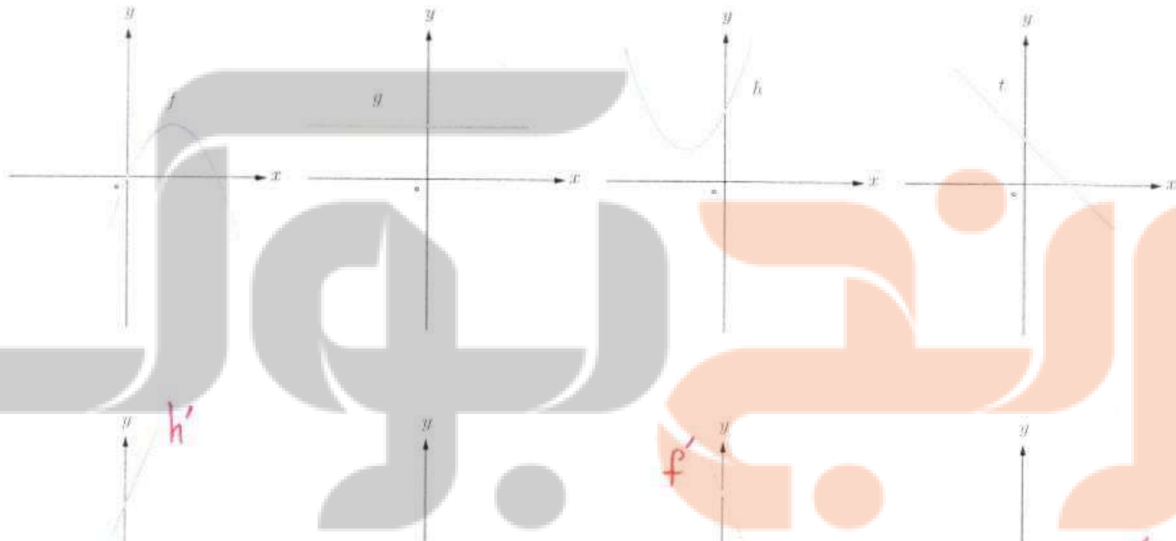
$f_۱(x)=۳x-۱$ ، $f_۲(x)=۳x+۵$ ، $f_۳(x)=۳x$ یا

$g_۱(x)=۵$ ، $g_۲(x)=\frac{۳}{۲}$ ، $g_۳(x)=-۱$

۸ اگر $f(x)=|x^۲-۴|$، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

جواب در پایین صفحه

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



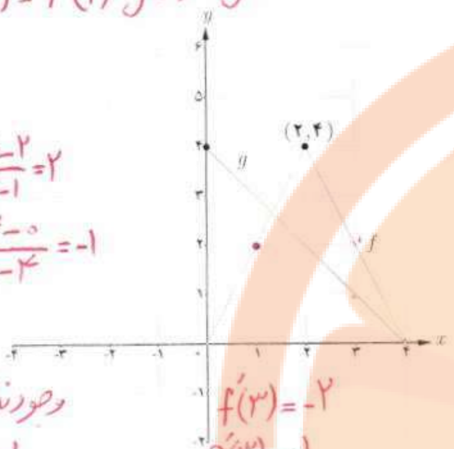
جواب ۷

$f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-۴)-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}-(x+۲)=-۴$ ، $f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴ \Rightarrow f'_-(۲)\neq f'_+(۲)$

پس در $x=۲$ مشتق ناپذیر است.

نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

الف) $h'(1)=f'(1).g(1)+g'(1).f(1)=۲\times۳+(-1)\times۲=۴$



$f'(1)=\frac{۴-۲}{۲-1}=۲$

$g'(1)=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-1$

$f'(۲)=$ وجود ندارد

$g'(۲)=-1$

$f'(۳)=-۲$

$g'(۳)=-1$

الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

$$K'(1)=\frac{f'(1)\times g(1)-g'(1)\times f(1)}{(g(1))^۲}=\frac{۲\times۳-(-1)\times۲}{(۳)^۲}=\frac{۸}{۹}$$

$$K'(۲)=\frac{f'(۲)\times g(۲)-g'(۲)\times f(۲)}{(g(۲))^۲}=$$ وجود ندارد $\xrightarrow{\text{زیرا}}$ $f'(۲)=$ وجود ندارد

$$K'(۳)=\frac{f'(۳)\times g(۳)-g'(۳)\times f(۳)}{(g(۳))^۲}=\frac{-۲\times1-(-1)\times۲}{(1)^۲}=۰$$

اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=۳+۵=۸$ ، $(۳f+۲g)'(1)=۳f'(1)+۲g'(1)=۳\times۳+۲\times۵=۱۹$

اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-0}{x-0}=1$ ، $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^۲-0}{x-0}=0 \Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)\Rightarrow f'(0)=$ وجود ندارد

مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f'(x)=۶x(۲x-۵)^۳+۶(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۴)$
$=۶(۲x-۵)^۲(۵x^۲-۵x-۴)$

پ) $f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\times(x^۳+1)+۳x^۲\times\sqrt{۳x+۲}$

الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

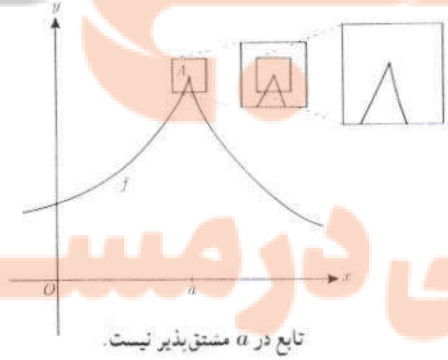
ب) $f(x)=\frac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{۹\times\sqrt{x}-\frac{1}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}=\frac{۹x+۲}{۲x\times\sqrt{x}}$

ب) $f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+1)}{(-۳x+۲)^۲}=\frac{-۳x^۲+۴x-۳}{(-۳x+۲)^۲}$

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر نیست.

تابع در a مشتق‌پذیر است.

درس سوم

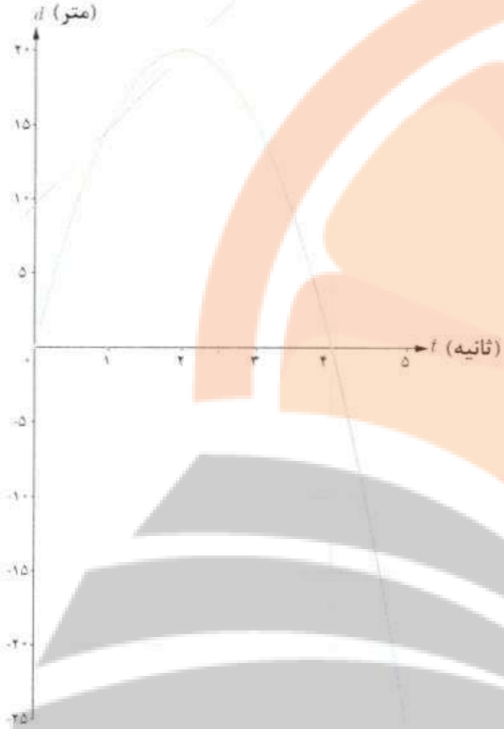
آهنگ تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $70 = \frac{280}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.

مثال : خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0\le t\le 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان ـ زمان (شکل) :

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.



ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل :

الف)

سرعت متوسط در بازه زمانی [۱,۲] $=\dfrac{d(2)-d(1)}{2-1}=\dfrac{20-15}{1}=5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

سرعت متوسط در بازه زمانی [۱,۱/۵] $=\dfrac{d(1/5)-d(1)}{1/5-1}=\dfrac{18/75-15}{0/5}=\dfrac{3/75}{0/5}=7/5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

سرعت متوسط در بازه زمانی [۱,۱/۴] $=\dfrac{d(1/4)-d(1)}{1/4-1}=\dfrac{18/2-15}{0/4}=\dfrac{3/2}{0/4}=8\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-10t+20$ ، پس $d'(1)=10$

ت) $d'(2)=0 \quad , \quad d'(3)=-10$

سرعت در لحظه $t=۲$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(۳)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=۳$ برخلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

به‌جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a, a+h]$ $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

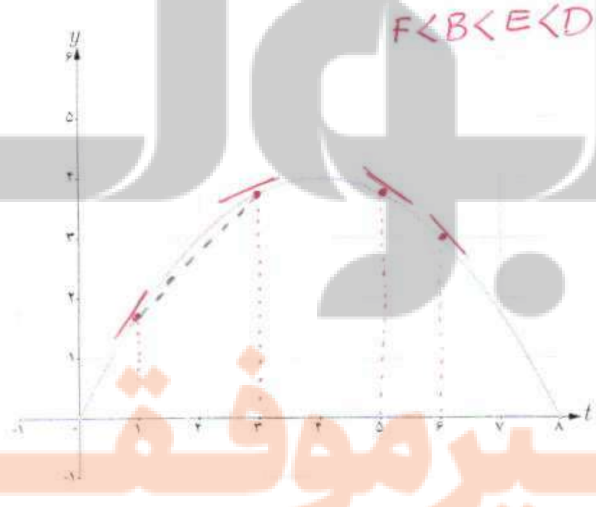
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$ $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :
(محاسبهٔ عددی لازم نیست.)

F<B<E<D<A<C



A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد : تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. به‌طور مثال $f(25) = 85$

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,60]$ چنین است :

$$\frac{f(60)-f(0)}{60-0} = \frac{7\sqrt{60}+50-50}{60} \approx 0/9 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

$$\frac{f(25)-f(0)}{25-0} = \frac{7\sqrt{25}+50-50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1/4 \ \frac{cm}{mon}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

آهنگ لحظه‌ای $= \lim_{x\to 25} \frac{f(x)-f(25)}{x-25} = \lim_{x\to 25} \frac{7\sqrt{x}+50-85}{x-25} = \lim_{x\to 25} \frac{7(\sqrt{x}-5)}{x-25} = \lim_{x\to 25} \frac{7}{\sqrt{x}+5} = 0/7 \ \frac{cm}{mon}$

ادامه در پایین صفحه

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{f(36)-f(16)}{36-16} = \frac{95-80}{20} = \frac{3}{4} = 0/75 \ \frac{cm}{mon}$

آهنگ لحظه‌ای : $\lim_{x\to 49} \frac{f(x)-f(49)}{x-49} = \lim_{x\to 49} \frac{7\sqrt{x}+50-99}{x-49} = \lim_{x\to 49} \frac{7(\sqrt{x}-7)}{x-49} = \lim_{x\to 49} \frac{7}{\sqrt{x}+7} = 0/5 \ \frac{cm}{mon}$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۴۹ ماهگی < آهنگ لحظه‌ای ... ۲۵ ماهگی

نرخ باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹ , ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹ , ۱۳۶۴] را به‌دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(۱۳۷۹)-f(۱۳۶۴)}{۱۳۷۹-۱۳۶۴}=\frac{۲,۲-۶,۲}{۱۵}=\frac{-۴}{۱۵}\simeq -۰,۲۷$$

میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

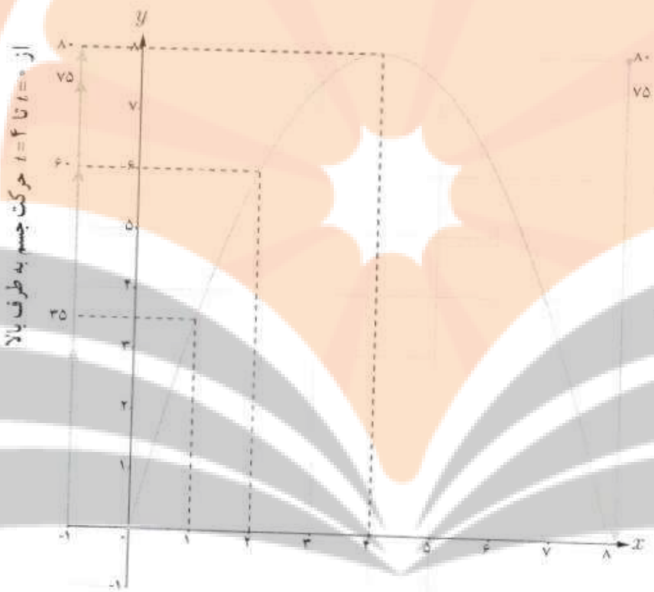
نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال : جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ـ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی [۰,۲] , [۱,۲] , [۲,۳] و [۳,۴] را به ترتیب با v_1 , v_2 , v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم :

$$v_1=\frac{h(2)-h(0)}{2-0}=\frac{60}{2}=30\,\text{m/s} \qquad v_2=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=25\,\text{m/s}$$

$$v_3=\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=\frac{75-60}{1}=15\,\text{m/s} \qquad v_4=\frac{h(4)-h(3)}{4-3}=\frac{80-75}{1}=5\,\text{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$h(t)=-5t^2+40t \Longrightarrow h'(t)=-10t+40$$

$$h'(1)=30\,\text{m/s} \quad , \quad h'(2)=20\,\text{m/s} \quad , \quad h'(3)=10\,\text{m/s} \quad , \quad h'(4)=0\,\text{m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه [۴,۵] برابر $\frac{h(5)-h(4)}{5-4}=\frac{75-80}{1}=-5\,\text{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5)=-10\,\text{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

هنگام پرتاب : $t=0 \to h'(0)=40\ m/s$

هنگام برخورد به زمین : $t=8 \to h'(8)=-40\ m/s$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5,8]$ به‌دست آورید.

سرعت متوسط : $\frac{h(8)-h(5)}{8-5}=\frac{0-75}{3}=-25\ m/s$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $35\ m/s$ و $-35\ m/s$ است.

سرعت لحظه‌ای : $h'(t)=-10t+40 \xrightarrow{\text{سرعت}=35\ m/s} 35=-10t+40 \Rightarrow t=0/5\ s$

$\xrightarrow{\text{سرعت}=-35\ m/s} -35=-10t+40 \Rightarrow t=7/5\ s$

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

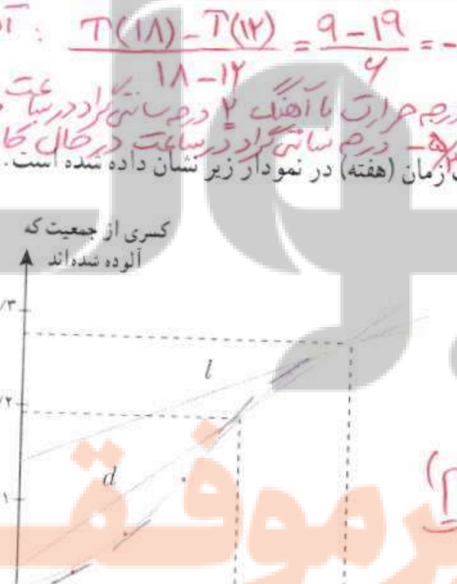
پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

الف) آهنگ تغییر متوسط : $\frac{T(12)-T(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=2\ c/h$

ب) آهنگ تغییر متوسط : $\frac{T(18)-T(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=-\frac{5}{3}\ c/h$

در بازه زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ ظهر، درجه حرارت با آهنگ ۲ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال افزایش است اما در بازه زمانی ساعت ۱۲ ظهر تا ساعت ۱۸، درجه حرارت با آهنگ $\frac{5}{3}$ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال کاهش است
ادامه در پایین

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.



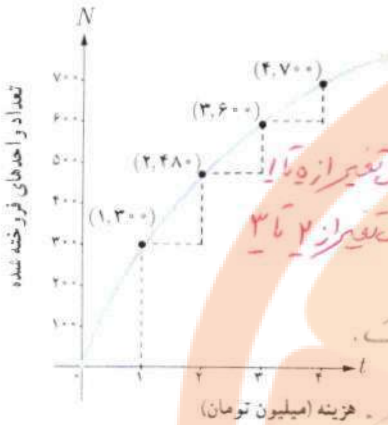
الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

الف) شیب خط l، آهنگ تغییر لحظه‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=6$ (هفته ششم) نشان میدهد. شیب خط d، آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله زمانی $t=4$ تا $t=6$ (هفته چهارم تا هفته ششم) نشان میدهد.

جواب ① پ) به عبارت دیگر به طور متوسط در هر ساعت، ۲ درجه به درجه حرارت (در فاصله زمانی ۸ تا ۱۲) اضافه می‌شود اما به طور متوسط در هر ساعت، $\frac{5}{3}$ درجه از درجه حرارت (در فاصله زمانی ۱۲ تا ۱۸) کاسته می‌شود.



هزینه (میلیون تومان)

۳) نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

آهنگ تغییر از ۰ تا ۱: $\frac{300-0}{1-0}=300$ ، آهنگ تغییر از ۱ تا ۲: $\frac{480-300}{2-1}=180$

آهنگ تغییر از ۲ تا ۳: $\frac{600-480}{3-2}=120$ ، آهنگ تغییر از ۳ تا ۴: $\frac{700-600}{4-3}=100$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

زیرا با افزایش t (هزینه) رشد تعداد کالاهای فروخته شده کمتر شده است. شاید به نوعی با افزایش هزینه تبلیغ، قیمت کالا بیشتر و لذا خریداران کمتر می‌شوند.

۴) معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4$ ، سرعت لحظه‌ای $=2t-1$

$\Rightarrow 2t-1=4 \rightarrow t=2.5\,s$

۵) توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۲m/s ب) ۱۴/۹۱m/s پ) ۱۱/۵m/s ت) ۱۶/۰۳m/s

$\frac{f(0.4)-f(0.3)}{0.1}=12\,m/s$

$\frac{f(0.5)-f(0.4)}{0.1}=11\,m/s \rightarrow f'(0.4)=11.5\,m/s$

۶) با توجه به مقادیر تابع f در جدول روبه‌رو، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(0)=-6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	۶-	۳-	۱/۸-	۰/۴-	?

۷) کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. نادرست

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست نمونه تمرین (۳) در بالا

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$. نادرست مثال $f(x)=(x-1)^2$ در $x=1$

۸) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ به‌طور متوسط

$\frac{m(4)-m(3)}{4-3}=\frac{130-\sqrt{3}-54}{1}\simeq 74.3\,g$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \rightarrow m'(3)\simeq 54.3\,g$

۹) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

الف) $\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=39.204-40=-0.796\,Li$

ب) $\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=-0.4$ آهنگ تغییر متوسط

$(t=50)$

فصل

۵ کاربرد مشتق

مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنهٔ این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

درس اوّل
اکسترمم‌های تابع

درس دوم
بهینه‌سازی

درس اول

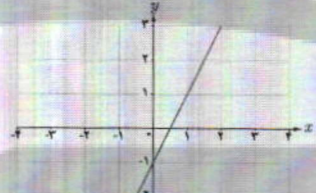
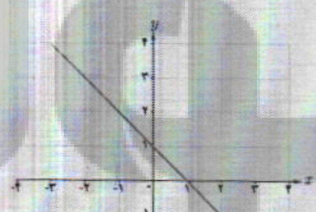
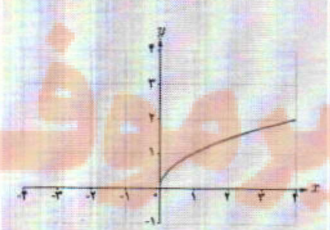
اکسترمم‌های تابع

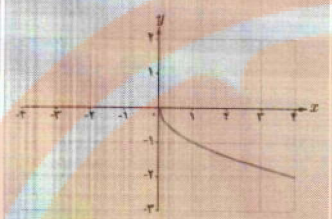
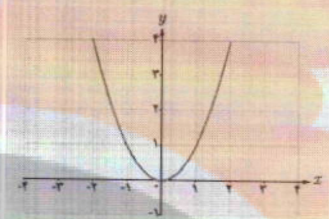
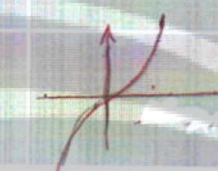
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

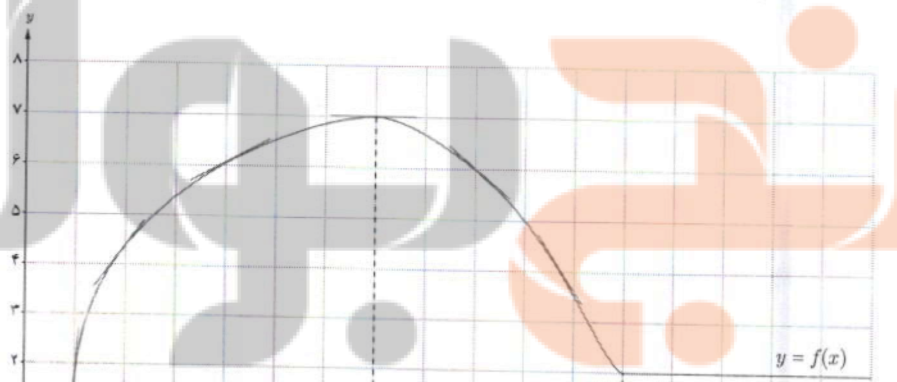
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x)=2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x)=2x-1$
g' همواره منفی است	$g'(x)=-1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است		$g(x)=-x+1$
h' در $(0, +\infty)$ مثبت است	$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع h در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=\sqrt{x}$

$u(x) = -\sqrt{x}$		تابع u در $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است	$u'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$	u' در $(0, +\infty)$، همواره منفی
$k(x) = x^2$		تابع k در $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.	$k'(x) = 2x$	k' در $(-\infty, 0)$ منفی و در $(0, +\infty)$ مثبت است. +
$l(x) = x^3$		تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی	$l'(x) = 3x^2$	در $(-\infty, 0)$ مثبت و در $(0, +\infty)$ نیز مثبت است.

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید :



ملاحظه می‌شود که :

الف) در بازهٔ $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.

ب) در بازهٔ $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، منفی است؛ بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر صفر است.

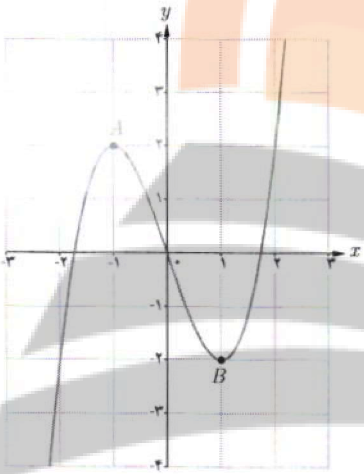
مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن‌را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال[1] : تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
بازه		$(-\infty, -1)$		$(-1, 1)$		$(1, +\infty)$	
علامت f'		+	0	−	0	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	۲−	اکیداً صعودی ↗	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید. در نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right.$ ماکزیمم و در نقطه $B\left|\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right.$ مینیمم وجود دارد

اکسترمم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱− و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمرهٔ اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

همچنان‌که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطهٔ A $(-1,2)$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

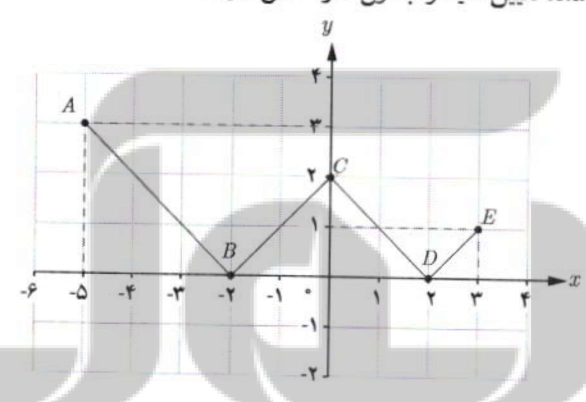
تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟ در نقطه ی (۳،۱۳-) مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱۳- می باشد

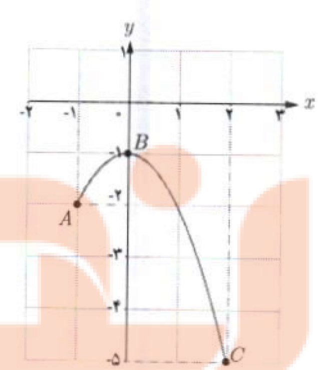
تذکر : نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



الف) $f(x)=||x|-۲|\ ,\ x\in[-۵\ ,۳]$



ب) $g(x)=-x^۲-۱ \quad x\in[-۱\ ,۲]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	max نسبی	۲	مشتق ناپذیر در $f'(۰)$
D	min نسبی	۰	مشتق ناپذیر در $f'(۲)$
E	نه Max نه Min	–	–

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–
B	max نسبی	۱-	$f'(۰)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترمم نسبی ندارد	–	–

نقاط بحرانی تابع

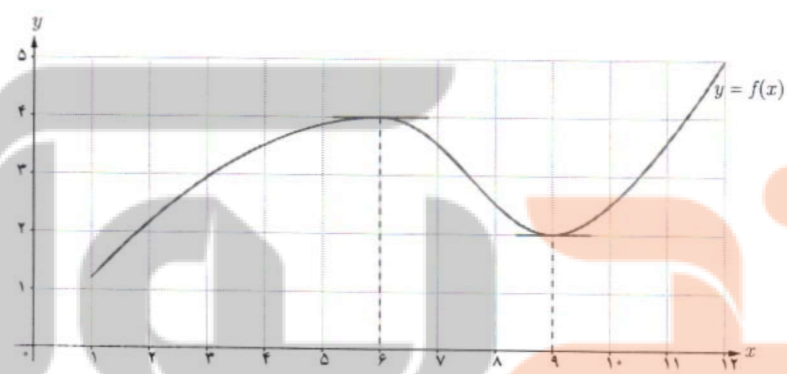
حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنهٔ تابع f باید به دنبال اکسترمم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از **نقاطی از دامنهٔ f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است**. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم :

تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ در نقاط B، C و D مشتق‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول ۲−، صفر و ۲ که جزو نقاط دامنهٔ f هستند، در دامنهٔ f' نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x) = -x^۲ - ۱$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(\circ) = \circ$. بنابراین نقطهٔ $B(\circ, -۱)$، نقطهٔ بحرانی تابع g است.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

$$f'(۶) = \circ \quad , \quad f'(۹) = \circ$$

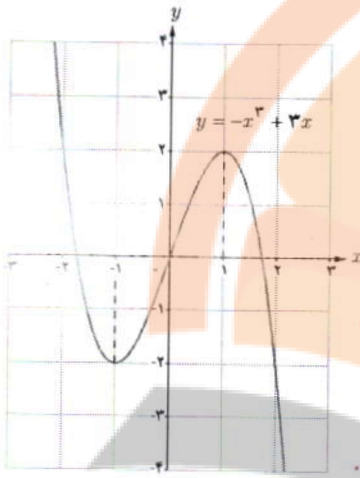


این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

قضیه فرما[۱] **:** اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = \circ$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

۱ــ Pierre de Fermat (۱۶۰۱ ــ ۱۶۶۵)

کار در کلاس



۱ الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x-2|$، نشان دهید که f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

$f'_-(2) = -1$
$f'_+(2) = 1$

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟ خیر مشتق‌های چپ و راست برابر نیستند

پ) آیا $x = 2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟ بله تابع f در ۲ مشتق‌پذیر نیست.

$f'(x) = -3x^2 + 3$

۲ نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده‌ایم. $x = \pm 1$

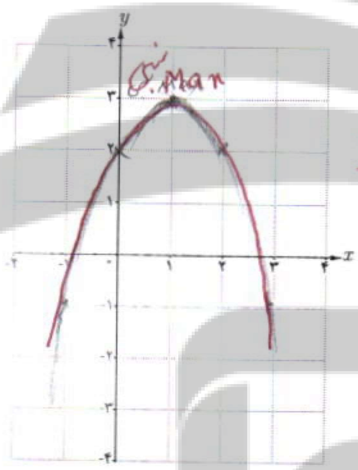
الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow$
$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = 0$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

$f(1) = 2$
$f(-1) = -2$

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه فرما را در مورد این تابع بررسی کنید. قضیه فرما برقرار است.



۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

$f'(x) = -2x + 2$

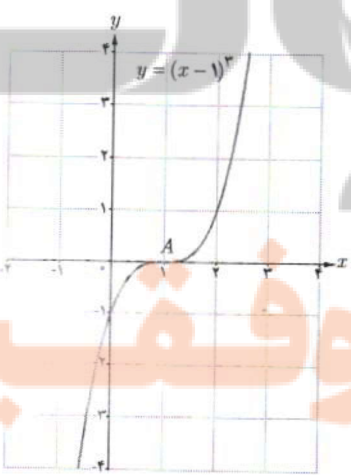
الف) $f'(x)$ را به‌دست آورید.

$-2x + 2 = 0$
$\Rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = 1$

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟ بله

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را به‌دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست.



مثال : به نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ دقت کنید. تابعِ مشتقِ این تابع به‌صورت $f'(x) = 3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x = 1$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار f، دیده می‌شود که نقطهٔ به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f'، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر : مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ فرما در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطهٔ A به طول $x = 1$ برای تابع $f(x) = (x-1)^3$ یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

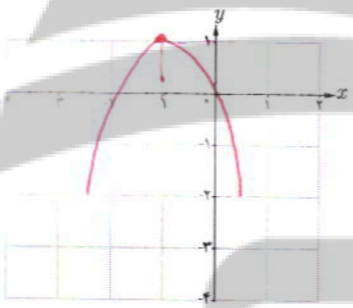
کار در کلاس

۱ جدول تغییرات تابع $f(x)=-x^2-2x$ در زیر آمده‌است که در آن با تعیین علامت f'، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده‌است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده‌است :

$f'(x)=-2x-2$

$f'(x)=0 \rightarrow x=-1$ طول نقطهٔ بحرانی

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
بازه	$(-\infty,-1)$		$(-1,+\infty)$
علامت f'	+	۰	−
یکنوایی f	صعودی اکید $-\infty \nearrow$	۱ max نسبی	نزولی اکید $\searrow -\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطهٔ به طول (-1)، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x)=x^3-3x^2$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

$g'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$

$x=0 \quad x=2$ طول ن بحرانی

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
بازه	$(-\infty,0)$		$(0,2)$	$(2,+\infty)$
علامت f	+	۰	− ۰	+
یکنوایی f	$-\infty$ صعودی	۰	نزولی -4	صعودی

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این‌گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهندهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

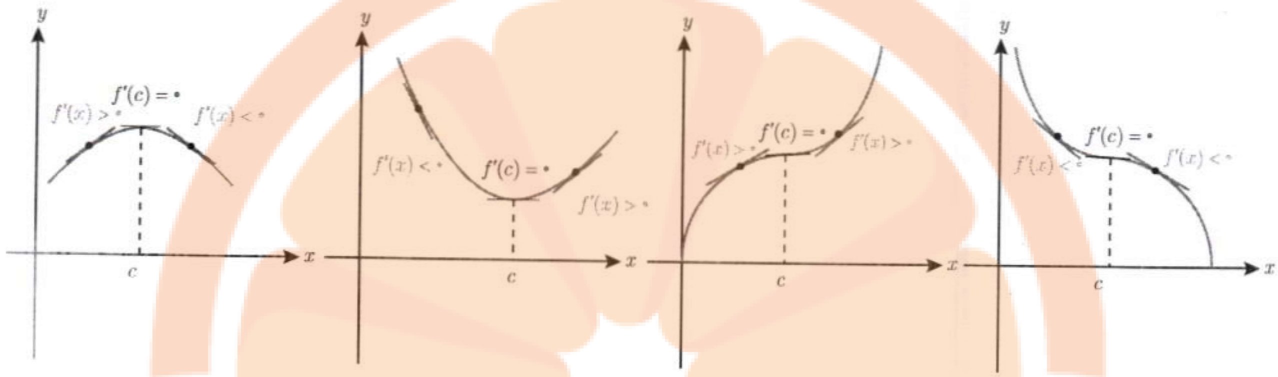
فرض کنیم c طولِ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطهٔ c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی | $x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی | $x=c$: طول مینیمم نسبی | $x=c$: طول ماکزیمم نسبی

اکسترمم‌های مطلق تابع

فعالیت

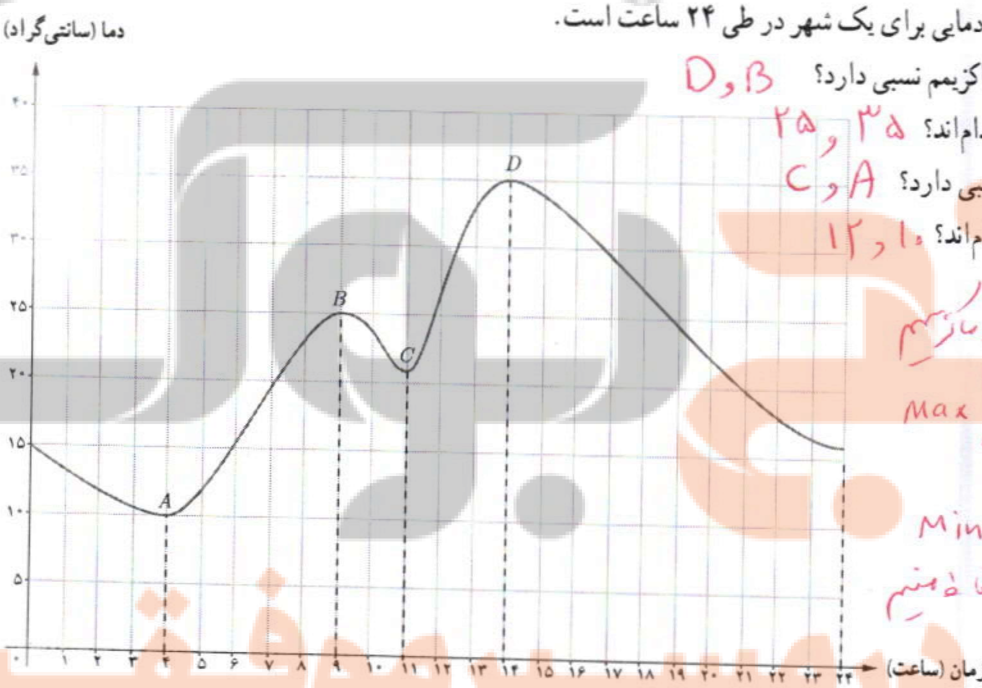
نمودار زیر نشان‌دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟ B و D

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام‌اند؟ ۳۵ و ۲۵

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟ A و C

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام‌اند؟ ۱۰ و ۱۲



نقاط ماکزیمم
Max | B D
نقاط
Min | A C
نقاط مینیمم

با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطهٔ $D(14,35)$ ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطهٔ مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید. تابع در نقطه‌ی (۴و۱۰) مینیمم مطلق دارد و مقدار مینیمم مطلق آن ۱۰ می‌باشد

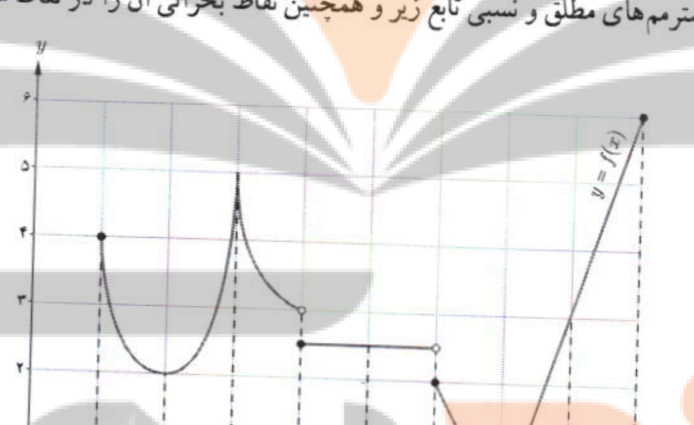
تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ **ماکزیمم مطلق** برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را **مقدار ماکزیمم مطلق** f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ **مینیمم مطلق** برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را **مقدار مینیمم مطلق** f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترمم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱) با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	✗	✗	×	×	✗	✗	✓
min مطلق	×	×	✗	✗	×	×	✓	✗	×
max نسبی	×	×	✓	✗	✓	×	✗	✗	×
min نسبی	×	✓	✗	✓	✓	×	✓	✗	×
نقطهٔ بحرانی	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	×

۲) به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $t(x) = x^3\,;\ x \in [-2\,,1]$

نه ماکزیمم و نه مینیمم دارند

در -2 Min مطلق دارد.

ب) $g(x) = -x^2\,;\ x \in [-2\,,3]$

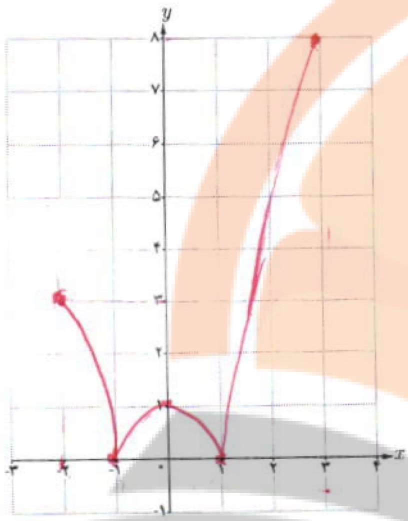
Max مطلق و نسبی دارد | $x = 0$, $y = 0$

در صفر Max مطلق و نسبی دارد

پ) $u(x) = \frac{1}{x}$

نه ماکزیمم و نه مینیمم دارد

فعالیت



تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۳]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید. در ۱ و ۱- ، min نسبی و مطلق دارد.
در ۰ max نسبی دارد. در ۳ ، max مطلق دارد.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوستهٔ $f(x) = |x^۲ - ۱|$ در بازهٔ بستهٔ $[-۲\,,\,۳]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیهٔ فوق، تنها وجود اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بستهٔ $[a\,,\,b]$ به شرح زیر است :

۱ــ مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
۲ــ مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
۳ــ در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a\,,\,b]$ است.

مثال : نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱\,,\,۳]$ تعیین کنید.
حل : ابتدا به کمک f'، نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \notin [-۱,۳] \\ x = ۱ \ \text{نقطهٔ بحرانی} \end{cases}$$

علاوه بر نقطهٔ بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به‌دست می‌آوریم که در جدول مقابل آمده است.

x	۱-	۱	۳
$f(x)$	۱۳	۷-	۴۵

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازهٔ $[-۱\,,\,۳]$ برابر ۴۵ و کوچک‌ترین مقدار، مساوی ۷- است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

سوال ۱: $f'(x) = 3x^2-12 \Rightarrow f'(x)=0 \quad 3x^2=12 \to x=\pm 2$

$x=2 \to y=-12$

$x=-2 \to y=20$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

نزولی‌ترین بازه در (۲و۲-) می‌باشد که تابع در آن نزولی اکید است

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

تمرین

۱) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

سوال ۲: $g'(x) = \frac{0(x^2+1)-2x(1)}{(x^2+1)^2}$

$g'(x)=0 \longrightarrow -2x=0 \quad x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
		صعودی		نزولی	

۲) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۳) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

الف) $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ ، $x=0$ نقطهٔ بحرانی $(0,2)$

ب) $g'(x) = 3x^2+6x$ ، $g'(x)=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0$ ، نقاط بحرانی $x=0$ $(0,-4)$ ، $x=-2$ $(-2,0)$

پ) $h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ در $x=0$ مشتق ندارد ، $x=0$ نقطهٔ بحرانی $(0,0)$

۴) در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ب) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ پ) $h(x) = -x^3 - 3x + 2$

الف) $f'(x) = 3x^2+6x-9$

$f'(x)=0 \quad 3(x^2+2x-3)=0$ نقاط بحرانی

$(x-1)(x+3)=0 \quad x=1 \quad x=-3$

x		-3		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
		17		-15	

ماکزیمم $(-3,17)$ ، مینیمم $A(1,-15)$

ب) $g'(x) = -6x^2+6x+12$

$g'(x)=0 \quad -6(x^2-x-2)=0$

$(x-2)(x+1)=0$ نقاط بحرانی $x=2$ ، $x=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
			-16		11		

مینیمم $A(-1,-16)$ ، ماکزیمم $(2,11)$

پ) $h'(x) \neq 0$ نقطهٔ بحرانی ندارد زیرا

۵) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$

ب) $g(x) = x^3 + 2x - 5 \quad ; \quad x \in [-2, 1]$

الف) $y'=0 \to -6x^2+18x=0 \to -6x(x-3)=0$ ، $x=0$ ، $x=3$ ق‌ق

$x=0 \to y=-13$

$x=-1 \to y=-2$

$x=2 \to y=7$

ماکزیمم مطلق $A(2,7)$ ، مینیمم مطلق $B(0,-13)$

ب) $g'(x)=3x^2+2$ ، $x^2=-\frac{2}{3}$ غ‌ق

$x=-2 \quad y=-17$ مینیمم

$x=1 \quad y=-2$ ماکزیمم

۶) اگر نقطهٔ (۱ , ۲)، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

$A(2,1) \longrightarrow 1 = 8 + 4b + d \quad (1)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 0 = 3(4) + 2(2)b + 0 \Rightarrow b=-3 \xrightarrow{(1)} 1 = 8 + 4(-3) + d \Rightarrow d=5$

۷) نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

بی‌شمار

$f(x) = k$ ، $k \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = [x]$ جزء صحیح ، $x \in \mathbb{R}$

درس دوم

بهینه‌سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و … . در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمرهٔ مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است :

الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر ۱۴ واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم‌محیط، دیده می شود که مساحت‌ها برابر **نیستند** و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و ۱۲ واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچقدر اندازهٔ طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن افزایش می‌یابد.

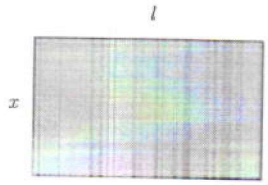
۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	۰/۵×۶/۵	۱×۶	۲×۵	۲/۵×۴/۵	۳×۴	۳/۲×۳/۸	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	۳/۲۵	۶	۱۰	۱۱/۲۵	۱۲	۱۲/۱۶	...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟ بله

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟ ۱۲,۲۵

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.



مثال ۱ : نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

حل : فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است :

$$S = x.l \qquad (1)$$

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به‌دست آوریم :

محیط مستطیل : $P = 14$

$$2(x+l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$S(x) = x(7 - x)$$

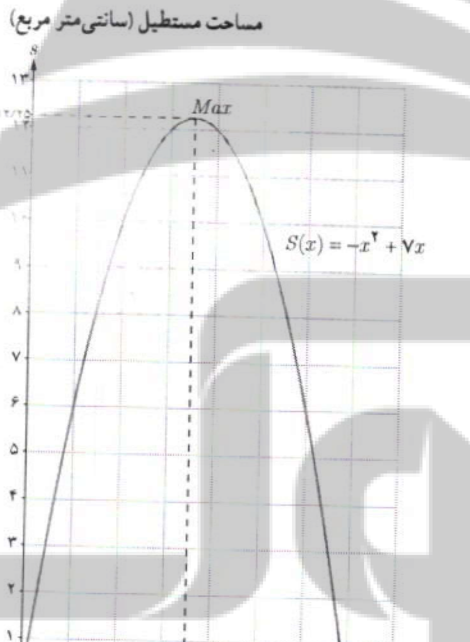
$$S(x) = -x^2 + 7x \quad , \quad x \in [0,7]$$

از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = 0$ را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5$$ (طول نقطهٔ بحرانی تابع)

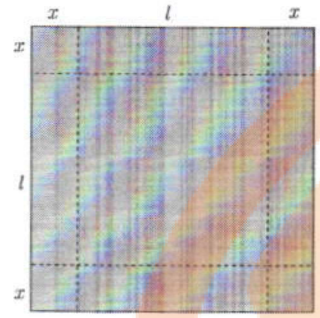
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به شکل زیر است :

x	0		$3/5$		7
$S'(x) = -2x + 7$		$+$	0	$-$	
$S(x) = -x^2 + 7x$	0	$\nearrow$	$12/25$ ماکزیمم مطلق	$\searrow$	0



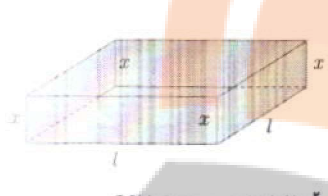
از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی‌متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطهٔ ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

تذکر : در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطهٔ $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$، نقطهٔ اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به‌دست می‌دهد. امّا همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲ : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را درنظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل : ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است : $V = x.l^2$



باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x\,(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x \;,\; x \in [0,15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } V) \\ x = 15 \notin (0,15) \end{cases}$$

جدول تغییرات تابع V در بازهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

x	۰		۵		۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$		+	۰	−	۰
$V(x)$	۰	↗	۲۰۰۰ ماکزیمم مطلق	↘	۰

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل موردنظر، (cm^3) ۲۰۰۰ است که به ازای $x = 5$ (cm) حاصل می‌شود.

مثال ۳ : می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $10\ m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل : لازم است هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت :

$$C = 100(x.l) + 60[2xh + 2lh]$$
$$= 100xl + 120h(x + l)$$
$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$
$$C = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$\text{حجم مخزن}: V = 10(m^3) \Rightarrow x.l.h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = 200x^2 + 360x\left(\frac{5}{x^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع $C(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x + \frac{-1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 400x^3 - 1800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} \simeq 1/65(m) \quad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{400x^3 - 1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(400x^3 - 1800)$ است. چرا؟

x	0		$\sqrt[3]{4/5}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 1635$ مینیمم مطلق C	$\nearrow$	$+\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعدهٔ مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5} = 1/65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴ : غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل : ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

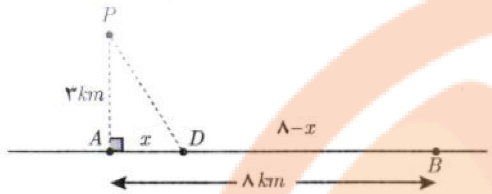
$$\Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = 2/38 \ (\text{ساعت}) \qquad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	0		$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\simeq 0/18$ ماکزیمم مطلق C	$\searrow$	0

با توجه به جدول، دیده می‌شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \simeq 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

مثال ۵ : آرمان درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B درساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق km/h ۲ و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل km/h ۴ باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟



حل : نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطهٔ $x=vt$ یا معادل آن $t=\frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین :

D تا P زمان پارو زدن مسیر : $t_۱=\frac{PD}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}$

B تا D زمان پیاده‌روی مسیر : $t_۲=\frac{DB}{۴}=\frac{۸-x}{۴}=۲-\frac{۱}{۴}x$

B به P زمان کل رسیدن از : $t=t_۱+t_۲$

$$t(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}+(۲-\frac{۱}{۴}x) \qquad x\in[۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۹\Rightarrow x=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳(\text{km})$$

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است :

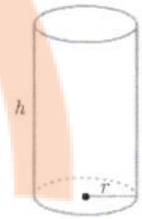
x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		$-$	۰	$+$	
$t(x)$ برحسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴}\simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲}\simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل : باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



$1\,(\text{lit}) = 1000\,\text{cm}^3$ = حجم استوانه

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000\,(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

مساحت کل استوانه : $S =$ مساحت قاعده + سطح جانبی

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

$S'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{2\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$

$S(r) = \frac{2000}{\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}} + \pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2} = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

حجم درباز $S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$

$S'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

$S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر 800000 تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل : اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم :

هزینه t ساعت حرکت: $C = 800000t + (320v^2)t$

هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$C'(v) = 0 \rightarrow -\frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \Rightarrow +800000 = 320v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{800000}{320} = 25000$

$v = \pm\sqrt{25000}$ $\quad C'(v) = \frac{320v^2 - 800000}{v^2} = 0$

v	$-\infty$		$-\sqrt{25000}$		0		$\sqrt{25000}$	
$C'(v)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$C(v)$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان

$$\begin{array}{c|ccc} y & & -5 & \\ \hline P'(y) & - & 0 & + \\ & \searrow & \min & \nearrow \end{array}$$

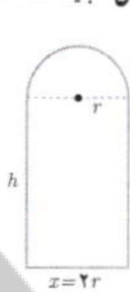
۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$x - y = 10 \rightarrow x = 10 + y$

$P = xy = y(10+y) = y^2 + 10y \qquad P' = 2y + 10 \qquad P' = 0 \rightarrow y = -5 \qquad x = 10 + (-5) = 5$

۴ دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای برروی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



$\text{محیط} = ۴/۵ \Rightarrow ۲h + x + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \frac{۹}{۲}$

$\Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = S : مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) \Rightarrow S(r) = ۲r(\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

$S'(r) = -2r\left(\frac{\pi+4}{2}\right) + \frac{9}{2} \qquad S'(r) = 0 \Rightarrow$

$-r(\pi+4) = -4.5 \rightarrow r = \frac{4.5}{\pi+4}$

$$\begin{array}{c|ccc} r & & \frac{4.5}{\pi+4} & \\ \hline S'(r) & + & 0 & - \\ & \nearrow & \max & \searrow \end{array}$$

نسبت به r درجه دوم است

دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس : ۱۳۱۷، مساحت : ۲/۵ هکتار)

تمرین

۱) کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

$C(x)=2x\times 2000000+2y\times 8000000$

$C(x)=4000000x+16000000(\frac{10000}{x})$

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

$C'(x)=4\times10^6-\frac{16\times10^{10}}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=\frac{16\times10^{10}}{4\times10^6}$

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

$x=2\times10^2=200$ ، $y=\frac{10000}{200}=50$

۲) الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

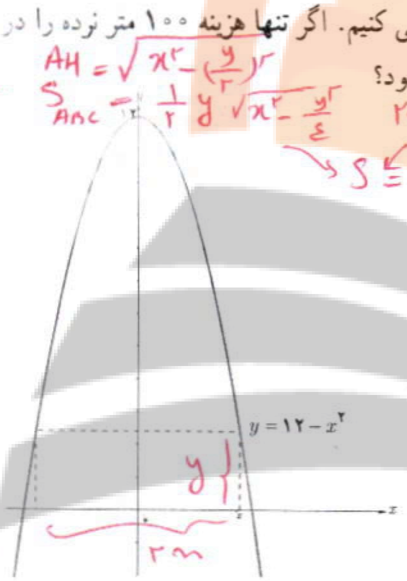
$AH=\sqrt{x^2-(\frac{y}{2})^2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}y\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$ ، $2x+y=100\to y=100-2x$

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

$S=\frac{1}{2}(100-2x)\sqrt{x^2-\frac{(100-2x)^2}{4}} \to S'(x)=$

۳) ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.



$S=(2x)y=2x(12-x^2)$

$S(x)=24x-2x^3$

$S'(x)=24-6x^2=0$

$x^2=4$

$x=\pm2$

ماکزیمم ۳۲

۴) هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه ۲cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

$xy=32$ ، $y=\frac{32}{x}$

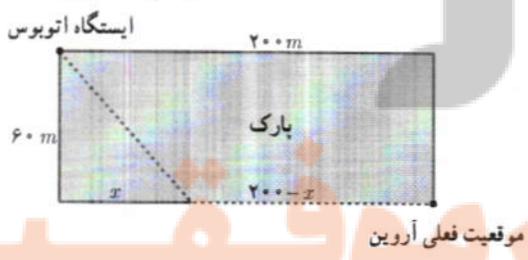
$S=(x+2)(y+4)=(\frac{32}{x}+4)(x+2)$

$S(x)=4x+\frac{64}{x}+40 \to S'(x)=4x^2-64=0 \to x=\pm4$ ، $y=8$

$S=6\times12=72$ حداقل

۵) آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

مثال مشابه ص ۱۱۷ کتاب



گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان